УДК 533.9

Н. А. Бритов

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В работе получены эффективные априорные оценки решений задачи Дирихле двухмерной безындукционной системы уравнений магнитной гидродинамики, описывающей течение в сильном магнитном поле. Указаны нелокальные в смысле значений параметров задачи условия разрешимости и единственности решения задачи.

Рассматривается краевая задача, описывающая стационарное двухмерное течение вязкой, несжимаемой, электропроводной жидкости в замкнутой, ограниченной неодносвязной области Ω, граница которой $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров. Внешность Ω имеет магнитную проницаемость вакуума. На течение наложено внешнее постоянное магнитное поле, индукция которого равна $\mathbf{B}$. Предполагается, что векторное поле $\mathbf{B}$ определено в $\Omega \cup \Gamma$ и пренебрежимо мало искажается течением (безындукционный случай). В дальнейшем $\mathbf{B}$ полагается известным. Течение возбуждается заданным на Γ движением с известной скоростью $\mathbf{v}_0$.

1. Краевая задача. В рамках модели Навье — Стокса — Максвелла рассматриваемое течение описывается в безразмерных переменных следующей краевой задачей [1]*:

$$(\nabla\times)^2\mathbf{v} + \nabla(P + 0{,}5\,|\mathbf{v}|^2) = \mathrm{Re}\,\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathrm{Ha}^2(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0;\quad \nabla\times\mathbf{E} = 0,\quad \nabla\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B});\quad \mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{v}_0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля в $\Omega \cup \Gamma$; Re — число Рейнольдса; На — число Гартмана.

Разрешимость задачи (1) доказана в двух- и трехмерном случаях в [1] в предположении, что

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0\cdot\boldsymbol{\nu}\, d\Gamma_i = 0,\quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{*}$$

($\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$ — внешняя нормаль и единственный, касательный к Γ вектор, $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\tau}$) для любых наперед заданных значений Re и На. В случае общих

* Точкой и косым крестиком обозначены скалярное и векторное произведения векторов соответственно.

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1990. Вып. 2.

граничных условий, когда требование (*) заменяется вытекающим из соленоидальности $\mathbf{v}$ условием

$$\sum_{i=0}^{n}\int_{\Gamma_i}\mathbf{v}\cdot\nu d\Gamma_i=0, \qquad (**)$$

разрешимость задачи (1) можно доказать методами работы [1] только для достаточно малых значений Re.

Целью настоящей работы является получение нелокальных (в смысле значений параметров Re и Ha) условий разрешимости задачи (1) при выполнении условия (**). Основой этих условий будут эффективные априорные оценки решений задачи (1). С помощью этих оценок будут получены также нелокальные условия единственности. Предположения относительно $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{B}$ весьма скромные.

Векторное поле $\mathbf{B}$ представляется в виде $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\varkappa b$, где $\mathbf{B}_0$ — гармоническое в $\Omega\cup\Gamma$ поле, лежащее в плоскости течения. В дальнейшем предполагается, что поле $\mathbf{B}_0$ не вырождается в $\Omega\cup\Gamma$ и $m=\inf\limits_{\Omega\cup\Gamma}|\mathbf{B}_0|$, $M=\sup\limits_{\Omega\cup\Gamma}|\mathbf{B}_0|$; $\int\limits_{\Gamma_0}(\mathbf{B}_0,\nu)^2\,d\Gamma_0>0$. Относительно $\mathbf{v}_0$ предполагается, что его можно продолжить внутрь Ω в виде соленоидального поля $\mathbf{u}_0\in W_2^2(\Omega)$. Указанное продолжение можно осуществить следующим образом. Пусть φ — решение краевой задачи

$$\Delta\varphi=0,\ \ \nu\cdot\nabla\varphi|_\Gamma=\nu\cdot\mathbf{v}_0;$$

$\mathbf{w}_0$ — любое дважды дифференцируемое в Ω соленоидальное векторное поле, удовлетворяющее краевому условию $\mathbf{w}_0|_\Gamma=\mathbf{v}_0-\nabla\varphi$. Тогда $\mathbf{u}_0=\nabla\varphi\times+\mathbf{w}_0$. Функция φ определяется с точностью до аддитивной постоянной и в дальнейшем считается известной. Для дальнейших рассуждений делается замена, приводящая краевые условия для $\mathbf{v}$ к однородным $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}_0+\nabla\varphi$. С учетом этой замены задача (1) примет вид

