ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 539.3:534.1

©2009. **О.Д. Смоктий, И.А. Моисеенко**

ЭФФЕКТ КРАЕВОГО РЕЗОНАНСА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрена задача определения частот краевого резонанса при симметричных колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра со свободной цилиндрической поверхностью. Описан алгоритм применения в рассматриваемой задаче метода рядов по базисной системе динамических однородных решений. Рассчитаны значения приведенных частот краевого резонанса для ряда трансверсально-изотропных материалов с различными показателями волновой анизотропии. Рассчитаны и проанализированы амплитудные формы колебаний приторцевой зоны трансверсально-изотропных полубесконечных цилиндров на частотах краевого резонанса.

Введение. Анализ явления краевого резонанса в полубесконечных пространственных упругих телах, под которым понимается специфический частотный эффект интенсивного возбуждения одной из краевых стоячих волн и формирование локализованного поля упругих колебаний с повышенными амплитудами вблизи нагружаемой границы, длительное время является одной из актуальных научных и прикладных проблем динамики деформируемого твердого тела. Основные публикации по данной тематике посвящены исследованиям краевого резонанса в изотропном упругом полуслое [1 – 7], а также изотропном упругом полуцилиндре. Краевой резонанс в полуцилиндре был экспериментально обнаружен в работе [8], теоретически исследован для случаев возбуждения осесимметричных [9] и неосесимметричных волн [10] с использованием метода суперпозиции. На основе уточненной трехмодовой модели волновых процессов в цилиндрическом волноводе краевой резонанс в свободном изотропном полуцилиндре исследован в работе [11]. В работе [12] на основе метода динамических однородных решений впервые получены результаты теоретического исследования краевого резонанса в свободном трансверсально-изотропном полуслое.

В настоящей публикации представлена численно-аналитическая методика решения и результаты численных исследований для задачи о краевом резонансе при возбуждении осесимметричных нормальных волн в трансверсально-изотропном полубесконечном цилиндре кругового сечения с осью изотропии, коллинеарной его геометрической оси.

1. Постановка задачи и получение представлений для базисного семейства нормальных волн. Рассматривается полубесконечное цилиндрическое тело, занимающее в нормированных безразмерных цилиндрических координатах $Or\theta z$ область $V = \{r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, +\infty)\}$, имеющее свободную боковую поверхность $S_R = \{r = R, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, +\infty)\}$ и нагруженное нормальными самоуравновешенными гармоническими усилиями, распределенными по торцевой поверхности $S_Z = \{0 \le r \le R,\ \theta \in \in [0, 2\pi],\ z = 0\}$.

Стационарное динамическое напряженно-деформированное состояние полуцилиндра описывается системой дифференциальных уравнений относительно комплексных функций нормированных волновых перемещений

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}[u_{0j}(x_1, x_2)e^{-i(\omega t - kx_3)}],$$

записываемой первоначально в нормированных прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ с $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $x_3 \equiv z$. Указанные уравнения имеют вид

$$L_{pj}u_j = 0 \quad (p, j = \overline{1, 3}), \tag{1}$$

где

$$L_{11} = c_{11}\partial_1^2 + 0.5(c_{11} - c_{12})\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, \qquad L_{12} = 0.5(c_{11} + c_{12})\partial_1\partial_2,$$
$$L_{13} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3, \qquad L_{22} = 0.5(c_{11} - c_{12})\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2,$$
$$L_{23} = (c_{13} + c_{44})\partial_2\partial_3, \qquad L_{21} = L_{12}, \qquad L_{31} = L_{13}, \qquad L_{32} = L_{23},$$
$$L_{33} = c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2;$$

$$\partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial_t = \partial/\partial t \quad -$$

операторы частного дифференцирования по безразмерным пространственным координатам x_j и времени t.

