УДК 517.956

А. Ф. Тедеев

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АБСОРБЦИЕЙ

В работе изучается следующая задача:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^{\beta}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{m-1} u_{x_i}) + u^r = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \nu_i |_{\partial\Omega\times(t>0)} = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \; x \in \Omega \quad (3)$$

в цилиндре $D = \Omega \times (t > 0)$, где Ω — неограниченная область, $0 < \beta \leqslant m$, $0 < r \leqslant m$, $m \geqslant 1$. При определенных условиях на область Ω и начальную функцию $\varphi(x)$ получены точные оценки скорости стабилизации к нулю решения задачи (1)—(3).

1. Пусть $\Omega \subset R^n$; $n \geqslant 2$, — неограниченная область; $x = (x_1, \dots, x_n$ — точка пространства R^n; $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Рассмотрим в цилиндре $D = \Omega \times (t > 0)$ решение $u(t, x)$ следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^{\beta}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{m-1} u_{x_i}) + u^r = 0, 0 < \beta, r \leqslant m, m \geqslant 1, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \nu_i |_{\partial\Omega\times(t>0)} = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $u_{x_i} = \partial u / \partial x_i$, ν_i — косинусы внешней (по отношению к Ω) единичной нормали к $\partial\Omega$ — границе области Ω. Предположим, что $\partial\Omega$ состоит из конечного числа непересекающихся неограниченных $(n-1)$-мерных поверхностей класса C^2. Будем говорить, что функция $g(v)$, $v > 0$ удовлетворяет условию а), если она положительна, непрерывна, монотонно не убывает и существуют такие положительные постоянные ε_0 ($\varepsilon_0 \leqslant 1/n$), v_0 и C, что при $v \leqslant v_0$ имеет место оценка $g(v) \geqslant Cv^{1-\varepsilon_0}$. Пусть Q — произвольное открытое подмножество Ω. Рассмотрим функцию $l(v) = \inf \operatorname{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega)$, где inf берется по всем Q: $\operatorname{mes} Q = v$.

Следуя [1], скажем, что Ω принадлежит классу $\mathcal{U}(g)$, где g удовлетворяет условию а), если для всех $v > 0$ справедливо неравенство $l(v) \geqslant g(v)$.

В настоящее время исследованию стабилизации решений различных смешанных задач посвящено большое количество работ. В линейной ситуации отметим обзорную работу [2], а в нелинейной [3] и имеющуюся в этих работах библиографию. Отметим также работу [4], где исследована первая смешанная задача для уравнения (1) в случае, когда Ω ограничена. Цель данной работы изучение поведения решения задачи (1)—(3) при $t \to \infty$. Основной трудностью при изучении рассматриваемой задачи является неограниченность области Ω.

2. В этом пункте введем понятие решения задачи (1)—(3) и сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $D_T = \Omega \times (0, T)$. Через $W^{1,1}_{p,\gamma}(D_T)$ обозначим замыкание по норме $\left(\iint_{D_T} (|f|^\gamma + |f_t|^\gamma)\,dxdt\right)^{1/\gamma} + \left(\int_{D_T} |\nabla f|^p dx\right)^{1/p}$ функции из класса $\overset{0}{C^1}(R^{n+1})$, а через $W^{1,0}_{p,\gamma}(D_T)$ замыкание $\overset{0}{C^1}(R^{n+1})$ по норме $\left(\int_{D_T} |f|^\gamma dxdt\right)^{1/\gamma} + \left(\int_{D_T} |\nabla f|^p dxdt\right)^{1/p}$.

В дальнейшем будем предполагать, что начальная функция $\varphi(x)$ имеет носитель, содержащийся в шаре $K_{R_0} = \{|x| < R_0\}$ и ограничена. Под обобщенным решением задачи (1) — (3) в D_T будем понимать функцию $u(t, x)$ из $W^{1,0}_{m+1,1}(D_T) \cap L_\infty(D_T)$, неотрицательную в D_T и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_{D_T} \eta_t u^\beta dxdt + \int_{D_T} |\nabla u|^{m-1} \nabla u \nabla \eta dxdt + \int_{D_T} u^r \eta dxdt = \int_\Omega \eta(0, x)\,\varphi(x)\,dx \quad (4)$$

при всех $\eta(t, x) \in W^{1,1}_{m+1,1}(D_T) \cap L_\infty(D_T)$, удовлетворяющих условию. $u(T, x) = 0$. Функция $u(t, x)$ — решение задачи (1) — (3) в D, если при всех $T > 0$ она является обобщенным решением той же задачи в D_T. Существование и единственность решения задачи (1)—(3) доказывается традиционными методами [4].

