

УДК 531.38

©2011. И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин

## НЕСИММЕТРИЯ В ЗАМКНУТЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Рассмотрена конечномерная модель замкнутого упругого стержня с круговой конфигурацией его упругой оси. Стержень моделировался с помощью системы  $n$  несимметричных твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Изучена возможность существования у такой системы режима равновесия во вращающейся системе координат. Получены необходимые условия устойчивости найденного режима относительного равновесия. Детально изучен случай четырех тел.

**Ключевые слова:** конечномерная модель упругого стержня, сферический упругий шарнир, положение относительного равновесия, несимметрия, устойчивость.

В работах [1–5] были найдены различные равновесные конфигурации систем  $n$  симметричных твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Одна из них – “круговая” – исследовалась многими авторами как в конечномерном случае (системы связанных твердых тел) [1, 2], так и в непрерывном (стержневые системы) [6–8].

В работе [9] рассмотрена система  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами, образующая “круговую” конфигурацию. Полагалось, что система, как целое, вращается со скоростью  $\Omega$  вокруг неподвижной оси. Найдены условия существования и необходимые условия устойчивости положения равновесия изучаемой системы во вращающейся системе координат.

Поскольку на практике системы не всегда являются симметричными, представляется интересным изучить такие системы с учетом их несимметрии. В настоящей статье рассмотрена замкнутая система  $n$  твердых тел с моментами инерции  $A, A + \varepsilon_k, B$ , которая в случае  $\varepsilon_k = 0$  дает систему  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа. Найдены условия, при которых введенная система допускает режим равновесия во вращающейся системе координат, и получены необходимые условия устойчивости такого равновесия.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами, расположенными в точках  $O_k$ . Такие шарниры позволяют учитывать в сочленениях упругость как изгиба, так и кручения. Полагаем, что внешние силы и моменты отсутствуют, и, как следствие этого, общий центр масс системы тел  $C$  неподвижен. Свяжем с каждым телом  $S_k$  систему координат  $C_k X_k Y_k Z_k$ , где  $C_k$  – центр масс тела  $S_k$ , а ось  $C_k Z_k$  направлена вдоль оси  $O_k O_{k+1}$ .

Введем неподвижную систему координат  $CXYZ$  и осевую систему координат  $CX'YZ'$ , которая вращается вокруг неподвижной оси  $CY$  (орт  $\mathbf{e}_y$ ) со скоростью  $\Omega$ . В случае, когда все оси тел  $O_k O_{k+1}$  лежат в одной плоскости  $CXZ$ , ось  $CY$  направлена перпендикулярно этой плоскости.

Определим положение связанной системы координат  $C_k X_k Y_k Z_k$  по отношению к осевой  $CX'Y'Z'$  углами Крылова  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ . Упругий момент в шарнире будем считать равным

$$\mathbf{L}_k = \kappa_1(\varkappa_k^1 \mathbf{e}_k^1 + \varkappa_k^2 \mathbf{e}_k^2) + \kappa_2 \varkappa_k^3 \mathbf{e}_k^3, \quad (1)$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  – соответственно жесткости изгиба и кручения;  $\mathbf{e}_k^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $k = \overline{1, n}$ ) – орты связанной с телом  $S_k$  системы координат (орт  $\mathbf{e}_k^3$  параллелен оси  $O_k O_{k+1}$ );  $\varkappa_k(\varkappa_k^1, \varkappa_k^2, \varkappa_k^3)$  – дискретный аналог вектора Дарбу, компоненты которого равны

$$\begin{aligned} \varkappa_{1k} &= (\psi_k - \psi_{k-1}) \cos \theta_k \sin \varphi_k + (\theta_k - \theta_{k-1}) \cos \varphi_k, \\ \varkappa_{2k} &= (\psi_k - \psi_{k-1}) \cos \theta_k \cos \varphi_k - (\theta_k - \theta_{k-1}) \sin \varphi_k, \\ \varkappa_{3k} &= \varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\kappa_1(\varkappa_{1k}^2 + \varkappa_{2k}^2) + \kappa_2 \varkappa_{3k}^2]. \quad (3)$$

Такой выбор потенциальной энергии позволяет учесть геометрическую нелинейность объекта в предположении, что углы  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$  могут принимать произвольные значения, а их разности  $\psi_k - \psi_{k-1}, \theta_k - \theta_{k-1}, \varphi_k - \varphi_{k-1}$  малы.

После подстановки (2) в (3) имеем

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ \kappa_1 [(\psi_k - \psi_{k-1})^2 \cos^2 \theta_k + (\theta_k - \theta_{k-1})^2] + \\ &\quad + \kappa_2 [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k]^2 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) входят значения углов  $\psi_0, \theta_0, \varphi_0$ , которые для замкнутых систем (при этом полагаем  $O_{n+1} = O_1$ ) таковы [1]:

$$\psi_0 = \psi_n - 2\pi; \quad \theta_0 = \theta_n - 2\pi; \quad \varphi_0 = \varphi_n - 2\pi.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [m \dot{r}_{kc}^2 + A p_k^2 + (A + \varepsilon_k) q_k^2 + B r_k^2], \quad (5)$$

где  $m$  – масса тела  $S_k$ ;  $A, A + \varepsilon_k, B$  – его моменты инерции;  $\mathbf{r}_{kc}$  – расстояние от центра масс тела  $S_k$  до неподвижной точки  $C$ , а  $p_k, q_k, r_k$  – компоненты вектора абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_k$  тела  $S_k$  в  $C_k X_k Y_k Z_k$ , которая может быть представлена как  $\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_k^r$ , где  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_y$  – угловая скорость осевой системы координат, а  $\boldsymbol{\omega}_k^r$  – угловая скорость связанной системы координат относительно осевой.

