Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 1, 69 – 97

Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи

Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн

Аннотация. Для тройки гильбертовых пространств, определенным образом взаимосвязанных между собой, а также абстрактного оператора следа выводится абстрактная формула Грина, обобщающая известную формулу Грина для оператора Лапласа. На ее основе рассматриваются абстрактные краевые задачи Дирихле, Неймана, Ньютона и другие, а также соответствующие спектральные задачи.

2000 MSC. 47B25, 47A11, 47A56.

Введение

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u = u(x)$, $x \in \Omega$, и непрерывно дифференцируемой функции $v = v(x)$ хорошо известна формула

$$\int_\Omega v(u - \Delta u)\, d\Omega = \int_\Omega [\nabla v \cdot \nabla u + vu]\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS. \qquad (0.1)$$

Ее можно переписать в виде

$$(v, Lu)_{L_2(\Omega)} = (v, u)_{H^1(\Omega)} - \left(\gamma v, \frac{\partial u}{\partial n}\right)_{L_2(\partial\Omega)}, \qquad Lu := u - \Delta u, \quad (0.2)$$

где $\gamma v := v|_{\partial\Omega}$, γ — оператор следа, а $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$ – стандартные функциональные гильбертовы пространства.

В данной работе получена формула, обобщающая формулу (0.2) на случай, когда взамен $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$ взяты абстрактные

Статья поступила в редакцию 21.06.2003
Ключевые слова и фразы. Гильбертово пространство, гильбертовы пары пространств, абстрактная формула Грина, абстрактные спектральные задачи, абстрактные краевые задачи.

ISSN 1810 – 3200.

гильбертовы пространства E, F и G, удовлетворяющие некоторым условиям (см. п. 2.1). Впервые абстрактная формула Грина, а также абстрактная схема рассмотрения краевых задач приведены в параграфе 1.3 монографии [1], с. 46–47 (см. также [2]), причем этот подход принадлежит С.Г.Крейну. В данной статье получено некоторое обобщение формулы из [1], принадлежащее Н.Д.Копачевскому.

Ввиду понимания той важной роли, которую может сыграть и уже играет абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств при изучении многих задач математической физики и механики сплошных сред, первый из авторов этой статьи посчитал целесообразным отдельную публикацию доказательства этой формулы.

Отметим, что абстрактная формула Грина в других терминах была введена в монографии [3].

1. Предварительные сведения

В этом параграфе для удобства дальнейшего чтения сообщаются некоторые известные сведения из функционального анализа.

1.1. О шкалах гильбертовых пространств.

Напомним некоторые хорошо известные факты из теории шкал гильбертовых пространств (см., например, [4], гл. III, а также [1], стр. 36-38).

Пусть гильбертово пространство F плотно вложено в гильбертово пространство E, т.е. F является плотным линейным подмножеством в E и существует такое $a > 0$, что

$$||u||_E \leq a||u||_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.1}$$

Если выполнены эти условия, то говорят, что пространства E и F образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Пусть $u \in F$, $v \in E$. Тогда

$$(u, v)_E = (u, Vv)_F, \tag{1.2}$$

где $V : E \to F$ — линейный ограниченный оператор, причем

$$a^{-1}||Vv||_E \leq ||Vv||_F \leq a||v||_E, \quad \forall v \in E. \tag{1.3}$$

При этом $V : E \to F$ положителен, а если F компактно вложено в E, то оператор V компактен. Для обратного оператора $A := V^{-1}$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(V)$ (и областью значений $\mathcal{R}(A) = E$) из (1.2) следует, что

$$(u, Aw)_E = (u, w)_F, \quad \forall u \in F, \ \forall w \in \mathcal{D}(A) \subset F, \tag{1.4}$$

причем $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$.

Оператор A называется порождающим оператором гильбертовой пары $(F; E)$; по паре $(F; E)$ он определяется единственным образом. Иногда пространство F состоит из элементов другой природы, чем E, но существует взаимно однозначное отображение F в плотное в E множество, сохраняющее алгебраические операции. Тогда F можно отождествить с его образом, и если для образа снова выполнено неравенство (1.1), то вся конструкция построения гильбертовой пары проходит и в этом случае.

По гильбертовой паре $(F; E)$ и соответствующему оператору A строится шкала гильбертовых пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, таким образом, что при $\alpha > 0$ пространство E^α является областью определения $\mathcal{D}(A^\alpha)$ оператора A^α и

$$(u, v)_{E^\alpha} := (A^\alpha u, A^\alpha v)_E, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A^\alpha). \tag{1.5}$$

При этом оказывается, что $F = E^{1/2}$. Для отрицательных индексов $\alpha = -\nu$, $\nu > 0$, на пространстве E вводится новая норма

$$||u||_{E^\alpha} = ||A^\alpha u||_E, \tag{1.6}$$

а затем E пополняется по этой норме. Иногда пространство F состоит из элементов другой природы, чем E, но существует взаимно однозначное отображение F в плотное в E множество, сохраняющее алгебраические операции. Тогда F можно отождествить с его образом, и если для образа снова выполнено неравенство (1.1), то вся конструкция построения гильбертовой пары проходит и в этом случае.

Шкала E^α $(-\infty < \alpha < +\infty)$ обладает следующими свойствами. При $\alpha < \beta$ пространство E^β взаимно однозначно и непрерывно отображает E^α на $E^{\alpha-1}$. При $\alpha \leq 1$ расширение по непрерывности оператора A отображает E^α на $E^{\alpha-1}$, в частности, пространство $E^{1/2} = F$ отображается на $E^{-1/2}$. Аналогично действует и оператор $A^{1/2}$, в частности, он отображает $E^{1/2} = F$ на E и E на $E^{-1/2}$. При этом оказывается, что пространство $E^{-1/2}$ изометрически отождествляется с пространством F^*, сопряженным к пространству F:

$$E^{-1/2} = F^* = (E^{1/2})^*. \tag{1.7}$$

1.2. Об оснащении гильбертовых пространств.

(см. [5], гл. I, а также [6], гл. 14) Пусть снова гильбертово пространство F плотно вложено в гильбертово пространство E. При фиксированном $v \in E$ функционал $l_v(u) := (u, v)_E$, определенный на элементах $u \in F$, является (в силу (1.1)) линейным ограниченным функционалом на F. Поэтому элемент $v \in E$ можно отождествить с функционалом из F^*. После такого отождествления E будет плотным в пространстве F^*. Отсюда следует, что скалярное произведение $(u, v)_E$ при $u \in F$ можно расширить на тот случай, когда второй множитель принадлежит F^*. Если $v_n \in E$ и $v_n \to v$ в F^*, то возникает линейный ограниченный функционал

$$l_v(u) := \langle u, v \rangle_E := \lim_{n\to\infty} (u, v_n)_E, \quad \forall u \in F, \ \forall v \in F^*. \tag{1.8}$$

При этом справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$|\,\langle u, v \rangle_E\,| \leq ||u||_F \cdot ||v||_{F^*}. \tag{1.9}$$

При выполнении (1.8)–(1.9) говорят, что функционал $l_v \in F^*$ представлен через “скалярное произведение в E”, а тройку пространств

$$E^{1/2} = F \subset E = E^0 \subset F^* = E^{-1/2} \tag{1.10}$$

называют оснащением пространства E.

1.3. Абстрактный оператор следа.

В пункте 1.1 отмечалось, что описанная там конструкция гильбертовых пар и шкал проходит и в том случае, когда одно из пространств взаимно однозначно, линейно и непрерывно отображается на плотное множество другого пространства. Здесь рассматривается более общий случай, когда это отображение не взаимно однозначно.

Пусть на гильбертовом пространстве F определен линейный оператор γ (оператор следа), ограниченно действующий в гильбертово пространство G, т.е. существует такое $b > 0$, что

$$||\gamma u||_G \leq b||u||_F \quad \forall u \in F. \tag{1.11}$$

Обозначим через N ядро оператора γ:

$$N = \ker \gamma := \{u \in F : \gamma u = 0\}. \tag{1.12}$$

В силу (1.11) N есть подпространство пространства F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в пространстве F:

$$F = N \oplus M; \tag{1.13}$$

через $G_+ \subset G$ обозначим область значений оператора γ, т.е. $G_+ = \mathcal{R}(\gamma)$. Пусть $\gamma_M := \gamma|_M$. Тогда γ_M осуществляет взаимно однозначное отображение подпространства M на G_+. Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \tag{1.14}$$

где

$$u, v \in M,\ \gamma_M u = \varphi,\ \gamma_M v = \psi. \tag{1.15}$$

Пусть $u \in F,\ \gamma u = \varphi \in G_+$. Тогда найдется элемент $v \in M$, такой, что $\gamma v = \gamma_M v = \varphi$. Отсюда следует, что $\gamma u - \gamma_M v = \gamma(u - v) = 0$, т.е. $u - v \in N$.