Лемма 1. Пусть $\Omega \in \mathcal{U}(g)$. Тогда $\forall f(x) \in W^1_q(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla f|^q dx \geqslant c_1 \frac{\left(\int_\Omega |f|^\lambda dx\right)^{\theta_1}}{\left(\int_\Omega |f|^\alpha dx\right)^{\theta_2} \mathcal{P}_q\left(\left(\int_\Omega |f|^\alpha dx\right)^{\lambda/(\lambda-\alpha)} \Big/ \left(\int_\Omega |f|^\lambda dx\right)^{\alpha/(\lambda-\alpha)}\right)}, \quad (5)$$

где $\quad 0 < \alpha \leqslant 1,\ 1 < \lambda \leqslant q, \quad \theta_1 = (q-\alpha)/(\lambda-\alpha), \quad \theta_2 = (q-\lambda)/(\lambda-\alpha)$,

$$\mathcal{P}_q(s) = \int_0^s \frac{1}{\xi}\left(\int_0^\xi \left(z^{q-1}/g^q(z)\right) dz\right) \log_2^{q-2}\left(\frac{s}{\xi}\right) d\xi$$

Лемма 2. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1) — (3). Тогда для п. в. $t \in (0, \infty)$, $\forall p \geqslant 1$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{p+\beta} dx = -c_2 \int_\Omega \left|\nabla u^{\frac{p+m}{m+1}}\right|^{m+1} dx - \frac{p+\beta}{\beta}\int_\Omega u^{r+p} dx, \quad (6)$$

где

$$c_2 = \frac{(p+\beta)\,p\,(m+1)^{m+1}}{\beta\,(p+m)^{m+1}}.$$

Лемма 3. Для решения задачи (1)—(3) при всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega u^\beta(t, x)\,dx \leqslant \int_\Omega \varphi^\beta(x)\,dx. \quad (7)$$

Доказательство лемм 1—3 опускаем за наименением места.

3. Перейдем к основным результатам работы. Справедлива

Теорема 1. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1) — (3) в D и $\Omega \in \mathcal{U}(g)$. Тогда $\forall p \geqslant 1$, $t \in (0, \infty)$ справедливы оценки

$$\int_\Omega (u(t, x))^{p+\beta} dx \leqslant c_3 \|\varphi\|^{p+\beta}_{L_\beta} \left(I^{-1}(Kt)\right)^{-p/\beta}, \quad (8)$$

где $I^{-1}(\theta)$ — обратная к функции

$$I(\theta) = \int_0^\theta s^{\frac{m}{\beta}-2} \mathcal{P}_{m+1}(s)\,ds, \quad K = c_4 \|\varphi\|^{m-\beta}_{L_\beta}.$$

Кроме того, если $\beta = r$, то $\forall t > 0, p \geqslant 1$

$$\int_\Omega (u(t,x))^{p+\beta} dx \leqslant \|\varphi\|_{L_{p+\beta}}^{p+\beta} \exp\left(-\frac{(p+\beta)}{\beta} t\right). \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем в лемме 1 $q = m+1$, $f = u^{(p+m)/(m+1)}$, $\lambda = (m+1)/(p+\beta)/(p+m)$, $\alpha = \beta(m+1)/(p+m)$. Тогда неравенство (5) примет вид

$$\int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m}{m+1}}|^{m+1} dx \geqslant c_1 \frac{\left(\int_\Omega u^{p+\beta} dx\right)^{(p+m-\beta)/p}}{\left(\int_\Omega u^\beta dx\right)^{\frac{m-\beta}{p}} \mathscr{P}_{m+1}\left(\frac{\left(\int_\Omega u^\beta dx\right)^{(\beta+p)/p}}{\left(\int_\Omega u^{p+\beta} dx\right)^{\beta/p}}\right)}. \tag{10}$$

Из леммы 2 следует, что

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{p+\beta} dx \leqslant -c_2 \int_\Omega |\nabla u^{\frac{p+m}{m+1}}|^{m+1} dx. \tag{11}$$

Учитывая неравенство (7), из (10) и (11) находим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{p+\beta} dx \leqslant -c_5 \frac{\left(\int_\Omega u^{p+\beta} dx\right)^{(p+m-\beta)/p}}{\|\varphi\|_{L_\beta}^{(m-\beta)\beta/p} \mathscr{P}_{m+1}\left(\|\varphi\|_{L_\beta}^{(\beta+p)\beta/p} / \left(\int_\Omega u^{p+\beta} dx\right)^{\beta/p}\right)}.$$

