УДК 517.9

Е. М. Ландис

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} = u\varphi(|u|)$$

в области $\Omega = G\setminus N \subset R^n$, где G — ограниченная область, а $N \subset G$ — компакт. Установлены: принцип максимума, лемма о возрастании и теорема об осцилляции, построено обобщенное решение задачи.

В статье рассматривается уравнение

$$Lu = u\varphi(|u|) \equiv f(u), \tag{1}$$

где

$$L = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}. \tag{2}$$

Пусть Ω — область в R^n, имеющая вид

$$\Omega = G\setminus N,$$

где G — ограниченная область, а $N \subset G$ — компакт. На границу области G и на множество N будут ниже наложены определенные условия.

Коэффициенты a_{ik}, $a_{ik} = a_{ki}$ определены и ограничены в Ω и удовлетворяют условия Гельдера во всякой внутренней подобласти области Ω, но вообще говоря могут не иметь предела при приближении к $\partial\Omega$ и к N. Для L в Ω выполнено условие равномерной эллиптичности

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi^i\xi^k \leqslant \lambda^{-1}|\xi|^2, \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

Относительно функции $\varphi(\xi)$, $0 \leqslant \xi < \infty$ будем предполагать, что она неотрицательна, монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема.

Рассматривается задача Дирихле

$$u|_{\partial G} = u_0, \tag{4}$$

где $u_0(x)$ — непрерывная на ∂G функция.

Положим

$$\bar{e} = \inf_{x\in\Omega} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{\sup_{|\xi|=1} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi^i\xi^k}. \tag{5}$$

Число $\bar{e}$ называется константой суперэллиптичности оператора L ([1]). Будем предполагать, что $\bar{e} > 2$. Положим

$$s = \bar{e} - 2.$$

Будем считать, что выполнено равенство

$$\mu_s N = 0,$$

где μ_s — мера Хаусдорфа порядка s.

В этой статье мы дадим определение обобщенного решения $u(x)$ задачи (4) для уравнения (1) в G. Оно будет классическим в Ω, удовлетворяющим условию Гельдера в G и непрерывным в $\bar{G}$. Это решение будет единственным.

1°. Принцип максимума.

Теорема (принцип максимума). Пусть функции v и w ограничены в Ω, дважды дифференцируемы в открытой области Ω и непрерывны вплоть до ∂G. Пусть

$$Lv \leqslant f(v), \quad Lw \geqslant f(w) \text{ в } \Omega$$

и

$$v|_{\partial G} \geqslant w|_{\partial G}.$$

Тогда $v \geqslant w$ в Ω.

Доказательство. Положим $v - w = z$, так что

$$Lz = f(v) - f(w)$$

или

$$Lz - c_1(x) z = 0, \tag{6}$$

где

$$c_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(v(x)) - f(w(x))}{v(x) - w(x)} & \text{при } z(x) \neq 0, \\ 0 & \text{при } z(x) = 0. \end{cases}$$

В силу монотонности $f(\xi)$ и условия $f(0) = 0$ справедливо

$$c_1(x) \geqslant 0. \tag{7}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть K — константа, ограничивающая сверху $w(x)$ в Ω.

Покроем множество N шарами $B(x_1, r_1), \ldots, B(x_t, r_t)$ (через $B(x, r)$ здесь и дальше будем обозначать шар в R^n с центром в точке x радиуса r, а через $S(x, r)$ — границу этого шара) такими, что

$$\sum_{i=1}^{t} r_i^s < \varepsilon/K. \tag{8}$$

Положим далее

$$z_0(x) = z(x) + K \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i^s}{|x - x_i|^s}. \tag{9}$$

Пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{t} B(x_i, r_i)$. Тогда

$$z_0|_{\partial\Omega_\varepsilon} \geqslant 0. \tag{10}$$

Функция z_0 непрерывна в Ω_ε. Далее, она дважды дифференцируема в Ω_ε и из (5) — (7) и (9) получаем

$$Lz_0(x) - c_1 z_0(x) = Lz - c_1 z + KL\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{r_i^s}{|x - x_i|^s}\right) -$$

$$- c_1\left(K \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i^s}{|x - x_i|^s}\right) \leqslant K \cdot L\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{r_i^s}{|x - x_i|^s}\right) \leqslant$$

$$\leqslant Ks \sum_{i=1}^{t} \frac{(s+2) \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \gamma^j \gamma^k - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{|x - x_i|^{s+2}} < 0. \tag{11}$$

Здесь $\gamma^j = \dfrac{x^j - x_i^j}{|x - x_i|}$. Последнее неравенство вытекает из (5).

Так как $C_1 \geqslant 0$, то по принципу максимума для линейного оператора и условию (10) получаем $z_0 \geqslant 0$ в Ω_ε.

Пусть $x \in \Omega_\varepsilon$ и $\rho = \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{i=1}^{t} B(x_i, r_i)\right)$. Тогда в силу (9)

$$z > \frac{-K \sum_{i=1}^{t} r_i^s}{\rho^s} > -\frac{\varepsilon}{\rho^s}. \tag{12}$$

Устремляя ε к нулю при фиксированной точке $x \in \Omega$, получаем $z(x) \geqslant 0$ или $v \geqslant w$ в Ω.

2°. **Лемма о возрастании и теорема об осцилляции.** Пусть $u(x)$ — ограниченное решение уравнения (1) в Ω и $|u| < M$. Тогда, положив $\varphi(|u|) = c(x)$, имеем

$$0 \leqslant c(x) < \varphi(M) = M_1. \tag{13}$$

Таким образом, $u(x)$ является решением линейного уравнения

$$Lu - c(x)u = 0, \quad 0 \leqslant c(x) < M_1. \tag{14}$$

Будем предполагать, что $u \in C^2(\Omega)$.

Лемма (о возрастании). Пусть $R > 0$ и $\mu_0 > 0$ — фиксированные числа. Существует константа $\xi > 0$, зависящая от R, μ_0 и от λ (λ — константа неравенства (3)) такая, что выполняется следующее. Пусть $0 < \rho < R$, $B(x_0, \rho) \subset \Omega$ и $\mathcal{D} \subset B(x_0, \rho)$ — область. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (14), положительное в $\mathcal{D}$ и обращающееся в нуль на той части границы $\mathcal{D}$, которая лежит строго внутри $B(x_0, \rho)$. Пусть

$$\operatorname{mes}\left(B\left(x_0, \frac{\rho}{2}\right) \setminus \mathcal{D}\right) > \mu_0 \rho^h.$$

Тогда

$$\sup_{\mathcal{D}} u > (1 + \xi) \sup_{\mathcal{D} \cap B(x_0, \rho/2)} u.$$

Эта лемма доказана М. В. Сафоновым в [2]. Там же им, исходя из леммы о возрастании, доказана следующая теорема об осцилляции.

Теорема (об осцилляции). Пусть $u(x)$ — решение уравнения (14) в $B(x_0, \rho) \subset \Omega$. Тогда

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0, \rho)} u \to 0 \text{ при } \rho \to 0$$

(в [2] эта теорема доказана в более сильной формулировке, но нам достаточно сформулированного утверждения).

3°. **Решение задачи Дирихле.** Построим обобщенное решение задачи Дирихле (1), (4) следующим образом. Фиксируем некоторое $\delta > 0$. Пусть δ столь мало, что δ-окрестность множества N лежит в Ω. Пусть ω_δ — область, содержащаяся в δ-окрестности множества N, содержащая N и имеющая границу класса $C^{2+\alpha}$. Зададим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $0 < \varepsilon_n < \operatorname{dist}(\omega_\delta, \partial G)$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и обозначим через $\Omega_n^\delta \subset \Omega \setminus \omega_\delta$ область, граница которой состоит из двух частей $\partial\omega_n$ и Γ_n, где $\operatorname{dist}(\Gamma_n, \partial G) < \varepsilon_n$. При этом Γ_n принадлежит классу $C^{2+\alpha}$.

