

УДК 539.3:534.1

©2015. И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев

## СПЕКТРЫ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В работе исследуется проблема построения решения для задачи распространения неосесимметричных нормальных волн в радиально неоднородных ортотропных цилиндрах. Модули упругости и плотность задаются экспоненциальной функцией от радиальной координаты. Для компонент вектора перемещений и тензора напряжений получены разложения в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды по радиальной координате. Получены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник неосесимметричных нормальных волн в радиально неоднородном цилиндрическом волноводе со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью из цилиндрически ортотропного материала. Изучены эффекты влияния параметра радиальной неоднородности и окружного волнового числа на топологию дисперсионных спектров и распределение фазовых скоростей распространяющихся нормальных волн.

**Ключевые слова:** цилиндрический волновод, нормальные волны, функционально-градиентные материалы, цилиндрически ортотропные материалы.

**Введение.** Вопросы теоретического численно-аналитического исследования эффектов влияния фактора радиальной функционально-градиентной неоднородности анизотропных материалов цилиндрических волноводов на характеристики дисперсионных спектров распространяющихся нормальных волн рассматривались в работах [1–3] применительно к осесимметричным волнам продольно-сдвигового и крутильного типа в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения. В данной работе методика построения и анализа дисперсионных соотношений для нормальных волн в цилиндрах из анизотропных материалов с функционально-градиентной радиальной неоднородностью распространена на случай неосесимметричных волн с произвольными окружными волновыми числами вдоль цилиндрически-ортотропных волноводов кругового сечения.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается протяженный ортотропный цилиндр кругового сечения с радиусом  $R$ , занимающий в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* \equiv R$  безразмерных цилиндрических координатах область  $V = \{r \in [0, 1]; 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in (-\infty, \infty)\}$ . Задача анализа спектров и свойств нормальных упругих волн вдоль рассматриваемого цилиндра формулируется с использованием соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системе нормированных безразмерных цилиндрических координат. Данные соотношения формулируются для проекций безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений на оси цилиндрической системы коор-

динат  $(u_r, u_\theta, u_z)$ , отнесенных к нормирующему параметру  $R_*$ , а также для характеристик напряженно-деформированного состояния рассматриваемого объекта на основных площадках цилиндрической координатной системы.

Основные соотношения модели включают:

– систему уравнений связи между компонентами тензора малых деформаций  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}$  и компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений в цилиндрической системе координат

$$\varepsilon_{rr} = \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1}u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \partial_z u_\theta + r^{-1}\partial_\theta u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \quad \varepsilon_{r\theta} = r^{-1}\partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - r^{-1}u_\theta;$$

– систему соотношений обобщенного линейного закона Гука (определяющих соотношений) для цилиндрически-ортотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{23}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta z} = c_{44}\varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = c_{55}\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66}\varepsilon_{r\theta};$$

– систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемого тела в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2/c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1}\sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2/c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1}\sigma_{rz} - (\rho R_*^2/c_*) \partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

– альтернативную форму граничных условий

$$(u_r)_{r=1} = (u_\theta)_{r=1} = (u_z)_{r=1} = 0, \quad (4)$$

либо

$$(\sigma_{rr})_{r=1} = (\sigma_{r\theta})_{r=1} = (\sigma_{rz})_{r=1} = 0. \quad (5)$$

Во введенных представлениях  $\sigma_{pq}$  ( $p, q = r, \theta, z$ ) – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  компоненты тензора динамических напряжений;  $c_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ),  $c_{pp}$  ( $p = 4, 5, 6$ ) – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  ненулевые модули упругости цилиндрически-ортотропного материала цилиндра;  $\rho$  – плотность материала цилиндра;  $t$  – время;  $\partial_q = \partial/\partial q$  ( $q = r, \theta, z, t$ ).

Полагается, что материал цилиндра является экспоненциально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность и нормированные модули упругости соответственно описываются представлениями

$$\begin{aligned} c_{pq} &= \tilde{c}_{pq} \exp(\lambda r) \quad (p, q = 1, 2, 3), \quad c_{pp} = \tilde{c}_{pp} \exp(\lambda r) \quad (p = 4, 5, 6), \\ \rho &= \tilde{\rho} \exp(\lambda r), \end{aligned} \quad (6)$$

в которых  $\lambda$  – действительнoзначный приведенный параметр неоднородности.

