

УДК 521.1:531

©2019. А.М. Ковалев, С.Н. Судаков

О МАКСИМАЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ ДАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

Изложенная в лекциях С.П. Королева простая математическая модель движения баллистической ракеты дальнего действия использована для численного решения задачи об определении таких значений двух параметров управления углом наклона траектории, при которых обеспечивается максимум дальности полета ракеты “Блю Стрик”.

Ключевые слова: баллистическая ракета, траектория полета, активный участок полета, пассивный участок полета.

Введение. В начале 1970 г.г. П.В. Харламов инициировал проведение в ИПММ масштабных прикладных исследований для оборонной промышленности. Позже такие работы выполнялись под руководством А.Я. Савченко. Одним из их результатов является развитие в институте новых направлений фундаментальных исследований в теории управления (А.М. Ковалев), в задачах динамики твердых тел с жидкостью (А.О. Игнатьев, С.Н. Судаков, Ю.Н. Кононов), в теории гироскопических систем (М.Е. Лесина, М.П. Харламов), в задачах динамики систем связанных твердых тел (И.А. Болграбская), во внешней баллистике (Б.И. Коносевиц). Данная работа также относится к числу таких исследований.

В 1949 году на Высших инженерных курсах, организованных при МВТУ им. Баумана для подготовки инженеров различных специальностей для работы в ракетостроительной промышленности, С.П. Королевым был прочитан курс лекций [1], в котором для описания движения баллистической ракеты была использована модель материальной точки, на практике вполне себя оправдывающая. По ряду причин эта модель сохраняет свою актуальность и сейчас. Во-первых, ее изучение является хорошим введением в теорию полета ракет и космонавтику. Во-вторых, за прошедшее время появилось много математических методов и вычислительных средств, позволяющих по-новому подойти к ее исследованию и решению. С учетом сказанного в работе авторов [2] эта модель использована для исследования полета ракеты “Блю Стрик” (Blue Streak – Лазурная полоса) на активном участке полета. Конструктивные параметры ракеты достаточно полно даны в литературе [3] и Интернете.

Настоящая работа является дальнейшим развитием работы [2] и посвящена исследованию полета ракеты “Блю Стрик” на всем интервале времени, начиная с момента старта и до момента приземления. Рассматривается также задача о выборе законов управления углом наклона траектории, при котором обеспечивается максимум дальности полета ракеты. Эта задача решается численно для специального двухпараметрического закона управления.

1. Уравнения движения. Задача изучается в декартовой системе координат, жестко связанной с Землей. Для постановки и решения задачи делаются следующие предположения:

1. Ось ракеты все время направлена по касательной к траектории ее движения, т.е. угол атаки равен нулю. Векторы реактивной силы и силы лобового сопротивления также направлены по касательной к траектории.

2. Коэффициент силы лобового сопротивления принимается постоянным.

3. Земля считается неподвижной и сферической.

4. Движение ракеты рассматривается в плоскости, проходящей через центр Земли.

5. Секундный расход топлива и сила тяги постоянны во все время работы двигателей.

В плоскости движения ракеты вводим прямоугольную декартову систему координат Oxy , начало которой O находится в точке старта, ось Ox направлена по касательной к поверхности Земли, а ось Oy – по радиусу Земли в сторону от ее центра. Следуя [3], уравнения движения ракеты на активном участке полета запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta, \\ \frac{dy}{dt} &= v \sin \theta,\end{aligned}\tag{1}$$

где v – скорость ракеты, P – тяга двигателей, X – сила лобового сопротивления, g – ускорение свободного падения, m – масса ракеты, x, y – координаты ракеты в системе координат Oxy , θ – угол между касательной к траектории и осью Ox , t – время.

Сила тяги P определяется формулой

$$P = P_0 + S_\alpha(p_0 - p),\tag{2}$$

где P_0 – сила тяги, замеренная на стенде; p_0 – атмосферное давление у поверхности Земли; p – атмосферное давление на высоте полета ракеты; S_α – коэффициент, определяемый по формуле

$$S_\alpha = \frac{P_1 - P_0}{p_0},\tag{3}$$

где P_1 – тяга двигателя в пустоте.

Сила лобового сопротивления X задается выражением

$$X = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,\tag{4}$$

где S – площадь мицеля ракеты, C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления, который считается постоянным.

Масса ракеты m определяется формулой

$$m = m_0 - \dot{m}t, \quad (5)$$

где m_0 – начальная масса ракеты, $\dot{m}$ – секундный расход топлива, который предполагается постоянным.