Далее,

$$||u||_F^2 = ||v + (u - v)||_F^2 = ||v||_F^2 + ||u - v||_F^2. \tag{1.16}$$

В силу (1.14) отсюда следует, что

$$||\varphi||_{G_+}^2 = ||v||_F^2 \leq ||u||_F^2, \quad \forall u \in F,\ \gamma u = \varphi,$$

и тогда

$$||\varphi||_{G_+}^2 = \min_{\gamma u = \varphi} ||u||_F^2. \tag{1.17}$$

Предположим теперь, что G_+ плотно вложено в G. Из (1.11) следует, что для любых $\varphi \in G_+,\ u \in M$ с $\gamma_M u = \varphi$ справедливо неравенство

$$||\varphi||_G = ||\gamma_M u||_G = ||\gamma u||_G \leq b||u||_F = b||\varphi||_{G_+}. \tag{1.18}$$

Это означает, что пространства G и G_+ образуют гильбертову пару (G_+, G), по которой можно построить гильбертову шкалу пространств G^α так, что $G_+ = G^{1/2}$. При этом пространство $G^{-1/2}$ можно отождествить с пространством $(G_+)^*$.

Введем оператор T_M, сопряженный к оператору γ_M в смысле "скалярного произведения"в G. поскольку в силу (1.14), (1.15) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на пространство $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M = (\gamma_M)^*$ изометрически отображает пространство $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на пространство M По определению, при $\psi \in G^{-1/2}$

$$(v, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M v, \psi \rangle_G\,, \quad \forall v \in M, \tag{1.19}$$

где символом $\langle \varphi, \psi \rangle_G$ обозначен линейный функционал с $\varphi \in G_+,\ \psi \in G_-$.

Обозначим через ∂_M оператор, обратный к T_M. Тогда из (1.19) имеем

$$(v,u)_F = \langle \gamma_M v, \partial_M u \rangle_G\,, \quad \forall u, v \in M. \tag{1.20}$$

Из свойств операторов γ_m и T_M следует, что оператор

$$C := \gamma_M T_M = \gamma_M(\gamma_M)^* \tag{1.21}$$

изометрически отображает пространство $G^{-1/2}$ на пространство $G^{1/2}$. Его сужение на G будет ограниченным в G оператором.

В самом деле, из (1.11) следует, что при $u \in M,\ \gamma u = \varphi$, оператор вложения $W : G_+ = G^{1/2} \to G$ ограничен:

$$||\varphi||_G = ||W\varphi||_G \le b||\varphi||_{G^{1/2}}, \quad ||W|| \le b,\ \varphi \in G_+. \tag{1.22}$$

Поэтому и сопряженный оператор $W^* : G \to G^{-1/2}$ ограничен, причем $||W^*|| = ||W|| \le b$. Отсюда получаем неравенство

$$||\varphi||_{G^{-1/2}} = ||W^*\varphi||_{G^{-1/2}} \le b||\varphi||_G, \quad \forall \varphi \in G. \tag{1.23}$$

Опираясь на (1.22) и (1.23), имеем

$$\begin{aligned} ||C\varphi||_G = ||\gamma_M T_M \varphi||_G \le b||\gamma_M T_M\varphi||_{G^{1/2}} = \\ = b||\varphi||_{G^{-1/2}} \le b^2||\varphi||_G, \quad \forall \varphi \in G. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Если вложение $G_+ \subset G$ компактно, то сужение оператора C на G также компактно.

Из (1.19) при $v = T_M\varphi,\ \varphi, \psi \in G$, получаем

$$(T_M\varphi, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi\rangle_G = (\gamma_M T_M\varphi, \psi)_G = (C\varphi, \psi)_G, \tag{1.25}$$

откуда следует, что оператор C самосопряжен и положителен. Из этих свойств в свою очередь вытекает (см. п. 1.1), что оператор $C^{-1} = T_M^{-1}\gamma_M^{-1} = \partial_M\gamma_M^{-1}$ является порождающим оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$.

2. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств. Основной пример

2.1. Предварительные построения.

Рассмотрим ситуацию, объединяющую те, что уже встречались в параграфе 1. Предположим, что для тройки гильбертовых пространств $E,\ F$ и G выполнены следующие условия:

а) Пространство F плотно вложено в E;

б) на пространстве F определен оператор γ (оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F в плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G;

в) ядро $N := \ker\gamma$ оператора γ плотно в E.

Как сейчас будет доказано, для тройки гильбертовых пространств E, F и G справедлива абстрактная формула Грина, обобщающая первую формулу Грина для оператора Лапласа (см. (0.1), (0.2)).

Доказательство этой теоремы проведем по этапам, а затем сформулируем итоговый результат.

1^0. Так как по условию в) подпространство N пространства F плотно в E, то N и E образуют гильбертову пару $(N; E)$. Обозначим через L_0 порождающий оператор этой пары. Тогда L_0 — положительно определенный самосопряженный оператор, заданный на области определения $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{R}(L_0^{-1}) \subset N,\ \mathcal{R}(L_0) = E$ и $\mathcal{D}(L_0^{1/2}) = N$. Отсюда следует, что абстрактная краевая задача Дирихле

$$L_0 u = f \in E, \quad \gamma u = 0, \tag{2.1}$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(L_0) \subset N$ при любом $f \in E$.

Введем по оператору L_0 шкалу гильбертовых пространств E^α. Тогда $E^1 = \mathcal{D}(L_0),\ E^{1/2} = \mathcal{D}(L_0^{1/2}) = N,\ E^{-1/2} = N^*$. Рассмотрим теперь расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 с $E^1 = \mathcal{D}(L_0)$ на множество $E^{1/2} = N$. Тогда $\mathcal{D}(\tilde{L}_0) = N,\ \mathcal{R}(\tilde{L}_0) = N^*$, и задача

$$\tilde{L}_0 u = f \in N^*, \quad \gamma u = 0, \tag{2.2}$$

имеет единственное решение $u \in N$, которое называется слабым решением задачи (2.1). Очевидно, совокупность слабых решений заполняет все пространство N, если f пробегает все N^*. Для (слабых) решений задачи (2.2) справедливо тождество

$$\left\langle v, \tilde{L}_0 u \right\rangle_E = \langle v, f\rangle_E = (v, u)_F, \quad \forall v \in N. \tag{2.3}$$

2^0. Введем, как и в п.1.3, ортогональное разложение (1.13), где $M := F \ominus N$. Так как $N \subset F$, то $F^* \subset N^* = \mathcal{R}(\tilde{L}_0)$. Рассмотрим сужение $\hat{L}_0$ оператора $\tilde{L}_0$ такое, что $\mathcal{R}(\hat{L}_0) = F^* \subset N^*$. Тогда

$$\mathcal{D}(\hat{L}_0) = \tilde{L}_0^{-1} F^* \subset N, \tag{2.4}$$

и задача

$$\hat{L}_0 u = f \in F^*, \quad \gamma u = 0, \tag{2.5}$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0)$ при любом $f \in F^*$. Для этого решения, как и в задаче (2.2), выполнено тождество, следующее из (2.3)

$$\left\langle v, \hat{L}_0 u \right\rangle_E = \langle v, f \rangle_E = (v, u)_F, \quad \forall v \in N, \ \forall u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N. \tag{2.6}$$

3^0. Продолжим оператор $\hat{L}_0$, заданный на $\mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N$, нулем на множество $M := F \ominus N$. Соответствующий оператор обозначим через L. Тогда для любого $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0), \ u_2 \in M$, оператор L задан по закону

$$Lu := \hat{L}_0 u_1, \ \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\hat{L}_0) \oplus M, \ \overline{\mathcal{D}(\hat{L}_0)} = N. \tag{2.7}$$

4^0. Рассмотрим теперь сужение γ_M оператора следа γ на подпространство M, введем, как и в п.1.3, гильбертово пространство $G_+ \subset G$ со скалярным произведением (1.14), (1.15), а затем операторы $T_M = (\gamma_M)^*, \ \partial_M = (T_M)^{-1}$. Тогда для элементов u, v из M будет справедливо тождество (1.20).

