

УДК 531.36, 531.38

©2018. Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

## СЛУЧАИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МНОГОТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Изучается динамика гироскопа в кардановом подвесе, имеющего вертикальную наружную ось подвеса и снабженного синхронным электродвигателем, который приводит гироскоп (ротор) во вращение. Используется математическая модель электродвигателя, включающая дифференциальные уравнения для токов в обмотках ротора. Момент сил трения и какие-либо управляющие моменты относительно осей подвеса прибора предполагаются отсутствующими. Момент сил трения относительно оси ротора является нелинейной функцией угловой скорости его вращения относительно статора. Доказано, что в неособых случаях, когда приведенная потенциальная энергия силы тяжести не является постоянной, стационарные движения прибора (регулярные прецессии и равномерные вращения ротора) неустойчивы при отсутствии минимума полной приведенной потенциальной энергии. Этот результат обобщает на случай многофазной модели синхронного электродвигателя аналогичный результат, полученный ранее с использованием упрощенной бестоковой модели.

**Ключевые слова:** гироскоп в кардановом подвесе, синхронный электродвигатель, устойчивость.

**Введение.** В работе [1] дана постановка задачи о гироскопе в кардановом подвесе, который имеет вертикальную наружную ось подвеса и снабжен синхронным электродвигателем. В этой постановке вместо обычно используемого в литературе упрощенного выражения для вращающего момента электродвигателя используются дифференциальные уравнения вращения синхронного электродвигателя, предложенные Г.А. Леоновым и А.М. Зарецким [2] и включающие любое число электрических токов в демпферной обмотке. При этом момент сил трения относительно оси ротора предполагается нелинейной функцией угловой скорости его вращения относительно статора электродвигателя, т. е. внутренней "рамки" карданова подвеса.

Вследствие вертикальности наружной оси подвеса дифференциальные уравнения движения прибора [1] имеют циклический интеграл, а угол поворота наружной "рамки" является циклической координатой. Исключение циклической координаты дает приведенную систему  $S_p$  уравнений движения прибора, содержащую постоянную  $p$  циклического интеграла в качестве параметра. Стационарные решения этой системы описывают равномерные вращения и регулярные прецессии ротора.

В [1] доказана устойчивость стационарных решений в том случае, когда приведенная потенциальная энергия силы тяжести и потенциальная энергия электродвигателя имеют изолированные минимумы, т. е. полная потенциальная энергия имеет изолированный минимум. Данная статья является продолжением статьи [1]. В ней доказаны теоремы о неустойчивости стационарных решений при отсутствии минимума полной приведенной потенциальной энергии (при условии, что приведенная потенциальная энергия силы тяжести отлична

от постоянной). Эти результаты обобщают соответствующие результаты статей [3, 4], установленные с использованием упрощенной бестоковой модели синхронного электромотора. Случай постоянства приведенной потенциальной энергии силы тяжести составит предмет отдельного исследования.

**1. Исходные соотношения.** В [1] определены постоянные параметры и фазовые переменные системы дифференциальных уравнений, которая описывает динамику синхронного гироскопа в кардановом подвесе при использовании многотоковой модели синхронного электромотора. Найдены также условия существования стационарных решений этих уравнений и получены энергетические соотношения, с помощью которых строятся функции Ляпунова, используемые при исследовании устойчивости стационарных решений. Приведем те из этих определений и соотношений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Динамика рассматриваемой электромеханической системы определяется фазовым вектором  $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta, \varphi, i_0, i_1, \dots, i_{n_2})$ . Здесь  $\alpha, \beta$  – углы поворота "рамок" карданова подвеса,  $\varphi$  – угол поворота ротора относительно внутренней "рамки",  $i_0$  – ток в обмотке возбуждения на роторе,  $i_n$  ( $n = 1, \dots, n_2$ ) – токи в стержнях демпферной обмотки.