Движение ракеты на пассивном участке полета описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= G_x - X_x = -\frac{Gm_*m_1x}{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}C_xS\rho v_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= G_y - X_y = -\frac{Gm_*m_1(R+y)}{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}C_xS\rho v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \end{aligned} \quad (6)$$

где v_x , v_y – проекции вектора скорости ракеты на оси координат Oxy , m_* – масса ракеты после выработки топлива и окислителя, m_1 – масса Земли, G – гравитационная постоянная, R – радиус Земли.

Высота полета ракеты h над поверхностью Земли определяется формулой

$$h = \sqrt{x^2 + (R+y)^2} - R.$$

Плотность атмосферы ρ и атмосферное давление p задаются интерполяционными полиномами, которые строятся по данным ГОСТ 4401-81 “Атмосфера стандартная. Параметры” [4]. Так, плотность атмосферы ρ для высот от 0 до 20000 м интерполируется полиномом

$$\begin{aligned} \rho &= -5.20123 \cdot 10^{-22}h^5 + 2.85855 \cdot 10^{-17}h^4 - 5.90010 \cdot 10^{-13}h^3 + \\ &+ 7.96192 \cdot 10^{-9}h^2 - 0.125504 \cdot 10^{-3}h + 1.2254, \end{aligned}$$

который при $h = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ принимает значения плотности стандартной атмосферы на высотах $h = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ м над уровнем моря, которые равны $\rho = 1.225; 0.8194; 0.4671; 0.2279; 0.1665; 0.0889$ кг/м³ соответственно. Коэффициенты интерполяционного многочлена вычислялись с помощью пакета Maple-12.

Аналогично, для высот от 20000 до 40000 м плотность атмосферы интерполируется полиномом

$$\begin{aligned} \rho &= -1.38346 \cdot 10^{-23}h^5 + 2.71159 \cdot 10^{-18}h^4 - 2.13711 \cdot 10^{-13}h^3 + \\ &+ 8.54286 \cdot 10^{-9}h^2 - 0.175197 \cdot 10^{-3}h + 1.49580, \end{aligned}$$

который при $h = 20000; 24000; 28000; 32000; 36000; 40000$ принимает значения $\rho = 0.0889; 0.0469; 0.0251; 0.0136; 7.26 \cdot 10^{-3}; 4 \cdot 10^{-3}$.

На высотах от 40000 до 80000 м плотность воздуха интерполируется полиномом

$$\rho = -1.354 \cdot 10^{-11} h^3 + 0.2731 \cdot 10^{-5} h^2 - 0.1830 h + 4094.0,$$

который при $y = 40000, 50000, 60000, 80000$ принимает значения $\rho = 4 \cdot 10^{-3}; 1.03 \cdot 10^{-3}; 3.0 \cdot 10^{-4}; 1.85 \cdot 10^{-5}$.

На высотах от 80000 до 150000 м плотность воздуха становится достаточно малой и ее будем задавать линейной функцией

$$\rho = -0.14 \cdot 10^{-4} h + 2.1,$$

которая при $y = 80000; 150000$ принимает значения $\rho = 1.85 \cdot 10^{-5}; 2.00 \cdot 10^{-9}$ соответственно.

Атмосферное давление p для высот от 0 до 20000 м интерполируется полиномом

$$p = -1.09020 \cdot 10^{-17} h^5 + 6.28719 \cdot 10^{-13} h^4 - 2.08013 \cdot 10^{-8} h^3 + \\ + 0.616684 \cdot 10^{-3} h^2 - 12.0886 h + 1.013300 \cdot 10^5,$$

который при $y = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ принимает значения $p = 101330.0; 61661.0; 30801.0; 14170.0; 10353.0; 5529.0$. Здесь и ниже атмосферное давление p имеет размерность Па или, что то же самое, н/м².

Для высот от 20000 до 40000 м давление p задается полиномом

$$p = -1.23698 \cdot 10^{-18} h^5 + 2.19402 \cdot 10^{-13} h^4 - 1.59036 \cdot 10^{-8} h^3 + \\ + 0.594271 \cdot 10^{-3} h^2 - 11.5809 h + 95521.2,$$

который при $h = 20000; 24000; 28000; 32000; 36000; 40000$ принимает значения $p = 5529.0; 2971.0; 1616.0; 889.0499.0; 287.0$.

Для высот от 40000 до 80000 м давление p задается полиномом

$$p = -1.354 \cdot 10^{-11} h^3 + 0.2731 \cdot 10^{-5} h^2 - 0.1830 h + 4094,$$

который при $y = 40000; 50000; 60000; 80000$ принимает значения $p = 278.0; 80.0; 22.0; 1.0$.