5^0. Введем на множестве $\mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N$ оператор, аналогичный оператору ∂_M, заданному на M (см. (1.20)). Пусть $u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0), \ v \in M$. Из неравенства

$$| \left\langle v, \hat{L}_0 u \right\rangle_E | \le ||v||_F \cdot ||\hat{L}_0 u||_{F^*} = ||\hat{L}_0 u||_{F^*} \cdot ||\gamma_M v||_{G_+}, \tag{2.8}$$

которое получено с учетом (1.9) и (1.14) (1.15), следует, что выражение $\left\langle v, \hat{L}_0 u \right\rangle_E$ является линейным ограниченным функционалом относительно $\gamma_M v$ в пространстве G_+. Потому его можно представить в виде скалярного произведения в пространстве G элемента $\gamma_M v \in G_+$ и элемента из G_-, который обозначим через $-\hat{\partial} u$:

$$\left\langle v, \hat{L}_0 u \right\rangle_E = - \left\langle \gamma_M v, \hat{\partial} u \right\rangle_G, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0), \ \forall v \in M. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что оператор $\hat{\partial}$ определен на множестве

$$\mathcal{D}(\hat{\partial}) = \mathcal{D}(\hat{L}_0) = \tilde{L}_0^{-1} F^* \subset N \tag{2.10}$$

и действует по закону (2.9). При этом

$$||\hat{\partial} u||_{G_-} \le ||\hat{L}_0 u||_{F^*}. \tag{2.11}$$

6^0. Введем, наконец линейный оператор ∂, состоящий из операторов $\hat{\partial}$ и ∂_M, по следующему правилу: если $u = u_1 + u_2 \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\hat{L}_0) \oplus M$, то

$$\mathcal{D}(\partial) = \mathcal{D}(L), \quad \partial u := \hat{\partial} u_1 + \partial_M u_2. \tag{2.12}$$

2.2. Вывод абстрактной формулы Грина.

Итогом предыдущих рассмотрений является следующий результат.

Теорема 2.1 (абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств). *Пусть для гильбертовых пространств* E, F *и* G *выполнены условия а) – в) пункта 2.1. Тогда существуют однозначно определяемые по* E, F, G *и* γ *операторы* L *и* ∂, *заданные согласно формулам* (2.4), (2.7), (1.20), (2.9)–(2.12), *такие, что* $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = F$, *и при любых* $v \in F$, $u \in \mathcal{D}(L)$ *справедливо тождество*

$$\langle v, Lu \rangle_E = (v, u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G \,, \tag{2.13}$$

где символами $\langle v, w \rangle_E$ *и* $\langle \varphi, \psi \rangle_G$ *обозначены линейные функционалы, отвечающие элементам* $v \in F$, $w \in F^*$, $\varphi \in G_+ = \mathcal{R}(\gamma)$, $\psi \in G_- = (G_+)^*$.

Доказательство. Доказательство формулы (2.13) опирается на предыдущие построения и непосредственную проверку.

Пусть выполнены условия а) – в) пункта 2.1. Тогда однозначно строятся операторы L и ∂ (см. (2.7), (2.12)) такие, что справедливы выводы пункта 2.1, причем $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = \overline{\mathcal{D}(\partial)} = F$.

Пусть $u = u_1 + u_2 \in \mathcal{D}(L)$, $u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N$, $u_2 \in M$. Пусть, далее, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in N$, $v_2 \in M$. Тогда согласно (2.7), (2.12) имеем

$$Lu = \hat{L}_0 u_1, \ \partial u = \hat{\partial} u_1 + \partial_M u_2, \ \gamma v = \gamma_M v_2. \tag{2.14}$$

Вычислим с учетом (2.14) разность между левой и правой частями (2.13); имеем

$$\langle v, Lu \rangle_E - (v, u)_F + \langle \gamma v, \partial u \rangle_G =$$

$$= \left\langle v_1 + v_2, \hat{L}_0 u_1 \right\rangle_E - (v_1 + v_2, u_1 + u_2)_F + \left\langle \gamma_M v_2, \hat{\partial} u_1 + \partial_M u_2 \right\rangle_G . \tag{2.15}$$

Так как подпространства N и M пространства F ортогональны, то

$$(v_1 + v_2, u_1 + u_2)_F = (v_1, u_1)_F + (v_2, u_2)_F. \tag{2.16}$$

Далее, для элементов v_2 и u_2 из M по формуле (1.20) получаем

$$(v_2, u_2)_F = \langle \gamma_M v_2, \partial_M u_2 \rangle_G \,. \tag{2.17}$$

Соответственно для элементов v_1 и u_1 из N по формуле (2.6) имеем

$$(v_1, u_1)_F = \left\langle v_1, \hat{L}_0 u_1 \right\rangle_E . \tag{2.18}$$

Используя формулы (2.16)–(2.18), в правой части (2.15) получаем выражение

$$\left\langle \gamma_M v_2, \hat{\partial} u_1 \right\rangle_G + \left\langle v_2, \hat{L}_0 u_1 \right\rangle_E . \tag{2.19}$$

Так как здесь $u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N,\ v_2 \in M$, то из формулы (2.9) следует, что это выражение равно нулю, и формула (2.13) доказана. □

Замечание 2.1. *Рассмотрим сужение области определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L на те элементы $u \in F$, для которых $Lu \in E$. Как следует из предыдущих построений, в этом случае*

$$Lu = L_0 u_1, \quad u = u_1 + u_2,\ u_1 \in \mathcal{D}(L_0),\ u_2 \in M,\ \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L_0) \oplus M,$$

где L_0– оператор задачи Дирихле (2.1)*, $\mathcal{D}(L_0) \subset N,\ \mathcal{D}(L_0^{1/2}) = N$.*

На указанных элементах и формула Грина (2.13) *приобретает вид*

$$(v, Lu)_E = (v, u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \quad v \in F. \tag{2.20}$$

Именно в такой форме она была приведена в монографии [1], стр. 46 – 47. □

2.3. Основной пример.

Применим схему предыдущих пунктов к основному случаю, когда

$$E = L_2(\Omega), \quad F = H^1(\Omega), \tag{2.21}$$

со скалярными произведениями

$$(u, v)_E := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\Omega, \quad (u, v)_F := \int_\Omega [\nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} + u(x)\overline{v(x)}]\, d\Omega. \tag{2.22}$$

При этом предполагается, что Ω — липшицева область.

Так пространство $H^1(\Omega)$ плотно вложено в пространство $L_2(\Omega)$, то $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ образуют гильбертову пару, которой отвечает порождающий оператор A, являющийся положительно определенным и самосопряженным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$ и заданный на плотном множестве $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega),\ \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$. Для оператора A согласно (1.4) выполнено тождество

$$(v, Au)_E := \int_\Omega v\overline{Au}\, d\Omega = (v, u)_F := \int_\Omega [\nabla v \cdot \overline{\nabla u} + v\overline{u}]\, d\Omega \tag{2.23}$$

для всех $v \in H^1(\Omega)$ и $u \in \mathcal{D}(A)$.

Для того, чтобы выяснить аналитическую природу оператора A, удовлетворяющего этому тождеству, будем считать, что $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда

$$\int_\Omega v\overline{Au}\,d\Omega = \int_\Omega v\overline{u}\,d\Omega - \int_\Omega v\overline{\Delta u}\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS. \tag{2.24}$$

Считая в этом тождестве v произвольной финитной функцией, приходим к равенству $(v, u - \Delta u - Au)_{L_2(\Omega)} = 0$, откуда $Au = u - \Delta u$. Тогда из (2.24) следует, что

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0,$$

для всех $v \in H^1(\Omega)$, в частности, для всех непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций. Так как совокупность следов непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций плотна в $L_2(\Omega)$, то из последнего равенства вытекает условие $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (на $\partial\Omega$). Таким образом, для дважды непрерывно дифференцируемой функции из $\mathcal{D}(A)$ имеем

$$Au := u - \Delta u \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.25}$$

Рассмотрим теперь оператор следа $\gamma : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega) =: G$. Согласно теореме вложения С.Л.Соболева оператор γ ограничено (и даже компактно) действует из $H^1(\Omega)$ в $L_2(\partial\Omega)$, причем область его значений $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$, согласно теореме вложения Е.Гальярдо [7], совпадает с пространством $H^{1/2}(\partial\Omega)$, компактно вложенным в $L_2(\partial\Omega)$. При этом

$$\ker\gamma =: N = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u := u|_{\partial\Omega} = 0\} =: H_0^1(\Omega) \tag{2.26}$$

плотно вложено в $E = L_2(\Omega)$.

Таким образом, тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$ и $G = L_2(\partial\Omega)$ и оператор следа γ удовлетворяют условиям а) – в) пункта 2.1.