Кинетическая энергия системы выражается по формуле

$$T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta) = \frac{1}{2} [G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}], \quad (1)$$

где  $C$  – осевой момент инерции ротора, коэффициенты  $H, R$  зависят только от постоянных механических параметров. Коэффициенты  $G, N, Q$  и потенциальная энергия силы тяжести  $U$  зависят от угла  $\beta$  по формулам

$$\begin{aligned} G(\beta) &= g_0 + g_1 \sin \beta + g_2 \cos \beta + g_3 \sin 2\beta + g_4 \cos 2\beta, \\ N(\beta) &= n_0 + n_1 \sin \beta + n_2 \cos \beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta \quad (q_1 \neq 0), \quad (2) \\ U(\beta) &= u_0 + u_1 \sin \beta + u_2 \cos \beta. \end{aligned}$$

Здесь  $u_0$  – произвольная постоянная. При любом  $\beta$  кинетическая энергия (1) – положительно определенная квадратичная форма угловых скоростей  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$ . Поэтому, согласно критерию Сильвестра,

$$G(\beta) > 0, \quad G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad G(\beta)C - Q^2(\beta) > 0, \quad J(\beta) > 0 \quad (3)$$

при любом  $\beta$ . Здесь  $J(\beta)$  – определитель квадратичной формы  $2T$ .

Вместо переменной  $\varphi$  удобно пользоваться переменной  $\gamma = \varphi - \omega t$ , где  $\omega > 0$  – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре. Вместо переменной  $i_0$  удобно ввести переменную  $x = i_0 - u/R_1$ , где  $u > 0$  – постоянное напряжение на обмотке возбуждения,  $R_1$  – активное сопротивление этой обмотки.

Момент сил сопротивления  $M$  относительно оси ротора предполагается нечетной непрерывно дифференцируемой монотонно убывающей нелинейной

функцией  $M(\dot{\varphi})$  угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ . Поскольку  $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$ , момент  $M(\dot{\varphi})$  представляется в виде

$$M(\dot{\varphi}) = M(\omega + \dot{\gamma}) = -c_0 + \Delta M(\dot{\gamma}),$$

где

$$\Delta M(\dot{\gamma}) = M(\omega + \dot{\gamma}) - M(\omega), \quad c_0 = -M(\omega) \quad (c_0 > 0).$$

Функция  $\Delta M(\dot{\gamma})$  является монотонно убывающей вместе с  $M(\dot{\varphi})$ , и поэтому при  $\dot{\gamma} \neq 0$  знак  $\Delta M(\dot{\gamma})$  противоположен знаку  $\dot{\gamma}$ :

$$\dot{\gamma} \Delta M(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M(0) = 0. \quad (4)$$

Уравнения движения прибора [1] допускают интеграл

$$\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) = p \quad (p = \text{const}). \quad (5)$$

Рассматривая равенство (5) как определение переменной  $p$ , перейдем в уравнениях движения к переменным  $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ . Получаем *преобразованную* систему уравнений движения синхронного гироскопа. Запишем ее, опустив аргумент  $\beta$  у функций (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{G} \left( (p - \omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN) \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{2G} (p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2 + U \right] = 0, \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{G} \left( (p - \omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2) \right) \right] = -m\dot{\gamma} + \\ + \Delta M(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right) - b_0 \sin \gamma - c_0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$L_1 \frac{d}{dt}x = -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma,$$

$$L_2 \frac{d}{dt}i_n = -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, n_2.$$

Здесь  $R_1$  и  $L_1$  – активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения,  $R_2$  и  $L_2$  – активное и индуктивное сопротивления стержней демпферной обмотки,  $n_2$  – число стержней в демпферной обмотке, через  $a_1, a_2, b_0, c_0$  обозначены положительные постоянные величины, которые выражаются через электротехнические параметры.

Отбросив в (6) первое уравнение  $\dot{p} = 0$ , получаем *приведенную* систему  $S_p$ , соответствующую данному значению  $p$ .