Компоненты абсолютной угловой скорости тела  $S_k$ , как функции углов Крылова и скорости вращения  $\Omega$ , выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_k &= (\dot{\psi}_k + \Omega) \cos \theta_k \sin \varphi_k + \dot{\theta}_k \cos \varphi_k, \\ q_k &= (\dot{\psi}_k + \Omega) \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k \sin \varphi_k, \\ r_k &= \dot{\varphi}_k - (\dot{\psi}_k + \Omega) \sin \theta_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Если положить, что центр масс тела  $S_k$  – середина отрезка  $O_k O_{k+1}$ , и учесть неподвижность общего центра масс  $C$ , то, аналогично [1], получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{kc} &= \frac{h}{2} \left\{ -(\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_k^3) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (2i-1)(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n [2(n-i)+1](\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3) \right\}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \dot{\mathbf{r}}_{nc} &= \frac{h}{2} \left\{ -(\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{e}_n^3) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1)(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (6), (7) в (5) дает

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{ A' [(\dot{\psi}_j + \Omega)^2 \cos^2 \theta_j + \dot{\theta}_j^2] + B [\dot{\varphi}_j - \\ &\quad - (\dot{\psi}_j + \Omega) \sin \theta_j]^2 + \varepsilon_k [(\dot{\psi}_k + \Omega) \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k \sin \varphi_k] + \\ &\quad + mc^2 (\sum_{i=1}^j b_{ij} A_{ij} + \sum_{i=j+1}^n c_{ij} A_{ij}) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A' &= A + mc^2, \quad A_{ij} = \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos \theta_i \cos \theta_j + (\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \sin \theta_i \sin \theta_j + \\ &\quad + \dot{\psi}_i \dot{\psi}_j \cos \theta_i \cos \theta_j) \cos(\psi_j - \psi_i) + (\dot{\theta}_i \dot{\psi}_j \sin \theta_i \cos \theta_j - \\ &\quad - \dot{\theta}_j \dot{\psi}_i \cos \theta_i \sin \theta_j) \sin(\psi_j - \psi_i); \\ b_{ij} &= 4(i-1) + \frac{1}{n} [2j-1-2i(2i-1)] + \frac{1}{n^2} (2j-1)(2i-1)(i-j); \\ c_{ij} &= 4j + \frac{1}{n} (4j^2 + 2j + 2i - 8ij - 1) + \frac{1}{n^2} (i-j)(2i-1)(2j-1). \end{aligned}$$

Поскольку система замкнута, то, как и в [1],

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k=1}^n h_k \sin \psi_k \cos \theta_k = 0, \\ f_2 &= \sum_{k=1}^n h_k \sin \theta_k = 0, \quad f_3 = \sum_{k=1}^n h_k \cos \psi_k \cos \theta_k = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

**2. Уравнения движения системы. Положение относительного равновесия.** Уравнения движения данной системы, как и в [1–3], могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа второго рода с учетом связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^3 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = 0.$$

Здесь  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – множители Лагранжа, кинетическая энергия имеет вид (8), потенциальная – (4), а функции  $f_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – (9). Эти уравнения могут быть представлены так

$$\begin{aligned} & [(A' + \varepsilon_k \cos^2 \varphi_k) \cos^2 \theta_k + B \sin^2 \theta_k] \ddot{\psi}_k - B \ddot{\varphi}_k \sin \theta_k - \frac{\varepsilon_k}{2} \ddot{\theta}_k \cos \theta_k \sin 2\varphi_k + \\ & + (\dot{\psi}_k + \Omega) [\dot{\theta}_k (B - A' - \varepsilon_k \cos^2 \varphi_k) \sin 2\theta_k - \varepsilon_k \dot{\varphi}_k \cos^2 \theta_k \sin 2\varphi_k] - \\ & - B \dot{\varphi}_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k + \frac{\varepsilon_k}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta_k \sin 2\varphi_k - \varepsilon_k \dot{\theta}_k \dot{\varphi}_k \cos \theta_k \cos 2\varphi_k + \\ & + \mu \cos \theta_k \left\{ (2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) F_{kj} + (2n-2k+1) \sum_{j=1}^k (2j-1) F_{kj} \right\} + \\ & + k_1 [(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos^2 \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \cos^2 \theta_{k+1}] - \\ & - k_2 \{ \sin \theta_k [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] - \sin \theta_{k+1} [\varphi_{k+1} - \varphi_k - \\ & - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}] \} + \lambda_1 \cos \psi_k \cos \theta_k - \lambda_3 \sin \psi_k \cos \theta_k = 0; \\ & [A' + \varepsilon_k \sin^2 \varphi_k] \ddot{\theta}_k - \frac{\varepsilon_k}{2} \ddot{\psi}_k \cos \theta_k \sin 2\varphi_k + (\dot{\psi}_k + \Omega)^2 \left[ A' + \frac{\varepsilon_k}{2} \cos^2 \varphi_k - \frac{B}{2} \right] \sin 2\theta_k - \\ & - \varepsilon_k \dot{\theta}_k \dot{\varphi}_k \sin 2\varphi_k + \frac{\varepsilon_k}{2} (\dot{\psi}_k + \Omega)^2 \cos 2\theta_k \cos^2 \varphi_k - \varepsilon_k \dot{\theta}_k \dot{\varphi}_k \sin 2\varphi_k + \quad (10) \\ & + (\dot{\psi}_k + \Omega) \dot{\varphi}_k (B - \varepsilon_k \cos 2\varphi_k) \cos \theta_k - \mu \left\{ (2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) G_{kj} + \right. \\ & + (2n-2k+1) \sum_{j=1}^k (2j-1) G_{kj} \left. \right\} - k_1 [\sin 2\theta_k (\psi_k - \psi_{k-1})^2 / 2 + \theta_{k+1} - 2\theta_k + \theta_{k-1}] - \\ & - k_2 \cos \theta_k [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] (\psi_k - \psi_{k-1}) - \\ & - \lambda_1 \sin \psi_k \sin \theta_k + \lambda_2 \cos \theta_k - \lambda_3 \cos \psi_k \sin \theta_k = 0; \\ & B(\ddot{\varphi}_k - \ddot{\psi}_k \sin \theta_k) - (B - \varepsilon_k \cos 2\varphi_k)(\dot{\psi}_k + \Omega) \dot{\theta}_k \cos \theta_k + \end{aligned}$$

