УДК 539.3:534.1:519

©2020. В.Е. Болнокин, Д.И. Мутин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев

ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОСЛАБЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЯМИ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ ПЛАСТИН С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Дано обобщение численно-аналитической нечетко-множественной методики учета разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров применительно к задаче определения коэффициентов концентрации характеристик электроупругого деформирования на контуре эллиптического отверстия в тонкой пьезоэлектрической пластине в случае ее обобщенного плоского напряженного состояния. Методика базируется на расширении областей определения расчетных соотношений классических четких моделей с переходом к нечетко-множественным аргументам путем применения эвристического принципа обобщения. Особенностью методики являются менее строгие требования к характеру исходной неопределенной информации в сравнении с вероятностно-стохастическими подходами.

Ключевые слова: *тонкие пьезоэлектрические пластины, обобщенное плоское напряженное состояние, эллиптические отверстия, концентрация электромеханических полей, разбросы исходных параметров, методы теории нечетких множеств, нечетко-интервальная аппроксимация, эвристический принцип обобщения.*

Введение и постановка задачи. Оценивание количественного влияния факторов неточности задания исходных параметров в задачах описания уровней концентрации механических напряжений около неоднородностей типа отверстий, жестких либо деформируемых вставок в тонких пластинах является одной из важных актуальных задач математического моделирования деформационных процессов как в фундаментальном, так и в прикладном отношении.

Возможности применения для получения подобных оценок методов вероятностно-стохастического анализа охарактеризованы в работах [1–5]; одним из условий их эффективного применения, помимо прочего, является наличие достаточной статистической базы данных о подлежащих учету разбросах, обусловленных погрешностями экспериментальных замеров и технологическими факторами изготовления соответствующих конструкционных элементов.

Вторым возможным подходом к решению данной проблемы является применение методов теории нечетких вычислений [6–9]. В его рамках в работах [10–19] разработаны методики учета неопределенности исходных параметров в задачах о концентрации механических и термомеханических напряжений в тонких пластинах с круговыми, эллиптическими и многоугольными отверстиями с закругленными углами, в тонких пластинных с включениями и вставками. Особенностью этих методик являются менее строгие требования к характеру исходной неопределенной информации в сравнении с вероятностно-стохастическими подходами.

Целью настоящей работы является обобщение численно-аналитической нечетко-множественной методики учета разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров применительно к задаче определения коэффициентов концентрации характеристик электроупругого деформирования на контуре эллиптического отверстия в тонкой пьезоэлектрической пластине в случае ее обобщенного плоского напряженного состояния. Представляемая нечетко-множественная методика предназначена для получения оценок влияния разбросов в значениях физико-механических и геометрических параметров на показатели концентрации компонентов электромеханического поля у отверстия эллиптического очертания при сжатии–растяжении тонкой пьезокерамической пластины из материала класса 6 mm гексагональной системы, либо при задании порождающих сжатие–растяжение пластины внешних воздействий электрической природы. Она базируется на построенном в работах [20, 21] аналитическом решении задачи данного типа в классической детерминистической постановке и переходе в этом решении к нечетко-множественным аргументам путем применения эвристического принципа обобщения.

Рассматривается обобщенное плоское напряженное состояние тонкой пластины неограниченных размеров из линейно поляризованной пьезокерамики, электромеханические свойства которой характеризуются: множествами коэффициентов деформации при постоянной индукции s_{ij}^{D}; пьезомодулями деформаций при постоянных напряжениях и индукции $g_{ki}^{\sigma,D}$; коэффициентами диэлектрической восприимчивости при постоянных напряжениях β_{kl}^{σ}. В последующем изложении верхние индексы у перечисленных величин, характеризующие особенности измерения соответствующих постоянных, опускаются.