Граничные условия на поверхностях S_R и S_Z для комплексных характеристик тензора динамических напряжений имеют вид:

$$\sigma_{rr}|_{S_R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{S_R} = 0; \tag{2}$$

$$\sigma_{zz}|_{S_Z} = P(r, t)e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{rz}|_{S_Z} = 0. \tag{3}$$

Анализ явления краевого резонанса предполагает исследование специфики частотных зависимостей для характеристик динамического напряженно-деформированного состояния полуцилиндра на основе решения сформулированной граничной задачи (1) – (3) методом рядов по базисному множеству бегущих и краевых стоячих нормальных волн (методом динамических однородных решений). Согласно данному подходу для комплексных характеристик осесимметричных полей волновых упругих перемещений и напряжений используются представления рядами

$$\begin{gathered}\{u_r, u_z\} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\{F_p^{(r)}(r,z,t), F_p^{(z)}(r,z,t)\},\\ \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\{G_p^{(rr)}(r,z,t), G_p^{(rz)}(r,z,t),\\ G_p^{(\theta\theta)}(r,z,t), G_p^{(zz)}(r,z,t)\},\end{gathered} \tag{4}$$

которые удовлетворяют однородным краевым условиям (2) и содержат произвольные неопределенные коэффициенты A_p. Функции $F_p^{(r)}(r,z,t), F_p^{(z)}(r,z,t)$, $G_p^{(rr)}(r,z,t), G_p^{(rz)}(r,z,t), G_p^{(\theta\theta)}(r,z,t), G_p^{(zz)}(r,z,t)$ являются представлениями соответствующих характеристик напряженно-деформированного состояния в базисных осесимметричных продольно-сдвиговых нормальных волнах с круговой частотой ω и безразмерным нормированным волновым числом k. Получение этих выражений в используемой в данной работе форме на начальной стадии основывается на введении представлений компонент комплексного вектора волновых перемещений $u_j(x_1,x_2,x_3,t)$ через обобщенные волновые потенциалы $\tilde\varphi(x_1,x_2,x_3,t), \tilde\psi(x_1,x_2,x_3,t), \tilde\chi(x_1,x_2,x_3,t)$. Подстановка представлений

$$\begin{gathered}u_1 = \partial_1\tilde\varphi(x_1,x_2,x_3,t) + \partial_2\tilde\psi(x_1,x_2,x_3,t),\\ u_2 = \partial_2\tilde\varphi(x_1,x_2,x_3,t) - \partial_1\tilde\psi(x_1,x_2,x_3,t), \qquad u_3 = \tilde\chi(x_1,x_2,x_3,t),\end{gathered}$$

в которых

$$\begin{gathered}\left\{\tilde\varphi, \tilde\psi, \tilde\chi\right\} = \{\varphi(x_1,x_2), \psi(x_1,x_2), \chi(x_1,x_2)\}\, E(x_3,t,\omega,k),\\ E(x_3,t,\omega,k) = e^{-i(\omega t - kx_3)},\end{gathered}$$

в уравнения (1) приводит к соотношениям вида

$$L_\varphi^{(1)}\varphi(x_1,x_2) + L_\chi^{(1)}\chi(x_1,x_2) = 0, \quad L_\varphi^{(2)}\varphi(x_1,x_2) + L_\chi^{(2)}\chi(x_1,x_2) = 0; \tag{5}$$

$$L_\psi^{(1)}\psi(x_1,x_2) = 0. \tag{6}$$

Здесь $L_\varphi^{(1)} = c_{11}D^2 + \beta_1, \quad L_\chi^{(1)} = ik(c_{13}+c_{44}), \quad L_\varphi^{(2)} = ik(c_{13}+c_{44})D^2,$

$L_\chi^{(2)} = c_{44}D^2 + \beta_2, \quad L_\psi^{(1)} = (c_{11} - c12)/2D^2 + \beta_1, \quad \beta_1 = \Omega^2 - c_{44}k^2,$

$\beta_2 = \Omega^2 - c_{33}k^2, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ – двумерный оператор Лапласа,

$\Omega = \omega R_*(\rho_*/c_*)^{1/2}$– приведенный частотный параметр нормальной волны;

c_{pj} – безразмерные нормированные упругие постоянные материала волновода, отнесенные к c_*;

ρ – плотность материала волновода, отнесенная к ρ_*,

R_* – нормирующий параметр для всех характеристик с размерностью расстояния.