$$+\frac{\varepsilon_k}{2}[(\dot{\psi}_k + \Omega)^2 \cos^2 \theta_k - \dot{\theta}_k^2] \sin 2\varphi_k - k_2[\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + \\ + (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}] = 0 \\ (k = \overline{1, n}).$$

Здесь  $\mu = mc^2/n$ ,  $\psi_{n+1} = \psi_1 + 2\pi$ ,  $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$ ,  $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$ ;

$$F_{kj} = \ddot{\psi}_j \cos \theta_j \cos(\psi_k - \psi_j) + \ddot{\theta}_j \sin \theta_j \sin(\psi_k - \psi_j) - \\ - 2(\dot{\psi}_j + \Omega)\dot{\theta}_j \sin \theta_j \cos(\psi_k - \psi_j) + [\dot{\theta}_j^2 + (\dot{\psi}_j + \Omega)^2] \cos \theta_j \sin(\psi_k - \psi_j); \\ G_{kj} = \ddot{\theta}_j [\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j)] - \ddot{\psi}_j \cos \theta_j \sin \theta_k \sin(\psi_k - \psi_j) + \\ + \dot{\theta}_j^2 [\cos \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j) - \sin \theta_j \cos \theta_k] + 2(\dot{\psi}_j + \Omega)\dot{\theta}_j \sin \theta_j \sin \theta_k \sin(\psi_k - \psi_j) + \\ + (\dot{\psi}_j + \Omega)^2 \cos \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j).$$

Уравнения (10) допускают режим относительного равновесия

$$\psi_k = \psi_k^0, \quad \theta_k = 0, \quad \varphi_k = \varphi_k^0, \quad \dot{\psi}_k = \dot{\theta}_k = \dot{\varphi}_k = 0 \quad (11)$$

при условиях

$$\mu(2k-1) \sum_{j=k+1}^n [(2n-2j+1)\Omega^2 \sin(\psi_k^0 - \psi_{k-1}^0) + \\ + \kappa_1(\psi_{k+1}^0 - 2\psi_k^0 + \psi_{k-1}^0) + \lambda_1^0 \cos \psi_k^0 - \lambda_3^0 \sin \psi_k^0] = 0; \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin \psi_k^0 = 0, \quad \sum_{k=1}^n \cos \psi_k^0 = 0; \quad (13)$$

$$\kappa_2(\varphi_k^0 - \varphi_{k-1}^0)(\psi_k^0 - \psi_{k-1}^0) = \lambda_2^0; \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_k \Omega^2 \sin 2\varphi_k^0 + \kappa_2(\varphi_{k+1}^0 - 2\varphi_k^0 + \varphi_{k-1}^0) = 0. \quad (15)$$

Условия (12), (13), определяющие начальные углы изгиба и множители Лагранжа, остались такими же, как и в случае симметричной системы [9] (они не зависят от  $\varepsilon_k$ ), а условия на начальные углы кручения  $\varphi_k^0$  изменились.

Система (12), (13) в случае четного числа тел ( $n = 2N$ ) допускает решение

$$\psi_k^0 = 2\pi k/n + \alpha_1, \quad (16)$$

$$\lambda_1^0 = -n\mu\Omega^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad \lambda_3^0 = -n\mu\Omega^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}. \quad (17)$$

Здесь  $\alpha_1$  — произвольная постоянная. Условия (14) — (15) будут выполнены при  $\varphi_k^0 = 0$  и  $\lambda_2^0 = 0$ .

Отметим, что в случае  $\varphi_k^0 = \pi kn/4$  уравнения (15) также будут удовлетворены, но при этом увеличение количества тел приводит к неограниченному увеличению крутки в системе, что противоречит физическому смыслу.

В отличие от [1], присутствие несимметрии в системе привело к условию

$$\varphi_k^0 = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (18)$$

Далее будем рассматривать режим относительного равновесия (10) с учетом (18).

Итак, установлено, что уравнения движения системы четного числа тел имеют решение, описывающее относительное положение равновесия, в котором все оси симметрии тел лежат в одной плоскости, и при этом углы  $\psi_k^0$  определяются из (16), а  $\varphi_k^0$  – из (18). Получим необходимые условия устойчивости найденного положения равновесия в случае, когда число тел в системе равно четырем.