Продолжим функцию u_0 непрерывным образом на область G (продолжение обозначим U_0) так, чтобы U_0 во всякой внутренней подобласти области G принадлежала $C^{2+\alpha}$ и чтобы выполнялось неравенство $|U_0| \leqslant M$. Решим для уравнения (1) в Ω_n^δ следующие задачи Дирихле:

$$u\big|_{\partial\Omega_n^\delta \setminus \partial\omega_\delta} = U_0, \quad u\big|_{\partial\omega_\delta} = M$$

и

$$u\big|_{\partial\Omega_n^\delta \setminus \partial\omega_\delta} = U_0, \quad u\big|_{\partial\omega_\delta} = -M.$$

Пусть решения этих задач суть соответственно $u_n^{\delta+}$ и $u_n^{\delta-}$. В силу условий, наложенных на a_{ik} и на f, принципа максимума и теоремы об осцилляции, решения $u_n^{\delta+}$ и $u_n^{\delta-}$ существуют [3]. Кроме того,

$$u_n^{\delta+} > u_n^{\delta-}. \tag{15}$$

Предположим, что точки ∂G удовлетворяют следующему условию регулярности: пусть $x_0 \in \partial G$. Обозначим через γ_k следующую величину:

$$\gamma_k = 2^k \operatorname{mes}\left(B\left(x_0, \frac{1}{2^k}\right) \setminus G\right).$$

Условие состоит в том, что найдется число $a_0 > 0$ такое, что существует как угодно много n_k таких, что $\gamma_{n_k} > a_0$ (константа a_0 и подпоследовательность $\{n_k\}$ свои для каждой точки $x_0 \in \partial G$.

Устремим δ к бесконечности. Тогда $u_n^{\delta\pm}$ сходятся соответственно к функциям $u_\delta^\pm$, непрерывным в $\overline{\Omega \setminus \omega_\delta}$ и $u_\delta^\pm|_{\partial G} = u_0$. Это вытекает из леммы о возрастании и принципа максимума и доказывается так же, как в случае гармонической функции, когда выполнен критерий Винера (см., например, [4]), поскольку там используется только лемма о возрастании (в которой вместо меры стоит емкость) и принцип максимума. При этом во всякой подобласти $\Omega' \subset \Omega^\delta$ справедливо $u_\delta^\pm \in C^{2+\alpha}(\Omega')$. Далее, очевидно,

$$u_\delta^+ > u_\delta^-. \tag{16}$$

Устремим теперь δ к нулю. Так как u_δ^+ монотонно убывают при $\delta \to 0$, а u_δ^- — монотонно возрастают, то в $\Omega = G \setminus N$ существуют предельные функции u^+ и u^-. Они непрерывны вплоть до ∂G, ограничены по модулю константой M, принадлежат C^α (и даже $C^{2+\alpha}$) во всякой строго внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$ и $u^+|_{\partial G} = u^-|_{\partial G} = u_0$. По принципу максимума (п. 1°) $u^+ \equiv u^- \equiv u$. Функцию u мы и назовем обобщенным решением.

Покажем, что функция u может быть продолжена на G так, что она будет удовлетворять условию Гельдера во всякой строго внутренней подобласти области G, включая N.

Для этого построим семейство уравнений. Положим

$$A_{ik}^\delta(x) = \begin{cases} a_{ik}, & x \in \Omega \setminus \omega_\delta, \\ a_{ik}^\delta, & x \in \omega_\delta. \end{cases}$$

При этом $a_{i,k}^\delta$ таковы, что A_{ik}^δ принадлежат $C^{2+\alpha}(\Omega')$ во всякой подобласти Ω', компактно содержащейся в G. Кроме того,

$$\frac{\lambda}{2}|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^\delta \xi^i \xi^k \leqslant 2\lambda |\xi|^2, \quad A_{ik}^\delta = A_{ki}^\delta.$$

Получаем семейство уравнений

$$L^\delta v \equiv \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^k} = v\varphi(|v|), \tag{1^δ}$$