$$\begin{gathered}\nabla\times)^2\mathbf{u}+\nabla(P+0{,}5\,\mathrm{Re}\,|\mathbf{v}|^2)=\mathrm{Re}\,[\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{w}_0)+\mathbf{w}_0\times(\nabla\times\mathbf{u})+\\+\nabla\varphi\times(\nabla\times\mathbf{u})]+\mathrm{Ha}^2(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}+(\nabla\times)^2\mathbf{w}_0+\mathrm{Re}\,[\mathbf{w}_\Delta\times(\nabla\times\mathbf{w}_0)+\\+\nabla\varphi\times(\nabla\times\mathbf{w}_0)+\mathrm{Ha}^2[(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\times\mathbf{B}]\times\mathbf{B}, \qquad (2)\\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0;\ \nabla\times\mathbf{E}=0,\ \nabla\cdot\mathbf{E}=-\nabla[(\mathbf{u}+\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\times\mathbf{B}];\ \mathbf{u}|_\Gamma=0.\end{gathered}$$

2. Обобщенное решение. Как обычно [1, 2], $J(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых, финитных в Ω соленоидальных векторных полей; $H(\Omega)$ — гильбертово пространство, образованное замыканием $J(\Omega)$ по норме $\|\mathbf{a}\|_H=\||\nabla\times\mathbf{a}|\|_{L_2(\Omega)}$. Обобщенным решением задачи (2) называется векторное поле $\mathbf{u}\in\overset{\circ}{H}(\Omega)$, удовлетворяющее для любых $\Phi\in J(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\langle\nabla\times\Phi,\nabla\times\mathbf{u}\rangle=\mathrm{Re}\,[\langle\nabla\times\mathbf{u},\Phi\times\mathbf{u}\rangle+\langle\nabla\times\mathbf{w}_0,\Phi\times\mathbf{u}\rangle+\langle\nabla\times\mathbf{u},\Phi\times\mathbf{w}_0\rangle+\\+\langle\nabla\times\mathbf{u},\Phi\times\nabla\varphi\rangle]+\mathrm{Ha}^2\langle\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B},\mathbf{B}\times\Phi\rangle-\langle\nabla\times\Phi,\nabla\times\mathbf{w}\rangle+\\+\mathrm{Re}\,\langle\nabla\times\mathbf{w}_0,\Phi\times(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\rangle+\mathrm{Ha}^2\langle(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\times\mathbf{B},\mathbf{B}\times\Phi\rangle,\ \mathbf{E}=e\varkappa,\\ e-\mathrm{const}, \qquad (3)\end{gathered}$$

где $\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\rangle=\int\limits_\Omega\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2d\Omega$; $\|\mathbf{a}\|_p=\left\{\int\limits_\Omega|\mathbf{a}|^p\,d\Omega\right\}^{1/p}$.

Пусть $\Phi=\mathbf{u}$. Тогда из (3) следует уравнение баланса энергии задачи (2):

$$\begin{gathered}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2+\mathrm{Ha}^2\|\mathbf{u}\times\mathbf{B}_0\|_2^2=\mathrm{Re}\,[\langle\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\rangle+\langle\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{u}\times\nabla\varphi\rangle]-\\-\langle\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w}_0\rangle+\mathrm{Re}\,\langle\nabla\times\mathbf{w}_0,\mathbf{u}\times(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\rangle-\mathrm{Ha}^2\langle\mathbf{u}\times\mathbf{B}_0,\\(\mathbf{w}_0+\nabla\varphi)\times\mathbf{B}_0\rangle. \qquad (4)\end{gathered}$$

3. **Построение априорных оценок.** В Ω вводится система координат, локальный базис которой образован единичными векторами $\boldsymbol{\beta}_1 = |\mathbf{B}_0|^{-1}\mathbf{B}_0$ и $\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$. В этом базисе $\mathbf{u} = u_1\boldsymbol{\beta}_1 + u_2\boldsymbol{\beta}_2$. Подстановка этого представления в (4) и применение неравенства Коши дает неравенство

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 + \mathrm{Ha}^2 m^2 \|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2^2 \leqslant \mathrm{Re}\,(\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 +$$

$$+\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\nabla\varphi\|_2) + \|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2 + \mathrm{Re}\,(\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 +$$

$$+\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\|\mathbf{u}\times\nabla\varphi\|_2) + \mathrm{Ha}^2 M^2\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2(\|\mathbf{w}_0\|_2 + \|\boldsymbol{\beta}_2\nabla\varphi)\boldsymbol{\varkappa}\|_2. \quad (5)$$

Для построения априорных оценок требуется оценить слагаемые в правой части (5) через $\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2$ и $\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2$.