**3. Уравнения возмущенного движения для четырех тел.** Пусть  $n = 4$ . Тогда уравнения движения системы (10) допускают решение

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_k^0 = \dot{\theta}_k^0 = \dot{\varphi}_k^0 = 0, \quad \theta_k^0 = \varphi_k^0 = 0, \quad \psi_k^0 = \frac{\pi k}{2}, \quad k = \overline{1, 4}, \\ \lambda_1^0 = \lambda_3^0 = -4\mu\Omega^2, \quad \lambda_2^0 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (10), линеаризованная в окрестности решения (19), может быть представлена как

$$\begin{aligned} (A' + \varepsilon_k)\ddot{\psi}_k + \mu\{(2k-1) \sum_{j=k+1}^4 (9-2j)[C_{kj}^0\ddot{\psi}_j + 2\Omega S_{kj}^0\dot{\psi}_j + \Omega^2 C_{kj}^0(\psi_k - \psi_j)] + \\ + (9-2k) \sum_{j=1}^k (2j-1)[C_{kj}^0\ddot{\psi}_j + 2\Omega S_{kj}^0\dot{\psi}_j + \Omega^2 C_{kj}^0(\psi_k - \psi_j)]\} + \\ + \kappa_1(-\psi_{k-1} + 2\psi_k - \psi_{k+1}) - \lambda_1^0 \sin \psi_k^0 \psi_k - \lambda_3^0 \cos \psi_k^0 \psi_k + \lambda_1 \cos \psi_k^0 - \lambda_3 \sin \psi_k^0 = 0; \\ A'(\ddot{\theta}_k + \Omega^2 \theta_k) + B\Omega(\dot{\varphi}_k - \Omega \theta_k) + \varepsilon_k[-\Omega \dot{\varphi}_k + \Omega^2 \theta_k] + \\ + \mu[(2k-1) \sum_{j=k+1}^4 (9-2j)(\ddot{\theta}_j + \Omega^2 C_{kj}^0 \theta_k)(9-2k) \sum_{j=1}^k (2j-1)(\ddot{\theta}_j + \Omega^2 C_{kj}^0 \theta_k)] - \\ - \kappa_1(\Gamma^2 \theta_k + \theta_{k+1} - \theta_k + \theta_{k-1}) - \kappa_2 \Gamma(\varphi_k - \varphi_{k-1} - \Gamma \theta_k) - \\ - \lambda_1^0 \sin \psi_k^0 \theta_k - \lambda_3^0 \cos \theta + \lambda_2 = 0; \\ B(\ddot{\varphi}_k - \Omega \dot{\theta}_k) + \varepsilon_k(\Omega \dot{\theta}_k + \Omega^2 \varphi_k) - \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (21) \end{aligned}$$

(22)

$$-\kappa_2[\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + \Gamma(\theta_k - \theta_{k+1})] = 0 \quad (k = \overline{1, 4}).$$

Здесь  $\Gamma = \pi/2$ ,  $C_{kj}^0 = \cos(\psi_k^0 - \psi_j^0)$ ,  $S_{kj}^0 = \sin(\psi_k^0 - \psi_j^0)$ .

Уравнения (20) содержат в качестве неизвестных только углы  $\psi_k$ , которые определяют форму упругой линии. Из уравнений замкнутости (9), линейризованных в окрестности решения (19), получаем

$$\psi_3 = \psi_1, \quad \psi_4 = \psi_2, \quad \theta_4 = -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3.$$

После исключения этих переменных и реакций связи  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  из уравнений (20) имеем

$$(2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_3)\ddot{\psi}_1 + (2a + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)\ddot{\psi}_2 = 0, \quad (23)$$

$$(2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_3)\ddot{\psi}_1 - (2a + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)\ddot{\psi}_2 + 8\kappa_1(\psi_1 - \psi_2) = 0,$$

где  $a = A' + 8\mu$ .

Рассматривая (23), как систему относительно переменных  $\psi_1$  и  $y_0 = \psi_1 - \psi_2$ , получаем после исключения циклической переменной  $\psi_1$  уравнение для определения  $y_0$ :

$$\ddot{y}_0 + by_0 = 0, \quad (24)$$

где  $b = b(\varepsilon_k, \kappa_1, a) > 0$ . Из (24) следует, что соответствующее ему характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни и необходимые условия устойчивости по переменной  $y_0$  выполнены. Значит, в данном случае форма моделируемой упругой линии устойчива.

Выделим два частных случая.

$$1. \quad \varepsilon_k = \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (25)$$

$$2. \quad \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0. \quad (26)$$

В первом случае получаем замкнутую систему, состоящую из четырех несимметричных одинаковых тел, а во втором – из одного несимметричного тела и трех одинаковых гироскопов Лагранжа. Определим для этих систем необходимые условия устойчивости относительного положения равновесия.

**4. Случай одинаковых несимметричных тел.** Пусть  $\varepsilon_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) удовлетворяет условию (25). Тогда система (23) приводится к виду

$$\ddot{y}_1 = 0, \quad (a + \varepsilon)\ddot{y}_0 + 2\kappa_1 y_0 = 0, \quad (27)$$

здесь  $y_1 = \psi_1 + \psi_2$ ,  $y_0 = \psi_1 - \psi_2$ .

Отсюда, как и в общем случае, следует наличие циклической переменной  $y_1$ , характеризующей движение системы как целого, и устойчивость по переменной  $y_0$ , определяющей форму замкнутой оси.

Из суммы четырех уравнений (22) получаем уравнение, зависящее только от суммы углов  $\varphi_k$ :

$$B\ddot{x}_s + \varepsilon\Omega^2 x_s = 0, \quad (28)$$

где  $x_s = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$  – переменная, характеризующая вращение системы как целого.

В зависимости от знака  $\varepsilon$ , из (28) имеем: при  $\varepsilon > 0$ , то необходимые условия устойчивости выполнены, а при  $\varepsilon < 0$  – движение неустойчиво. Полученный результат соответствует случаю вращения одного твердого тела вокруг большей либо средней оси [10].