При применении операторного метода для решения уравнений (5), (6) могут быть, в частности, получены представления

$$\begin{aligned} u_1 &= (\partial_1 L_\chi^{(2)} F(x_1,x_2) + \partial_2 Q(x_1,x_2))E(x_3,t,\omega,k), \\ u_2 &= (\partial_2 L_\chi^{(2)} F(x_1,x_2) - \partial_1 Q(x_1,x_2))E(x_3,t,\omega,k), \\ u_3 &= -L_\varphi^{(2)} F(x_1,x_2)E(x_3,t,\omega,k). \end{aligned} \tag{7}$$

В выражениях (7) функции F, Q определяются из дифференциальных уравнений

$$(\alpha_1 D^4 + \alpha_2 D^2 + \alpha_3)F = 0, \quad D^2 Q + \xi^2 Q = 0,$$

где

$$\alpha_1 = c_{11}c_{44}, \qquad \alpha_2 = -(\beta_1 c_{44} + \beta_2 c_{11} + k^2(c_{13} + c44)^2),$$
$$\alpha_3 = \beta_1\beta_2, \qquad \xi^2 = 2\beta_1(c_{11} - c12)^{-1}.$$

Соответственно функция F может быть представлена суммой метагармонических функций F_j $(j = 1, 2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$D^2 F_j + \gamma_j^2 F_j = 0,$$

где $\gamma_j^2 = -(\alpha_2 + (-1)^j(\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_2)^{1/2})/2\alpha_1$. С использованием представления (7) и соотношений связи характеристик напряженно-деформированного состояния в прямоугольных и цилиндрических координатах для частного случая осесимметричных волновых движений можно записать

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{j=1}^{2} A_j \chi_j^{(r)} J_1(\gamma_j r)E(z,t,\omega,k), \qquad u_z = \sum_{j=1}^{2} A_j \chi_j^{(z)} J_0(\gamma_j r)E(z,t,\omega,k), \\ \sigma_{rr} &= \sum_{j=1}^{2} A_j[(c_{12}r^{-1}\partial_r + c_{11}\partial_r^2)\chi_j^{(r)} + ikc_{13}\chi_j^{(z)}]J_0(\gamma_j r)E(z,t,\omega,k), \\ \sigma_{rz} &= \sum_{j=1}^{2} A_j c_{44}\partial_r[ik\chi_j^{(r)} + \chi_j^{(z)}]J_0(\gamma_j r)E(z,t,\omega,k), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{j=1}^{2} A_j[(c_{11}r^{-1}\partial_r + c_{12}\partial_r^2)\chi_j^{(r)} + ikc_{13}\chi_j^{(z)}]J_0(\gamma_j r)E(z,t,\omega,k), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{j=1}^{2} A_j[c_{13}(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r)\chi_j^{(r)} + +ikc_{33}\chi_j^{(z)}]J_0(\gamma_j r)E(z,t,\omega,k),$$

где

$$\chi_j^{(r)} = (\beta_2 - c_{44}\gamma_j^2)/(ik(c_{13}+c_{44})\gamma_j^2), \qquad \chi_j^{(z)} = 1 \quad (j=1,2).$$

Из краевых условий на боковой поверхности S_R при использовании представлений (8) для σ_{rr}, σ_{rz} на заключительном этапе построения базисных однородных решений следует основное дисперсионное уравнение для определения множества волновых чисел $\{k_p\}_{p=1}^{\infty}$ осесимметричных нормальных волн

$$\Delta(\omega,k) = \Delta_{11}(\omega,k)\Delta_{22}(\omega,k) - \Delta_{12}(\omega,k)\Delta_{21}(\omega,k) = 0, \tag{9}$$

в котором

$$\Delta_{11}(\omega,k) = ikc_{13}\chi_1^{(z)}J_0(\gamma_1 R) - \gamma_1\chi_1^{(r)}(R^{-1}J_1(\gamma_1 R)(c_{12}+c_{11}) - c_{11}\gamma_1 J_2(\gamma_1 R)),$$

$$\Delta_{22}(\omega,k) = c_{44}\gamma_2 J_1(\gamma_2 R)(ik\chi_2^{(r)} + \chi_2^{(z)}), \Delta_{21}(\omega,k) = c_{44}\gamma_1 J_1(\gamma_1 R)(ik\chi_1^{(r)} + \chi_1^{(z)}),$$

$$\Delta_{12}(\omega,k) = ikc_{13}\chi_2^{(z)}J_0(\gamma_2 R) - \gamma_2\chi_2^{(r)}(R^{-1}J_1(\gamma_2 R)(c_{12}+c_{11}) - c_{11}\gamma_2 J_2(\gamma_2 R)).$$