**2. Интегрирование уравнений волнового деформирования и получение дисперсионных уравнений.** Для функций колебательных упругих перемещений в исследуемых нормальных волнах вдоль цилиндра с круговой частотой  $\omega$ , нормированным продольным волновым числом  $k$  и произвольным целочисленным окружным волновым числом  $n$ , следуя методу разделения переменных, вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_r^{(n)}(r) \exp(-\lambda r/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_\theta^{(n)}(r) \exp(-\lambda r/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_z^{(n)}(r) \exp(-\lambda r/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz). \end{aligned} \quad (7)$$

Последовательная подстановка представлений (6), (7) в соотношения модели волновых процессов в рассматриваемом волноводе (1)–(3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных функций радиальной координаты  $\tilde{u}_p^{(n)}(r)$  ( $p = r, \theta, z$ ), которая имеет вид

$$\begin{aligned} &(\tilde{c}_{11}r^2\partial_r^2 + \tilde{c}_{11}r\partial_r - \tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{66}n^2 + (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{11}/2)\lambda r + \\ &\quad + (\Omega^2 - \tilde{c}_{55}k^2 - \tilde{c}_{11}\lambda^2/4)r^2)\tilde{u}_r^{(n)} - \\ &\quad - n((\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})r\partial_r + (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}) - (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66})\lambda r/2)\tilde{u}_\theta^{(n)} - \\ &\quad - kr((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{66})r\partial_r + (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}) + (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44})\lambda r/2)\tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\ &\quad n((\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})r\partial_r + (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}) - (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66})\lambda r/2)\tilde{u}_r^{(n)} + \\ &\quad + (\tilde{c}_{12}r^2\partial_r^2 + \tilde{c}_{66}r\partial_r - \tilde{c}_{66} - \tilde{c}_{22}n^2 - 3\tilde{c}_{66}\lambda r/2 + \\ &\quad + (\Omega^2 - \tilde{c}_{44}k^2 - \tilde{c}_{66}\lambda^2/4)r^2)\tilde{u}_\theta^{(n)} - knr(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})\tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\ &\quad kr((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})kr\partial_r + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{55}) - (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55})\lambda r/2)\tilde{u}_r^{(n)} - \\ &\quad - knr(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})\tilde{u}_\theta^{(n)} + (\tilde{c}_{55}r^2\partial_r^2 + \tilde{c}_{55}r\partial_r - \tilde{c}_{44}n^2 - \tilde{c}_{55}\lambda r/2 + \\ &\quad + (\Omega^2 - \tilde{c}_{33}k^2 - \tilde{c}_{55}\lambda^2/4)r^2)\tilde{u}_z^{(n)} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Omega^2 = \tilde{\rho}R_*^2\omega^2/c_*$ .

Для построения базисных решений системы (8) в данной работе используется метод, основанный на представлениях искомых решений степенными рядами радиальной координаты. С учетом физической модели рассматриваемой задачи, а также структуры дифференциальных уравнений системы (8), для искомых решений вводятся представления рядами с неопределенными коэффициентами

$$\tilde{u}_r^{(n)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{m+\alpha+1-\delta}, \quad \tilde{u}_\theta^{(n)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m r^{m+\alpha+1-\delta},$$

$$\tilde{u}_z^{(n)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m r^{m+\alpha+\delta} \quad (\delta \in \{0, 1\}) \quad (9)$$

при ограничениях

$$d_0 \neq 0, \quad \text{если } \delta = 0, \quad |a_0| + |b_0| \neq 0, \quad \text{если } \delta = 1;$$

$$\alpha \in \{0\} \cup [1, \infty) \cup \{\Re(\alpha) > 1, \Im(\alpha) \neq 0\}. \quad (10)$$

Подстановка представлений (9) в уравнения (8) приводит к рекуррентной системе соотношений для определения коэффициентов разложений (9), представленной в матричной форме

$$\mathbf{X}_m = -\left(\mathbf{A}_0^{(m)}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_1^{(m)} \cdot \mathbf{X}_{m-1} + \mathbf{A}_2^{(m)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}_3^{(m)} \cdot \mathbf{X}_{m-3}\right) \quad (11)$$