Остальные уравнения систем (21) и (22) после исключения  $\theta_4$  и  $x_s$  могут быть преобразованы к виду

$$(A' + a)\ddot{z}_1 + 2(D + \varepsilon\Omega^2 + 2\kappa_1)z_1 + (B - \varepsilon)\Omega\dot{x} - 2\kappa_2\Gamma x = 0, \quad (29)$$

$$B\ddot{x} - 2(B - \varepsilon)\Omega\dot{z}_1 + \varepsilon\Omega^2 x + 4\kappa_2(x - \Gamma z_1) = 0,$$

$$a\ddot{z}_0 + (D + \varepsilon\Omega^2)z_0 - (B - \varepsilon)\Omega\left(\frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{2} + \dot{x}_2\right) - \kappa_2\Gamma x_0 = 0,$$

$$a\ddot{\theta} + (D + \varepsilon\Omega^2)\theta + (B - \varepsilon)\Omega\left(\frac{\dot{x} + \dot{x}_0}{2} + \dot{x}_2\right) - \kappa_2\Gamma(x + 2x_2) = 0, \quad (30)$$

$$B\ddot{x}_0 - (B - \varepsilon)\Omega(\dot{\theta} + \dot{z}_0) + (2\kappa_2 + \varepsilon\Omega^2)x_0 - 2\kappa\Gamma z_0 = 0,$$

$$B\ddot{x}_2 + (\varepsilon\Omega^2 + 2\kappa_2)x_2 + \frac{(B - \varepsilon)\Omega}{2}(2\dot{z}_1 + \dot{z}_0 - \dot{\theta}) - \kappa_2x + \kappa_2\Gamma(2z_1 - \theta) = 0.$$

Здесь введены новые переменные и обозначения:

$$z_1 = \theta_1 + \theta_3, \quad x = x_1 + x_3,$$

$$z_0 = \theta_1 - \theta_3, \quad \theta = 2\theta_2 + z_1, \quad x_0 = x_1 - x_3, \quad x_k = \varphi_k - \varphi_{k-1} \quad (\varphi_0 = \varphi_4);$$

$$A' = A + mc^2, \quad \mu = mc^2/4, \quad D = \Omega^2(a - B) - k_1(\Gamma^2 - 2) + k_2\Gamma^2.$$

Разыскивая решение системы (29), (30) в виде разложения переменных по  $e^{\lambda t}$ , получаем характеристическое уравнение в виде

$$\Delta = \Delta_2\Delta_4 = \sum_{i=0}^2(a_i\lambda^{2i})\sum_{j=0}^4(b_j\lambda^{2j}) = 0, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \tilde{\varepsilon}(\alpha + 1)\nu^2 + \{[2(\alpha - \rho)\tilde{\varepsilon} + 2\rho^2 + (\alpha + 1)\rho]\omega^2 +, \\ &+ 2[\kappa(\gamma + 2) - \gamma + 2]\tilde{\varepsilon} + 4\kappa(\alpha + 1)\}\nu + 2\rho(\alpha - \tilde{\varepsilon} + \rho)\omega^4 + \\ &+ 2\{4\kappa(\alpha - \tilde{\varepsilon}) + \rho[\kappa(\gamma + 6) - \gamma + 2]\}\omega^2 - 8\kappa(\gamma - 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_4 = & \nu^4 \tilde{\varepsilon}^2 \alpha^2 + \{[-2\alpha(-\alpha + \rho) \tilde{\varepsilon}^2 + 2\alpha\rho(\rho + \alpha) \tilde{\varepsilon}]\omega^2 + 2\alpha(-\gamma + 2\kappa + \kappa\gamma) \tilde{\varepsilon}^2 + \\
 & + 4\alpha^2 \kappa \tilde{\varepsilon}\} \nu^3 + \{[(\alpha^2 + \rho^2 - 4\alpha\rho) \tilde{\varepsilon}^2 - 2\rho(\rho + \alpha)(\rho - 2\alpha) \tilde{\varepsilon} + \rho^2(\rho + \alpha)^2] \omega^4 + \\
 & + [(-4\rho\kappa + 2\rho\gamma + 2\alpha\kappa\gamma - 2\rho\kappa\gamma - 2\alpha\gamma) \tilde{\varepsilon}^2 + (8\rho\alpha\kappa + + 2\rho^2 \kappa\gamma - 4\rho\alpha\gamma + \\
 & + 4\rho^2 \kappa - 2\rho^2 \gamma + 8\alpha^2 \kappa + 4\rho\alpha\kappa\gamma) \tilde{\varepsilon} + 4\rho\kappa\alpha(\rho + \alpha)] \omega^2 + (-\gamma + 2\kappa + \kappa\gamma)^2 \tilde{\varepsilon}^2 + \\
 & + 4\kappa\alpha(\kappa\gamma + 2\kappa - 2\gamma) \tilde{\varepsilon} + 4\kappa^2 \alpha^2\} \nu^2 + \{[2\rho(-\alpha + \rho) \tilde{\varepsilon}^2 - \\
 & - 2\rho(\rho + \alpha)(2\rho - \alpha) \tilde{\varepsilon} + 2\rho^2(\rho + \alpha)^2] \omega^6 + [(-2\rho\kappa\gamma + 2\rho\gamma - 4\kappa\alpha) \tilde{\varepsilon}^2 + \\
 & + [4\rho\alpha\kappa\gamma - 4\rho\alpha\gamma - 8\rho^2 \kappa + 4\alpha^2 \kappa) \tilde{\varepsilon} + 2\rho(\rho + \alpha)(4\rho\kappa - \rho\gamma + \rho\kappa\gamma + \\
 & + 4\kappa\alpha)] \omega^4 + [4\tilde{\varepsilon}^2 \kappa\gamma + 2\gamma(-4\kappa\alpha + \kappa^2 \rho\gamma + 2\kappa^2 \alpha + \rho\gamma + 2\kappa^2 \rho - 4\rho\kappa - 2\rho\kappa\gamma) \tilde{\varepsilon} + \\
 & + 4\kappa(\rho^2 \kappa\gamma + 2\rho^2 \kappa + 4\rho\alpha\kappa + 2\alpha^2 \kappa + \rho\alpha\kappa\gamma - \rho^2 \gamma - 2\rho\alpha\gamma)] \omega^2 - \\
 & - 4\gamma\kappa(-\gamma + 2\kappa + \kappa\gamma) \tilde{\varepsilon} - 8\kappa^2 \alpha\gamma\} \nu + [\rho^2 \tilde{\varepsilon}^2 - 2\rho^2(\rho + \alpha) \tilde{\varepsilon} + \rho^2(\rho + \alpha)^2] \omega^8 + \\
 & + [4\tilde{\varepsilon}^2 \rho\kappa - 2\rho(6\rho\kappa + \rho\kappa\gamma - \rho\gamma + 4\kappa\alpha) \tilde{\varepsilon} + 2(4\rho\kappa + 2\kappa\alpha + \rho\kappa\gamma - \rho\gamma)\rho(\rho + \alpha)] \omega^6 + \\
 & + [4\kappa^2 \tilde{\varepsilon}^2 - 4\kappa(4\rho\kappa + 2\kappa\alpha + \rho\kappa\gamma - 2\rho\gamma) \tilde{\varepsilon} - 12\rho^2 \kappa\gamma - 8\rho\alpha\kappa\gamma + \\
 & + 16\rho^2 \kappa^2 + 16\alpha\rho\kappa^2 + 8\rho^2 \kappa^2 \gamma + 4\kappa^2 \alpha^2 + 4\alpha\rho\kappa^2 \gamma + \rho^2 \kappa^2 \gamma^2 - \\
 & - 2\rho^2 \kappa\gamma^2 + \rho^2 \gamma^2] \omega^4 + [8\kappa^2 \tilde{\varepsilon}\gamma - 4\kappa\gamma(4\rho\kappa + 2\kappa\alpha + \rho\kappa\gamma - \rho\gamma)] \omega^2 + 4\kappa^2 \gamma^2.
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$\nu = \frac{A}{k_1} \lambda^2, \quad \kappa = \frac{k_2}{k_1}, \quad \omega^2 = \frac{A\Omega^2}{k_1}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{B}{A}, \quad \rho = \frac{\varepsilon}{A}, \quad \alpha = \frac{a}{A}, \quad \text{а} \quad \gamma = \Gamma^2 - 2 > 0.$$