**2. Стационарные решения и энергетические соотношения.** Далее предполагается, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (7)$$

В этом случае уравнения (6) имеют стационарные решения

$$p = p^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, \quad i_{n_2} = 0, \quad (8)$$

которые описывают равномерные вращения и регулярные прецессии ротора. Здесь при каждом значении  $p^0$  значения  $\beta^0$  определяются соотношением  $U'_*(p^0, \beta) = 0$ , где

$$U_*(p, \beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta) \quad (9)$$

– приведенная потенциальная энергия силы тяжести, штрих означает дифференцирование по  $\beta$ . Значения  $\gamma^0$  определяются уравнением

$$b_0 \sin \gamma + c_0 = 0. \quad (10)$$

В предположении (7) оно определяет два счетных набора значений  $d_s, e_s$  величины  $\gamma^0$ :

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (12)$$

Определение (10) стационарных значений  $\gamma^0$  угла  $\gamma$  можно записать в виде  $dU_1(\gamma)/d\gamma = 0$ , где

$$U_1(\gamma) = \int_0^\gamma (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma \quad (13)$$

– потенциальная энергия, связанная с синхронным электромотором. Определенным в (11), (12) значениям  $d_s$  и  $e_s$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) угла  $\gamma$  соответствуют точки локального минимума и локального максимума функции  $U_1(\gamma)$ .

В общем случае, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  не является постоянной по  $\beta$ , условие  $U'_*(p^0, \beta) = 0$  определяет конечный набор значений угла  $\beta$  на каждом  $2\pi$ -периоде. Они соответствуют точкам локального минимума и локального максимума функции  $U_*(p^0, \beta)$  и, возможно, точкам ее перегиба с горизонтальной касательной.

Таким образом, если выделено некоторое стационарное решение (8) преобразованной системы (6), соответствующее определенным значениям  $p^0, \beta^0, \gamma^0$ , то для функции  $U_*(p^0, \beta)$  существуют четыре возможности: функция  $U_*(p^0, \beta)$  переменной  $\beta$  в точке  $\beta = \beta^0$  имеет А) изолированный минимум, В) изолированный максимум, С) перегиб, D)  $U_*(p^0, \beta) \equiv \text{const}$ . При этом для функции  $U_1(\gamma)$  существуют две возможности: функция  $U_1(\gamma)$  в точке  $\gamma = \gamma^0$  имеет а) изолированный минимум, б) изолированный максимум. Комбинируя

эти возможности, получаем 8 типов стационарных решений преобразованной системы (6), которые обозначаем следующим образом: Аа, Ва, Са, Да, Аб, Вб, Сб, Дб. В [1] доказана устойчивость стационарных решений в случае Аа. В настоящей работе доказана неустойчивость стационарных решений в случаях Аб, Ва, Са, Вб, Сб.

Исследование проводится с использованием следующих двух из трех энергетических соотношений, рассмотренных в [1]. Первое из них выражает теорему об изменении энергии для исходной системы уравнений движения прибора:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(\dot{\gamma}, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = & -m(\omega + \dot{\gamma})\dot{\gamma} + (\omega + \dot{\gamma})\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1 x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 - \\ & -\omega a_1 x \sin \gamma - \omega a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - (\omega + \dot{\gamma})(b_0 \sin \gamma + c_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь функция  $E_1$  определена формулой

$$E_1(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\beta), \quad (15)$$

где  $\omega + \dot{\gamma} = \dot{\varphi}$ , функция  $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta)$  выражается по формуле (1), а функция  $T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2})$  равна

$$T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \frac{1}{2}L_1 x^2 + \frac{1}{2}L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (16)$$

Другое соотношение выражает теорему об изменении энергии для преобразованной системы (6) и приведенной системы  $S_p$ :

$$\dot{E}_3(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1 x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (17)$$

Здесь функция  $E_3$  определена формулой

$$\begin{aligned} E_3(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \\ = T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U_*(p, \beta) + U_1(\gamma), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) = \frac{1}{2G(\beta)} \{ \dot{\beta}^2 [G(\beta)H - N^2(\beta)] + \\ + 2\dot{\beta}\dot{\gamma} [G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)] + \dot{\gamma}^2 [G(\beta)C - Q^2(\beta)] \}, \end{aligned} \quad (19)$$

а функции  $U_*(p, \beta)$ ,  $U_1(\gamma)$  определены в (9), (13). Из неравенств Сильвестра (3) следует, что при любом значении  $\beta$  функция (19) является определено

положительной квадратичной формой относительно  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$ . В определении (18) функции  $E_3$  сумма  $T_* + T_1$  – полная приведенная кинетическая энергия, а сумма  $U_* + U_1$  – полная приведенная потенциальная энергия рассматриваемой электромеханической системы.