Проведем для рассмотренного примера построения, осуществленные в общем случае в этапах 1^0 – 5^0 п.2.1. Обозначим через L_0 порождающий оператор гильбертовой пары $(N; E) = (H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$. Тогда $L_0 = L_0^* \gg 0$, $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{R}(L_0^{-1}) \subset H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{R}(L_0) = L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}(L_0^{1/2} = H_0^1(\Omega)))$. Как и при выводе формулы (2.25), можно установить, что для функции $u \in C^2(\overline{\Omega})$, аннулирующихся на $\partial\Omega$, $L_0 u = u - \Delta u$. Поэтому L_0 есть разрешающий оператор задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$L_0 u := u - \Delta u = f, \quad \gamma u = u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.27}$$

При любом $f \in L_2(\Omega)$ задача (2.27) имеет обобщенное решение $u = L_0^{-1} f \in \mathcal{D}(L_0) \subset H_0^1(\Omega)$. Если $f \in N^* = (H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega)$, то расширение $\tilde{L}_0$ оператора L_0 на пространство $H_0^1(\Omega)$ позволяет найти слабое решение задачи (2.27): $u = \tilde{L}_0^{-1} f$. При этом справедливо тождество

$$\langle v, f\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle v, \tilde{L}_0 u\right\rangle_{L_2(\Omega)} = (v, u)_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.28}$$

Если $f \in F^* \subset N^*$, то (2.28) переходит в тождество

$$\langle v, f\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle v, \hat{L}_0 u\right\rangle_{L_2(\Omega)} = (v, u)_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0), \tag{2.29}$$

где оператор $\hat{L}_0$ — сужение $\tilde{L}_0$ на $\mathcal{D}(\hat{L}_0) = \tilde{L}_0^{-1}(H^1(\Omega))^* \subset H_0^1(\Omega)$, с помощью которого можно выразить те слабые решения задачи (2.27), для которых $f \in F^*,\ u = \hat{L}_0^{-1} f \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset H_0^1(\Omega)$.

Рассмотрим теперь множество $M = H^1(\Omega) \ominus H_0^1(\Omega)$. Снова, рассуждая так же, как и при выводе формулы (2.25), можно установить, что

$$M = \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega)\} =: H_h^1(\Omega); \tag{2.30}$$

это подпространство состоит из функций, которые будем называть гармоническими. Продолжим оператор $\hat{L}_0$ нулем на M, т.е. будем считать, что продолженный оператор L определен на $\mathcal{D}(\hat{L}_0) \oplus H_h^1(\Omega)$ и для любого $u = u_1 + u_2,\ u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0),\ u_2 \in M$, действует по закону $Lu = \hat{L}_0 u_1,\ L|_{H_h^1(\Omega)} = 0$.

Рассмотрим сужение γ_M оператора γ на подпространство гармонических функций M. Тогда γ_M задает взаимно однозначное соответствие между M и пространством следов $G_+ := H^{1/2}(\partial\Omega) \subset G = L_2(\partial\Omega)$, а оператор $(\gamma_M)^*$ — между $(G_+)^* =: G_- = H^{-1/2}(\partial\Omega)$ и M. Обратный оператор $\partial_M := ((\gamma_M)^*)^{-1}$ отображает M на $G_- = H^{-1/2}(\partial\Omega)$, и из формулы (1.20), примененной для данного случая, т.е. из соотношения

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \overline{\nabla u} + v\overline{u})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_M v \overline{\partial_M u}\, dS, \quad v, u \in H_h^1(\Omega), \tag{2.31}$$

приходим к выводу, что

$$\partial_M u = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \tag{2.32}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Отсюда следует, что задача Неймана

$$u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \text{ (на } \partial\Omega),$$

имеет (единственное) решение u из $H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Пусть $u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset H_0^1(\Omega),\ v \in H_h^1(\Omega)$. Тогда из соотношения (2.9), которое в данном случае принимает вид

$$\langle v, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = -\left\langle \gamma_M v, \hat{\partial} u\right\rangle_{L_2(\partial\Omega)},$$

с использованием формулы Грина (0.2) и тех же рассуждений, которые были приведены ранее для вывода (2.25), приходим к выводу, что

$$\hat{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial n}\ (\text{на } \partial\Omega),\ u \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) = \mathcal{D}(\hat{\partial}) \subset H_0^1(\Omega). \tag{2.33}$$

Объединяя (2.32) и (2.33), получаем, что для $u = u_1 + u_2 \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\hat{\partial}) \oplus M$

$$\partial u = \hat{\partial} u_1 + \partial_M u_2 = \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

Таким образом, если выполнены условия

$$u \in \mathcal{D}(L) \subset H^1(\Omega),\ v \in H^1(\Omega),$$

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) = \tilde{L}_0^{-1}(H^1(\Omega))^*,\ u_2 \in H_h^1(\Omega), \tag{2.34}$$

то по теореме 2.1 получаем, что справедлива формула Грина

$$\langle v, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} - \left\langle \gamma v, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\partial\Omega)}. \tag{2.35}$$

Здесь $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma v \in H^{1/2}(\partial\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, а косыми скобками обозначены соответствующие линейные функционалы.

Если, в частности, $u - \Delta u \in L_2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} \in L_2(\partial\Omega)$, то из (2.35) получаем обычную формулу Грина

$$\int_\Omega v\overline{(u - \Delta u)}d\Omega = \int_\Omega (\nabla v \cdot \overline{\nabla u} + v\overline{u})d\Omega - \int_{\partial\Omega} v\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}dS. \tag{2.36}$$

3. Абстрактные краевые задачи

Наличие абстрактной формулы Грина (2.13) для произвольной тройки гильбертовых пространств, удовлетворяющих условиям а) – в) п.2.1, позволяет рассмотреть абстрактные краевые задачи, аналогичные задачам Дирихле, Неймана, Ньютона, а также других видов.

3.1. Абстрактная задача Дирихле.

Рассмотрим задачу

$$Lu = f, \quad \gamma u = \varphi, \tag{3.1}$$

которую в силу предыдущих построений естественно назвать *абстрактной задачей Дирихле для уравнения Пуассона.* Здесь предполагается, что f — элемент из E, или F^*, или N^*, $\varphi \in G$, а E, F, и G — пространства, для которых справедлива формула Грина (2.13).

Теорема 3.1. *Если выполнены условия*

$$f \in F^*, \qquad \varphi \in G_+ \subset G, \tag{3.2}$$

то задача (3.1) *имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(L)$, выражаемое формулой*

$$u = \hat{L}_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi. \tag{3.3}$$

Если $f \in N^* \supset F^*$, $\varphi \in G_+$, то задача

$$\tilde{L}u = f, \quad \gamma u = \varphi, \tag{3.4}$$

где $\tilde{L}$ — расширение оператора L на

$$\mathcal{D}(\tilde{L}) = \mathcal{D}(\tilde{L}_0) \oplus M = N \oplus M = F, \tag{3.5}$$

имеет единственное решение, выражаемое формулой

$$u = \tilde{L}_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi. \tag{3.6}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы почти очевидно.

Представим решение u задачи (3.1) в виде

$$u = v + w, \quad v \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N, \ w \in M. \tag{3.7}$$

Тогда

$$Lu = \hat{L}_0 v, \ \gamma v = 0, \ \gamma u = \gamma w = \gamma_M w.$$

Поэтому (3.1) распадается на две отдельные задачи

$$\hat{L}_0 v = f, \quad \gamma v = 0; \ \gamma_M w = \varphi. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что при $\varphi \in G_+$

$$w = (\gamma_M)^{-1}\varphi \in M, \tag{3.9}$$

а при $f \in F^*$

$$v = \tilde{L}_0^{-1} f \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N. \tag{3.10}$$

Поэтому справедлива формула (3.3) и $u \in \mathcal{D}(L)$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Следствием теоремы 3.1 и предыдущих рассуждений из п.2.3 является

Теорема 3.2. *Если выполнены условия*

$$f \in (H_0^1(\Omega))^* \supset L_2(\Omega), \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \tag{3.11}$$

то в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона, т.е. задача

$$u - \Delta u = f \ (\textit{в}\ \Omega), \quad u = \varphi \ (\textit{на}\ \partial\Omega), \tag{3.12}$$

имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$.

3.2. Абстрактная задача Неймана.

Рассмотрим теперь задачу

$$Lu = f, \quad \partial u = \psi, \tag{3.13}$$

которую естественно назвать *абстрактной задачей Неймана для уравнения Пуассона.*

Теорема 3.3. *Если выполнены условия*

$$f \in F^*, \qquad \psi \in G_-, \tag{3.14}$$

то задача (3.13) *имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(L)$, выражаемое формулой*

$$u = \tilde{A}^{-1} f + (T_M)\psi. \tag{3.15}$$

где $\tilde{A}$ — расширение на пространство F оператора A порождающего гильбертову пару $(F;E)$, а $T_M = (\partial_M)^{-1}$.

Доказательство. Представим, как при доказательстве теоремы 3.1, решение $u \in \mathcal{D}(L)$ в виде (3.7). Тогда

$$Lu = \hat{L}_0 v = f \in F^*, \quad \gamma v = 0, \tag{3.16}$$

и потому $v = \hat{L}_0^{-1} f \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) \subset N \subset F$. Далее,

$$\partial u = \hat{\partial} v + \partial_M w = \psi, \ \partial_M w = -\hat{\partial} v + \psi \in G_- = (G_+)^*. \tag{3.17}$$

Поэтому существует единственный элемент $w \in M$,

$$w = T_M(\partial_M w) = -T_M(\hat{\partial} w) + T_M \psi, \tag{3.18}$$

где $T_M : G_- \to M$ — изометрический оператор.