для каждого из них и для области G рассматриваем задачу Дирихле

$$v|_{\partial G} = u_0. \tag{17}$$

Решение задачи (1^δ), (17) существует ([3]). Обозначим его v_δ. Из (1^δ) и (17) следует, что v_δ удовлетворяет линейному уравнению

$$L^\delta v_\delta - c_\delta(x) v_\delta = 0, \quad 0 \leqslant c_\delta < M_1 = \varphi(M).$$

Поэтому, согласно теореме Н. В. Крылова и М. В. Сафонова [5], семейство $\{v_\delta\}$ компактно в $C(\overline{G})$, а также в $C^\alpha(G')$, где G' — любая подобласть, компактно содержащаяся в G и, кроме того, по принципу максимума

$$v_\delta \leqslant u_\delta^+, \quad v_\delta \geqslant u_\delta \text{ в } \Omega_\delta.$$

Выберем из $\{v_\delta\}$ сходящуюся в $C(\overline{G})$ последовательность. Пусть $v_{\delta_k} \to v$ при $k \to \infty$. Имеем $u^- \leqslant v \leqslant u^+$, т. е. $u \equiv v$ и v определена в G и удовлетворяет условию Гельдера во всякой внутренней подобласти области G.

4°. **Другой подход к определению обобщенного решения.** Покажем, что то же самое обобщенное решение u задачи Дирихле может быть получено другим способом. Рассматривается та же задача

$$Lu = f(u), \tag{18}$$

$$u|_{\partial G} = u_0.$$

L — оператор (1); функция f — та же, что и выше.

Назовем функцию v верхней для задачи (18), если

$$Lv - f(v) \leqslant 0 \quad \text{в } \Omega$$

и

$$v|_{\partial G} \geqslant u_0|_{\partial G}.$$

Положим

$$v^+(x) = \inf v(x),$$

где нижняя грань берется по всем верхним функциям. Аналогично определяются нижние функции и соответствующая верхняя грань v^-.

Легко видеть, что $v^+ \equiv v^- \equiv u$, где u — построенное выше обобщенное решение.

Действительно. Рассмотрим функции u_δ^+ и u_δ^- продолжим их на ω_δ, положив их равными соответственно M и $-M$. Пусть w_δ^+ и w_δ^- — продолженные функции. Всюду вне $\partial\omega_\delta$ $Lw_\delta^\pm - f(w_\delta^\pm) = 0$ и $w_\delta^\pm|_{\partial G} = u_0$, а на $\partial\omega_\delta$ w_δ^+ и w_δ^- имеют излом такой, что их производные по нормали равны соответственно $-\infty$ и $+\infty$. Поэтому в окрестности $\partial\omega_\delta$ функции $w_\delta^\pm$ можно так продеформировать, что они превратятся соответственно в верхнюю и нижнюю функции, а деформация будет как угодно мала.

5°. **Замечание о гладкости коэффициентов.** Вместо условия $a_{ik} \in C^\alpha(\Omega')$ для любой $\Omega' \Subset \Omega$ можно потребовать непрерывности a_{ik} во внутренних точках Ω и даже просто удовлетворения условия Кордеса [6] в окрестности каждой точки $x \in \Omega$. От функции φ достаточно требовать монотонности на $[0, \infty)$.

1. *Ландис Е. М.* Теоремы единственности решения задач Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1981.— 12.— С. 50—63.
2. *Сафонов М. В.* Неравенство Харнака для эллиптических уравнений // Краевые задачи мат. физики и смежн. вопр. теории функций.— 1980.— 12.— С. 272—287.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 576 с.
4. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М. : Наука, 1971.— 287 с.
5. *Крылов Н. В., Сафонов М. В.* Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— 245. № 1.— С. 161—175.
6. *Cordes H. O.* Die erste Randwertaufgabe bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variabeln // Math. Ann.— 1956.— 131, N 3.— S. 273—313.

Моск. гос. ун-т
Получено 19.10.89