Для высот от 80000 до 150000 м давление p достаточно задать линейной функцией

$$p = -0.14 \cdot 10^{-4} h + 2.1,$$

принимавшей при $h = 80000; 150000$ значения $p = 1; 4.49 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

Угол θ в данной работе играет роль управления. Функция $\theta = \theta(t)$ может быть задана таблично, графически или аналитически. Если функция $\theta(t)$ задана таблично или графически, то ее нужно интерполировать подходящей

функцией. В данной работе зависимость $\theta = \theta(t)$ задается следующим образом

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ \theta &= \frac{\pi}{2}(1 - \alpha \sin \omega(t - t_1)) \quad \text{при} \quad t_1 < t \leq t_2,\end{aligned}\tag{7}$$

где α и ω – положительные константы, значения которых задаются в каждом конкретном случае. Таким образом, на промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ ракета поднимается вертикально вверх, а при $t_1 < t \leq t_2$ движение происходит по наклонной траектории. Здесь t_2 – время работы двигателей, t_1 – время, за которое ракета поднимется по вертикали на высоту 100 м. Время t_1 вычисляется в процессе решения задачи.

Начальные условия для системы уравнений (1)–(7) следующие

$$x = 0, \quad y = 0, \quad v = 0.\tag{8}$$

Уравнения движения (1)–(7) с начальными условиями (8) полностью определяют движение ракеты на активном участке. Для решения уравнений движения используется численный метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

2. Численный пример. В качестве примера рассмотрим движение ракеты Блю-Стрик [2]. Ракета имеет два маршевых двигателя с общей тягой $P = 1.217944 \cdot 10^6$ н. Остальные параметры имеют следующие значения:

стартовая масса всей ракеты $m_0 = 104700$ кг;

масса ракеты без топлива и окислителя $m_* = 16700$ кг;

масса горючего и окислителя 88000 кг;

время работы двигателей $t_2 = 180$ с;

секундный расход топлива и окислителя $\dot{m} = 488.8888889$ кг/с;

масса Земли $m_1 = 5973 \cdot 10^{21}$ кг;

радиус Земли $R = 6371000$ м;

гравитационная постоянная $G = 6673 \cdot 10^{-14}$ м³с⁻²кг⁻¹.

Принимая радиус миделя ракеты равным 1.3 м, находим $S = 1.69\pi$ м².

Система (1)–(7) с начальными условиями (8) рассматривается для $C_x = 0.1$.

Высота полета над поверхностью Земли определяется по формуле

$$h = \sqrt{x^2 + (R + y)^2} - R.$$

Скорость ракеты на пассивном участке полета

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Расстояние вдоль поверхности Земли от точки старта до точки приземления выражается по формуле

$$l = R \arcsin(x_*/R),$$

где x_* – значение координаты x в точке приземления.

Были проведены расчеты для следующих трех вариантов выбора параметров управления α и ω :

$$1. \quad \alpha = 0.5, \quad \omega = 0.005;$$

$$2. \quad \alpha = 0.5, \quad \omega = 0.009;$$

$$3. \quad \alpha = 0.5, \quad \omega = 0.005.$$

Результаты расчетов представлены в таблицах 1–3. Расстояния от точки старта до точки приземления, измеренные вдоль поверхности Земли в каждом варианте расчетов, оказались следующими:

$$l_1 = 1532345.500 \text{ м}; \quad l_2 = 2009891.846 \text{ м}; \quad l_3 = 1146922.812 \text{ м},$$

где индекс при l означает номер варианта.

3. О вычислении максимальной дальности. Формулы (7) при различных значениях параметров $\alpha, \omega > 0$ описывают выбранный класс управлений. Каждому набору параметров α, ω соответствует своя траектория полета (см. библиографию [1–3]). Найдем такие значения этих параметров, чтобы расстояние от точки старта до точки приземления, измеренное вдоль поверхности Земли, было максимальным.