Отсюда следует, что

$$u = v+w = (\hat{L}_0^{-1} - T_M\hat{\partial}(\hat{L}_0^{-1}))f + T_M\psi =: \tilde{A}^{-1}f + T_M\psi \in \mathcal{D}(L), \quad (3.19)$$

причем элемент $v_N := \tilde{A}^{-1}f$, очевидно, является решением задачи Неймана (3.13) при $\psi = 0$, т.е. задачи

$$Lu = f, \quad \partial u = 0. \quad (3.20)$$

Покажем, что сужение $A := \tilde{A}|_{\mathcal{D}(A)}$ оператора $\tilde{A}$ на множество

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L) : Lu \in E \subset F^*, \ \partial u = 0\} \quad (3.21)$$

является порождающим оператором гильбертовой пары $(F; E)$.

В самом деле, если $Lu = f \in E$, то задача (3.20) имеет единственное решение v_N, причем в представлении для v_N оператор $\hat{L}_0$, как следует из доказательства теоремы 2.1, должен быть заменен на L_0, $\mathcal{D}(L_0) \subset N$, $\mathcal{R}(L_0) = E$. Поэтому

$$u = (I - T_M\hat{\partial})(L_0^{-1})f =: A^{-1}f, \quad (3.22)$$

и проблема (3.20) эквивалентна операторному уравнению

$$Au = f, \ f \in E, \ u \in \mathcal{D}(A), \ \mathcal{R}(A) = E, \ A = \tilde{A}|_{\mathcal{D}(A)}. \quad (3.23)$$

Отсюда и из формулы Грина (2.13) следует, что

$$\langle v, Lu \rangle_E = (v, Lu)_E = (v, f)_E = (v, Au)_E = (v, u)_F,$$
$$u \in \mathcal{D}(A) \subset N \oplus M = F, \ v \in F. \quad (3.24)$$

В силу (1.4) отсюда следует, что A — порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$. □

Следствием теоремы 3.3 является

Теорема 3.4. *Если выполнены условия*

$$f \in (H^1(\Omega))^* \supset L_2(\Omega), \quad \psi \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad (3.25)$$

то в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ краевая задача Неймана для уравнения Пуассона, т.е. задача

$$u - \Delta u = f \ (\textit{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \ (\textit{на } \partial\Omega), \quad (3.26)$$

имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$.

3.3. Абстрактная задача Ньютона.

Рассмотрим, наконец, задачу

$$Lu = f, \quad \partial u + \sigma\gamma u = \psi, \tag{3.27}$$

где $\sigma : G_+ \to G_-$ — ограниченный оператор, являющийся расширением неотрицательного самосопряженного оператора, действующего в G и заданного на области определения $\mathcal{D}(\sigma) \subset G$, плотной в G, причем $D(\sigma^{1/2}) \supset \mathcal{D}(C^{-1/2}) = G_+$, где $C = \gamma_M T_M$ (см. п.1.3). Задачу (3.27) естественно назвать *абстрактной краевой задачей Ньютона для уравнения Пуассона.* При $\sigma = 0$ она переходит в задачу (3.13).

Теорема 3.5. *Пусть оператор $\sigma : G_+ \to G_-$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда при*

$$f \in F^*, \ \psi \in G_- \tag{3.28}$$

задача (3.27) *имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(L)$, выражаемое формулой*

$$u = (I - (\gamma_M)^{-1}(C^{-1} + \sigma)^{-1}\hat{\partial})\hat{L}_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}(C^{-1} + \sigma)^{-1}\psi, \tag{3.29}$$

где $(C^{-1} + \sigma)^{-1}$ — оператор, ограниченно действующий из G_- в G_+.

Доказательство. Будем разыскивать решение $u \in \mathcal{D}(L)$ в виде (3.7), т.е.

$$u = v + w, \ v \in \mathcal{D}(\hat{L}_0), \ w \in M, \ \gamma v = 0, \ Lw = 0, \ \partial u = \hat{\partial} v + \partial_M w. \tag{3.30}$$

Тогда взамен (3.27) приходим к системе уравнений

$$\hat{L}_0 v = f, \quad \gamma v = 0, \quad f \in F^*, \tag{3.31}$$

$$w \in M, \quad \partial_M w + \sigma\gamma_M w = \psi - \hat{\partial} v. \tag{3.32}$$

Из (3.31) получаем, что при $f \in F^*$ будет $v = \hat{L}_0^{-1} f \in \mathcal{D}(\hat{L}_0) = \mathcal{D}(\hat{\partial})$, и потому $\hat{\partial} v \in G_-$. Тогда в (3.32) $\psi - \hat{\partial} v \in G_-$.

Заметим теперь, что между элементами $\gamma_M w$ и $\partial_M w$, $w \in M$, имеется связь, определяемая оператором $C := \gamma_M T_M$, см. п.1.3. В самом деле, так как $\gamma_M = (T_M)^{-1}$, то для любого $w \in M$ имеем

$$\partial_M w = (T_M)^{-1} w = (T_M)^{-1}(\gamma_M)^{-1}\gamma_M w = C^{-1}\gamma_M w, \tag{3.33}$$

где $C^{-1} : G_+ \to G_-$ — ограниченный оператор.

С учетом (3.33) задачу (3.32) можно переписать в виде

$$(C^{-1}+\sigma)(\gamma_M w) = \psi - \hat{\partial} v \in G_-. \tag{3.34}$$

Если $C^{-1}+\sigma$ имеет ограниченный обратный оператор, т.е. $(C^{-1}+\sigma)^{-1} : G_- \to G_+$, то из (3.34) имеем

$$\gamma_M w = (C^{-1}+\sigma)^{-1}(\psi - \hat{\partial} v), \ w = (\gamma_M)^{-1}(C^{-1}+\sigma)^{-1}(\psi - \hat{\partial} v), \tag{3.35}$$

откуда для решения $u = v + w$ следует представление (3.29).

Для завершения доказательства теоремы осталось установить ограниченность оператора $(C^{-1}+\sigma)^{-1}$. Так как оператор σ обладает свойством неотрицательности, т.е.

$$\langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G \geq 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{3.36}$$

то

$$\left\langle \varphi, (C^{-1}+\sigma)\varphi \right\rangle_G \geq \left\langle \varphi, C^{-1}\varphi \right\rangle_G, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{3.37}$$

Далее, поскольку C^{-1} является порождающим оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$, то $G_+ = \mathcal{D}(C^{-1/2})$ и

$$\left\langle \varphi, C^{-1}\varphi \right\rangle_G = ||C^{-1/2}\varphi||^2_G = ||\varphi||^2_{G_+}. \tag{3.38}$$

Отсюда и из (3.36) получаем неравенство

$$||(C^{-1}+\sigma)\varphi||_{G_-} \geq ||\varphi||_{G_+}, \quad \forall \varphi \in G_+, \tag{3.39}$$

откуда, в свою очередь, следует, что существует ограниченный оператор $(C^{-1}+\sigma)^{-1} : G_- \to G_+$, причем

$$||(C^{-1}+\sigma)^{-1}||_{G_- \to G_+} \leq 1. \tag{3.40}$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.1. *Сравнивая формулы* (3.19) *и* (3.29) *для решений задач* (3.13) *и* (3.27) *и учитывая связь $C = \gamma_M T_M$, приходим к выводу, что обе они могут быть записаны в виде* (3.29), *причем $\sigma \neq 0$ в задаче* (3.27) *и $\sigma = 0$ в задаче* (3.13). *Этот факт очевиден из* (3.13), (3.27). $\square$

Следствием теоремы 3.5 является такой результат.

Теорема 3.6. *Если выполнены условия* (3.25) *и оператор*

$$\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

ограничен и неотрицателен, то в области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ краевая задача Ньютона

$$u - \Delta u = f \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = \psi \ (\text{на } \partial\Omega), \tag{3.41}$$

имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$. $\square$

4. Абстрактные спектральные задачи

Здесь на основе формулы Грина (2.13) рассмотрены абстрактные спектральные задачи, обобщающие известные задачи математической физики, гидродинамики, дифракции и др.

4.1. Спектральная задача Дирихле.