$$(m = 1, 2, \dots).$$

В записи соотношений (11) использованы обозначения векторно-матричных объектов размерности 3:  $\mathbf{X}_j$  – вектор-столбцы с элементами  $[\mathbf{X}_j]_1 = a_j$ ,  $[\mathbf{X}_j]_2 = b_j$ ,  $[\mathbf{X}_j]_3 = d_j$  ( $j = \overline{0, \infty}$ );  $\mathbf{X}_{-3} = \mathbf{X}_{-2} = \mathbf{X}_{-1} = \mathbf{O}$ ;  $\mathbf{O}$  – нулевой вектор-столбец;  $[\mathbf{A}_0^{(j)}]$  – квадратные матрицы, ненулевые элементы которых имеют представления:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{1,1} &= (\alpha + j + 1 - \delta)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} - n^2 \tilde{c}_{66}, \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{1,2} &= -n((\alpha + j - \delta) \tilde{c}_{66} + (\alpha + j + 1 - \delta) \tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{22}), \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{1,3} &= k(\delta - 1)((\alpha + j) \tilde{c}_{55} + (\alpha + j + 1) \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}), \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{2,1} &= n((\alpha + j + 2 - \delta) \tilde{c}_{66} + (\alpha + j + 1 - \delta) \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{22}), \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{2,2} &= ((\alpha + j + 1 - \delta)^2 - 1) \tilde{c}_{66} - n^2 \tilde{c}_{22}, \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{2,3} &= nk(\delta - 1)(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{23}), \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{3,1} &= k\delta((\alpha + j + 1) \tilde{c}_{55} + (\alpha + j) \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}), \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{3,2} &= -nk\delta(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{23}), \\ [\mathbf{A}_0^{(j)}]_{3,3} &= (\alpha + j + \delta)^2 \tilde{c}_{55} - n^2 \tilde{c}_{44}, \\ [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{1,1} &= \lambda(\tilde{c}_{12} - \frac{1}{2} \tilde{c}_{11}), \quad [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{1,2} = \frac{1}{2} n\lambda(\tilde{c}_{66} - \tilde{c}_{12}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{1,3} &= \frac{1}{2} (1 - \delta) k \lambda (\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{13}), & [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{2,1} &= \frac{1}{2} n \lambda (\tilde{c}_{66} - \tilde{c}_{12}), \\
 [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{2,2} &= -\frac{3}{2} \lambda \tilde{c}_{66}, & [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{3,1} &= \frac{1}{2} \delta k \lambda (\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{13}), \\
 [\mathbf{A}_1^{(j)}]_{3,3} &= -\frac{1}{2} \lambda \tilde{c}_{55}, \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{1,1} &= \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{55} - \frac{1}{4} \lambda^2 \tilde{c}_{11}, \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{1,3} &= -k \delta ((\alpha + j - 1) \tilde{c}_{55} + (\alpha + j) \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}), \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{2,2} &= \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} - \frac{1}{4} \lambda^2 \tilde{c}_{66}, \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{2,3} &= -nk \delta (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{23}), \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{3,1} &= k (1 - \delta) ((\alpha + j) \tilde{c}_{55} + (\alpha + j - 1) \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}), \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{3,2} &= -nk (1 - \delta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{23}), \\
 [\mathbf{A}_2^{(j)}]_{3,3} &= \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33} - \frac{1}{4} \lambda^2 \tilde{c}_{55}, \\
 [\mathbf{A}_3^{(j)}]_{1,3} &= \frac{1}{2} k \lambda \delta (\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{13}), \\
 [\mathbf{A}_3^{(j)}]_{3,1} &= \frac{1}{2} k \lambda (1 - \delta) (\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{13}).
 \end{aligned}$$

Из рекуррентной системы уравнений (11) в случае  $m = 0$  следует условие ее разрешимости

$$\det(\mathbf{A}_0^{(0)}) = 0, \quad (12)$$

а также уравнение, определяющее начальные вектора  $\mathbf{X}_0$  искомых базисных частных решений

$$\mathbf{A}_0^{(0)} \mathbf{X}_0 = \mathbf{O}. \quad (13)$$

В рамках описываемого подхода вначале отдельно рассматривается случай  $n = 0$ . Для  $\mathbf{A}_0^{(0)}$  могут быть записаны представления соответственно при  $\delta = 0$ :

$$\mathbf{A}_0^{(0)} = \begin{bmatrix}
 (\alpha + 1)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} & 0 & -k (\alpha \tilde{c}_{55} + (\alpha + 1) \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}) \\
 0 & ((\alpha + 1)^2 - 1) \tilde{c}_{66} & 0 \\
 0 & 0 & \alpha^2 \tilde{c}_{55}
 \end{bmatrix},$$

и  $\delta = 1$

$$\mathbf{A}_0^{(0)} = \begin{bmatrix} \alpha^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha^2 - 1) \tilde{c}_{66} & 0 \\ k((\alpha + 1) \tilde{c}_{55} + \alpha \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}) & 0 & (\alpha + 1)^2 \tilde{c}_{55} \end{bmatrix}.$$

Из (12), (13) с учетом ограничений (10) следуют три начальных условия для формирования трех независимых базисных решений:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1^{(0)} &= \{\delta = 0, \alpha = 0, a_0 = k(\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}), b_0 = 0, d_0 = \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22}\}, \\ \Upsilon_2^{(0)} &= \{\delta = 1, \alpha = 1, a_0 = 0, b_0 = 1, d_0 = 0\}, \\ \Upsilon_3^{(0)} &= \left\{ \delta = 1, \alpha = \sqrt{\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{11}}, a_0 = q, b_0 = 0, d_0 = p \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$q = -(\alpha + 1)^2 \tilde{c}_{55}, \quad p = k((\alpha + 1) \tilde{c}_{55} + \alpha \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}).$$

В случае  $n \geq 1$  при  $\delta = 0$  матрица  $\mathbf{A}_0^{(0)}$  имеет структурную форму