Необходимые условия устойчивости изучаемого решения системы (29), (30) будут выполнены, если характеристическое уравнение (31) имеет отрицательные действительные корни, т.е. когда в  $\Delta_2(\nu)$  и  $\Delta_4(\nu)$

$$1. \quad a_i > 0 \quad (i = \overline{0, 2}), \quad b_j > 0 \quad (j = \overline{0, 4}); \quad (32)$$

$$2. \quad a_1^2 - 4a_2a_0 > 0; \quad (33)$$

и выполнен критерий Покровского [11] для  $\Delta_4(\nu)$ :

$$3. \quad F_1 > 0, \quad 12F_1^2 - b_4^2 F_2 > 0, \quad F_2^3 - 27(F_3 - b_0 F_1) > 0. \quad (34)$$

$$\text{Здесь} \quad F_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8} b_3^2 - \frac{1}{3} b_2 b_4 \right), \quad F_2 = b_4 b_0 - \frac{1}{4} b_2 b_3 + \frac{1}{12} b_2^3,$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{6} b_1 b_2 b_3 - \frac{1}{2} b_1^2 b_4 - \frac{1}{27} b_2^3 \right).$$

Найдем области выполнения неравенств (32)–(34) при учете малости параметров  $\tilde{\varepsilon} > 0$  и  $0 < \rho \ll \tilde{\varepsilon}$ . Начнем с анализа неравенства (32). Из

вида коэффициентов уравнений  $\Delta_2(\nu) = 0$ ,  $\Delta_4(\nu) = 0$  следует, что при сделанных предположениях о малости  $\rho, \tilde{\varepsilon}$  коэффициенты  $a_i, b_j$  ( $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 0, 2, 3, 4$ ) всегда больше нуля. Коэффициент  $b_1$  будет положительным при

$$\omega^2 > \frac{\gamma}{\alpha} + \rho R_1(\tilde{\varepsilon}, \alpha, \kappa).$$

Неравенство (33) приводится к виду

$$\begin{aligned} &\{4\rho^4 + 4(1 - 2\tilde{\varepsilon} + \alpha)\rho^3 + [4\tilde{\varepsilon}^2 - 4(3 + \alpha)\tilde{\varepsilon} + (\alpha + 1)^2]\rho^2 + 4[2\tilde{\varepsilon}^2 - \alpha(\alpha + 1)\tilde{\varepsilon}]\rho + \\ &+ 4\tilde{\varepsilon}^2\alpha^2\}\omega^4 + \{[8(2\kappa + 2 + \kappa\gamma - \gamma)\tilde{\varepsilon} + 16\kappa(\alpha + 1)]\rho^2 + 8[(-2 + \gamma - \kappa\gamma - 2\kappa)\tilde{\varepsilon}^2 - \\ &- 4(\alpha + 1)(-\gamma + \kappa\gamma + 2 + 14\kappa)\tilde{\varepsilon} + 8\kappa(\alpha + 1)^2]\rho + 8(2\alpha - \alpha\gamma + 4\kappa + 6\kappa\alpha + \alpha\kappa\gamma)\tilde{\varepsilon}^2 - \\ &- 16\alpha\kappa(\alpha + 1)\tilde{\varepsilon}\}\omega^2 + 4(\kappa\gamma + 2\kappa - \gamma + 2)^2\tilde{\varepsilon}^2 + 16\kappa(\alpha + 1)(\kappa\gamma + 2\kappa - 2 + \gamma)\tilde{\varepsilon} + \\ &+ 16\kappa^2(\alpha + 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

При  $\rho \ll \tilde{\varepsilon}$  оно выполняется для всех значений  $\omega$ .