В срединной плоскости пластины введены прямоугольные координаты Ox_1x_2. Пластина содержит эллиптическое отверстие с центром в точке O, полуоси которого имею значения a, b и ориентированы вдоль координатных осей Ox_j. Ось поляризации керамического материала пластины ориентирована вдоль Ox_2. В этом случае свойства пластины при обобщенном плоском напряженном состоянии описываются подмножествами ненулевых физико-механических характеристик

$$s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}; \quad g_{21}, g_{22}, g_{16}; \quad \beta_{11}, \beta_{22}.$$

Полагается, что на контуре отверстия задаются однородные граничные условия для силовых и электрических характеристик. Пластина подвержена внешним воздействиям в виде прилагаемых на бесконечности равномерных растягивающих усилий $\sigma_{22}^{(\infty)} = p$; также может быть исследован случай задания на бесконечности постоянной функции напряженности электрического поля $E_2^{(\infty)} = e$.

1. Расчетные соотношения детерминистической модели. В рамках описываемого в [20, 21] метода потенциалов обобщенных комплексных переменных, исследуемые характеристики деформационного механического и электрического полей в точках контура Γ_* эллиптического отверстия, имеющего во вводимых в плоскости Ox_1x_2 полярных координатах $Or\theta$ параметрическое описание

$$(x_1)_{\Gamma_*} = a\cos\theta, \qquad (x_2)_{\Gamma_*} = b\sin\theta, \qquad \theta\in[0,2\pi], \tag{1}$$

рассчитываются с использованием следующих представлений для характеристик электромеханического поля:

$$u_1(x_1,x_2) = 2Re\sum_{k=1}^{3} p_k\Phi_k(z_k), \quad u_2(x_1,x_2) = 2Re\sum_{k=1}^{3} q_k\Phi_k(z_k); \tag{2}$$

$$\phi(x_1,x_2) = 2Re\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\Phi_k(z_k); \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1,x_2) &= 2Re\textstyle\sum_{k=1}^{3}\lambda_{1k}\Phi'_k(z_k),\\ \sigma_{22}(x_1,x_2) &= 2Re\textstyle\sum_{k=1}^{3}\lambda_{2k}\Phi'_k(z_k),\\ \sigma_{12}(x_1,x_2) &= 2Re\textstyle\sum_{k=1}^{3}\lambda_{6k}\Phi'_k(z_k); \end{aligned} \tag{4}$$

$$D_1(x_1,x_2) = 2Re\sum_{k=1}^{3}\lambda_{7k}\Phi'_k(z_k), \quad D_2(x_1,x_2) = 2Re\sum_{k=1}^{3}\lambda_{8k}\Phi'_k(z_k); \tag{5}$$

$$E_1(x_1,x_2) = -2Re\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\Phi'_k(z_k), \quad E_2(x_1,x_2) = -2Re\sum_{k=1}^{3}\mu_k\gamma_k\Phi'_k(z_k). \tag{6}$$

В представлениях (2) – (6)

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + ((a_{k1}-\Gamma_k R_k m_k)/(2R_k m_k))(z_k \mp (z_k^2 - 4R_k m_k)^{1/2}),\\ \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k + ((a_{k1}-\Gamma_k R_k m_k)/(2R_k m_k))(1 \pm z_k(z_k^2 - 4R_k m_k)^{-1/2}),\\ z_k &= x_1+\mu_k x_2, \quad R_k = (a-i\mu_k b)/2, \quad m_k = (a+i\mu_k b)/(a-i\mu_k b); \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\overline{r}_1\overline{R}_1\overline{\Gamma}_1 - \overline{s}_2\overline{R}_2\overline{\Gamma}_2 - \overline{e}_3\overline{R}_3\overline{\Gamma}_3,\\ a_{21} &= -\overline{r}_2\overline{R}_2\overline{\Gamma}_2 - \overline{s}_3\overline{R}_3\overline{\Gamma}_3 - \overline{e}_1\overline{R}_1\overline{\Gamma}_1,\\ a_{31} &= -\overline{r}_3\overline{R}_3\overline{\Gamma}_3 - \overline{s}_1\overline{R}_1\overline{\Gamma}_1 - \overline{e}_2\overline{R}_2\overline{\Gamma}_2; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\overline{r}_k = (\overline{\lambda}_{6\mathrm{k}}M_{6k} + \overline{\lambda}_{2k}M_{2k} + \overline{\lambda}_{8k}M_{8k})/\Delta_k;$$