Обозначая $E(t) = \int_\Omega u^{p+\beta} dx$, $w(t) = \|\varphi\|_{L_\beta}^{\beta(\beta+p)/p} / (E(t))^{\beta/p}$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$w_t \geqslant \frac{c_5 \beta}{p} \frac{\|\varphi\|_{L_\beta}^{m-\beta}}{w^{\frac{m}{\beta}-2} \mathscr{P}_{m+1}(w)},$$

откуда

$$w^{\frac{m}{\beta}-2} \mathscr{P}_{m+1}(w)\, dw \geqslant K dt,$$

$$w(t) \geqslant I^{-1}(Kt),$$

что равносильно (8). Докажем (9).

Из неравенства (6) следует

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{p+\beta} dx \leqslant -\frac{(p+\beta)}{\beta}\int_\Omega u^{p+\beta} dx.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до t, получаем (9). Теорема доказана.

Приведем пример. Пусть $\Omega \in \mathcal{U}(v^{\frac{n-1}{n}})$; тогда оценка (8) примет вид

$$\int_\Omega (u(t,x))^{p+\beta} dx \leqslant c_3 \|\varphi\|_{L_\beta}^{\lambda_1} t^{-\frac{np}{mn-\beta n+(m+1)\beta}}.$$

Рассмотрим теперь более узкий класс областей Ω.

Предположим, что функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно не убывает, где $g(v)$ удовлетворяет условию (a). Будем говорить, что Ω удовлетворяет условию А, если для всех $v > 0$ выполняется неравенство $l(v) \geqslant g(v)$. Обозначим через $w(s)$ обратную к $\mathscr{P}_1(s) = s^{m/\beta-1}\mathscr{P}_{m+1}(s)$ функцию. Будем говорить, что область Ω удовлетворяет условию Б, если существует такое $\varkappa > 0$, что $t^\varkappa / w(t)$ монотонно не убывает.

Теорема 2. Пусть Ω удовлетворяет условиям А и Б. Тогда для решения задачи (1)—(3) имеет место оценка

$$\|u(t, x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C \|\varphi\|_{L_\beta}^{\lambda_2} (w(t))^{-1}. \tag{12}$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 справедлива оценка

$$H_R(t) \leqslant c_6 \|\varphi\|_{L_{1+\beta}}^{1+\beta} \exp\left(-\gamma\left[\frac{R-R_0}{t/(w(t))^{m-\beta}}\right]^{\frac{m+1}{m}}\right) \forall t > 0, \quad R > R_0, \tag{13}$$

где

$$H_R(t) = \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_R} u^{\beta+1} dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_R} |\nabla u|^{m+1} dx d\tau.$$

Докажем оценку (13). Прежде всего отметим, что для решения задачи (1)—(3) справедливо равенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (u^\beta(t, x))_h \eta(t, x)\, dx dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (|\nabla u|^{m-1} \nabla u)_h \nabla\eta dx dt +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (u^r(t, x))_h \eta(t, x)\, dx dt = 0 \tag{14}$$

для любых $t_1, t_2 : 0 < t_1 < t_2, \eta \in W^{1,0}_{m+1,1}(\Omega \times (t_1, t_2)) \cap L_\infty(\Omega \times (t_1, t_2))$; $u_h(t, x)$ — осреднение по Стеклову функции $u(t, x)$ по переменной t. Положим в (14) $\eta(t, x) = u_h(t, x)\, \theta_{\rho,R}^{m+1}(x)$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$, где $\forall \rho > 0$

$$\theta_{\rho,R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \geqslant R + \rho, \\ (|x| - R)/\rho & \text{при } \rho + R > |x| > R, \\ 0 & \text{при } |x| \leqslant R. \end{cases}$$

Устремляя $h \to 0$, получаем

$$\frac{1}{\beta+1}\int\limits_\Omega u^{\beta+1} \theta_{\rho,R}^{m+1} dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta_{\rho,R}^{m+1} |\nabla u|^{m+1} dx d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta_{\rho,R}^{m+1} u^{r+1} dx d\tau =$$

$$= -(m+1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u \nabla\theta_{\rho,R} \nabla u |\nabla u|^{m-1} \theta_{\rho,R}^m dx d\tau.$$

Применяя к правой части неравенство Юнга, после некоторых упрощений получаем

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{R+\rho}} u^{\beta+1} dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{R+\rho}} |\nabla u|^{m+1} dx \leqslant \frac{c_7}{\rho^{m+1}} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_R} u^{m+1} dx d\tau. \tag{15}$$