Неравенства (34) могут быть представлены следующим образом:

$$f_1(\omega^2) = \sum_{i=1}^2 d_{1i}(\tilde{\varepsilon}, \rho, \kappa)\omega^{2i} > 0,$$

$$f_2(\omega^2) = (\rho^2 + (-\tilde{\varepsilon} + \alpha)\rho + \tilde{\varepsilon}\alpha)\omega^2 + (-\gamma + 2\kappa + \kappa\gamma)\tilde{\varepsilon} + 2\kappa\alpha > 0,$$

$$f_3(\omega^2) = \sum_{i=1}^6 d_{3i}(\tilde{\varepsilon}, \rho, \kappa)\omega^{2i} > 0.$$

Сделанные предположения относительно малых параметров  $\rho, \tilde{\varepsilon}$  позволили установить, что первые два неравенства выполняются всегда, а последнее — при условии

$$\omega^2 > \frac{\gamma}{\alpha} + \rho R_2(\tilde{\varepsilon}, \alpha, \kappa). \quad (35)$$

Таким образом, анализ полученных условий (32)–(34) при учете малости  $\rho, \tilde{\varepsilon}$  позволил оценить снизу значения скорости  $\omega$ , при которых необходимые условия устойчивости выполнены. Отметим, что для случая симметричных тел при отсутствии начальной крутки условия (35) совпадают с полученными в [9].

Соотношения (32)–(34), определяющие область устойчивости в отсутствии предположения  $\rho \ll \tilde{\varepsilon}$ , могут быть проанализированы численно. Так, на рис. 1 при  $\tilde{\varepsilon} = 0.05$ ,  $\kappa = 0.9$  область устойчивости в плоскости параметров  $\rho, u$  ( $u = \omega^2$ ) лежит справа от кривой 1.

Следует отметить появление особой кривой 2, на которой характеристическое уравнение (31) имеет кратные корни. Данный случай требует дополнительного исследования.

На рис. 2 показаны границы области устойчивости решения (11) в плоскости параметров  $\rho, u$  при различных значениях  $\rho$  и  $\kappa = 0.9$ .

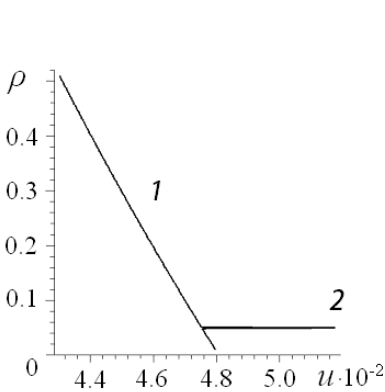


Рис. 1

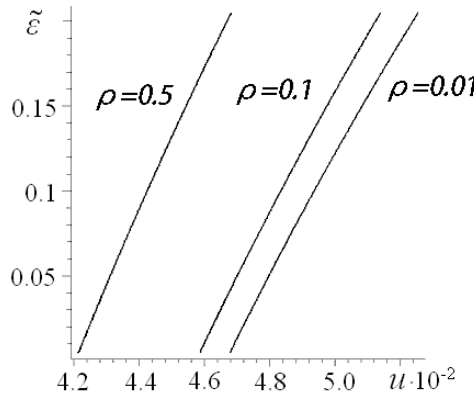


Рис. 2

**5. Случай одного несимметричного тела.** Пусть теперь  $\varepsilon_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) удовлетворяют условию (26). При этом уравнения (23) для переменных  $\psi_1, \psi_2$  будут такими

$$\begin{aligned} (2a + \varepsilon)\ddot{\psi}_1 + 2a\ddot{\psi}_2 &= 0, \\ (2a + \varepsilon)\ddot{\psi}_1 - 2a\ddot{\psi}_2 + 8\kappa_1(\psi_1 - \psi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

После исключения из (36) циклической переменной  $\psi_1$  и введения новой переменной  $y_0 = \psi_1 - \psi_2$  имеем

$$\frac{a(2a + \varepsilon)}{4a + \varepsilon}\ddot{y}_0 + 2\kappa_1 y_0 = 0. \quad (37)$$

Из (37), как и в предыдущем случае, следует устойчивость по переменной  $y_0 = \psi_1 - \psi_2$ , определяющей форму оси моделируемого стержня.