Если изучается устойчивость некоторого стационарного решения (8) преобразованной системы (6), то значения  $p^0, \beta^0, \gamma^0$  рассматриваются как заданные. В этом случае определим следующую функцию фазовых переменных преобразованной системы

$$v(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U_*(p, \beta) - U_*(p^0, \beta^0) + U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0). \quad (20)$$

Она обращается в нуль на выделенном решении данной системы. Эта функция только на константу отличается от функции (18) и поэтому имеет такую же производную (17) по  $t$  в силу системы (6):

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2\sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (21)$$

При исследовании устойчивости стационарных решений (8) возникает необходимость рассматривать кривые, которые заданы на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  соотношением  $E_3 = \text{const}$  или  $v = \text{const}$  при  $\dot{\gamma} = 0, x = 0, i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0$ . С учетом определений (18), (20), (19) функций  $E_3, v$  и  $T_*$  такие кривые описываются уравнением

$$\frac{G(\beta)H - N^2(\beta)}{2G(\beta)}\dot{\beta}^2 + U_*(p^0, \beta) = e^0, \quad (22)$$

где  $e^0$  – постоянная. В верхней части рис. 1 схематически изображен график функции  $U_*(p^0, \beta)$  на  $2\pi$ -периоде изменения  $\beta$ . Он включает указанные выше случаи А, В, С, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет точку минимума, максимума и перегиба с горизонтальной касательной. Стационарные значения  $\beta^0$ , соответствующие случаям А, В, С, обозначены на этом рисунке через  $\beta_A^0, \beta_B^0, \beta_C^0$ . В нижней части рис. 1 показан качественный вид кривых, определяемых уравнением (22) при разных значениях постоянной  $e^0$ .

**3. Неустойчивость стационарных решений в случае Аб.** Пусть функция  $v_p$  фазовых переменных системы  $S_p$  определена равенством

$$v_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = v(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}), \quad (23)$$

где функция  $v$  задана формулой (20). Производная функции  $v_p$  по  $t$  в силу системы  $S_p$  совпадает с (21). Докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Если приведенная система  $S_p$  имеет решение*

$$\dot{\beta}(t), \dot{\gamma}(t), \beta(t), \gamma(t), x(t), i_1(t), \dots, i_{n_2}(t), \quad (24)$$

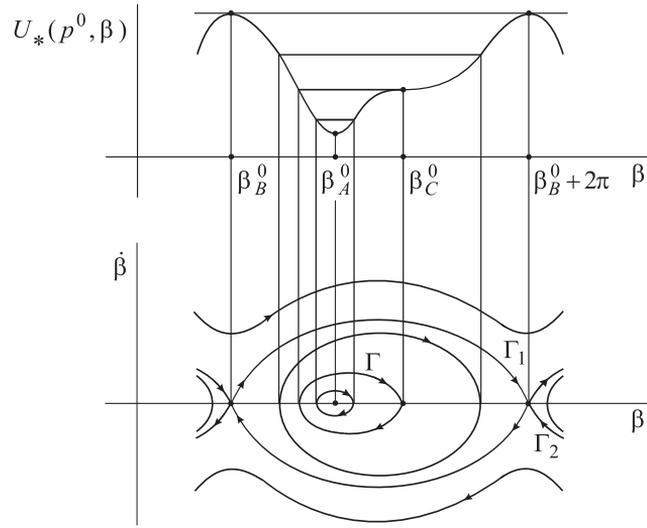


Рис. 1. Кривые, определяемые условием  $v = \text{const}$  в случаях A, B, C.

на котором  $\dot{v}_p(t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ , то для этого решения при всех  $t \geq 0$  выполняются равенства

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \quad \gamma(t) = \gamma_0, \quad x(t) = 0, \quad i_1(t) = 0, \dots, i_{n_2}(t) = 0, \quad (25)$$

где  $\gamma_0$  — одно из стационарных значений (11) угла  $\gamma$ , т. е.

$$b_0 \sin \gamma_0 + c_0 = 0. \quad (26)$$

Доказательство. Так как  $\dot{v}_p(t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) для решения (24), то, согласно (21), для этого решения имеем

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \quad x(t) = 0, \quad i_1(t) = 0, \dots, i_{n_2}(t) = 0, \quad (27)$$

и поэтому  $\gamma(t) = \gamma_0$  — величина постоянная. Покажем, что  $\gamma_0$  удовлетворяет соотношению (26).