I. Оценка слагаемого $\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2$ сводится к оценке нормы $\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2$. В базисе $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ $\mathbf{w}_0 = w_{01}\boldsymbol{\beta}_1 + w_{02}\boldsymbol{\beta}_2$ и

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant \|u_1 w_{02}\boldsymbol{\varkappa}\|_2 + \|u_2 w_{01}\boldsymbol{\varkappa}\|_2.$$

Применение неравенства Гельдера и мультипликативного неравенства дает ($2 < q \leqslant 4$)

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant \left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}\|\mathbf{w}_0\|_q(\|\mathbf{u}\|_2^{1-2/q} + \|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2^{1-2/q})\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{2/q}. \quad (6)$$

Для оценки $\|\mathbf{u}\|_2$ вводится функция тока ψ (введение возможно в силу нулевых граничных условий для $\mathbf{u}$), связанная с $\mathbf{u}$ условием $\mathbf{u} = \nabla\times(\psi\boldsymbol{\varkappa})$, причем на внешнем контуре Γ_0 можно положить $\psi|_{\Gamma_0} = 0$. Отсюда

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle\nabla\times(\psi\boldsymbol{\varkappa}), \mathbf{u}\rangle = \langle\psi\boldsymbol{\varkappa}, \nabla\times\mathbf{u}\rangle \leqslant \|\psi\boldsymbol{\varkappa}\|_2\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2.$$

В силу неравенств Фридрихса и предыдущего

$$\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2 = \|(\nabla\psi\cdot\boldsymbol{\beta}_1)\boldsymbol{\varkappa}\|_2 \geqslant d^{-1}\|\psi\boldsymbol{\varkappa}\|_2 \ (d \text{ — диаметр } \Omega)$$

$$\|\mathbf{u}\|_2 \leqslant d^{1/2}\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2^{1/2}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{1/2}. \quad (7)$$

Подстановка оценки (7) в (6) дает

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant \left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}\|\mathbf{w}_0\|_q[d^{(q-2)/2q}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{(q+2)/2q}\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2^{(q-2)/2q} +$$

$$+\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{2/q}\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2^{1-2/q}].$$

К каждому из слагаемых в правой части неравенства применяется неравенство Юнга

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant \left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}\|\mathbf{w}_0\|_q\left\{d^{(q-2)/2q}\left[\frac{q+2}{2q}\varepsilon_1^{2q/(q+2)}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2 +\right.\right.$$

$$\left.\left.+0{,}5\frac{q-2}{q}\varepsilon_1^{2q/(q-2)}\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2\right] + 2q^{-1}\varepsilon_2^{q/2}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2 + \frac{q-2}{q}\varepsilon_2^{q/(q-2)}\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2\right\}.$$

Отсюда получается требуемая оценка:

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}_0\|_2 \leqslant \left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}\|\mathbf{w}_0\|_q\left\{\left[0{,}5d^{(q-2)/2q}\frac{q+2}{q}\varepsilon_1^{2q/(q+2)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+2q^{-1}\varepsilon_2^{q/2}\right]\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 + \frac{q-2}{q}[0{,}5\varepsilon_1^{-2q/(q-2)} + \varepsilon_2^{-q/(q-2)}]\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}\|\mathbf{w}_0\|_q\left\{q^{-1}[(q+2)d^{(q-2)/2q}0{,}5\varepsilon_1^{2q/(q+2)} + 2\varepsilon_2^{q+2} +\right.$$

$$+0{,}5\varepsilon_3^2(q-2)(0{,}5\varepsilon_1^{2q/(2-q)} + \varepsilon_2^{q/(2-q)})]\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^2 +$$

$$\left.+0{,}5\varepsilon_3^{-2}\frac{q-2}{q}[0{,}5\varepsilon_1^{2q/(2-q)} + \varepsilon_2^{q/(2-q)}]\|u_2\boldsymbol{\varkappa}\|_2^2\right\}.$$

II. Как и в предыдущем случае, оценка слагаемого $\| \nabla \times \mathbf{u} \|_2 \| \mathbf{u} \times \times \nabla\varphi \|_2$ сводится к оценке второго сомножителя. Пусть

$$M_i = \sup_{\Omega\cup\Gamma} | \beta_i \cdot \nabla\varphi |, \quad i = 1, 2.$$

Тогда в силу (7) и неравенства Юнга

$$\| \mathbf{u} \times \nabla\varphi \|_2 \leqslant M_2 \| \mathbf{u} \|_2 + M_1 \| u_2 \varkappa \|_2 \leqslant M_2 d^{1/2} \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2^{1/2} \| u_2 \varkappa \|_2^{1/2} +$$

$$+ M_1 \| u_2 \varkappa \|_2 \leqslant 0{,}5 M_2 d^{1/2} (\varepsilon_4^2 \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2 + \varepsilon_4^{-2} \| u_2 \varkappa \|_2) + M_1 \| u_2 \varkappa \|_2.$$