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0^{(0)} \Big|_{\delta=0} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha^2 \tilde{c}_{55} - n^2 \tilde{c}_{44} \end{bmatrix},$$

в которой звездочками обозначены ненулевые элементы. При этом условие разрешимости (12) порождает два альтернативных варианта

$$\alpha^2 \tilde{c}_{55} - n^2 \tilde{c}_{44} = 0 \quad (15)$$

и

$$[\mathbf{B}_0]_{1,1} [\mathbf{B}_0]_{2,2} - [\mathbf{B}_0]_{1,2} [\mathbf{B}_0]_{2,1} = g(\alpha + 1)^4 + f(\alpha + 1)^2 + s = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} g &= \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{66}, \quad s = (n^2 - 1)^2 \tilde{c}_{22} \tilde{c}_{66}, \\ f &= n^2 (\tilde{c}_{12} (\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}) - \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{22}) - \tilde{c}_{66} (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}). \end{aligned}$$

При  $\delta = 1$  структура матрицы  $\mathbf{A}_0^{(0)}$  в рамках принятых обозначений имеет сходный вид

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_0^{(0)} \Big|_{\delta=1} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & (\alpha + 1)^2 \tilde{c}_{55} - n^2 \tilde{c}_{44} \end{bmatrix}$$

и, соответственно, из условий разрешимости (12) следуют два альтернативных соотношения

$$(\alpha + 1)^2 \tilde{c}_{55} - n^2 \tilde{c}_{44} = 0; \quad (17)$$

$$[\mathbf{B}_1]_{1,1}[\mathbf{B}_1]_{2,2} - [\mathbf{B}_1]_{1,2}[\mathbf{B}_1]_{2,1} = g\alpha^4 + f\alpha^2 + s = 0. \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что с учетом (13) полученные условия разрешимости (15) и (17), (16) и (18) попарно, с точностью до свободного множителя могут порождать только совпадающие базисные решения. Таким образом, при выборе из каждой пары альтернативных условий разрешимости (15) и (17), (16) и (18) тех, которые обеспечивают выполнение ограничений (10), формируются начальные условия, определяющие три независимых базисных решения для  $n \geq 1$  в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1^{(n)} &= \left\{ \delta = 0, \alpha = n\sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}}, a_0 = q_0, b_0 = p_0, d_0 = h_0 \right\}, \\ \Upsilon_{1+j}^{(n)} &= \left\{ \delta = 1, \alpha = \alpha_j, a_0 = q_1, b_0 = p_1, d_0 = h_1 \right\} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} q_0 &= [\mathbf{B}_0]_{2,3}[\mathbf{B}_0]_{1,2} - [\mathbf{B}_0]_{1,3}[\mathbf{B}_0]_{2,2}, \\ p_0 &= [\mathbf{B}_0]_{1,3}[\mathbf{B}_0]_{2,1} - [\mathbf{B}_0]_{2,3}[\mathbf{B}_0]_{1,1}, \\ h_0 &= [\mathbf{B}_0]_{1,1}[\mathbf{B}_0]_{2,2} - [\mathbf{B}_0]_{1,2}[\mathbf{B}_0]_{2,1}; \\ q_1 &= -[\mathbf{B}_1]_{1,2}[\mathbf{B}_1]_{3,3}, \quad p_1 = [\mathbf{B}_1]_{1,1}[\mathbf{B}_1]_{3,3}, \\ h_1 &= [\mathbf{B}_1]_{1,2}[\mathbf{B}_1]_{3,1} - [\mathbf{B}_1]_{1,1}[\mathbf{B}_1]_{3,2}. \end{aligned}$$

В представлениях (19) параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются как два различных корня уравнения (18) удовлетворяющие ограничениям (10). При этом в случае трансверсально-изотропного материала волновода с

$$\tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{11}, \quad \tilde{c}_{23} = \tilde{c}_{13}, \quad \tilde{c}_{55} = \tilde{c}_{44}, \quad \tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2$$

корни уравнения (18) имеют вид  $\alpha_{1,2,3,4} = \pm(n \pm 1)$  и, как следствие, построенная аналитическая модель базисных решений (9), (11), (14), (19) содержит неопределенность вида  $0/0$ . Численным способом устранения указанной неопределенности может служить, например, задание

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{22} &= (1 + \zeta)\tilde{c}_{11}, \quad \tilde{c}_{23} = (1 - \zeta)\tilde{c}_{13}, \\ \tilde{c}_{55} &= (1 - \zeta)\tilde{c}_{44}, \quad \tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2 \quad \forall \zeta > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Полученная форма базисных решений, помимо отмеченной выше устранимой особенности (20), в некоторых случаях имеет специфические неустранимые ограничения на применение, определяемые исключительно величинами модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ),  $\tilde{c}_{pp}$  ( $p = 4, 5, 6$ ). Они вытекают из физических ограничений (10) и выражаются в невозможности обеспечить физически непротиворечивое решение исходной задачи описания дисперсионного спектра для отдельных материалов рассматриваемого класса анизотропии при некоторых (зависящих от упругих свойств материала) значениях окружного волнового числа  $n$ . При