Система уравнений (21), (22) с учетом (9) приводится к виду

$$\begin{aligned} B\ddot{x}_s + \Omega_\varepsilon\{\dot{z}_0 + \dot{z}_1 + \Omega[(x_0 + x_s)/2 - x_2]\} &= 0; \\ (a + A')\ddot{z}_1 + 2(D + 2\kappa_1)z_1 + B\Omega\dot{x} - 2\kappa_2\Gamma x + \Omega_\varepsilon[\Omega(z_0 + z_1) + \dot{x}_2 - (\dot{x}_0 - \dot{x}_s)/2] &= 0; \\ B\ddot{x} - 2B\Omega\dot{z}_1 + 4\kappa_2x - 4\kappa_2\Gamma z_1 + \Omega_\varepsilon\{\Omega[(x_0 + x_s)/2 - x_2] + \dot{z}_0 + \dot{z}_1\} &= 0; \\ a\ddot{z}_0 + Dz_0 - B\Omega[\dot{x}_2 + (x - x_0)/2] - \kappa_2\Gamma x_0 + \Omega_\varepsilon[-(\dot{x}_0 + \dot{x}_s)/2 + \dot{x}_2 + \Omega(z_0 + z_1)] &= 0; \\ a\ddot{\theta} + D\theta + B\Omega[\dot{x}_2 + (\dot{x} + \dot{x}_0)/2] - \kappa_2\Gamma(x + 2x_2) &= 0; \\ B\ddot{x}_0 - B\Omega(\dot{z}_0 + \dot{\theta}) + 2\kappa_2(x_0 - \Gamma z_0) + \Omega_\varepsilon\{\Omega[(x_0 + x_s)/2 - x_2] + \dot{z}_0 + \dot{z}_1\} &= 0; \\ B\ddot{x}_2 + B\Omega(2\dot{z}_1 + \dot{z}_0 - \dot{\theta})/2 - \kappa_2(x - 2x_2) + \kappa_2\Gamma(2z_1 - \theta) - & \end{aligned} \quad (38)$$

$$-\Omega_\varepsilon \{ \Omega[(x_0 + x_s)/2 - x_2] + \dot{z}_0 + \dot{z}_1 \} = 0,$$

где  $\Omega_\varepsilon = \varepsilon \Omega / 2$ .

Характеристическое уравнение системы (38) имеет вид

$$\Delta = \sum_{i=0}^7 (c_i \lambda^{2i}),$$

где  $c_i$  – полиномы от параметров  $\omega, \rho, \tilde{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} c_7 &= 4\tilde{\varepsilon}^4 \alpha^2 (\alpha + 1), \quad c_6 = \sum_{i=0}^1 \beta_i^{(6)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}, \quad c_5 = \sum_{i=0}^2 \beta_i^{(5)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}, \\ c_4 &= \sum_{i=0}^3 \beta_i^{(4)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}, \quad c_3 = \sum_{i=0}^4 \beta_i^{(3)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}, \quad c_2 = \sum_{i=0}^4 \beta_i^{(2)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}, \\ c_1 &= \sum_{i=0}^4 \beta_i^{(1)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}, \quad c_0 = \sum_{i=0}^4 \beta_i^{(0)}(\rho, \tilde{\varepsilon}) \omega^{2i}. \end{aligned}$$

Необходимые условия устойчивости решения (11) будут выполнены, когда характеристическое уравнение  $\Delta = 0$  имеет только действительные отрицательные корни. Исследования областей устойчивости в данном случае были проведены численно. Результаты расчетов показали, что нижняя граница области устойчивости положения равновесия решения (11) определена неравенством

$$\omega^2 > \frac{\gamma}{\alpha - \varepsilon} + \rho R(\alpha, \varkappa, \varepsilon).$$

Таким образом, если исключить случай кратных корней характеристического уравнения, области устойчивости отличаются на величины порядка  $\rho$  от найденных ранее для симметричных тел [9].

1. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
2. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
3. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия замкнутых систем с самопересечением // Там же. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
4. Bolgrabskaya I.A., Shchepin N.N. Finite dimensional model of closed elastic systems // Proc. of the 9th conf. of dynamical systems – theory and applications (December 17–20, 2007, Lodz, Poland). – 2007. – 2. – P. 135–143.
5. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Устойчивость положения равновесия замкнутой системы тел конфигурации “восьмерка” // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 151–160.
6. Wadati M., Tsuru H. Elastic model of looped DNA // Physica. – 1986. – 21D. – P. 213–226.

7. Бенхэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
8. Hoffman K.A. Methods for determining stability in continuum elastic-rod models of DNA // Phil. Trans. R. Lond. A. – 2004. – **362**. – P. 1301–1315.
9. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Необходимые условия устойчивости относительного равновесия замкнутой “круговой” системы // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 94–103.
10. Покровский П.М. Об алгебраических уравнениях в связи с аналитическими функциями Вейерштрасса // Тр. отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1883. – **6**, вып. 1. – С. 26–42.

## I.A. Bolgrabskaya, N.N. Shchepin

### Asymmetry in the closed elastic-systems

The finite dimensional model of the closed elastic rod with a circular configuration of its elastic axis is consider. The rod was modeled by means of system consisting of  $n$  nonsymmetric rigid bodies connected by elastic spherical joints. The possibility of equilibrium existence of such system in rotating co-ordinate system is studied. Necessary stability conditions of the relative equilibrium of the considered regime are obtained. The case of four bodies is studied in details.

**Keywords:** *finite dimensional model of the elastic rod, elastic spherical joint, relative equilibrium, asymmetry, stability.*

## І.О. Болграбська, М.М. Щепін

### Несиметрія в замкнених пружних системах

Розглянуто скінченновимірну модель замкненого пружного стержня із круговою конфігурацією його пружної осі. Стержень моделювався за допомогою системи  $n$  несиметричних твердих тіл, сполучених пружними сферичними шарнірами. Вивчено можливість існування у такої системи режиму рівноваги в обертовій системі координат. Отримано необхідні умови стійкості знайденого режиму відносної рівноваги. Детально вивчено випадок чотирьох тіл.

**Ключові слова:** *скінченновимірна модель пружного стержня, сферичний пружний шарнір, положення відносної рівноваги, несиметрія, стійкість.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
bolg@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 01.10.11