Отсюда и из неравенства Юнга получается требуемая оценка слагаемого:

$$\| \nabla \times \mathbf{u} \|_2 \| \mathbf{u} \times \nabla \varphi \|_2 \leqslant 0{,}5 \, [M_1 \varepsilon_5^2 + M_2 d^{1/2} (\varepsilon_4^2 + 0{,}5 \varepsilon_4^{-2} \varepsilon_5^2)] \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2^2 +$$

$$+ 0{,}5 \varepsilon_5^{-2} (M_1 + 0{,}5 d^{1/2} M_2 \varepsilon_4^{-2}) \| u_2 \varkappa \|_2^2.$$

III. Слагаемое $\| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \| \mathbf{u} \times \mathbf{w}_0 \|_2$ оценивается аналогично I с использованием (7) и неравенства Фридрихса:

$$\| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \| \mathbf{u} \times \mathbf{w}_0 \|_2 \leqslant \| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \| \mathbf{w}_0 \|_q \| \mathbf{u} \|_{2q/(q-2)} \leqslant \left(\frac{q}{q-2} \right)^{2/q} \| \mathbf{w}_0 \|_q \times$$

$$\times \| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \, [d^{(q-2)/2q} \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2^{(q-2)/2q} \| u_2 \varkappa \|_2^{(q-2)/2q} + \| u_2 \varkappa \|_2^{1-2/q}] \times$$

$$\times \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2^{2/q} \leqslant 2 \left(\frac{q}{q-2} \right)^{2/q} d^{(q-2)/q} \| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \| \mathbf{w}_0 \|_q \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2.$$

IV. Последние два слагаемые оцениваются однотипно:

$$\| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \| \mathbf{u} \times \nabla\varphi \|_2 \leqslant \| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \, [0{,}5 M_2 d^{1/2} \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2 +$$

$$+ (M_1 + M_2 0{,}5 d^{1/2}) \| u_2 \varkappa \|_2],$$

$$\| u_2 \varkappa \|_2 (\| \mathbf{w}_0 \|_2 + \| \nabla\varphi \cdot \beta_2 \|_2) \leqslant (M_2 + \| \mathbf{w}_0 \|_2) \| u_2 \varkappa \|_2.$$

Подстановка этих оценок в (5) и перегруппировка слагаемых дают основное энергетическое неравенство

$$\Big\{ 1 - \mathrm{Re} \left(\frac{q}{q-2} \right)^{2/q} \| \mathbf{w}_0 \|_q \, q^{-1} \, [2 \varepsilon_2^{q/2} + 0{,}5 d^{(q-2)/2q} (q+2) \, \varepsilon_1^{2q/(q+2)} +$$

$$+ 0{,}5 (q-2) \, \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2^{q/(2-q)} + 0{,}5 d^{(q-2)/2q} \varepsilon_1^{2q/(2-q)})] - 0{,}5 \, \mathrm{Re} \, [M_1 \varepsilon_5^2 +$$

$$+ M_2 d^{1/2} (\varepsilon_4^2 + 0{,}5 \varepsilon_4^{-2} \varepsilon_5^2)] \Big\} \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2^2 + \Big\{ \mathrm{Ha}^2 m^2 - 0{,}5 \, \mathrm{Re} \Big[\left(\frac{q-2}{q} \right)^{1-2/q} \times$$

$$\times \| \mathbf{w}_0 \|_q \, \varepsilon_3^{-2} (0{,}5 d^{(q-2)/2q} \varepsilon_1^{2q/(2-q)} + \varepsilon_2^{q/(2-q)}) + \varepsilon_5^{-2} (M_1 +$$

$$+ 0{,}5 d^{1/2} \varepsilon_4^{-2} M_2) \Big] \Big\} \| u_2 \varkappa \|_2^2 \leqslant \Big\{ 1 + \mathrm{Re} \Big[2 \left(\frac{q}{q-2} \right)^{2/q} d^{(q-2)/q} \times$$

$$\times \| w_0 \|_q + 0{,}5 M_2 d^{1/2} \Big] \Big\} \| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \| \nabla \times \mathbf{u} \|_2 + [\mathrm{Re} \, (M_1 +$$

$$+ 0{,}5 M_2 d^{1/2}) \| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 + \mathrm{Ha}^2 M^2 (M_2 + \| \mathbf{w}_0 \|_2)] \, \| u_2 \varkappa \|_2. \tag{8}$$