Из (2) также вытекают соотношения связи коэффициентов $A_{1p} = -A_p\Delta_{12}(\omega,k_p)/\Delta_{11}(\omega,k_p)$, $A_{2p} = A_p$. Каждому действительному корню k_p уравнения (9) соответствуют представления функций перемещений и напряжений в бегущей базисной волне, имеющие вид

$$F_p^{(z)}(r,z,t) = \sum_{j=1}^{2} \delta_p^{2-j}\chi_{jp}^{(2)}J_0(\gamma_{jp}r)E(z,t,\omega,k_p),$$

$$F_p^{(r)}(r,z,t) = -\sum_{j=1}^{2} \delta_p^{2-j}\chi_{jp}^{(2)}\gamma_{jp}J_1(\gamma_{jp}r)E(z,t,\omega,k_p),$$

$$G_p^{(rr)}(r,z,t) = \sum_{j=1}^{2} \delta_p^{2-j}[ik_p c_{13}\chi_{jp}^{(2)}J_0(\gamma_{jp}r) - \gamma_{jp}\chi_{jp}^{(1)}(r^{-1}J_1(\gamma_{jp}r)(c_{12}+ +c_{11}) - c_{11}\gamma_{jp}J_2(\gamma_{jp}r))]E(z,t,\omega,k_p),$$

$$G_p^{(rz)}(r,z,t) = -\sum_{j=1}^{2} \delta_p^{2-j}c_{44}\gamma_{jp}J_1(\gamma_{jp}r)(ik_p\chi_{jp}^{(1)} + \chi_{jp}^{(2)})E(z,t,\omega,k_p),$$

$$G_p^{(\theta\theta)}(r,z,t) = \sum_{j=1}^{2} \delta_p^{2-j}[ik_p c_{13}\chi_{jp}^{(2)}J_0(\gamma_{jp}r) - \gamma_{jp}\chi_{jp}^{(1)}(r^{-1}J_1(\gamma_{jp}r)(c_{12}+ +c_{11}) - c_{12}\gamma_{jp}J_2(\gamma_{jp}r))]E(z,t,\omega,k_p),$$

$$G_p^{(zz)}(r,z,t) = \sum_{j=1}^{2} \delta_p^{2-j}[c_{13}\chi_{jp}^{(1)}\gamma_{jp}(\gamma_{jp}J_2(\gamma_{jp}r) - 2/rJ_1(\gamma_{jp}r))+ +ik_p c_{33}\chi_{jp}^{(2)}J_0(\gamma_{jp}r)]E(z,t,\omega,k_p), \quad \delta_p = -\Delta_{12}(\omega,k_p)/\Delta_{11}(\omega,k_p).$$

Для упорядоченных по возрастанию модулей мнимых и комплексных корней k_p уравнения (9), соответствующих модам краевых стоячих волн в представлениях (4), в качестве базисных функций $F_p^{(r)}, F_p^{(z)}, G_p^{(rr)}, G_p^{(rz)}, G_p^{(\theta\theta)}, G_p^{(zz)}$ соответственно фигурируют

$$F_p^{(r)}(r,z,t)|_{k=k_p} + F_p^{(r)}(r,z,t)|_{k=-\overline{k}_p}, \qquad F_p^{(z)}(r,z,t)|_{k=k_p} + F_p^{(z)}(r,z,t)|_{k=-\overline{k}_p},$$

$$G_p^{(rr)}(r,z,t)|_{k=k_p} + G_p^{(rr)}(r,z,t)|_{k=-\overline{k}_p}, \quad G_p^{(rz)}(r,z,t)|_{k=k_p} + G_p^{(rz)}(r,z,t)|_{k=-\overline{k}_p},$$

$$G_p^{(\theta\theta)}(r,z,t)|_{k=k_p} + G_p^{(\theta\theta)}(r,z,t)|_{k=-\overline{k}_p}, \quad G_p^{(zz)}(r,z,t)|_{k=k_p} + G_p^{(zz)}(r,z,t)|_{k=-\overline{k}_p}.$$

Решение основной граничной задачи. В качестве метода алгебраизации функциональных краевых условий (3) на торцевой поверхности S_Z полуцилиндра при использовании редуцированных разложений (4) по базисным однородным решениям в данной работе применен метод наименьших квадратов. В рамках данного подхода вводится представление функции невязки удовлетворения граничных условий (3)

$$J(A_1,...,A_N) = \int\limits_0^R (|\sigma_{zz} - P(r,t)|^2 + |\sigma_{rz}|^2)_{z=0} r\, dr$$

и формулируются условия ее минимизации на множестве искомых коэффициентов

$$\partial J(A_1,...,A_N)/\partial A_j = 0 \qquad (j = \overline{1,N}). \tag{10}$$