$$\overline{s}_1 = (\overline{\lambda}_{61}M_{63} + \overline{\lambda}_{21}M_{23} + \overline{\lambda}_{81}M_{83})/\Delta_3,$$

$$\overline{s}_2 = (\overline{\lambda}_{62}M_{61} + \overline{\lambda}_{22}M_{21} + \overline{\lambda}_{82}M_{81})/\Delta_1,$$

$$\overline{s}_3 = (\overline{\lambda}_{63}M_{62} + \overline{\lambda}_{23}M_{22} + \overline{\lambda}_{83}M_{82})/\Delta_2;$$

$$\overline{e}_1 = (\overline{\lambda}_{61} M_{62} + \overline{\lambda}_{21} M_{22} + \overline{\lambda}_{81} M_{82})/\Delta_2,$$
$$\overline{e}_2 = (\overline{\lambda}_{62} M_{63} + \overline{\lambda}_{22} M_{23} + \overline{\lambda}_{82} M_{83})/\Delta_3,$$
$$\overline{e}_3 = (\overline{\lambda}_{63} M_{61} + \overline{\lambda}_{23} M_{21} + \overline{\lambda}_{83} M_{81})/\Delta_1;$$
$$\Delta_k = \lambda_{6\mathrm{k}} M_{6k} + \lambda_{2k} M_{2k} + \lambda_{8k} M_{8k};$$
$$M_{21} = \lambda_{63}\lambda_{82} - \lambda_{62}\lambda_{83}, \quad M_{22} = \lambda_{61}\lambda_{83} - \lambda_{63}\lambda_{81}, \quad M_{23} = \lambda_{62}\lambda_{81} - \lambda_{61}\lambda_{82};$$
$$M_{61} = \lambda_{83}\lambda_{22} - \lambda_{82}\lambda_{23}, \quad M_{62} = \lambda_{81}\lambda_{23} - \lambda_{83}\lambda_{21}, \quad M_{63} = \lambda_{82}\lambda_{21} - \lambda_{81}\lambda_{22};$$
$$M_{81} = \lambda_{23}\lambda_{62} - \lambda_{22}\lambda_{63}, \quad M_{82} = \lambda_{21}\lambda_{63} - \lambda_{23}\lambda_{61}, \quad M_{83} = \lambda_{22}\lambda_{61} - \lambda_{21}\lambda_{62};$$
$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_{\mathrm{k}}, \quad \lambda_{7k} = \nu_k\mu_k, \quad \lambda_{8k} = -\nu_k;$$
$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - g_{21}\nu_k + s_{12};$$
$$q_k = s_{12}\mu_k + s_{22}\mu_k^{-1} - g_{22}\nu_k\mu_k^{-1}; \quad \gamma_k = -g_{16}\mu_k - \beta_{11}\nu_k\mu_k;$$

μ_k $(k = \overline{1,3})$ – различные по модулю корни бикубического уравнения

$$\begin{gathered} L_4(\mu)L_2(\mu) - L_3^2(\mu) = 0, \\ L_4(\mu) = s_{11}\mu^4 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + s_{22}, \\ L_2(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 - \beta_{22}, \\ L_3(\mu) = -((g_{21} + g_{16})\mu^2 + g_{22}); \\ \nu_k = -L_3(\mu_k)/L_2(\mu_k). \end{gathered} \tag{9}$$

Величины Γ_k в рассматриваемом случае определяются из системы линейных алгебраических уравнений, записываемой в комплексной форме:

$$2Re\sum_{k=1}^{3}(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -\gamma_k, -\mu_k\gamma_k, q_k - \mu_k p_k)\Gamma_k = (0, p, 0, 0, e, 0). \tag{10}$$