этом следует отметить, что применительно к представленным в литературе наборам упругих характеристик цилиндрически ортотропных материалов [4-9] исследование вышеописанного свойства позволяет сделать два заключения. Во-первых, множество подобных критических значений волнового числа всегда конечно и включает только его низшие значения. Во-вторых, существуют материалы [4], для которых рассматриваемая модель обеспечивает физически корректное решение для любых значений  $n$ .

По аналогии с (7) вводятся представления

$$\sigma_{rr}(r, \theta, z, t) = \tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(r) \exp(\lambda r/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz),$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) = i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(r) \exp(\lambda r/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz),$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) = i\tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(r) \exp(\lambda r/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + ikz)$$

и определяются вектор-функции

$$\mathbf{U}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(n)}(r) \\ \tilde{u}_\theta^{(n)}(r) \\ \tilde{u}_z^{(n)}(r) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(r) \end{bmatrix},$$

для которых на основании (1), (2), (6), (7) и (9) получаются разложения

$$\mathbf{U}(r) = \mathbf{Q}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m, \quad \mathbf{S}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{P}_m(r) \mathbf{X}_m. \quad (21)$$

Здесь  $\mathbf{Q}(r)$  и  $\mathbf{P}_m(r)$  – квадратные функциональные матрицы размерности 3, ненулевые элементы которых имеют представления

$$[\mathbf{Q}(r)]_{1,1} = [\mathbf{Q}(r)]_{2,2} = r^{1+\alpha-\delta}, \quad [\mathbf{Q}(r)]_{3,3} = r^{\alpha+\delta},$$

$$[\mathbf{P}_m(r)]_{1,1} = r^{\alpha-\delta} (\tilde{c}_{12} + (m + \alpha + 1 - \delta) \tilde{c}_{11} - \lambda r \tilde{c}_{11}/2),$$

$$[\mathbf{P}_m(r)]_{1,2} = -nr^{\alpha-\delta} \tilde{c}_{12}, \quad [\mathbf{P}_m(r)]_{1,3} = -kr^{\alpha+\delta} \tilde{c}_{13},$$

$$[\mathbf{P}_m(r)]_{2,1} = nr^{\alpha-\delta} \tilde{c}_{66}, \quad [\mathbf{P}_m(r)]_{3,1} = kr^{\alpha+1+\delta} \tilde{c}_{5,5},$$

$$[\mathbf{P}_m(r)]_{2,2} = r^{\alpha-\delta} (m + \alpha - \delta - \lambda r/2) \tilde{c}_{66},$$

$$[\mathbf{P}_m(r)]_{3,3} = r^{\alpha+\delta-1} (m + \alpha + \delta - \lambda r/2) \tilde{c}_{55}.$$

Наконец, из граничных условий (4) и (5) определяются искомые дисперсионные соотношения

$$F_u^{(n)}(\Omega, k) = \det \left( \left[ \mathbf{U}(r)|_{\Gamma_1^{(n)}}, \mathbf{U}(r)|_{\Gamma_2^{(n)}}, \mathbf{U}(r)|_{\Gamma_3^{(n)}} \right] \right) = 0, \quad (22)$$

$$F_s^{(n)}(\Omega, k) = \det \left( \left[ \mathbf{S}(r)|_{\Upsilon_1^{(n)}}, \mathbf{S}(r)|_{\Upsilon_2^{(n)}}, \mathbf{S}(r)|_{\Upsilon_3^{(n)}} \right] \right) = 0. \quad (23)$$

Таким образом, для отдельно рассматриваемых случаев  $n = 0$  и  $n \geq 1$  соотношениями (14) и (19) определены начальные условия формирования трех независимых базисных решения, соответственно,  $\{\Upsilon_1^{(0)}, \Upsilon_2^{(0)}, \Upsilon_3^{(0)}\}$  и  $\{\Upsilon_1^{(n)}, \Upsilon_2^{(n)}, \Upsilon_3^{(n)}\}$ ; в явном виде в матричной форме получены рекуррентные соотношения (11) для построения искомых базисных решений; с использованием матричных разложений (21) определены дисперсионные соотношения (22) и (23) соответственно для жестко закрепленной и свободной поверхности волновода. Специальный вид комплексных представлений для функций колебательных упругих перемещений в форме (7) обеспечивает справедливость оценок

$$\begin{aligned} \left\| \left( \mathbf{A}_0^{(m)} \right)^{-1} \mathbf{A}_1^{(m)} \right\| &\leq \frac{\kappa_1}{m^2}, & \left\| \left( \mathbf{A}_0^{(m)} \right)^{-1} \mathbf{A}_2^{(m)} \right\| &\leq \frac{\kappa_2}{m}, \\ \left\| \left( \mathbf{A}_0^{(m)} \right)^{-1} \mathbf{A}_3^{(m)} \right\| &\leq \frac{\kappa_3}{m^2}, \end{aligned}$$

непосредственным следствием которых является заключение об абсолютной и равномерной сходимости разложений (21) на любом конечном отрезке  $r \in [0, R]$ .