Из (10) следует система линейных алгебраических уравнений для определения A_p

$$\sum_{p=1}^{N} a_{pj} A_p = b_j \quad (j = \overline{1,N}), \qquad a_{pj} = \int\limits_0^R (S_p^{zz}\overline{S}_j^{zz} + S_p^{rz}\overline{S}_j^{rz})_{z=0} r dr,$$

$$b_j = \int\limits_0^R P(\overline{S}_j^{zz})_{z=0} r dr.$$

В выражения a_{jp}, b_j входят интегралы вида $I_{\nu\mu\alpha} = \int\limits_0^R J_\nu(ax) J_\mu(bx) x^\alpha dx$, для которых на основе представлений цилиндрических функций рядами получены аналитические расчетные формулы

$$I_{\nu\mu\alpha} = \left(\frac{a}{2}\right)^\nu \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{R^{h_p}}{h_p} \sum_{n=p}^{\infty} c_n d_{p-n},$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(n)!(n+\mu)!}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n}, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{(n)!(n+\nu)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}, \quad h_p = \nu+\mu+\alpha+2p+1.$$

Результаты численных расчетов. Анализ явления краевого резонанса в трансверсально-изотропном полуцилиндре реализован с использованием частотных характеристик его динамического напряженно-деформированного состояния в приторцевой зоне. Входящая в каевые условия (2) комплексная функция интенсивности самоуравновешенных внешних нормальных усилий $P(r,t)$, приложенных к поверхности S_Z, при расчетах задавалась в виде

$$P(r,t) = (r^3 - 2/5R^3)e^{-i\omega t}.$$

Достоверность результатов численных исследований помимо достижения критериев по степени удовлетворения краевым условиям (2) и устойчивости вычислений при вариации параметра редукции N, контролировалась также сравнением результатов, полученных на основе разработанного алгоритма в задаче для изотропного полуцилиндра, с результатами работы [11].

Рассмотрены примеры возбуждения колебаний в полуцилиндрах из ряда конкретных трансверсально-изотропных конструкционных материалов, волноводные свойства которых характеризуются различными альтернативными величинами введенного в [13] приведенного параметра волновой анизотропии Δ. Для полуцилиндра из материала $BaTiO_3$, значение параметра $|\Delta|$ близко к нулю, вследствие чего этот материал характеризуется малой волноводной анизотропией. Для полуцилиндра из монокристалла Co параметр Δ принимает большое положительное значение, для полуцилиндра из монокристалла β-кварца параметр Δ имеет отрицательное значение.

Для сравнительной характеристики найденных частот краевого резонанса введен приведенный параметр $\widetilde{\Omega}_e = \Omega_e/\Omega_{*1}$, где Ω_{*1} – значение первой ненулевой безразмерной частоты запирания нормальных продольно-сдвиговых волн в рассматриваемом полуцилиндре. Результаты представлены в таблице.

Тип материала полуслоя	Приведенная частота краевого резонанса $\widetilde{\Omega}_e$
Изотропный [11]	0.6798
$BaTiO_3$	0.6780
$\beta-$кварц	0.7178
Co	0.6583
Ni	0.6811
CdS	0.7295

Важным аспектом исследования специфики краевого резонанса является анализ форм колебаний приторцевой зоны полуцилиндра на частоте краевого резонанса $\widetilde{\Omega}_e$ и при частотах, отличающихся от $\widetilde{\Omega}_e$. На рис. 1–4 представлена амплитудные формы колебаний для области продольного диаметрального сечения полуцилиндра в зоне вблизи торца для первых из таблицы четырех типов материала полуслоя при краевом резонансе на частоте $\widetilde{\Omega}_e$.

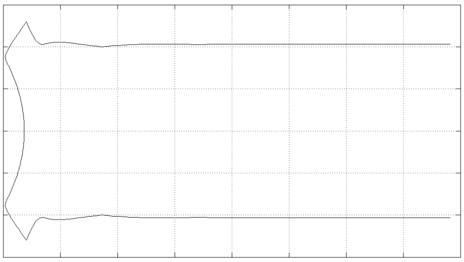

Рис. 1. Изотропный полуцилиндр [11].

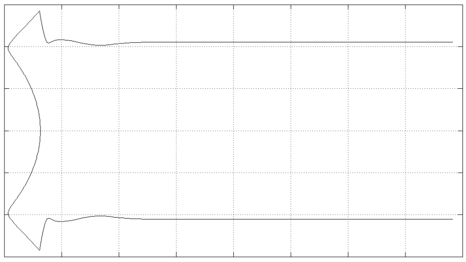

Рис. 2. Полуцилиндр из керамики $BaTiO_3$.