Непосредственно исследуемой в рассматриваемой модели характеристикой является контурное распределение окружного напряжения $(\sigma_{ss}(\theta))_{\Gamma_*}$ вдоль границы отверстия, задаваемое неявной функциональной зависимостью

$$\begin{gathered} (\sigma_{ss}(\theta))_{\Gamma_*} = F_{ss}(\theta, p, e, a, b, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22}) = \\ = (1/2)[(\sigma_{11}(\theta) + \sigma_{22}(\theta))_{\Gamma_*} + (\sigma_{22}(\theta) - \\ -\sigma_{11}(\theta))_{\Gamma_*}\Phi_1(\theta) - 2(\sigma_{12}(\theta))_{\Gamma_*}\Phi_2(\theta). \end{gathered} \tag{11}$$

Эта функциональная зависимость записывается с использованием представлений (2) – (10), а также выражений

$$\begin{gathered} (z_k(\theta))_{\Gamma_*} = a\ \cos\theta + \mu_k b\ \sin\theta, \\ \Phi_1(\theta) = ((\varepsilon_*^2 + 1)\cos 2\theta + 2\varepsilon_*)(\varepsilon_*^2 + 2\varepsilon_*\cos 2\theta + 1)^{-1}, \\ \Phi_2(\theta) = ((\varepsilon_*^2 + 1)\sin 2\theta)(\varepsilon_*^2 + 2\varepsilon_*\cos 2\theta + 1)^{-1}. \end{gathered} \tag{12}$$

2. Нечетко-множественная методика учета неопределенности значений исходных параметров. В рамках представляемой методики в самом общем случае реализуется переход к нечетко-интервальным представлениям для полного набора аргументов $\tilde{p}, \tilde{e}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{22}, \tilde{s}_{12}, \tilde{s}_{66}, \tilde{g}_{21}, \tilde{g}_{22}, \tilde{g}_{16}, \tilde{\beta}_{11}, \tilde{\beta}_{22}$ функциональной зависимости (11). При допущениях о возможности пренебрежения разбросами для некоторых исходных параметров рассматриваемой модели, переход к нечетко-множественным представлениям на основе того или иного алгоритма фаззификации осуществляется только для параметров с существенной мерой неопределенности. Принимается концепция эффективного приближения неопределенных параметров с разбросами значений в рассматриваемой задаче нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами, для которых, соответственно, вводятся представления кортежами реперных значений и суперпозициями множеств α-уровня:

$$
\begin{gathered}
\tilde{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{p}_\alpha, \overline{p}_\alpha], \\
\underline{p}_\alpha = (1-\alpha)p_1 + \alpha p_2, \quad \overline{p}_\alpha = \alpha p_3 + (1-\alpha)p_4; \ldots; \\
\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha], \\
\underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \overline{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4; \\
\tilde{s}_{11} = (s_{111}, s_{112}, s_{113}, s_{114}) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{s}_{11\alpha}, \overline{s}_{11\alpha}], \\
\underline{s}_{11\alpha} = (1-\alpha)s_{111} + \alpha s_{112}, \quad \overline{s}_{11\alpha} = \alpha s_{113} + (1-\alpha)s_{114}; \ldots; \\
\tilde{s}_{66} = (s_{661}, s_{662}, s_{663}, s_{664}) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{s}_{66\alpha}, \overline{s}_{66\alpha}], \\
\underline{s}_{66\alpha} = (1-\alpha)s_{661} + \alpha s_{662}, \quad \overline{s}_{66\alpha} = \alpha s_{663} + (1-\alpha)s_{664}; \\
\tilde{g}_{21} = (g_{211}, g_{212}, g_{213}, g_{214}) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{g}_{21\alpha}, \overline{g}_{21\alpha}], \\
\underline{g}_{21\alpha} = (1-\alpha)g_{211} + \alpha g_{212}, \quad \overline{g}_{21\alpha} = \alpha g_{213} + (1-\alpha)g_{214}; \ldots; \\
\tilde{g}_{16} = (g_{161}, g_{162}, g_{163}, g_{164}) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{g}_{16\alpha}, \overline{g}_{16\alpha}], \\
\underline{g}_{16\alpha} = (1-\alpha)g_{161} + \alpha g_{162}, \quad \overline{g}_{16\alpha} = \alpha g_{163} + (1-\alpha)g_{164}; \\
\tilde{\beta}_{11} = (\beta_{111}, \beta_{112}, \beta_{113}, \beta_{114}) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\beta}_{11\alpha}, \overline{\beta}_{11\alpha}], \\
\underline{\beta}_{11\alpha} = (1-\alpha)\beta_{111} + \alpha \beta_{112}, \quad \overline{\beta}_{11\alpha} = \alpha \beta_{113} + (1-\alpha)\beta_{114}; \\
\tilde{\beta}_{22} = (\beta_{221}, \beta_{222}, \beta_{223}, \beta_{224}) = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\beta}_{22\alpha}, \overline{\beta}_{22\alpha}], \\
\underline{\beta}_{22\alpha} = (1-\alpha)\beta_{221} + \alpha \beta_{222}, \quad \overline{\beta}_{22\alpha} = \alpha \beta_{223} + (1-\alpha)\beta_{224}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Распространение на исследуемый тип моделей электроупругого деформирования методического подхода [10–19], заключающегося в применении α-уровневой версии эвристического принципа обобщения для перехода к нечетко-интервальным аргументам в описывающих эндогенные характеристики функциональных соотношениях, полученных в рамках классических детерминистических версий моделей, приводит к расчетному соотношению вида

