УДК 517.944

Г. И. Данилюк

ВНУТРЕННЯЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ И СВОЙСТВО ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

В настоящей работе методика и результаты [1, 2] переносятся на обобщенные решения нелинейной параболической системы дивергентного вида

$$\frac{\partial u^k}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i^k(x,t,u,u_x)+a_0^k(x,t,u,u_x)=0,\quad k=\overline{1,N},\tag{1}$$

рассматриваемой в цилиндрической области $Q_T=\Omega\times[0,T]$, где Ω — произвольная ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $T>0$. Здесь $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, $t\in[0,T]$, $u(x,t)=(u^1(x,t),\dots,u^N(x,t))$.

Будем предполагать:

а) при $(x,t)\in Q_T$, $u(x,t)\in R^N$, $p(x,t)\in R^{nN}$ функции $a_i^k(x,t,u,p)$, $a_0^k(x,t,u,p)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{Q}_T\times R^N\times R^{nN}$;

б) с $q\geqslant 2$ и положительными постоянными K_1 и K_2 при $(x,t)\in Q_T$, $u(x,t)\in R^N$, $p(x,t)\in R^{nN}$, $\xi_k^i\in R^1$ выполняются неравенства

$$\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_i^k(x,t,u,p)}{\partial p_j^l}\xi_k^i\xi_l^j\geqslant K_1[W(p)]^{q-2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}|\xi_k^i|^2,\tag{2}$$

$$|a_i^k|+\left|\frac{\partial a_i^k}{\partial x_r}\right|+\left|\frac{\partial a_i^k}{\partial t}\right|+\left\{\left|\frac{\partial a_i^k}{\partial p_j^l}\right|+\left|\frac{\partial^2 a_i^k}{\partial p_j^l\partial x_r}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial^2 a_i^k}{\partial p_j^l\partial p_r^s}\right|+\left|\frac{\partial^2 a_i^k}{\partial p_j^l\partial t}\right|\right\}W(p)\leqslant K_2[W(p)]^{q-1},\tag{3}$$

В (3) $k,l,s=\overline{1,N}$, $i=\overline{0,n}$, $j,r=\overline{1,n}$; $W(p)=1+\sum_{l=l}^{N}\sum_{j=1}^{n}|p_j^l|$.

Обозначим символом $V_{q,2}^{1,0}(Q_T)$, $q\geqslant 2$, пространство функций $u(x,t)$, полученное замыканием по норме

$$\|u\|_{q,2,Q_T}^{(1,0)}=\operatorname*{vraimax}_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{2,\Omega}+\|u_x\|_{q,Q_T}$$

множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}_T$ функций. Здесь $\|\cdot\|_{2,\Omega}$, $\|\cdot\|_{q,Q_T}$ — нормы в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_q(Q_T)$ соответственно. Все элементы $V_{q,2}^{1,0}(Q_T)$ непрерывны по t в норме $L_2(\Omega)$. Через $V_{q,2}^{1,1/2}(Q_T)$ обозначим множество элементов $u(x,t)$ пространства $V_{q,2}^{1,0}(Q_T)$, для каждого из которых

$$\int\limits_0^{T-h}\int\limits_\Omega h^{-1}|u(x,t+h)-u(x,t)|^2 dxdt \to 0$$

при $h \to 0$. Нуль сверху над $V_{q,2}^{1,0}(Q_T)$, $V_{q,2}^{1,1/2}(Q_T)$ будет означать, что берутся лишь те элементы этих пространств, которые равны нулю вблизи $\partial\Omega \times \times [0,T]$. Через $C_{xt}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$, $0<\alpha<1$, будем обозначать пространство функций $u(x,t)$, заданных в $\overline{Q}_T$ и имеющих конечную норму

$$\|u\|_\alpha^{Q_T} = \sup_{\overline{Q}_T}|u| + \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q}_T\\(x',t)\in\overline{Q}_T}}\frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha} + \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q}_T\\(x,t')\in\overline{Q}_T}}\frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}},$$

$C_{xt}^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ — множество функций, принадлежащих $C_{xt}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q'})$ для любой замкнутой подобласти $\overline{Q'}\subset Q_T$.