Как и в параграфе 3, будем считать, что для тройки гильбертовых пространств выполнены условия а) – в) п.2.1 и потому имеет место формула Грина (2.13). Рассмотрим задачу

$$Lu = \lambda u \quad (u \in \mathcal{D}(L) \subset F \subset E), \qquad \gamma u = 0, \tag{4.1}$$

т.е. спектральную задачу Дирихле. Из предыдущих построений очевидна

Теорема 4.1. *Если подпространство* $N := \ker \gamma$ *пространства* F *компактно вложено в* E, *то задача* (4.1) *равносильна операторному уравнению*

$$A_0 u = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset N, \tag{4.2}$$

где оператор A_0 *положительно определен, самосопряжен и имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных положительных собственных значений* $\lambda_k(A_0)$ *с предельной точкой* $+\infty$. *Система* $\{u_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *его собственных элементов образует ортогональный базис в пространствах* E *и* $N = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \subset F$:

$$\begin{gathered}(u_k(A_0), u_l(A_0))_E = \delta_{kl}, \\ (A_0 u_k(A_0), u_l(A_0))_E = (u_k(A_0), u_l(A_0))_F = \lambda_k(A_0)\delta_{kl}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) \subset F$ и $\gamma u = 0$, то и $u \in N \subset E$, и тогда в силу (4.1) имеем

$$Lu = \hat{L}_0 u = L_0 u =: A_0 u = \lambda u, \quad \mathcal{R}(A_0) = E,$$

где $L_0 = A_0$ — оператор гильбертовой пары $(N; E)$, $N = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$. Если $N = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ компактно вложено в E, то оператор A_0 имеет дискретный спектр и справедливы остальные утверждения теоремы. □

4.2. Спектральная задача Неймана.

Рассмотрим теперь спектральную задачу Неймана

$$Lu = \lambda u, \quad (u \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F \subset E), \qquad \partial u = 0. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Задача* (4.4) *равносильна уравнению*

$$Au = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L) \subset F : \partial u = 0\}, \tag{4.5}$$

где A оператор гильбертовой пары $(F; E)$. Если F компактно вложено в E, то оператор A самосопряжен, положительно определен и имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ и выполнены формулы ортогональности вида (4.3) *для оператора A взамен A_0.*

Доказательство. Если u — решение задачи (4.4), то по формуле Грина (2.13) получаем тождество

$$\langle v, \lambda u \rangle_E = (v, \lambda u)_E = (u, v)_F, \quad \forall v \in F. \tag{4.6}$$

из которого следует, что собственные значения λ положительны.

Назовем ненулевой элемент $u \in F$ обобщенным собственным элементом задачи (4.4), отвечающим собственному значению λ, если выполнено тождество (4.6) при любом $v \in F$.

Рассмотрим при $u, v \in F$ билинейную форму $(v, u)_E$, ограниченную в F. Для такой формы, как известно (см., например, [6], с.26, а также п.1.1), имеется представление

$$(v, u)_E = (v, Bu)_F, \quad B \in \mathcal{L}(F). \tag{4.7}$$

Так как

$$(v, u)_F = (A^{1/2} v, A^{1/2} u)_E, \tag{4.8}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(F; E)$, то из (4.7) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned}(v, u)_E = (v, Bu)_F = (A^{1/2} v, A^{1/2} A^{-1} u)_E = \\ = (A^{1/2} v, A^{1/2}(A^{-1/2} A^{-1} A^{1/2}) u)_E = \\ = (v, (A^{-1/2} A^{-1} A^{1/2}) u)_F, \quad \forall v, u \in F.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что

$$B = A^{-1/2} A^{-1} A^{1/2} = A^{-1}|_{\mathcal{D}(A^{1/2})} = A^{-1}|_F. \tag{4.10}$$

Далее для простоты взамен $B = A^{-1}|_F$ будем писать A^{-1}.

Если $u \in F$ — обобщенное решение задачи (4.4), то из (4.6), (4.7) и (4.10) получаем тождество

$$(v, (I - \lambda A^{-1/2} A^{-1} A^{1/2}) u)_F = 0, \quad \forall v \in F.$$

Отсюда следует, что u является решением уравнения

$$u = \lambda A^{-1} u, \qquad u \in F, \tag{4.11}$$

и потому справедливо (4.5). Так как $F = \mathcal{D}(A^{1/2})$ компактно вложено в E, то задача (4.5) имеет дискретный спектр и выполнены последние утверждения теоремы.

Докажем, наконец, что задачи (4.4) и (4.5) равносильны. Сначала установим, что для обобщенных решений задачи (4.4) выполнено условие $u \in \mathcal{D}(L) \subset F$. В самом деле, пусть при некотором $u \in F$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ имеет место тождество (4.6). Положим $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in N$, $u_2 \in M$. Тогда из (4.6) при любом $v \in N$ и $f := \lambda u \in F \subset E$ имеем

$$(v, u_1)_F = (v, f)_E. \tag{4.12}$$

Отсюда и из тождества (2.3), а также предыдущих перед ним рассуждений следует, что $u_1 \in \mathcal{D}(\tilde{L}_0)$ и $\tilde{L}_0 u_1 = f \in E$. Но тогда $u_1 \in \mathcal{D}(L_0) \subset \mathcal{D}(\hat{L}_0)$. (см. п.$1^0$, 2^0 и формулы (2.1)–(2.6)), и потому $u = u_1 + u_2 \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F$.

Применяя формулу Грина (2.13) для $u \in \mathcal{D}(L)$ и $v \in F$, имеем для обобщенного решения (4.6)

$$(v, \lambda u)_E = (v, u)_F = (v, Lu)_E + \langle \gamma v, \partial u \rangle_G ,$$

т.е. тождество

$$(v, Lu - \lambda u)_E + \langle \gamma v, \partial u \rangle_G = 0, \quad \forall v \in F. \tag{4.13}$$

Если здесь считать, что $v \in N$, то в силу плотности N в E получаем уравнение $Lu = \lambda u$. Тогда $\langle \gamma v, \partial u \rangle_G = 0$ для любого $v \in F$. Так как γv пробегает все пространство G_+, плотное в G и в G_-, то отсюда следует, что $\partial u = 0$. $\square$

Следствие 4.1. *Для собственных значений* $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^\infty$ *и* $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ *задач Дирихле и Неймана* (4.1) *и* (4.4) *справедливы неравенства*

$$\lambda_k(A_0) \geq \lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots \,. \tag{4.14}$$

Доказательство. В самом деле, этот факт следует из максиминимальных принципов для собственных значений задач (4.2) и (4.5), а также того факта, что $\mathcal{D}(A_0^{1/2}) = N \subset F = \mathcal{D}(A^{1/2})$. $\square$

4.3. Спектральная задача Ньютона.

Будем теперь считать, что оператор $\sigma \in \mathcal{L}(G_+, G_-)$ и удовлетворяет условиям, сформулированным в начале п.3.3. Рассмотрим абстрактную спектральную задачу Ньютона

$$Lu = \lambda u \ (u \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial)), \qquad \partial u + \sigma\gamma u = 0. \tag{4.15}$$

Теорема 4.3. *Задача* (4.15) *равносильна уравнению*

$$\lambda A^{-1}u = u + K_\sigma u, \ u \in F, \ K_\sigma := P_M \gamma_M^* \sigma \gamma_M P_M, \tag{4.16}$$

где $P_M : F \to M$ — ортопроектор на M, а $K_\sigma : F \to F$ — ограниченный неотрицательный оператор. Если F компактно вложено в E, то задачи (4.15) *и* (4.16) *имеют дискретный спектр $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+, \ \lambda_k(A_\sigma) \to +\infty \ (k \to \infty)$,*

$$A_\sigma := (I + K_\sigma)^{1/2} A (I + K_\sigma)^{1/2}, \ \mathcal{D}(A_\sigma) = \mathcal{R}(A_\sigma^{-1}) =$$
$$= \mathcal{R}((I + K_\sigma)^{-1/2} A^{-1} (I + K_\sigma)^{-1/2}) \subset F. \tag{4.17}$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ этих задач образуют ортогональный базис в E по форме $||u||_F^2 + \langle \gamma u, \sigma\gamma u\rangle_G$. При этом выполнены формулы ортогональности

$$(u_k, u_l)_E = \delta_{kl}, \quad (u_k, u_l)_F + \langle \gamma u_k, \sigma\gamma u_l\rangle_G = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Доказательство этих утверждений проводится по тому же плану, что и в теореме 4.2, с усложнениями, обусловленными наличием оператора σ в (4.15).

Если $u \in \mathcal{D}(L) \subset F$ — решение задачи (4.15), то по формуле Грина (2.13) получим тождество

$$\langle v, \lambda u\rangle_E = (v, \lambda u)_E = (v, u)_F + \langle \gamma v, \sigma\gamma u\rangle_G, \quad \forall v \in F. \tag{4.19}$$

Отсюда при $v = u$ с учетом свойства (3.36) неотрицательности оператора σ получаем, что собственные значения λ задачи (4.15) положительны.

Назовем ненулевой элемент $u \in F$ обобщенным собственным элементом задачи (4.15), отвечающим собственному значению λ, если выполнено тождества (4.19) при любом $v \in F$.