$$\begin{gathered}(\tilde{\sigma}_{ss}(\theta))_{\Gamma_*} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]}[\underline{\sigma}_{\Gamma ss\alpha}(\theta),\ \overline{\sigma}_{\Gamma ss\alpha}(\theta)],\\ \underline{\sigma}_{\Gamma ss\alpha}(\theta) = \inf_{\Pi\in\Omega_\alpha} F_{ss}(\theta,\Pi),\\ \overline{\sigma}_{\Gamma ss\alpha}(\theta) = \sup_{\Pi\in\Omega_\alpha} F_{ss}(\theta,\Pi).\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $\Pi = (p, e, a, b, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22})$ – кортеж из тринадцати физико-механических и геометрических экзогенных параметров рассматриваемой модели; Ω_α – тринадцатимерные подмножества изменения аргументов на α-уровне:

$$\begin{gathered}\Omega_\alpha = [\underline{p}_\alpha, \overline{p}_\alpha] \times [\underline{e}_\alpha, \overline{e}_\alpha] \times [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \times [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha] \times [\underline{s}_{11\alpha}, \overline{s}_{11\alpha}] \times ... \times\\ \times[\underline{s}_{66\alpha}, \overline{s}_{66\alpha}] \times [\underline{g}_{21\alpha}, \overline{g}_{21\alpha}] \times ... \times [\underline{g}_{16\alpha}, \overline{g}_{16\alpha}] \times [\overline{\beta}_{11\alpha}, \underline{\beta}_{11\alpha}] \times [\underline{\beta}_{22\alpha}, \overline{\beta}_{22\alpha}].\end{gathered} \tag{15}$$

В случае принятия гипотезы о несущественности влияния разбросов для части указанных экзогенных параметров, они исключаются из множества варьируемых в соотношениях (14) с соответствующей модификацией вида Ω_α и учитываются в расчетных формулах со своими точными значениями.

Таким образом, расчетный алгоритм, базирующийся на использовании выражения (3), позволяет реализовывать цели описываемого исследования.