Обобщенным решением системы (1) будем называть вектор-функцию $u(x,t)=(u^1(x,t),\dots,u^N(x,t))$ такую, что $u^k(x,t)\in V_{q,2}^{1,0}(Q_T)$, $k=\overline{1,N}$, и для произвольной функции $\varphi^k(x,t)\in \overset{\circ}{V}{}_{q,2}^{1,0}(Q_T)$, имеющей принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по t, при $0\leqslant t_0\leqslant T$, $k=\overline{1,N}$ выполняются равенства

$$\int\limits_\Omega u^k(x,t)\,\varphi^k(x,t)\,dx\Big|_0^{t_0} + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_\Omega\Big[-u^k\frac{\partial\varphi^k}{\partial t} +$$

$$+\sum_{i=1}^n a_i^k(x,t,u,u_x)\,\varphi_{x_i}^k + a_0^k(x,t,u,u_x)\,\varphi^k\Big]dxdt = 0. \qquad (4)$$

Неравенство Гельдера, вложение $V_{q,2}^{1,0}(Q_T)$ в пространство $L_{q\frac{n+2}{n}}(Q_T)$ и условия (3) позволяют легко проверить конечность всех, входящих в тождества (4) интегралов, при любых функциях $u^k(x,t)$, $\varphi^k(x,t)$ из указанных классов.

Определение. Система (1) удовлетворяет условию Лиувилля, если для каждого $x_0\in\Omega$, $t_0\in[0,T]$ и каждого $\xi\in R^N$ любое решение в R^{n+1} системы

$$\frac{\partial v^k}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i^k(x_0,t_0,\xi,v_x) = 0, \quad k=\overline{1,N} \qquad (1')$$

с ограниченным градиентом ($|v_x|\leqslant \text{const} < +\infty$) имеет вид $v(x,t) = \sum\limits_{i=1}^n c_i x_i + c_0$, где $c_0, c_1, \dots, c_n$ — постоянные.

Теорема. Пусть $u(x,t)$ есть обобщенное решение системы (1) с $|u_x|\leqslant \leqslant \text{const} < +\infty$, коэффициенты системы $a_i^k(x,t,u,p)$ и $a_0^k(x,i,u,p)$ удовлетворяют условиям а), б), а сама система (1) удовлетворяет условию Лиувилля. Тогда $u_x(x,t)\in C_{xt}^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ с некоторым $0<\alpha<1$.

Прежде чем проводить доказательство этой теоремы, сформулируем несколько вспомогательных утверждений относительно обобщенного решения $u(x,t)$ следующей нелинейной параболической системы второго порядка:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} - \sum_{m=1}^N\sum_{i,l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{il}^{km}(x,t,u)\frac{\partial u^m}{\partial x_l}\right) + \sum_{m=1}^N\sum_{l=1}^n a_l^{km}(x,t,u)\frac{\partial u^m}{\partial x_l} =$$

$$= -\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}g_i^{km}(x,t)+\sum_{m=1}^{N}g^{km}(x,t),\quad k=\overline{1,N} \tag{5}$$

в предположении, что коэффициенты системы $a_{il}^{km}(x,t,u)$, $a_l^{km}(x,t,u)$ являются непрерывными функциями в $\bar{Q}_T\times R^N$ и удовлетворяют условиям

$$a_{il}^{km}(x,t,u)\,\xi_k^i\xi_m^l\geqslant\nu|\xi|^2\ \forall\xi\in R^{nN},\quad (x,t)\in\bar{Q}_T,\quad u\in R^N,$$

$$|a_{il}^{km}(x,t,u),a_l^{km}(x,t,u)|\leqslant L\ \forall(x,t)\in\bar{Q}_T,\quad u\in R^N, \tag{6}$$

а функции g_i^{km} и g^{km} принадлеж т пространствам $L_p(Q_T)$ и $L_{p/2}(Q_T)$ соответственно с $p>n+2$.