Рассмотрим при $v, u \in F$ билинейную форму $\langle \gamma v, \sigma\gamma u\rangle_G$. Так как $\sigma \in \mathcal{L}(G_+, G_-), \ \gamma \in \mathcal{L}(F, G_+)$, то эта форма имеет представление

$$\langle \gamma v, \sigma\gamma u\rangle_G = (v, K_\sigma u)_F, \quad K_\sigma \in \mathcal{L}(F). \tag{4.20}$$

Пусть $P_M : F \to M$ — ортопроектор на M в F. Тогда для любого $u \in F$ имеем $\gamma u = \gamma_M P_M u$, так как $\gamma w = 0$ для $w \in N = F \ominus M$. Вспоминая еще соотношения $T_M = (\partial_M)^{-1} = \gamma_M^*$ (см.п.1.3) и используя тождество (1.19), приходим к тождеству

$$\langle \gamma v, \sigma\gamma u\rangle_G = \langle \gamma_M P_M v, \sigma\gamma_M P_M u\rangle_G = \\ = (P_M v, (\partial_M)^{-1}\sigma\gamma_M P_M u)_F = (v, P_M\gamma_M^*\sigma\gamma_M P_M u)_F. \quad (4.21)$$

Отсюда и из (4.20) следует, что оператор K_σ имеет представление (4.16) и является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в F.

Учитывая представления (4.7), (4.10) и формулу (4.16) для K_σ, для обобщенного решения (4.19) получаем тождество

$$(v, \lambda A^{-1}u - u - K_\sigma u)_F = 0, \quad \forall v \in F, \quad (4.22)$$

из которого следует уравнение (4.16).

Докажем теперь, что задача (4.16) имеет дискретный спектр и выполнены последние утверждения теоремы. Так как $K_\sigma \geq 0$ и ограничен, то оператор $I + K_\sigma \geq I \gg 0$ и потому имеет ограниченный обратный оператор, который является положительно определенным. Учитывая это, осуществим в задаче (4.16) замену

$$(I + K_\sigma)^{1/2}u = v \in F \quad (4.23)$$

и применим слева оператор $(I + K_\sigma)^{-1/2}$. Это дает уравнение

$$\lambda A_\sigma^{-1}v = v, \quad A_\sigma^{-1} := (I + K_\sigma)^{-1/2}A^{-1}(I + K_\sigma)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(F), \quad (4.24)$$

равносильное спектральной задаче

$$A_\sigma v = \lambda v, \quad v \in \mathcal{D}(A_\sigma) = \mathcal{R}(A_\sigma^{-1}). \quad (4.25)$$

Так как A_σ^{-1} — компактный и притом положительный оператор в F, то задачи (4.24), (4.25) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, $v_k = v_k(A_\sigma)$, этих задач образуют ортогональный базис в пространстве F и по форме оператора A_σ^{-1}, их можно выбрать удовлетворяющими следующим формулам ортогональности:

$$(A_\sigma^{-1}v_k, v_l)_F = \delta_{kl}, \quad (v_k, v_l)_F = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}. \quad (4.26)$$

Отсюда с использованием обратной замены (4.23) и формул (4.21), (4.7),(4.10) приходим к формулам (4.18).

Докажем теперь равносильность задач (4.15) и (4.16). Для этого достаточно установить, что из тождества (4.19) следуют соотношения (4.15). Однако это сводится к повторению рассуждений из конца доказательства теоремы 4.2: полагая в (4.19) $u = u_1+u_2$, $u_1 \in N$, $u_2 \in M$, $v \in N$, $f := \lambda u$, получаем тождество (4.12), откуда следует, что $u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0)$ и потому $u \in \mathcal{D}(L)$. Затем из тождества

$$(v, Lu - \lambda u)_E + \langle \gamma v, \partial u - \sigma\gamma u\rangle_G = 0, \quad \forall v \in F, \tag{4.27}$$

аналогичного тождеству (4.13), выводим, что для обобщенного решения $u \in \mathcal{D}(L)$ справедливы соотношения (4.15). □

Следствие 4.2. *Для собственных значений $\lambda_k(A)$ и $\lambda_k(A_\sigma)$ задач Неймана и Ньютона (см.*(4.4), (4.5), (4.15), (4.25)*) выполнены неравенства*

$$\lambda_k(A_\sigma) \geq \lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{4.28}$$

Доказательство. Доказательство этого факта основано на неравенстве

$$\frac{||v||_F^2}{||A_\sigma^{-1/2}v||_F^2} = \frac{((I+K_\sigma)u, u)_F}{(A^{-1}u, u)_F} = \frac{||u||_F^2 + \langle \gamma u, \sigma\gamma u\rangle_G}{||u||_E^2} \geq \frac{||u||_F^2}{||u||_E^2} \tag{4.29}$$

и соответствующих максиминимальных принципах для задач (4.24) и (4.11). □

4.4. Задачи со спектральным параметром в уравнении и краевом условии.

Для эллиптических уравнений задачи такого типа изучались в работах [8], [9]. В абстрактной форме и с некоторым обобщением их можно сформулировать в виде

$$Lu = \lambda u, \qquad \partial u + \sigma_1\gamma u = \lambda\sigma_0\gamma u, \tag{4.30}$$

где

$$\sigma_1 \in \mathcal{L}(G_+, G_-), \quad \sigma_0 \in \mathfrak{S}_\infty(G_+, G_-), \tag{4.31}$$

$$\langle \sigma_1\varphi, \varphi\rangle_G \geq 0, \quad \langle \sigma_0\varphi, \varphi\rangle_G \geq 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{4.32}$$

При $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma$ получаем задачу Ньютона (4.15), а при $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$ — задачу Неймана (4.4).

Теорема 4.4. *Задача* (4.30)–(4.32) *равносильна уравнению*

$$\lambda(A^{-1} + K_{\sigma_0})u = (I + K_{\sigma_1})u, \quad u \in F, \tag{4.33}$$

$$K_{\sigma_i} := P_M \gamma_M^* \sigma_i \gamma_M P_M \geq 0, \ i = 0, 1. \tag{4.34}$$

Если F компактно вложено в E, задачи (4.30)–(4.32) *и* (4.33) *имеют дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma_1})\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma_1}) \to +\infty$ $(k \to \infty)$,

$$A_{\sigma_0,\sigma_1} = (I + K_{\sigma_1})^{1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})^{-1}(I + K_{\sigma_1})^{1/2}, \tag{4.35}$$

$$\mathcal{D}(A_{\sigma_0,\sigma_1}) = \mathcal{R}(A_{\sigma_0,\sigma_1}^{-1}) = \mathcal{R}((I + K_{\sigma_1})^{-1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})(I + K_{\sigma_1})^{-1/2}). \tag{4.36}$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *этих задач образуют ортогональный базис по формам* $||u||_E^2 + \langle \gamma u, \sigma_0 \gamma u \rangle_G$ *и* $||u||_F^2 + \langle \gamma u, \sigma_1 \gamma u \rangle_G$*; для них выполнены формулы ортогональности*

$$(u_k, u_l)_E + \langle \gamma u_k, \sigma_0 \gamma u_l \rangle_G = \delta_{kl}, \ (u_k, u_l)_F + \langle \gamma u_k, \sigma_1 \gamma u_l \rangle_G = \lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma_1})\delta_{kl}. \tag{4.37}$$

Доказательство. Доказательство теоремы повторяет схему рассуждений в теореме 4.3.

Если $u \in \mathcal{D}(L) \subset F$ — решение задачи (4.30)–(4.32), то для этого решения по формуле Грина (2.13) получаем тождество

$$(v, \lambda u)_E + \langle \gamma v, \lambda \sigma_0 \gamma u \rangle_G = (v, u)_F + \langle \gamma v, \sigma_1 \gamma u \rangle_G, \ \forall v \in F, \ \lambda > 0. \tag{4.38}$$

Если это тождество выполнено для некоторого ненулевого $u \in F$ и некоторого $\lambda > 0$, то такой элемент u будем называть обобщенным решением задачи (4.30)–(4.32).

Тождество (4.38) равносильно операторному уравнению (4.33), где K_{σ_i} определены формулами (4.34). Здесь операторы K_{σ_0} и K_{σ_1} обладают следующими свойствами: K_{σ_1} ограничен и неотрицателен, а K_{σ_0} компактен и неотрицателен в F; эти факты следуют из условий (4.31), (4.32). Вывод формул (4.34) проводится аналогично получению соотношения (4.21).