Из неравенства (8) следуют способ выбора чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5$ и условия на Re и Ha, при которых разрешима задача (2). Пусть $0 < r, s < 1$. Условия разрешимости задачи (1) совпадают с условиями положительности множителей при $\| \nabla \times \mathbf{u} \|_2$, $\| u_2 \varkappa \|_2$ в (8). Пусть $\mathrm{Ha} > \mathrm{Ha}_0 \, (\mathrm{Re})$, где Ha_0 выбирается из условия

$$\mathrm{Ha}_0^2 m^2 - 0{,}5 \, \mathrm{Re} \Big[\left(\frac{q-2}{q} \right)^{1-2/q} \| \mathbf{w}_0 \|_q \varepsilon_3^{-2} (0{,}5 d^{(q-2)/2q} \varepsilon_1^{2q/(2-q)} +$$

$$+ \varepsilon_2^{q/(2-q)}) + \varepsilon_5^{-2} (M_1 + 0{,}5 d^{1/2} \varepsilon_4^{-2} M_2) \Big] = r^2, \quad \mathrm{Re} > 0, \tag{9}$$

а числа ε_i — из условия

$$\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}\|\mathbf{w}_0\|_q\, q^{-1}\,[2\varepsilon_2^{q/2}+0{,}5d^{(q-2)/2q}(q+2)\,\varepsilon_1^{2q/(q+2)}+\right.$$

$$+0{,}5\,(q-2)\,\varepsilon_3^2\,(\varepsilon_2^{q/(2-q)}+0{,}5d^{(q-2)/2q}\varepsilon_1^{2q/(2-q)})]-$$

$$\left.-0{,}5\,\mathrm{Re}\,[M_1\varepsilon_5^2+M_2d^{1/2}(\varepsilon_4^2+0{,}5\varepsilon_4^{-2}\varepsilon_5^2)]\right\}=1-s^2. \tag{10}$$

Из (8) — (10) следуют искомые априорные оценки:

$$\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2\leqslant\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\,s^{-2}\left\{1+\mathrm{Re}\left[2\left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}d^{(q-2)/2q}\|\mathbf{w}_0\|_q+\right.\right.$$

$$\left.\left.+0{,}5M_2d^{1/2}\right]\right\}+0{,}5\,(rs)^{-1}\,[\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1}(M_1+0{,}5M_2d^{1/2})\,\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2+$$

$$+\mathrm{Ha}\,M^2(M_2+\|\mathbf{w}_0\|_2)]; \tag{11}$$

$$\|u_2\varkappa\|_2\leqslant\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2\cdot 0{,}5\,(rs)^{-1}\left\{1+\mathrm{Re}\left[2\left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q}d^{(q-2)/2q}\|\mathbf{w}_0\|_q+\right.\right.$$

$$\left.\left.+0{,}5M_2d^{1/2}\right]\right\}+r^{-2}\,[\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1}(M_1+0{,}5M_2d^{1/2})\,\|\nabla\times\mathbf{w}_0\|_2+$$

$$+M^2(M_2+\|\mathbf{w}_0\|_2)].$$

Используя неравенства (7) и (11), можно оценить $\|\mathbf{u}\|_2$ и $\|\mathbf{v}\|_2$.

4. Выбор ε_i и $\mathbf{w}_0$. В (10) полагаем, что

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2^{(q+2)/4};\quad \varepsilon_2^{q/2}=\frac{q\,(1-s^2)\,(1-2/q)^{2/q}}{2\,\mathrm{Re}\,\|\mathbf{w}_0\|_q\,[4+0{,}5\,(q+2)\,d^{(q-2)/2q}]};$$

$$\varepsilon_3^2=\frac{(1-s^2)\left(\dfrac{q}{q-2}\right)^{1-2/q}\varepsilon_2^{q/2(q+2)/(q-2)}}{\mathrm{Re}\,\|\mathbf{w}_0\|_q\,[d^{(q-2)/2q}+2\varepsilon_2^{q/2\cdot q/(q-2)}]};$$

$$\varepsilon_4^2=\begin{cases}1, & M_2=0,\\ 0{,}5\,\dfrac{(1-s^2)^2}{\mathrm{Re}\,M_2d^{1/2}}, & M_2\neq 0;\end{cases}$$

$$\varepsilon_5^2=\begin{cases}1, & M_1, M_2=0,\\ \dfrac{(1-s^2)^2}{\mathrm{Re}\,[M_1\,(1-s^2)+M_2^2\,\mathrm{Re}\,d]}, & M_1, M_2\neq 0.\end{cases}$$