Будем рассматривать только ограниченное обобщенное решение системы (5). Под таковым будем подразумевать вектор-функцию $u(x,t)=(u^1(x,t),\ldots$ $\ldots,u^N(x,t))$ такую, что $u^k(x,t)\in V_{2,2}^{1,0}(Q_T)\cap L_\infty(Q_T)$, $k=\overline{1,N}$, и для произвольной $\varphi^k(x,t)\in\overset{\circ}{V}{}_{2,2}^{1,0}(Q_T)$, имеющей принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по t, выполняются равенства

$$\int_\Omega u^k(x,t)\varphi^k(x,t)\,dx\Big|_0^t+\int_0^t\int_\Omega\Big[-u^k\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}+\sum_{m=1}^{N}\sum_{i,l=1}^{n}a_{il}^{km}(x,t,u)\times$$

$$\times\frac{\partial u^m}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_i}+\sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}a_l^{km}(x,t,u)\frac{\partial u^m}{\partial x_l}\varphi^k\Big]\,dxdt=$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\Big[\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}g_i^{km}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_i}+\sum_{m=1}^{N}g^{km}\varphi^k\Big]\,dxdt,\quad k=\overline{1,N} \tag{7}$$

при любом $t\in(0,T]$.

Пусть $x_0\in\Omega$, $t_0\in[0,T]$ и $0<R<R(x_0,t_0)=\min\{t_0^{1/2},(T-t_0)^{1/2},$ $\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)\}$. Определим

$$u_{Q_R(x_0,t_0)}=[\operatorname{mes}Q_R(x_0,t_0)]^{-1}\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_R(x_0)}u(x,t)\,dxdt,$$

$$U(x_0,t_0;R)=[\operatorname{mes}Q_R(x_0,t_0)]^{-1}\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_R(x_0)}|u(x,t)-u_{Q_R(x_0,t_0)}|^2\,dxdt.$$

Здесь $Q_R(x_0,t_0)=B_R(x_0)\times(t_0-R^2,t_0+R^2)$, $B_R(x_0)$ — n-мерный шар радиуса R с центром в точке x_0,

$$|u(x,t)-u_{Q_R(x_0,t_0)}|^2\equiv\sum_{k=1}^{N}|u^k(x,t)-u^k_{Q_R(x_0,t_0)}|^2.$$

Предположим, что вектор-функцию $u(x,t)$ в цилиндре $Q_R(x_0,t_0)$ можно представить в виде $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, где вектор-функция $v(x,t)$ является ограниченным обобщенным решением однородной системы

$$\frac{\partial v^k}{\partial t}-\sum_{m=1}^{N}\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{il}^{km}(x,t,u)\frac{\partial v^m}{\partial x_l}\Big)+\sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}a_l^{km}(x,t,u)\frac{\partial v^m}{\partial x_l}=0, \tag{8}$$

а $w(x,t)$ — ограниченное обобщенное решение системы

$$\frac{\partial w^k}{\partial t}-\sum_{m=1}^{N}\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{il}^{km}(x,t,u)\frac{\partial w^m}{\partial x_l}\Big)+\sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}a_l^{km}(x,t,u)\frac{\partial w^m}{\partial x_l}=$$

$$= -\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i} g_i^{km}(x, t) + \sum_{m=1}^{N} g^{km}(x, t), \quad k = \overline{1, N}, \tag{9}$$

равное нулю на боковой поверхности и нижнем основании цилиндра $Q_R(x_0, t_0)$. Известно, что система (9) имеет единственное обобщенное решение $w(x, t)$ из пространства $\mathring{V}_{2,2}^{1,1/2}(Q_T)$ [3].

Лемма 1 [4]. Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение системы (5), коэффициенты которой $a_{il}^{km}(x, t, u) = \mathrm{const}$, $a_i^{km}(x, t, u) = g_i^{km}(x, t) = g^{km} \equiv 0$ в $Q_1(0, 0)$. Тогда

$$U(0, 0; \rho) \leqslant c\rho^2 U(0, 0; 1) \tag{10}$$

для $0 < \rho < 1$, где c — константа, зависящая от ν и L из (6).

Применяя методику работ [1, 4], можно установить справедливость следующих утверждений.