Осуществим в (4.33) замену

$$(I + K_{\sigma_1})^{1/2} u = v \tag{4.39}$$

и подействуем слева оператором $(I + K_{\sigma_1})^{-1/2} \in \mathcal{L}(F)$. Тогда возникает спектральная задача

$$\lambda A_{\sigma_0,\sigma_1}^{-1} v := \lambda (I + K_{\sigma_1})^{-1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})(I + K_{\sigma_1})^{-1/2} v = v \tag{4.40}$$

с компактным положительным оператором $A_{\sigma_0,\sigma_1}^{-1}$. Свойство компактности этого оператора следует из того, что оператор $(I + K_{\sigma_1})^{-1/2}$

ограничен, K_{σ_0} — неотрицателен и компактен, а потому $A^{-1} + K_{\sigma_0}$ — компактный положительный оператор в F.

Задача (4.40) равносильна уравнению

$$A_{\sigma_0,\sigma_1} v = \lambda v, \tag{4.41}$$

где A_{σ_0,σ_1} определен формулами (4.35), (4.36). Из доказанных фактов следует, что задачи (4.40), (4.41) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma_1})\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma_1}) \to +\infty$ $(k \to \infty)$, а система собственных элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в F и по форме $(A_{\sigma_0,\sigma_1}^{-1} v, v)_F$. Если для элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбрать условия ортонормировки в виде

$$(A_{\sigma_0,\sigma_1}^{-1} v_k, v_l)_F = \delta_{kl}, \quad (v_k, v_l)_F = \lambda(A_{\sigma_0,\sigma_1})\delta_{kl}, \tag{4.42}$$

то после обратной замены (4.39) для собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задач (4.40), (4.41) приходим к формулам (4.37), если учесть соотношения

$$(v, K_{\sigma_i} u)_F = \langle \gamma v, \sigma_i \gamma u \rangle_G\,, \ i = 0, 1. \tag{4.43}$$

В завершение доказательства данной теоремы проверим, что обобщенное решение $u \in F$, определенное тождеством (4.38), является обычным решением задачи (4.30). Как и в конце доказательства теоремы 4.3, положим в (4.38) $f := \lambda u \in F \subset E$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in N$, $u_2 \in M$, $v \in N$, получим тождество (4.12), откуда заключаем, что $u_1 \in \mathcal{D}(\hat{L}_0)$, $u \in \mathcal{D}(L)$. Затем из тождества

$$(v, Lu - \lambda u)_E + \langle \gamma v, \partial u + \sigma_1 \gamma u - \lambda \sigma_0 \gamma u \rangle_G = 0, \quad \forall v \in F, \tag{4.44}$$

приходим к выводу, что выполнены соотношения (4.30). □

Следствие 4.3. *Для собственных значений задач* (4.41) *с операторами σ_0 и σ_1, удовлетворяющими общим свойствам* (4.31), (4.32), *справедливы неравенства*

$$\lambda_k(A_{0,\sigma_1}) \geq \lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma_1}) \geq \lambda_k(A_{\sigma_0,0}), \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{4.45}$$

□

4.5. Абстрактная спектральная задача, порожденная проблемой нормальных колебаний вязкой жидкости в открытом сосуде.

По аналогии с физической задачей, исследованной во многих работах и описанной подробно в ([1], гл.VII), а также в [10], эту проблему в абстрактной форме можно сформулировать в виде

$$Lu = \lambda u, \quad \lambda(\partial u + \sigma_1 \gamma u) = \sigma_0 \gamma u, \tag{4.46}$$

где σ_1 и σ_0 удовлетворяют условиям (4.31), (4.32), причем оператор σ_0 положителен, т.е.

$$\langle \sigma_0 \varphi, \varphi \rangle_G > 0, \quad 0 \neq \varphi \in G_+. \tag{4.47}$$

Аналогично предыдущему легко устанавливается

Теорема 4.5. *Задача* (4.47), (4.49), *равносильна тождеству*

$$(v, \lambda u)_E + \left\langle \gamma v, \lambda^{-1} \sigma_0 \gamma u \right\rangle_G = (v, u)_F + \langle \gamma v, \sigma_1 \gamma u \rangle_G \,, \ \forall v \in F, \tag{4.48}$$

а это тождество, в свою очередь, равносильно уравнению

$$\lambda A^{-1} u + \lambda^{-1} K_{\sigma_0} u = (I + K_{\sigma_1}) u, \quad u \in F. \tag{4.49}$$

Доказательство. Вместо установления этих фактов заметим, что задача (4.46), получается из задачи (4.30), если в (4.30) выражение $\lambda\sigma_0$ заменить на $\lambda^{-1}\sigma_0$. С учетом этой замены тождество (4.38) переходит в (4.48), а уравнение (4.33) — в (4.49). □

Замечание 4.1. *Спектральная задача* (4.49) *является уже несамосопряженной. Она имеет дискретный спектр с двумя предельными точками:* $\lambda = +\infty$ *и* $\lambda = 0$. *Все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены на положительной полуоси, а собственные элементы обладают свойством базисности Рисса. Подробный анализ всех свойств решений задачи вида* (4.49) *можно найти в [1], гл.VII, а также в [10].* □

4.6. Абстрактная спектральная задача, порожденная проблемой дифракции

Большой цикл работ по исследованию задач сопряжения в проблеме дифракции был проведен М.С.Аграновичем, его соавторами и учениками, см. например [11], [12]. В частности, для внутренней задачи дифракции в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ возникает краевая задача

$$u - \Delta u + \lambda u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \mu u \text{ (на } \partial\Omega), \tag{4.50}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — фиксированный параметр, а $\mu \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Если роли параметров меняются местами, то эта проблема в общем эллиптическом случае исследована также в работе В.И.Горбачук [13].

Абстрактным аналогом проблемы (4.50) является задача

$$Lu + \lambda u = 0, \quad \partial u + \sigma_1 \gamma u = \mu \sigma_0 \gamma u, \tag{4.51}$$

где операторы σ_i, $i = 0, 1$, удовлетворяют условиям (4.31), (4.32), (4.47).

Теорема 4.6. *Задача* (4.51), *равносильна тождеству*

$$-(v, \lambda u)_E + \langle \gamma v, \mu \sigma_0 \gamma u \rangle_G = (v, u)_F + \langle \gamma v, \sigma_1 \gamma u \rangle_G, \ \forall v \in F, \tag{4.52}$$

а это тождество — уравнению

$$(-\lambda A^{-1} + \mu K_{\sigma_0}) u = (I + K_{\sigma_1}) u, \qquad u \in F. \tag{4.53}$$

Доказательство. Доказательство этих фактов очевидно из рассуждений в теореме 4.5, если заметить, что задачу (4.51) можно формально получить из (4.46), если в первом соотношении (4.46) λ заменить на $-\lambda$, а во втором взять $\lambda = \mu^{-1}$. □

Замечание 4.2. *Форма уравнения* (4.53) *удобна тем, что здесь параметры λ и μ в определенном смысле равноправны: любой из них можно считать спектральным, а другой — фиксированным. Подробное исследование (несамосопряженной) задачи* (4.53) *будет проведено в работах первого из соавторов данной статьи, а также его ученика П.А.Старкова.* □

Литература

[1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.*– Москва: Наука, 1989. – 416 с.

[2] Kopachevsky N. D., Krein S. G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol.1 Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid.*– Birkhauser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 2001, – 384 p.

[3] Лянце В. Э., Сторож О. Г. *Методы теории неограниченных операторов.*– Киев: Наукова думка, 1983, – 210 с.

[4] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.*– М: Наука, 1978, – 400 с.

[5] Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.*– Киев: Наукова думка, 1965, – 800 с.

[6] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. *Функциональный анализ.*– Киев: Выща школа, 1990. – 600 с.

[7] Gagliardo E. *Caratterizazioni delle trace sullo frontieza relative ad alcune classi di funzioni in* n *variabili.*// Rendiconti del Seminare matematico della universita di Padova, 1957, – V.27.

[8] Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. *Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях.*– Киев: Наукова думка, 1969. – 252 с.

[9] Барковский В.В. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях.*// УМЖ, 1967, т.19. – №1.

[10] Azizov T.Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R. *On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container.*// Math.Nachr, v.248–249, – p.3-39 (2003).

[11] Agranovich M.S., Katsnelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. *Generalized Method of Eigenoscillations in Difraction Theory.* Berlin.: Wiley-VCH, , 1999.

[12] Агранович М. С., Менникен Р. *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности.* // Математич. сборник., Т.190, N1, 1999 – с. 29-68.

[13] Горбачук В.И. *Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений.*// Сб. "Функциональные и численные методы математической физики", Ин-т математики и механики АН УССР (сб. науч. тр., отв. ред. Скрыпник И.В.), Киев: Наукова думка, 1988, – с. 60-63.

Сведения об авторах

Н. Д. Копачевский Таврический национальний университет им. В. И. Вернадского, ул. Ялтинская 4, 95007, Симферополь, Крым, Украина
E-Mail: kopachevsky@tnu.crimea.ua