3. Апробация расчетных соотношений разработанной методики. Представляемый частный пример расчетов на основе соотношений (2)–(15) относится к случаю пластины из пьезокерамики Ceramic. В [22] с круговым отверстием, которая растягивается вдоль оси Ox_2 приложенными на бесконечности равномерно распределенными усилиями, при следующих вводимых нечетко-интервальных описаниях для обладающих разбросами исходных физико-механических и геометрических параметров модели:

$$\tilde{p} = (0.96p_*, 0.99p_*, 1.0p_*, 1.05p_*), \quad \tilde{a} = \tilde{b} = (0.49l_*, 0.5l_*, 0.51l_*, 0.53l_*),$$

$$\tilde{s}_{11} = (8.13s_*, 8.26s_*, 8.30s_*, 8.55s_*), \quad \tilde{s}_{22} = (6.89s_*, 7.0s_*, 7.04s_*, 7.14s_*),$$

$$\tilde{s}_{12} = (-1.93s_*, -1.91s_*, -1.90s_*, -1.86s_*),$$

$$\tilde{s}_{66} = (16.76s_*, 16.93s_*, 17.1s_*, 17.44s_*),$$

$$\tilde{g}_{21} = (-5.61g_*, -5.55g_*, -5.50g_*, -5.45g_*),$$

$$\tilde{g}_{22} = (13.82g_*, 14.10g_*, 14.17g_*, 14.31g_*),$$

$$\tilde{g}_{16} = (20.59g_*, 21.0g_*, 21.11g_*, 21.36g_*),$$

$$\tilde{\beta}_{11} = (85.18\beta_*, 86.55\beta_*, 86.92\beta_*, 88.66\beta_*),$$

$$\tilde{\beta}_{22} = (92.28\beta_*, 93.69\beta_*, 94.16\beta_*, 95.57\beta_*),$$

$$p_* = 10^5\ [\text{Па}], \qquad l_* = 1[\text{м}], \qquad s_* = 10^{-6}[\text{МПа}]^{-1},$$

$$g_* = 10^{-3}[\text{м}^2/\text{МКл}], \qquad \beta_* = 10^5[\text{Мн}\cdot\text{м}^2/\text{МКл}^2].$$

Результаты расчетов по оцениванию показателей концентрации $(\sigma_{ss})_{\Gamma_*}$ применительно к варианту учета разбросов в значениях механических параметров $\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{22}, \tilde{s}_{12}, \tilde{s}_{66}$ и задания точных значений $p = 1.0p_*$, $a = b = 0.5l_*$, $g_{21} = -5.50g_*$,$g_{22} = 14.1g_*$, $g_{16} = 21.0g_*$, $\beta_{11} = 86.92\beta_*$, $\beta_{22} = 94.16\beta_*$, представлены на рис. 1, 2. На них соответственно изображен вид рассчитанных функций принадлежности для нечетко-множественных оценок концентрации напряжений $(\sigma_{ssp})_A = (\sigma_{ss})_A/p$, $(\sigma_{ssp})_B = (\sigma_{ss})_B/p$ в двух точках контура $A : \{x_1 = a, x_2 = 0\}$ и $B : \{x_1 = 0, x_2 = b\}$.

Аналогичные зависимости представлены на рис. 3, 4 для случая учета разбросов в значениях характеристик $g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22}$ и точных значениях параметров $p = 1.0p_*$, $a = b = 0.5l_*$, $s_{11} = 8.30s_*$, $s_{22} = 7.0s_*$, $s_{12} = -1.90s_*$, $s_{66} = 17.1s_*$.

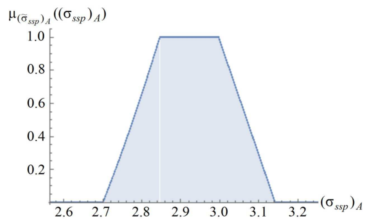

Рис. 1. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_A}((\sigma_{ssp})_A)$ в случае учета разбросов механических характеристик.

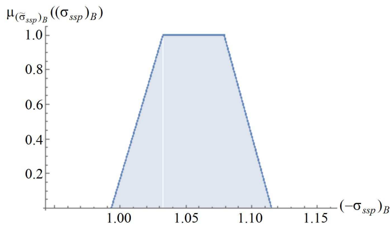

Рис. 2. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_B}((\sigma_{ssp})_B)$ в случае учета разбросов механических характеристик.