Табл. 1. Координаты, высота и скорость полета ракеты при $\alpha = 0.5$ и $\omega = 0.005$

t (с)	x (м)	y (м)	h (м)	v (м/с)
0	0	0	0	0
10	0	100.9056	100.9051	21.1306
92.9818	4569.8638	20000.0261	20001.659	652.3111
117.6046	12184.6454	40000.0155	40011.596	1115.4357
147.1554	31763.7926	79999.9768	80078.177	1969.6759
177.7608	74308.7427	149999.8329	150423.204	3575.4918
180	76702.3258	153567.5797	154018.4180	3672.5014
280	278276.4204	414442.2290	420146.001	2949.5367
380	476341.0573	588750.5610	605032.445	2364.0617
480	668824.9783	681182.0772	712826.572	1962.1256
580	853806.5959	694399.7068	745801.158	1824.4282
680	1029330.7242	629359.6948	704631.251	1995.0632
780	1193241.1833	485415.5931	588472.631	2420.8869
880	1342988.8229	260235.6850	394863.263	3022.9791
970.3	1463395.3833	-16436.0554	149890.198	3683.0166
992.1735	1490104.8004	-94457.6884	79999.589	3858.6274
1004.1276	1504257.8757	-138975.7611	39999.757	3957.2484
1009.9642	1511048.2258	-161200.2131	19999.932	4005.7758
1015.70944	1517613.9863	-183392.2383	0.081	4048.6270

Табл. 2. Координаты, высота и скорость полета ракеты при $\alpha = 0.5$ и $\omega = 0.009$

t (с)	x (м)	y (м)	h (м)	v (м/с)
0	0	0	0	0
10	0	100.9056	100.9051	21.1306
92.9818	8311.3102	20000.0479	20005.452	694.204
120.8558	22905.4687	40967.5175	41008.430	1244.9138
151.3537	56732.6547	80000.1426	80249.602	2225.9783
180.0	115982.5271	140674.7709	141707.599	3883.8272
280	397133.6617	375226.5181	386905.547	3262.3690
380	664961.3523	514255.7021	546291.354	2815.1517
480	924793.7956	570216.7072	631551.887	2553.8099
580	1173884.0086	545472.5652	644382.841	2512.7153
680	1409396.2066	440755.7483	585034.362	2698.7444
780	1628168.7681	255236.8383	452338.492	3084.1329
880	1826431.9270	-13579.54090	243578.480	3633.0476
915.6	1891199.6180	-130160.1438	150097.921	3863.4995
939.99	1933599.4869	-216577.1035	80025.357	4031.6763
953.19	1955840.1292	-265606.8803	40016.749	4126.1541
1009.8642	1966467.6760	-290033.7516	20020.703	4172.2868
1016.1741	1976718.4289	-314414.6072	0.108	4206.3156

Табл. 3. Координаты, высота и скорость полета ракеты при $\alpha = 0.25$ и $\omega = 0.009$

t (с)	x (м)	y (м)	h (м)	v (м/с)
0	0	0	0	0
10	0	100.9056	100.9051	21.1306
92.8441	3918.5186	20000.0141	20001.215	646.9470
117.2085	10066.9421	40000.0607	40007.964	1098.5310
146.1157	24678.1165	80000.0324	80047.234	1912.5869
175.5707	52936.5169	149996.1714	150211.032	3376.1681
180	58923.4399	164480.2910	164745.910	3708.2288
280	200004.9191	461952.1061	464878.616	2897.5611
380	338615.5758	673932.8137	682065.919	2192.0175
480	473389.8676	805710.7880	821306.702	1617.6703
580	603093.1247	860464.8053	885569.751	1278.7977
680	726497.5083	839661.7562	876167.832	1333.3562
780	842277.2995	743224.5512	792911.083	1748.191726
880	948897.3716	569519.6331	634085.224	2362.0086
1058.6820	1110322.1495	54778.9460	150000.716	3745.2314
1078.3020	1125268.8630	-18890.7147	80009.408	3918.2954
1089.0870	1133212.8660	-60927.9179	40020.284	4015.4397
1094.3770	1137035.6418	-81952.0014	20007.337	4063.5170
1099.5960	1140737.9172	-102957.2405	0.160	4109.4255

Ограничиваясь множеством управлений (7), будем рассматривать l как функцию $l = l(\alpha, \omega)$ двух переменных α, ω . Для численного определения значений параметров α, ω , при которых эта функция принимает максимальное значение, воспользуемся следующим градиентным методом.

1. Задаем некоторые допустимые значения параметров управления $\alpha = \alpha_0$ и $\omega = \omega_0$. В рассмотренном выше численном примере следует взять в качестве α_0, ω_0 значения параметров из варианта 2, поскольку в нем l принимает значение большее, чем в остальных двух.

2. Для выбранных значений параметров α, ω вычисляем $l(\alpha_0, \omega_0)$.

3. Задаем для α малое приращение $\delta\alpha$ и вычисляем $l(\alpha_0 + \delta\alpha, \omega_0)$.