**3. Результаты вычислительного эксперимента.** В процессе численных исследований с целью верификации построенного в работе аналитического решения реализован расчет фрагмента спектра мод распространяющихся нормальных волн для однородного ( $\lambda = 0$ ) трансверсально-изотропного сплошного цилиндрического волновода из кобальта. Результаты ранее проводившихся исследований для аналогичного волновода представлены в работе [10]. Учитывая особенности применения построенного решения в частном случае трансверсально-изотропных материалов, вычислительный эксперимент проводился с высокой точностью для псевдотрансформированного материала на основе кобальта с упругими постоянными вида (20) при  $\varsigma = 10^{-5}$ . Сопоставление результатов выполненных расчетов для цилиндров со свободной граничной поверхностью обнаруживает их полное соответствие.

При исследовании факторов влияния величины показателя радиальной неоднородности  $\lambda$  и значений окружного волнового числа  $n$  на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн был выбран конкретный цилиндрически ортотропный материал [4] с параметрами

$$\begin{aligned} E_1 = 43/24, \quad E_2 = 179/24, \quad E_3 = 131/24, \quad G_{23} = 28/24, \\ G_{13} = 1, \quad G_{12} = 1, \quad \nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.08, \quad \nu_{13} = 0.102, \end{aligned}$$

волноводные свойства которого обеспечивают физически корректное решение задачи описания дисперсионного спектра в рамках используемой модели для любых значений  $n$ .

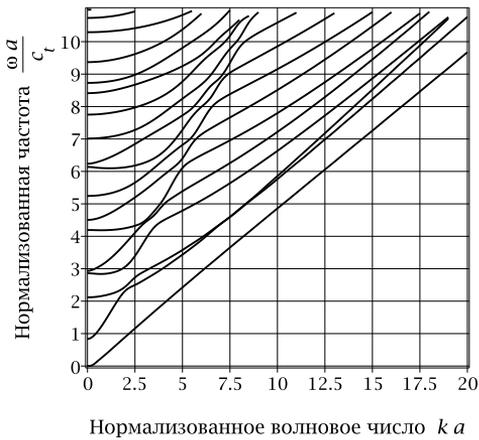


Рис. 1. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного цилиндра ( $\lambda = 2$ ) при  $n = 1$ .

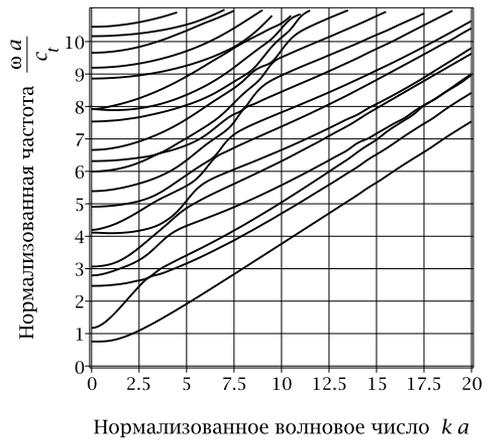


Рис. 2. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного цилиндра ( $\lambda = 2$ ) при  $n = 2$ .

Расчет фрагментов спектра бегущих нормальных волн в диапазонах изменения параметров нормированной частоты  $\omega a/c_t \in [0, 11]$  и продольного волнового числа  $k a \in [0, 25]$  осуществлен для значений окружного волнового числа  $n = 1$  и  $n = 2$  в случаях однородного ( $\lambda = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = 2$ ) цилиндров со свободными границами (23). Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости независимо для каждого значения окружного волнового числа  $n$  определялся из условия равенства единице низшей не нулевой приведенной критической частоты ветвей спектра бегущих нормальных волн в однородном волноводе с  $a = R_*$ . Соответствующие фрагменты дисперсионных спектров представлены на рис. 1 и рис. 2. Характерной отличительной особенностью представленных распределений является отсутствие в спектре для  $n = 2$  ветви с нулевой частотой запертия.