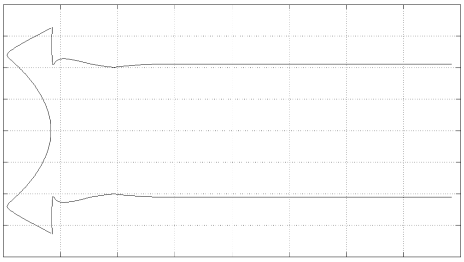

Рис. 3. Полуцилиндр из монокристалла $\beta-$кварца.

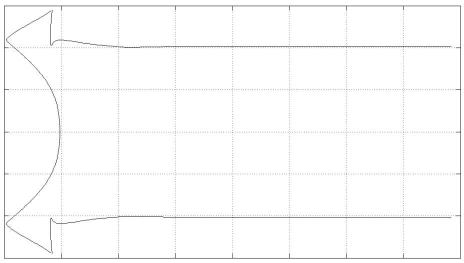

Рис. 4. Полуцилиндр из монокристалла Co.

Для сравнительной характеристики контрастности явления краевого резонанса на рис. 5 показаны амплитудные формы колебаний приторцевой зоны полуцилиндра из $BaTiO_3$ на частоте, отличающейся от первой ненулевой частоты запирания Ω_{*1} на $5,5\%$.

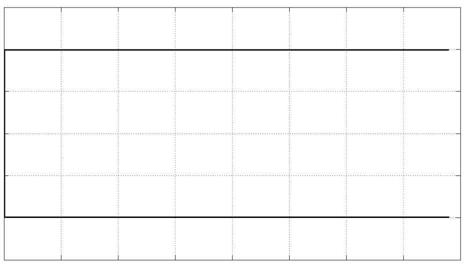

Рис. 5. Полуцилиндр из керамики $BaTiO_3$.

Заключение. В результате проведенных исследований на основе построенного обобщения метода динамических однородных решений найдены частоты краевых резонансов осесимметричных колебаний полуцилиндров из трансверсально-изотропных материалов с различными показателями волновой анизотропии. Расчитаны амплитудные формы колебаний в зоне осевого сечения полуцилиндра при краевом резонансе.

1. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В.* Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // Акуст. журнал. – 1991. – Вып. 37, №5. – С. 908–914.
2. *Гомилко А.М., Городецкая И.С, Мелешко В.В.* Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. механика. – 1991. – Вып. 27, №6. – С. 53–59.
3. *Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мартыненко О.Н.* Краевой резонанс в полубесконечном жестко защемленном волноводе // Прикл. математика и механика. – 1991. – Вып. 55, №6. – С.982–988.
4. *Городецкая Н.С., Гринченко В.Т.* Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах // Акуст. вестн. – 2004. – Вып. 7, №1. – С. 30–43.
5. *Гринченко В.Т., Городецкая И.С.* Об эффективности возбуждения краевой моды в упругой полуполосе // Прикл. механика. – 1998. – Вып. 34, №2. – С. 17–25.
6. *Ratassepp M, Klauson A, Chati F, Leon F, Maze G.* Edge resonance in semi-infinite thick pipe: numerical predictions and measurements // J. Acoust. Soc. Amer. – 2008. – **124**, №2. – P. 875.
7. *Zernov V., Pichugin A. V., Kaplunov J.* Eigenvalue of a semi-infinite elastic strip // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 2006. – №462 (2068). – P. 1255–1270.
8. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Amer. – 1957. – **29**, №2. – P. 189–194.
9. *Мелешко В.В.* О краевом резонансе при осесимметричных колебаниях полубесконечного упругого цилиндра // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – №11. – С. 920–923.
10. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
11. *McNiven H.* Extensional waves in a semi-infinite elastic rod // J. Acoust. Soc. Amer. – 1961. – **331**, №1. – P. 23–27.
12. *Смоктий О.Д.* Краевой резонанс при симметричных колебаниях трансверсально-изотропного полуслоя со свободными гранями // Тр. ин-та прикл. математики и механики НАНУ. – 2009. – **18**. – С. 159–165.
13. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.

Национальный ун-т, Донецк
smokty_oksana@mail.ru

Получено 26.11.09