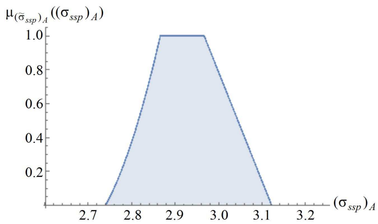

Рис. 3. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_A}((\sigma_{ssp})_A)$ в случае учета разбросов пьезомодулей деформации и диэлектрических восприимчивостей.

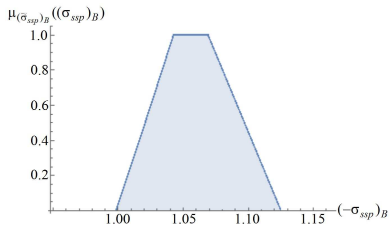

Рис. 4. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_B}((\sigma_{ssp})_B)$ в случае учета разбросов пьезомодулей деформации и диэлектрических восприимчивостей.

Сопоставление рассчитанных форм функций принадлежности указывает, в частности, на снижение уровней неопределенности эндогенных характеристик для случая учета разбросов пьезомодулей деформаций и диэлектрических восприимчивостей $g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22}$ в сравнении со случаем учета разбросов механических характеристик $s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}$. В большей мере это касается снижения интервалов разброса значений показателей концентрации на модальных интервалах, оцениваемых как наиболее достоверные.

Выводы. Результатом описанных в работе исследований является распространение нечетко-множественного методического приема получения оценок для неопределенных значений коэффициентов концентрации механических напряжений около отверстий либо вставок в деформируемых тонких пластинах на задачу электроупругого деформирования тонкой пьезоэлектрической пластины с эллиптическим отверстием в рамках модели обобщенного плоского напряженного состояния. Методика предназначена для учета влияния разбросов в значениях исходных геометрических и физико-механических параметров конструкции, обусловленных погрешностями экспериментальных измерений характеристик модели деформирования, либо допускаемыми отклонениями технологического характера. Она базируется на расширении областей определения расчетных соотношений классического варианта решения при переходе в них к нечетко-интервальным аргументам на основе применения эвристического принципа обобщения. Особенностью представленной методики являются менее строгие требования к характеру исходной неопределенной информации в сравнении с требуемыми при использовании вероятностно-стохастических подходов. При реализации тестовых расчетов с применением разработанной методики установлено, в частности, снижение уровней неопределенности эндогенных характеристик коэффициентов концентрации при отдельном учете разбросов пьезомодулей деформаций и диэлектрических восприимчивостей материала пластины в сравнении со случаем отдельного учета однопорядковых разбросов лишь для его механических деформационных характеристик.

1. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
2. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
3. *Лавренюк В.И.* Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала // Прикл. механика. – 1973. – **IX**, вып. 4. – С. 128–132.
4. *Марасанов А.И.* К вопросу о стохастическом анализе упругих систем // Вестн. МИИТ. – 2003. – № 9. – С. 121–125.
5. *Попов Н.Н.* Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2008. – № 2(17). – С. 126–132.
6. *Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Изд-во Машиностроение. – **1**, 2004. – 397 с.
7. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
8. *Grzegorzewski P., Mr'owka E.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – **153**. – P. 115–135.
9. *Ban A.I., Coroianu L.C., Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximation and Aggregation // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – **177**. – P. 45–59.
10. *Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Анализ неопределенности в оценках концентрации напряжений у контура эллиптического отверстия с нечетким показателем эксцентриситета в анизотропной пластине // XII Всерос. школа-семинар "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете" (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017 г.): Тез. докл. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федер. ун-та, 2017. – С. 141.