Гладкое соленоидальное векторное поле $\mathbf{w}_0$ по построению удовлетворяет условию $\mathbf{w}_0\mathbf{v}|_\Gamma=0$. Поэтому оно может быть представлено в виде $\mathbf{w}_0=\nabla\times(\Psi_0\varkappa)$, причем

$$\Psi_0|_{\Gamma_i}=0,\ i=0,1,\ldots,n;\quad \mathbf{v}\cdot\nabla\Psi_0|_\Gamma=(\mathbf{v}-\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{\tau}.$$

Никаких других условий кроме гладкости накладывать на Ψ_0 нет нужды. В этом состоит принципиальное отличие рассматриваемого случая от ситуации в обычной гидродинамике, где доказательство разрешимости основано на специальном выборе Ψ_0 (конструкция Хопфа). Вместе с тем для целей магнитной гидродинамики необходимо иметь в оценках (11) возможно медленный рост по параметрам Re и Ha, когда последние возрастают. Добиться этого позволяет следующая модификация конструкции Хопфа. Пусть, как обычно [1, 2], $\rho\,(x)$ — расстояние от точки $x\in\Omega$ до ближайшей компоненты

Γ, $\delta > 0$. Тогда $\mathbf{w}_0 = \nabla \times (\chi(x)\, \Psi_0(x) \varkappa)$, где

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \rho(x) \leqslant \delta/2, \\ 0{,}5 + 0{,}75 \cos \frac{2\pi}{\delta} (\rho(x) - 0{,}5\delta) - 0{,}25 \cos^3 \frac{2\pi}{\delta} [\rho(x) - 0{,}5\delta], & \delta/2 < \rho(x) \leqslant \delta, \\ 0 & \delta < \rho(x). \end{cases}$$

Несложными, но достаточно громоздкими вычислениями можно получить оценки $\| \mathbf{w}_0 \|_q \leqslant M_{0q} \delta^{1/q}$, $\| \nabla \times \mathbf{w}_0 \|_2 \leqslant M \delta^{-1/2}$, где

$$M_{0q} = (3{,}25 + 2^{1/q})\,(0{,}75 L_\Gamma)^{1/q} \sup_{\Omega \cup \Gamma} | \nabla \Psi_0 |;$$

$$M_\nabla = (115 \sup_{\Omega \cup \Gamma} | \nabla \Psi_0 | + 1{,}2 \sup_{\Omega \cup \Gamma} | \Delta \Psi_0 |)\, L_\Gamma^{1/2}; \quad L_\Gamma = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Gamma_i} d\Gamma_i;$$

$$\delta = \varepsilon^q (1 + \mathrm{Re})^{-q} (1 + \mathrm{Ha})^{-1}; \quad \varepsilon = \min [M_{0q}^{-1}, (2K)^{-1}],$$

K — максимальное значение кривизн гладких дуг Γ_i. Такой выбор ε_i и $\mathbf{w}_0$ позволяет получить из (11) оценки для $\mathrm{Ha} > 1$: $\| \nabla \times \mathbf{u} \|_2 \leqslant C_\nabla (\Omega, \Gamma, \mathrm{Re}, v_0)\, \mathrm{Ha}$, $\| u_2 \varkappa \|_2 \leqslant C_u (\Omega, \Gamma, \mathrm{Re}, \mathbf{v}_0)$; C_∇, C_u — const.

5. Разрешимость и единственность решения краевой задачи. Из оценок (11) и принципа Лерэ — Шаудера [1] следует разрешимость задачи (1) в пространстве $H(\Omega)$ при условии, что $\mathrm{Ha} \geqslant \mathrm{Ha}_0$, а числа Re и Ha связаны условием (9). Если в (9) положить $r^2 = 0{,}5\, m^2$, $s^2 = 0{,}5$ и подставить значения ε_i и оценку для $\| \mathbf{w}_0 \|_q$, то получится следующее условие:

$$\mathrm{Ha}_0^2 = m^{-2} \left\{ \frac{32}{27} \left[(1 + \mathrm{Ha}_0)^{-1/q} \frac{\mathrm{Re}}{1 + \mathrm{Re}} \right]^{2q/(q-2)} \left\{ 2q \left(\frac{3}{8} \right)^{q/(q-2)} (q-2)^{2/(q-2)} + \right.\right.$$
$$\left. + \left[4 + \frac{q-2}{q} d^{(q-2)/2q} \right]^{q/(q-2)} \left[(1 + \mathrm{Ha}_0)^{-1/q} \frac{\mathrm{Re}}{1 + \mathrm{Re}} \right]^{q/(q-2)} q^{(q-2)/2q} \right\}^2 \times$$
$$\times \left(\frac{4}{3} \right)^{8/(q-2)} [4 + 0{,}5 (q+2)\, d^{(q-2)/2q}]^{4/(q-2)} (0{,}5q)^{2(q+2)/(2-q)} (1 -$$
$$\left. - 2q^{-1})^{2(6-q)/(q-2)} + \frac{4}{27} \mathrm{Re}^2 (3M_1 + 4M_2^2 \mathrm{Re}\, d)^2 \right\}. \qquad (12)$$

Использование методики построения априорных оценок (11) позволяет получить нелокальные условия единственности решения задачи (1).