Лемма 2. Пусть $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |u| \leqslant M$ является ограниченным обобщенным решением системы (5). Тогда для каждого $\mu \in]0, 1[$ существуют постоянные $\varepsilon_0(\mu, M)$, $R_0(\mu, M)$ такие, что если $R < \min\{R_0, R(x_0, t_0)\}$ и если $V(x_0, t_0; R) < \varepsilon_0^2$, то

$$V(x_0, t_0; \mu R) \leqslant 2c\mu^2 V(x_0, t_0; R), \tag{11}$$

где c — постоянная из леммы 1.

Лемма 3. В условиях леммы 2 для каждых $x_0 \in \Omega$ и $t_0 \in [0, T]$ таких, что

$$\lim_{R\to 0} \inf V(x_0, t_0; R) = 0,$$

существует цилиндр $Q_{R_1}(x_0, t_0) \in Q_T$ такой, что $u(x, t) \in C_{xt}^{\alpha, \alpha/2}(Q_{R_1}(x_0, t_0))$ с $\alpha = 1 - \dfrac{n+2}{p}$.

Доказательство теоремы. Пусть точка $(x_0, t_0) \in Q_T$. Положим $y = R^{-1}(x - x_0)$, $\tau = R^{-2}(t - t_0)$,

$$u_R(y, \tau) = R^{-1}[u(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau) - u(x_0, t_0)]$$

и предположим, что Ω_R — образ области Ω в случае преобразования $x = x_0 + Ry$. Из (4) легко получить, что вектор-функция $u_R(y, \tau)$ является решением системы

$$\int_{\Omega R} u_R^k(y, \tau)\varphi^k(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau)\,dy \Bigg|_{-\frac{t_0}{R^2}}^{\frac{T-t_0}{R^2}} + \int_{-\frac{t_0}{R^2}}^{\frac{T-t_0}{R^2}}\int_{\Omega_R}\Bigg[-u_R^k(y, \tau) \times$$

$$\times \frac{\partial\varphi^k(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau)}{\partial\tau} + \sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau, u(x_0, t_0) + Ru_R(y, \tau),$$

$$\frac{\partial u_R(y, \tau)}{\partial y}\Big)\varphi_{y_i}^k(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau) + Ra_0^k\Big(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau, u(x_0, t_0) +$$

$$+ Ru_R(y, \tau), \frac{\partial u_R(y, \tau)}{\partial y}\Big)\varphi^k(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau)\Bigg]\,dyd\tau = 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{12}$$

При $R \to 0$ образ $(Q_T)_R = \Omega_R \times \left(-\dfrac{t_0}{R^2}, \dfrac{T - t_0}{R^2}\right)$ цилиндра Q_T расширяется до всего R^{n+1}. Зафиксируем некоторое число $A > 0$ такое, что $Q_A(0, 0) \subset (Q_T)_R$ для всех R, меньших некоторого $R(A)$. Считая, что носитель функции φ^k лежит в $Q_A(0, 0)$, получаем, что вектор-функция $u_R(y, \tau)$ является решением системы

$$\int_{B_A(0)} u_R^k\varphi^k dy \Bigg|_{-A^2}^{A^2} + \int_{-A^2}^{A^2}\int_{B_A(0)}\Bigg[-u_R^k\frac{\partial\varphi^k}{\partial\tau} + \sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big(x_0 + Ry, t_0 + R^2\tau,$$

$$u(x_0, t_0) + Ru_R, \frac{\partial u_R}{\partial y}\Big) \varphi^k_{y_i} + Ra_0^k \Big(x_0 + Ry,\ t_0 + R^2\tau,\ u(x_0, t_0) + Ru_R,$$

$$\frac{\partial u_R}{\partial y}\Big) \varphi^k \Big] dyd\tau = 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Используя результаты работ [3, 5, 6], для решения $u_R(y, \tau)$ системы (13) получаем априорную оценку

$$|||u_R|||^{2,\frac{1}{2}}_{2, Q_{\frac{A}{2}}(0,0)} \leqslant c(A), \tag{14}$$

где

$$|||u|||^{2,\frac{1}{2}}_{2,Q_R(0,0)} = \|u\|_{2,Q_R(0,0)} + \|u_x\|_{2,Q_R(0,0)} + \|u_{xx}\|_{2,Q_R(0,0)} +$$

$$+ \int_{-R^2}^{R^2} \int_{-R^2}^{R^2} \int_{B_R(0)} h^{-2} |u(x, t+h) - u(x, t)|^2 dxdtdh$$