Предварительно выведем неравенство для функции  $E_1$ , определенной формулой (15). Решение (24) системы  $S_p$  соответствует решению

$$\dot{\alpha}(t), \quad \dot{\beta}(t), \quad \dot{\gamma}(t), \quad \beta(t), \quad \gamma(t), \quad x(t), \quad i_1(t), \dots, i_{n_2}(t) \quad (28)$$

исходной системы уравнений движения, в котором, согласно (5),

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{G(\beta(t))} [p - \dot{\beta}N(\beta(t)) - (\omega + \dot{\gamma}(t))Q(\beta(t))].$$

Как отмечалось в п.1, при любом значении  $\beta$  кинетическая энергия  $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta)$  является определено положительной квадратичной формой (1)

переменных  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$ . Коэффициенты  $G, N, Q$  этой формы – непрерывные периодические, а значит, ограниченные функции  $\beta$ . Поэтому существуют постоянные  $h_1, h_2 > 0$  такие, что при любом  $\beta$  выполнено двойное неравенство

$$h_1(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\varphi}^2) \leq T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta) \leq h_2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\varphi}^2). \quad (29)$$

Из определений (15), (16), (1) функций  $E_1, T_1, T$  и равенств (27) следует, что  $E_1(t) = T(\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t), \omega, \beta(t))$  на решении (28). Отсюда с учетом (29) получаем для  $E_1(t)$  двойное неравенство

$$h_1[\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t) + \omega^2] \leq E_1(t) \leq h_2[\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t) + \dot{\varphi}^2], \quad t \geq 0. \quad (30)$$

Допустим, что значение  $\gamma_0$  – нестационарное, т. е.  $b_0 \sin \gamma_0 + c_0 \neq 0$ . Тогда, согласно (14), (27), имеем  $\dot{E}_1(t) = \text{const} \neq 0$  на рассматриваемом решении и, следовательно, функция  $E_1(t)$  на этом решении неограниченно возрастает по модулю при возрастании  $t$ . Но, согласно (30), функция  $E_1(t)$  положительна и может неограниченно возрастать по модулю только в случае, когда хотя бы одна из скоростей  $\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t)$  неограниченно возрастает по модулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Значит, если величина  $|\dot{\alpha}(t)|$  ограничена, то величина  $|\dot{\beta}(t)|$  должна быть неограниченной. Если же величина  $|\dot{\alpha}(t)|$  неограничена, то левая часть формулы (5), определяющей  $p$ , будет ограниченной при  $\dot{\gamma}(t) \equiv 0$  только в том случае, когда функция  $N(\beta(t))$  не является тождественным нулем, а величина  $|\dot{\beta}(t)|$  неограничена. Таким образом, при допущении о нестационарности значения  $\gamma_0$  всегда имеем  $|\dot{\beta}(t)| \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

Однако из формул (20), (21) для  $v, \dot{v}$  с учетом определений (16), (19) функций  $T_1, T_*$  следует, что при условиях (27) на рассматриваемом решении выполняется равенство

$$\frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} \dot{\beta}^2(t) + U_*(p, \beta(t)) = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Его левая часть ограничена при  $|\dot{\beta}(t)| \rightarrow \infty$  только в том случае, когда коэффициент при  $\dot{\beta}^2(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Но это невозможно, так как данный коэффициент, будучи непрерывной  $2\pi$ -периодической функцией  $\beta$ , положительной при всех  $\beta$  согласно (3), имеет положительный минимум при  $\beta \in [0, 2\pi]$ . Следовательно, допущение о нестационарности  $\gamma_0$  неверно.  $\square$

Для изучения устойчивости стационарных решений в случае Аb воспользуемся теоремой Н.Н. Красовского о неустойчивости (см. теорему 1.6.3 в [5]).