Доказательство, как обычно, ведется от противного. Пусть u_1 — решение задачи (1), отличное от $\mathbf{u}$, и $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$. Тогда аналогично тому, как это сделано для $\mathbf{u}$, для $\mathbf{w}$ записывается уравнение баланса энергии, из которого следует основное неравенство

$$\| \nabla \times \mathbf{w} \|_2^2 + m^2 \mathrm{Ha}^2 \| w_2 \varkappa \|_2^2 \leqslant \mathrm{Re}\, \| \nabla \times \mathbf{w} \|_2 (\| \mathbf{w} \times \mathbf{w}_0 \|_2 +$$
$$+ \| \mathbf{w} \times \nabla \varphi \|_2 + \| \mathbf{w} \times \mathbf{u} \|_2). \qquad (13)$$

Аналогично тому, как это сделано в п. 3, доказываются оценки первых двух слагаемых в правой части (13):

$$\| \mathbf{w} \times \mathbf{w}_0 \|_2 \leqslant \left(\frac{q}{q-2} \right)^{2/q} \| \mathbf{w}_0 \|_q \left[\left(\frac{2}{q} \varepsilon_2^{q/2} + 0{,}5 \frac{q+2}{q} \varepsilon_1^{2q/(q-2)} d^{(q-2)/2q} \right) \| \nabla \times \mathbf{w} \|_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{q-2}{q} (\varepsilon_2^{q/(2-q)} + 0{,}5 d^{(q-2)/2q} \varepsilon_1^{2q/(2-q)})\, \| w_2 \varkappa \|_2 \right];$$

$$\| \mathbf{w} \times \nabla \varphi \|_2 \leqslant 0{,}5 \varepsilon_4^2 M_2 d^{1/2} \| \nabla \times \mathbf{w} \|_2 + (M_1 + 0{,}5 d^{1/2} \varepsilon_4^{-1} M_2)\, \| w_2 \varkappa \|_2.$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом. Применение неравенства (7) и мультипликативного неравенства дает

$$\|\mathbf{w}\times\mathbf{u}\|_2 \leqslant \|u_2\varkappa\|_q \|w_1\varkappa\|_{2q/(q-2)} + \|w_2\varkappa\|_q \|u_1\varkappa\|_{2q/(q-2)} \leqslant$$

$$\leqslant (4d)^{(q-2)/2q}\left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q} (\|\nabla\times\mathbf{w}\|_2^{(q+2)/2q} \|w_2\varkappa\|_2^{(q-2)/2q} \|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{2/q} \|u_2\varkappa\|_2^{(q-2)/q} +$$

$$+ \|\nabla\times\mathbf{w}\|_2^{2/q} \|w_2\varkappa\|_2^{1-2/q} \|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{(q+2)/2q} \|u_2\varkappa\|_2^{(q-2)/2q}).$$

Далее применение неравенства Юнга приводит к оценке

$$\|\mathbf{w}\times\mathbf{u}\|_2 \leqslant (4d)^{(q-2)/2q}\left(\frac{q}{q-2}\right)^{2/q} \{q^{-1}[0{,}5(q+2)\,\varepsilon_6^{2q/(q+2)}\|\nabla\times$$

$$\times\mathbf{u}\|_2^{2/q}\|u_2\varkappa\|_2^{1-2/q} + 2\varepsilon_7^{q/2}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{(q+2)/2q}\|u_2\varkappa\|_2^{(q-2)/2q}]\,\|\nabla\times\mathbf{w}\|_2 +$$

$$+\frac{q-2}{q}[0{,}5\varepsilon_6^{2q/(2-q)}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{2/q}\|u_2\varkappa\|_2^{1-2/q} +$$

$$+\varepsilon_7^{q(2-q)}\|\nabla\times\mathbf{u}\|_2^{(q+2)/2q}\|u_2\varkappa\|_2^{(q-2)2q}]\,\|w_2\varkappa\|_2\}.$$