— норма в пространстве $W_2^{2,\frac{1}{2}}(Q_R(0, 0))$. Кроме того, $\|u_{Ry}\|_{\infty, Q_A(0,0)} \leqslant \leqslant \|u_x\|_{\infty, Q_T} \leqslant c < +\infty$. Вследствие компактного вложения $W_2^{2,1/2}$ в L_2 из (14) следует, что можно выбрать последовательность $\{u_{R_s}\}$ такую, что при $R_s \to 0$ имеем

$$u_{R_s} \to p \text{ сильно в } L_2(Q_{\frac{A}{2}}(0, 0)),$$

$$\frac{\partial u_{R_s}}{\partial y} \to \frac{\partial p}{\partial y} \text{ сильно в } L_2(Q_{\frac{A}{2}}(0, 0)).$$

Отсюда следует

$$u_{R_s} \to p \text{ почти всюду в } Q_{\frac{A}{2}}(0, 0),$$

$$\frac{\partial u_{R_s}}{\partial y} \to \frac{\partial p}{\partial y} \text{ почти всюду в } Q_{\frac{A}{2}}(0, 0).$$

Кроме того, из сходимости u_{R_s} к p в $L_2(Q_{\frac{A}{2}}(0, 0))$ следует сходимость u_{R_s} к p в $L_2(B_{\frac{A}{2}}(0))$ для почти всех t из $\left(-\frac{A^2}{4}, \frac{A^2}{4}\right)$. Увеличивая число A и применяя диагональный метод, выберем подпоследовательность (которую вновь обозначим u_{R_s}), обладающую следующими свойствами:

$$u_{R_s} \to p \text{ сильно в } L_2(Q),\ Q \text{ ограничено в } R^{n+1},$$

$$\frac{\partial u_{R_s}}{\partial y} \to \frac{\partial p}{\partial y} \text{ сильно в } L_2(Q),\ Q \text{ ограничено в } R^{n+1},$$

$$u_{R_s} \to p \text{ почти всюду в } R^{n+1},$$

$$\frac{\partial u_{R_s}}{\partial y} \to \frac{\partial p}{\partial y} \text{ почти всюду в } R^{n+1}.$$

Переходя теперь в (13) к пределу по такой подпоследовательности, устанавливаем, что p — обобщенное решение системы (1′) в R^{n+1} и $|\partial p/\partial x| \leqslant c < +\infty$. Таким образом, в силу условия Лиувилля p есть полином первой степени. Кроме того,

$$R_s^{-n-2} \int_{t_0-R_s^2}^{t_0+R_s^2} \int_{B_{R_s}(x_0)} \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\right|^2 dxdt = \int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} \left|\frac{\partial u_R}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\right|^2 dyd\tau \to 0. \tag{15}$$

Далее, из равенства

$$-\int_0^T\int_\Omega\left[\frac{\partial u^k}{\partial t}-\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}\,a_i^k(x,t,u,u_x)+a_0^k(x,t,u,u_x)\right]\times$$

$$\times\sum_{j=1}^n\frac{d}{dx_j}\,\varphi^k(x,t)\,dxdt=0,$$

где $\varphi^k(x,t)$ — финитная в Q_T функция, с помощью двукратного интегрирования по частям легко получить

$$\int_\Omega u_{x_j}^k\varphi^k\,dx\Big|_0^T+\Big|\int_0^T\int_\Omega\Big\{-u_{x_j}^k\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}+\sum_{m=1}^N\sum_{i,l=1}^n\Big[\frac{\partial a_i^k}{\partial u_{x_l}^m}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u^m}{\partial x_l}+$$

$$+\frac{\partial a_i^k}{\partial u^m}\frac{\partial u^m}{\partial x_j}+\frac{\partial a_i^k}{\partial x_j}\Big]\varphi_{x_i}^k+\sum_{m=1}^N\sum_{l=1}^n\Big[\frac{\partial a_0^k}{\partial u_{x_l}^m}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u^m}{\partial x_l}+$$

$$+\frac{\partial a_0^k}{\partial u^m}\frac{\partial u^m}{\partial x_j}+\frac{\partial a_0^k}{\partial x_j}\Big]\varphi^k\Big\}\,dxdt=0,\quad k=\overline{1,N}.$$