Пользуясь оценкой (12), из (15) находим

$$H_{R+\rho}(t) \leqslant \frac{c_8}{\rho^{m+1}} \int\limits_0^t (w(\tau))^{-(m-\beta)} H_R(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

Предположим, что

$$H_{R_0+k\rho}(t) \leqslant \frac{(c_9)^k \|\varphi\|_{L_{1+\beta}}^{1+\beta}}{\rho^{(m+1)k}(k+1)!} (t/(w(t))^{m-\beta})^k, \quad c_9 = \frac{2c_8}{1-(m-\beta)\varkappa}. \tag{17}$$

При $k = 0$ имеем $H_{R_0}(t) \leqslant \|\varphi\|_{L_{\beta+1}}^{\beta+1}$. Эта оценка следует из (6) при $p = 1$ с помощью интегрирования в пределах от 0 до t. Из (16), (17) имеем

$$H_{R_0+(k+1)\rho}(t) \leqslant \frac{c_8}{\rho^{m+1}} c_9^k \frac{\|\varphi\|_{L_{1+\beta}}^{1+\beta}}{\rho^{(m+1)(k+1)}(k+1)!} \int\limits_0^t (w(\tau))^{-(m-\beta)(k+1)} \tau^k d\tau \tag{18}$$

В силу монотонности функции $w(t)$ и $t^\varkappa/w(t)$ при $0<\lambda<1$ $\lambda^\varkappa w(t)\leqslant \leqslant w(\lambda t)\leqslant w(t)$. Значит,

$$\int_0^t \frac{\tau^k}{w^{(m-\beta)(k+1)}}\,d\tau = t^{k+1}\int_0^1 \frac{y^k dy}{(w(ty))^{(m-\beta)(k+1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{t}{(w(t))^{m-\beta}}\right)^{k+1}\int_0^1 y^{k-(m-\beta)(k+1)\varkappa}dy = \frac{1}{(k+1)(1-(m-\beta)\varkappa)}\left(\frac{t}{w(t)^{m-\beta}}\right)^{k+1}.$$

Следовательно, из (18) находим

$$H_{R_0+(k+1)\rho}(t)\leqslant \frac{c_9^{k+1}\,\|\varphi\|_{L_{1+\beta}}^{1+\beta}}{\rho^{(m+1)(k+1)}\,(k+2)!}\left(\frac{t}{w(t)^{m-\beta}}\right)^{k+1}.$$

Таким образом, (17) доказано при любом $k\geqslant 0$. Из формулы Стирлинга следует, что $(k+1)!\geqslant \lambda_0 k^k \exp(-k)$, λ_0 — абсолютная постоянная. Поэтому неравенство (17) при $\rho=(R-R_0)/k$ перепишется так:

$$H_R(t)\leqslant \frac{1}{\lambda_0}\,\|\varphi\|_{L_{1+\beta}}^{1+\beta}\exp\left(-k\ln\left(\frac{(R-R_0)^{m+1}}{k^m c_9 e\,(t/w^{m-\beta}(t))}\right)\right).$$

Пусть сначала $(R-R_0)^{m+1}\geqslant c_9 e^2 t/(w(t))^{m-\beta}$; тогда полагая k целой части $[(R-R_0)^{m+1}/c_9 e^2 t/w^{m-\beta}]^{1/m}$, получаем требуемую оценку. В случае $(R-R_0)^{m+1}< c_9 e^2 t/(w(t))^{m-\beta}$ нужная оценка очевидна.

Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что в случае $\beta=1$, $m=1$ и при отсутствии в (1) члена u^r результаты теорем 1—3 следуют из результатов работ А. К. Гущина (см. [1, 2] и имеющуюся там литературу). Отметим также работу [5]. Аналог теоремы 3 для квазилинейных параболических высокого порядка получен автором [6].

1. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.— 1973.— **126**.— С. 5—45.
2. *Гущин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Мат. сб.— 1982.— **119**, № 4.— С. 451—508.
3. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Усп. мат. наук.— 1987.— **42**, № 2.— С. 135—176.
4. *Masayoshi T.* On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption // J. Math. Anal. and Appl.— 1988.— **132**, N 1.— P. 187—212.
5. *Ушаков В. И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Мат. сб.— 1980.— **111**, № 1.— С. 95—115.
6. *Тедеев А. Ф.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения.— 1989.— **25**, № 3.— С. 491—498.

Донецк. политехн. ин-т Получено 05.08.89