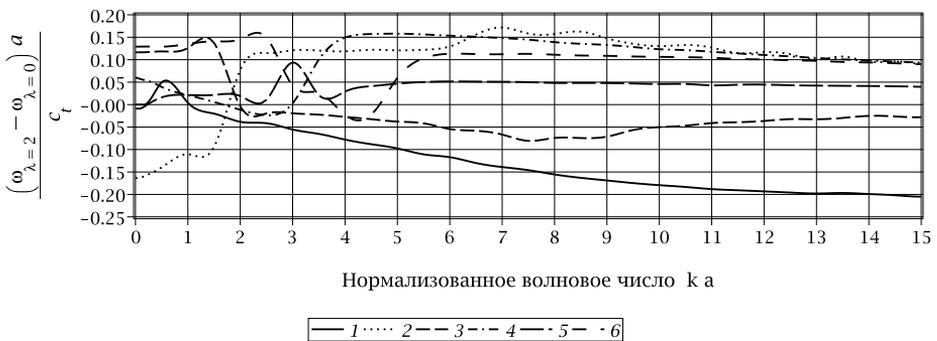


Рис. 3. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного ( $\lambda = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = 2$ ) цилиндров при  $n = 1$ .

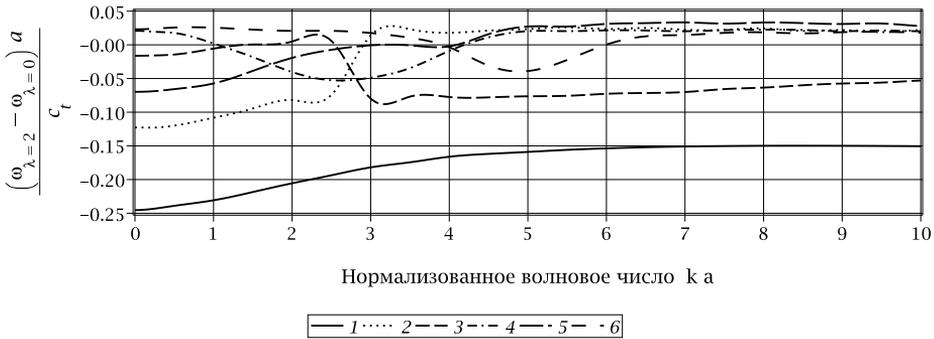


Рис. 4. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного ( $\lambda = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = 2$ ) цилиндров при  $n = 2$ .

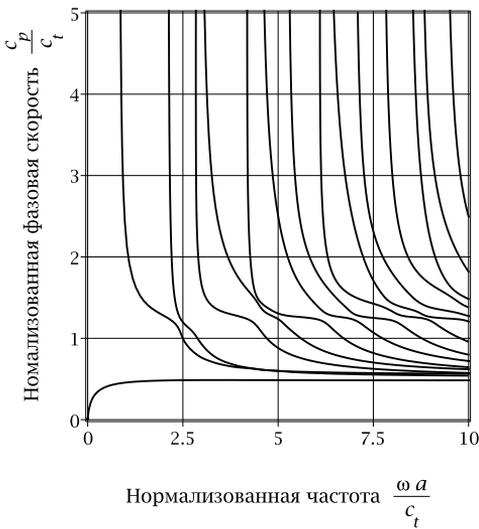


Рис. 5. Расчет фазовых скоростей для неоднородного цилиндра ( $\lambda = 2$ ) при  $n = 1$ .

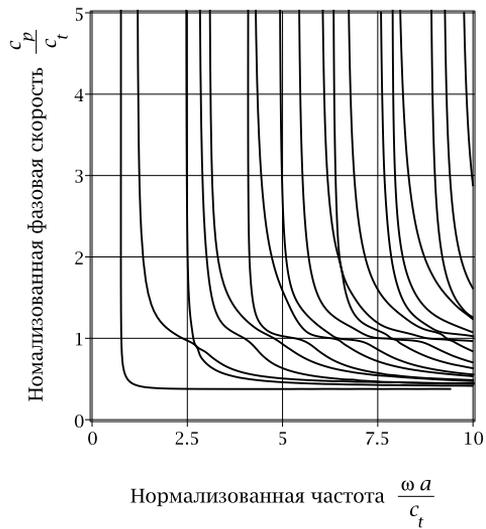


Рис. 6. Расчет фазовых скоростей для неоднородного цилиндра ( $\lambda = 2$ ) при  $n = 2$ .