Отсюда, перенося слагаемые $\left[\frac{\partial a_i^k}{\partial u^m}\frac{\partial u^m}{\partial x_j}+\frac{\partial a_i^k}{\partial x_j}\right]\varphi_{x_i}^k$ и $\left[\frac{\partial a_0^k}{\partial u^m}\frac{\partial u^m}{\partial x_j}+\frac{\partial a_0^k}{\partial x_j}\right]\varphi^k$ направо и обозначая через $\bar u$ вектор-функцию, компонентами которой являются $\partial u^m/\partial x_l$, получим систему

$$\int_\Omega\bar u_j^k\varphi^k\,dx\Big|_0^T+\int_0^T\int_\Omega\Big[-\bar u_j^k\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}+\sum_{m=1}^N\sum_{i,l=1}^n A_{il}^{km}(x,t,\bar u)\frac{\partial\bar u_l^m}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{m=1}^N\sum_{l=1}^n A_l^{km}(x,t,\bar u)\frac{\partial\bar u_l^m}{\partial x_l}\varphi^k\Big]\,dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\Big[\sum_{m=1}^N\sum_{i=1}^n g_i^{km}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_i}+\sum_{m=1}^N g^{km}\varphi^k\Big]\,dxdt,\quad k=\overline{1,N},\quad j=\overline{1,n},$$

где

$$A_{il}^{km}(x,t,\bar u)=\frac{\partial a_i^k(x,t,u,\bar u)}{\partial\bar u_l^m},\quad A_l^{km}(x,t,\bar u)=\frac{\partial a_0^k(x,t,u,\bar u)}{\partial\bar u_l^m},$$

т. е. находим, что $\bar u_l^m$ есть ограниченное обобщенное решение системы типа (5). Кроме того,

$$R^{-n-2}\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_R(x_0)}|\bar u-\bar u_{Q_R(x_0,t_0)}|^2dxdt\leqslant R^{-n-2}\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_R(x_0)}|\bar u-P|^2dxdt.$$

Это неравенство записано в силу того, что функционал

$$I(P)=\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_R(x_0)}|\bar u-P|^2dxdt$$

достигает своего максимума в точке $P=u_{Q_R(x_0,t_0)}$. Полагая теперь $P=\frac{\partial p}{\partial x}$, $R=R_s$, из (15) имеем

$$\lim_{R\to0}\inf\Big[R^{-n-2}\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_R(x_0)}|\bar u-u_{Q_R(x_0,t_0)}|^2dxdt\Big]=0.$$

По лемме 3 имеем $\bar{u} \in C_{xt}^{\alpha, \alpha/2}(Q_{R_1})$ с некоторым $0 < \alpha < 1$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что доказанная теорема анонсирована в [7].

1. *Giaquinta M., Necas Y.* On the regularity of weak solutions to nonlinear elliptic systems of partial differential equations // Y. reine und angew. Math.— 1980.— **316**.— P. 140—159.
2. *Yohn O.* The interior regularity and the Liouville property for the guasilinear parabolic systems // Comment. math. Univ. carol.— 1982.— **23**, N 4.— P. 685—690.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
4. *Giaquinta M., Giusti E.* Partial regularity for the solutions to nonlinear parabolic // Ann. mat. pura ed appl.— 1973.— **97**.— P. 253—266.
5. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Мат. сб.— 1962.— **59**.— С. 289—325.
6. *Данилюк Г. И., Скрыпник И. В.* Априорные оценки обобщенных решений нелинейных параболических систем высшего порядка // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 3.— С. 283—288.
7. *Данилюк Г. И.* Внутренняя регулярность и свойство Лиувилля для нелинейных параболических систем второго порядка // Комплексные методы в математической физике.— Донецк.— 1984.— С. 136.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 20.10.87