Значения ε_i выбираются аналогично п. 4:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{(q+2)/4};\ \ \varepsilon_2^{q/2} = 0{,}5\frac{q\left(\frac{q-2}{q}\right)^{2/q}(1+\mathrm{Re})\,(1+\mathrm{Ha})^{1/q}}{\mathrm{Re}\,[4+(q+2)\,d^{(q-2)/2q}]};$$

$$\varepsilon_4^2 = (2\mathrm{Re}\,M_2 d^{1/2})^{-1};\ \ \varepsilon_6 = \varepsilon_7^{(q+2)4}; \tag{14}$$

$$\varepsilon_7^{q/2} = \frac{0{,}5q\,[(q-2)/q]^{2/q}}{(4d)^{(q-2)/2q}\,\mathrm{Re}\,C_u^{(q-2)/2q}\,(C_\nabla\,\mathrm{Ha})^{2/q}\,[(q+2)\,C_u^{(q-2)/2q} + 4\,(C_\nabla\mathrm{Ha})^{(q-2)/2q}]}.$$

Подстановка полученных оценок в (13) приводит к неравенству

$$\|\nabla\times\mathbf{w}\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{q-2}{q}\{\varepsilon_2^{q/(2-q)}[2 + d^{(q-2)/2q}\varepsilon_2^{q/2q/(2-q)}] + \frac{2q}{q-2}(M_1 +$$

$$+\mathrm{Re}\,M_2^2 d) + C_u^{(q-2)/2q}\,(C_\Delta\mathrm{Ha})^{2/q}\varepsilon_7^{q/(2-q)}\,[2\,(C_\nabla\mathrm{Ha})^{(q+2)/2q} +$$

$$+\varepsilon_7^{q/2q/(2-q)}]\}\,\|\nabla\times\mathbf{w}\|_2\|w_2\varkappa\|_2 + 4m^2\mathrm{Ha}^2\|\mathbf{w}_2\varkappa\|_2^2 \leqslant 0. \tag{15}$$

В левой части этого неравенства стоит квадратичная форма относительно $\|\nabla\times\mathbf{w}\|_2$, $\|\mathbf{w}_2\varkappa\|_2$. Условие ее положительной определенности имеет вид

$$\mathrm{Ha} > \mathrm{Re}\cdot 0{,}5\,\frac{q-2}{q}\{\varepsilon_2^{q/(q-2)}[2 + d^{(q-2)/2q}\varepsilon_2^{q/2q/(q-2)}] + \frac{2q}{q-2}(M_1 + \mathrm{Re}\,M_2^2 d) +$$

$$+ C_u^{(q-2)/2q}\varepsilon_7^{q/(2-q)}\,[2\,(C_\nabla\mathrm{Ha})^{(q+2)/2q} + \varepsilon_7^{q/2q/(2-q)}]\}. \tag{16}$$

В силу условия (16) из (15) следует, что $\|w_2\varkappa\|_2 = \|\nabla\times\mathbf{w}\|_2 = 0$. Таким образом доказана

Теорема. Если числа Re и Ha связаны неравенством (16), где C_∇, C_u определены в (11), а $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7$ — в (14), то задача (1) имеет единственное решение в пространстве $H(\Omega)$.

6. Магнитогидродинамические течения Стокса. Пример, рассмотренный в [3], показывает, что оценки (11) неулучшаемы в смысле роста по параметрам Re и Ha. При Ha $\to$ 0 эти оценки теряют смысл, поэтому результаты справедливы только для магнитной гидродинамики, причем для достаточно больших значений числа Ha. Известно [4], что течения при достаточно больших значениях Ha обладают многими свойствами течений при малых значениях Re (течений Стокса). Причем эти свойства сохраняются при любых конечных значениях Re, если только Ha достаточно велико. Полученные в п. 5 результаты позволяют заключить, что физические свойства течений при больших значениях На естественно дополняются нелокальными теоремами разрешимости и единственности при общих краевых условиях, которые в гидродинамике доказаны пока только для течений Стокса.

1. *Калис Х. Э.* Априорные оценки и вопросы единственности для стационарных решений системы уравнений Навье — Стокса в однородном магнитном поле // Латв. мат. ежегодник.— 1969.— Вып. 4.— С. 23—27.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М. : Наука, 1971.— 204 с.
3. *Бритов Н. А.* Течение между пористыми вращающимися цилиндрами в радиальном магнитном поле // Магнит. гидродинамика.— 1979.— № 3.— С. 135—137.
4. *Брановер Г. Г., Цинобер А. Б.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред.— М. : Наука, 1970.— 380 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 11.10.88