11. *Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожев С.В.* Оценки влияния нечеткости геометрических экзогенных параметров в модели растяжения ортотропной пластины с эллиптическим отверстием // Журнал теор. и прикл. механики. – 2017. – № 1(58). – С. 19–26.
12. *Сторожев С.В.* Нечетко множественный анализ влияния разброса физико-механических и геометрических параметров при исследовании концентрации напряжений в пластинах с эллиптическими отверстиями // Междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых "Донецкие чтения–2017" (Донецк, 17–20 октября 2017 г.): Матер. конф. – Т. 1. Физ.-мат. и техн. науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ. – 2017. – С. 35–36.
13. *Болнокин В.Е., Номбре С.Б., Сторожев С.В.* Оценки влияния нечеткости экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния изотропной пластины с эллиптическим упругим включением // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 134–148.
14. *Болнокин В.Е., Номбре С.Б., Сторожев С.В.* Нечеткие оценки показателей концентрации напряжений в телах с упругими включениями // XIII Всерос. школа-семинар "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете" (пос. Дивноморское, 28 мая – 1 июня 2018 г.): Тез. докл. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федер. ун-та, 2018. – С. 84.
15. *Vyskub V.G.* Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points /V.G. Vyskub, E.I. Mutina, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 537 (2019), 022013, URL: http://doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013 (дата обращения: 24.11.2020).
16. *Болнокин В.Е., Мутин Д.И., Сторожев С.В., Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг* Анализ нечеткой модели концентрации механических напряжений в тонких пластинах с квадратными отверстиями неопределенной угловой кривизны // Системы управления и информационные технологии. – 2019. – № 4 (78). – С. 47–50.
17. *Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожев С.В.* Нечетко-множественная методика учета разбросов исходных параметров в задаче о двухстороннем растяжении пластины с впаянной жесткой круговой шайбой // IX Междунар. науч.-практ. интернет-конференция, посвящ. 100-летию ДонНУЭТ "Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2020" (29 мая 2020 г.): Матер. конф. – Донецк: ГО ВПО "ДонНУЭТ", 2020. – С. 40–44.
18. *Болнокин В.Е., Выскуб В.Г., Мутин Д.И., Мутина Е.И., Номбре С.Б., Сторожев С.В.* Методика учета факторов неопределенности в моделях термоупругого деформирования тонких пластин с эллиптическими граничными контурами // Системы управления и информационные технологии. – 2020. – № 2(80). – С. 4–8.
19. *Storozhev S.V., Storozhev V.I., Bolnokin V.E., Duong Minh Hai, Mutin D.I.* Fuzzy-set analysis of models of temperature deformation of thin-walled elements with elliptic boundaries in industrial and aerospace structures IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 862 (2020) 022005. https://doi.org/10.1088/1757-899X/862/2/022005.
20. *Ложкин В.Н., Олейник Л.Н.* Напряженное состояние тонкой пьезоэлектрической пластинки с эллиптическим отверстием // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 8. – С. 127–130.
21. *Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей: Монография. – Донецк: ООО "Юго-Восток, ЛТД", 2007. – 268 с.
22. *Berlincourt D., Krueger H.H.A.* Properties of Piezoelectricity Ceramics // Technical Publication TP-226. – www.morgan-electroceramics.com

V.E. Bolnokin, D.I. Mutin, S.B. Nombre, S.V. Storozhev

Electroelastic deformation of piezoactive plate with hole at accounting uncertainty of parameters

A generalization of the numerical-analytical fuzzy-set methodology for taking into account the scatter errors in the values of the initial physical-mechanical and geometric parameters is given in relation to the problem of determining the concentration coefficients of the characteristics of electroelastic deformation on the contour of an elliptical hole in a thin piezoelectric plate in the case of its generalized plane stress state. The methodology is based on the expansion of the areas of definition of the design ratios of classical crisp models with the transition to fuzzy-multiple arguments by applying the heuristic principle of generalization. A feature of the method is less stringent requirements for the nature of the initial uncertain information in comparison with probabilistic-stochastic approaches.

Keywords: *thin piezoelectric plates, generalized plane stress state, elliptical holes, concentration of electromechanical fields, scatter of initial parameters, methods of the theory of fuzzy sets, fuzzy interval approximation, heuristic principle of generalization.*

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва;
ФГБОУ ВО "Московский гос. технологический ун-т "СТАНКИН"", Москва;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т", Донецк;
ГОУ ВПО "Донбас. национальная акад. строительства и архитектуры", Макеевка
stvi@donnu.ru

Получено 29.09.20