4. Вычисляем

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} \approx \frac{l(\alpha_0 + \delta\alpha, \omega_0) - l(\alpha_0, \omega_0)}{\delta\alpha}. \quad (9)$$

5. Задаем для ω малое приращение $\delta\omega$ и вычисляем $l(\alpha_0, \omega_0 + \delta\omega)$.

6. Находим

$$\frac{\partial l}{\partial \omega} \approx \frac{l(\alpha_0, \omega_0 + \delta\omega) - l(\alpha_0, \omega_0)}{\delta\omega}. \quad (10)$$

7. Значения (9) и (10) являются компонентами вектора градиента функции $l(\alpha, \omega)$ в точке α_0, ω_0 . Он указывает в плоскости параметров α, ω направление скорейшего возрастания функции $l(\alpha, \omega)$.

В плоскости параметров (α, ω) из точки a_0 с координатами $\alpha = \alpha_0, \omega = \omega_0$ проведем луч a_0b_0 , направление которого совпадает с направлением градиента. Параметрические уравнения этого луча имеют вид

$$\alpha = \alpha_0 + n_1\tau, \quad \omega = \omega_0 + n_2\tau,$$

где $0 \leq \tau \leq \infty$ – параметр,

$$n_1 = \frac{\partial l / \partial \alpha}{\sqrt{(\partial l / \partial \alpha)^2 + (\partial l / \partial \omega)^2}}, \quad n_2 = \frac{\partial l / \partial \omega}{\sqrt{(\partial l / \partial \alpha)^2 + (\partial l / \partial \omega)^2}}.$$

Выбирая для τ подходящий шаг Δ , будем последовательно вычислять значения дальности

$$l_i = l(\alpha_0 + n_1 i \Delta, \omega_0 + n_2 i \Delta), \quad i = 0, 1, \dots, k, k+1.$$

Счет ведется до тех пор, пока выполняются неравенства

$$l_0 < l_1 < \dots < l_{k-1} < l_k.$$

Счет прекращается, как только будет выполнено неравенство

$$l_k \geq l_{k+1}.$$

8. Введем обозначения

$$\alpha_1 = \alpha_0 + k n_1 \Delta, \quad \omega_1 = \omega_0 + k n_2 \Delta \quad (11)$$

и обозначим через a_1 точку плоскости (α, ω) с координатами (11). Принимая точку a_1 за исходную, повторяем описанную процедуру. В результате в плоскости (α, ω) получим новую точку a_2 с координатами (α_2, ω_2) , которой соответствует большее значение дальности l ($l_0 < l_1 < l_2$). Этот процесс продолжаем до прекращения роста величины l .

Таким способом была получена дальность $l = 2032695.971$ м, что более, чем на 22 км превышает дальность, полученную в расчете, результаты которого представлены в табл. 2.

Заключение. Для трех вариантов выбора параметров управления проведены расчеты траекторий полета ракеты “Блю Стрик”. Их результаты представлены в табл. 1–3. Наибольшая дальность полета $l = 2009891.846$ м была достигнута в расчете для варианта 2 с параметрами управления $\alpha = 0.5$ и $\omega = 0.009$. Результаты этого расчета представлены в табл. 2.

С помощью градиентного метода, изложенного в разделе 3, параметры управления были скорректированы так, что удалось достичь дальности $l = 2032695.971$ м.

Принятые в расчетах значения коэффициента аэродинамического сопротивления $C_x = 0.1$ и радиуса мишени ракеты 1.3 м не являются достоверными и могут значительно отличаться от фактических, что вносит соответствующие погрешности в проводимые расчеты.

1. *Королев С.П.* Основы проектирования баллистических ракет дальнего действия / Творческое наследие академика Сергея Павловича Королева. – М.: Наука, 1980. – С. 208–290.
2. *Ковалев А.М., Судаков С.Н.* К вопросам динамики баллистических ракет дальнего действия // *Механика твердого тела.* – 2018. – Вып. 48. – С. 65–70.
3. *Фертрега М.* Основы космонавтики. – М.: Просвещение, 1969. – 304 с.
4. Атмосфера стандартная // *Большая советская энциклопедия.* В 30 т. – Т. 2. – С. 385.

A.M. Kovalev, S.N. Sudakov

On the maximum range ability of a long-range ballistic rocket

The point-mass model is used for numerical solving of the range maximum problem for the “Blue Streak” rocket. The trajectory slope angle is taken as the control function, and two-parameter approximation is accepted for this function for solving the problem by the gradient method.

Keywords: *ballistic rocket, flight path, boost path.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
sudakov@iamm.su

Получено 27.06.19