На рис. 3 и рис. 4 представлены результаты сравнительного количественного анализа различий в поведении первых шести мод спектров для однородного ( $\lambda = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = 2$ ) цилиндров при  $n = 1$  и  $n = 2$ . В качестве характеристики отличий в распределениях ветвей сопоставляемых спектров использовалась функция  $\Delta\omega(k) = (\omega_{\lambda=2}(ka) - \omega_{\lambda=0}(ka)) a/c_t$ . Ее положительные и отрицательные значения соответственно описывают эффекты уменьшения либо увеличения приведенной частоты волны рассматриваемой относительной длины из моды с фиксированным номером для неоднородного волновода. В этой связи можно отметить, что для  $n = 2$  в диапазоне  $ka > 7.0$  значения рассматриваемой функции для всех ветвей стабилизируются и опи-

сывают уменьшение приведенных частот волн первой и третьей моды, а также увеличение приведенных частот волн второй, четвертой, пятой и шестой моды в неоднородном цилиндре. При меньших значениях нормированного волнового числа в поведении анализируемых функций для  $n = 2$  наблюдается существенная изменчивость, и наибольшие отличия в значениях приведенных частот возникают для волн двух низших мод в длинноволновом диапазоне. Для спектров волн с  $n = 1$  тенденция к стабилизации значений рассматриваемой функции наблюдается в более коротковолновом диапазоне  $ka > 14.0$ , а наибольшие отличия возникают для первой моды в коротковолновом диапазоне и для второй моды в длинноволновом диапазоне.

Результаты расчетов распределений нормированных фазовых скоростей для нормальных распространяющихся волн с  $n = 1$  и  $n = 2$  в неоднородном цилиндре представлены, соответственно, на рис. 5 и рис. 6. В качестве наиболее существенных отличий, обусловленных увеличением показателя изменчивости в окружном направлении, можно указать снижение приведенной частоты формирования «платообразного» участка распределения при  $n = 2$ , а также различия в соотношениях скоростей волн второй и третьей моды с частотами в окрестности значения  $\omega a/c_t \approx 3$ .

**Выводы.** В результате проведенных исследований в форме абсолютно и равномерно сходящихся степенных рядов с определяемыми из рекуррентных соотношений коэффициентами получено решение системы дифференциальных уравнений, описывающее распространение неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с экспоненциальной радиальной неоднородностью. Построенное решение использовано для получения дисперсионного уравнения, определяющего спектр указанных волн для цилиндров со свободной граничной поверхностью. Для материала, волноводные свойства которого обеспечивают физически корректное решение задачи описания дисперсионного спектра на основе предложенной модели для любых значений окружного волнового числа, проанализирована зависимость топологии распределений действительных ветвей спектров и фазовых скоростей бегущих нормальных волн от параметра радиальной неоднородности и значения окружного волнового числа. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

1. *Моисеенко И.А.* Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.
2. *Моисеенко И.А.* Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 179–189.
3. *Моисеенко И.А.* Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теор. и прикл. механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 139–145.
4. *Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л.* Распространение неосесимметричных упругих волн в анизотропном полом цилиндре. // Прикл. механика. – 1986. – 22, вып. 8. – С. 118–121.

5. Kardomateas G.A. Bifurcation of equilibrium in thick orthotropic cylindrical shells under axial compression // J. appl. mech. – 1995. – **62**, № 1. – P. 43–52.
6. Hallai J. Fracture of orthotropic materials under mixed mode loading // EM 388F Fracture Mechanics – 2008. – Term Paper. Austin, Texas: University of Texas at Austin, Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, (online). <http://imechanica.org/files/Julian's>.
7. Sun X.S., Chen Y, Tan V.B.C., Jaiman R.K., Tay T.E. Homogenization and stress analysis of multilayered composite offshore production risers // J. appl. mech. – 2014. – **81(3)**. – 031003 (12 p.)
8. Tsukrov I., Bayraktar H., Giovinazzo M., Goering J., Gross T., Fruscello M., Martinsson L. Finite Element Modeling to Predict Cure-Induced Microcracking in ThreeDimensional Woven Composites // Int. J. of Fracture. – 2011. – **172(2)**. – P. 209–216.
9. Tsukrov I, Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. // Int. J. Solids and Structures. – 2010. – **47**. – P. 25–33.
10. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N., Mirnezami S.A. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // Int. J. Solids and Structures. – 2007. – **44**. – P. 5236–5246.

### I.A. Moiseyenko, V.I. Storozhev

#### The spectra of non-axisymmetric normal elastic waves in orthotropic cylinders with functionally graded radial non-homogeneity

In this paper, of constructing solutions for the propagation of non-axisymmetric normal waves in radially non-homogeneous orthotropic cylinder problems is investigated. The elastic modules and density are taken as a exponential function of the radial coordinate. Expansions in uniformly and absolutely convergent series on radial coordinate for the components of the vector displacements and the components of the tensor stresses obtained. Dispersion relations describing the spectra of harmonic non-axisymmetric normal waves in the radially non-homogeneous cylindrical waveguide with free or rigidly fixed boundary surfaces made of cylindrical orthotropic material obtained. The effect of radial non-homogeneity ratio and circumferential wave numbers on the topology of the dispersion spectrums and distribution of the phase velocities of normal propagating waves studied.

**Keywords:** *cylindrical waveguide, normal waves, functionally graded materials, cylindrically orthotropic materials.*

Донецкий гос. ун-т  
mian@i.ua, stvi@i.ua

Получено 17.09.15