**Теорема 1.** Пусть для автономной системы

$$\dot{x} = f(x) \quad (f(0) = 0) \quad (31)$$

существует непрерывно дифференцируемая функция  $V = V(x)$ , которая обращается в нуль в точке  $x = 0$  и обладает следующими свойствами.

1. Функция  $V$  принимает отрицательные значения в любой сколь угодно малой окрестности точки  $x = 0$ .

2. Производная функции  $V$  по  $t$  в силу системы (31) удовлетворяет условиям

$$\dot{V} < 0 \text{ вне } M, \quad \dot{V} = 0 \text{ на } M,$$

где  $M$  – множество точек, не содержащее целых положительных полутраекторий, кроме точки  $x = 0$ .

Тогда положение равновесия  $x = 0$  неустойчиво.

Вопрос об устойчивости в случае Аб решает следующая теорема.

**Теорема 2.** В случае Аб, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет в точке  $\beta = \beta^0$  изолированный минимум, а функция  $U_1(\gamma)$  имеет в точке  $\gamma = \gamma^0$  изолированный максимум, стационарное решение (8) преобразованной системы (6) неустойчиво.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства неустойчивости решения (8) преобразованной системы (6) достаточно установить неустойчивость соответствующего решения приведенной системы  $S_{p^0}$ . С этой целью воспользуемся теоремой 1, полагая, что роль системы (31) играет приведенная система  $S_{p^0}$ , а вместо устойчивости нулевого решения рассматривается вопрос об устойчивости в случае Аб решения

$$\dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (32)$$

системы  $S_{p^0}$ , соответствующего решению (8) системы (6). В качестве функции  $V$  выберем функцию  $v_{p^0}$ , где функция  $v_p$  определена в (23).

Функция  $v_{p^0}$  обращается в нуль в стационарной точке (32) системы  $S_{p^0}$ . Так как значение  $\gamma = \gamma^0$  является точкой локального максимума функции  $U_1(\gamma)$ , разность  $U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0)$  принимает отрицательные значения в окрестности этой точки. Поэтому функция  $v_{p^0}$  принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарной точки (32) системы  $S_{p^0}$ , так что выполнено условие 1 теоремы 1.

В соответствии с (4), (21) имеем  $\dot{v}_{p^0}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq 0$ . Поэтому для того, чтобы воспользоваться теоремой 1, достаточно доказать, что множество  $M$  точек фазового пространства системы  $S_{p^0}$ , на котором  $\dot{v}_{p^0} = 0$ , не содержит в малой окрестности стационарной точки (32) целых положительных полутраекторий, отличных от этой точки.

Допустим, что это утверждение неверно, т. е. приведенная система  $S_{p^0}$  имеет в окрестности стационарной точки (32) нестационарное решение

$$\dot{\beta}(t), \quad \dot{\gamma}(t), \quad \beta(t), \quad \gamma(t), \quad x(t), \quad i_1(t), \dots, i_{n_2}(t) \quad (t \geq 0), \quad (33)$$

на котором  $\dot{v}_{p^0}(t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ . Согласно лемме 1, для этого решения выполняются равенства (25), (26), так что отличными от постоянных тут могут быть только функции  $\dot{\beta}(t)$ ,  $\dot{\gamma}(t)$ . При малых возмущениях стационарное

значение  $\gamma_0$  в лемме 1 совпадает с невозмущенным стационарным значением  $\gamma^0$ . Функции  $\dot{\beta}(t)$ ,  $\beta(t)$  при всех  $t \geq 0$  удовлетворяют соотношениям

$$\frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} \dot{\beta}^2(t) + U_*(p^0, \beta(t)) - U_*(p^0, \beta^0) = e, \quad (34)$$

$$\frac{[p^0 - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} + \frac{G(\beta(t))R - Q(\beta(t))N(\beta(t))}{G(\beta(t))} \dot{\beta}(t) = k, \quad (35)$$

где  $e, k$  — постоянные. При учете равенств (25), (26) первое из этих соотношений следует из формул (20), (21) для  $v, \dot{v}$  и определения функции  $v_{p^0}$ , а второе следует из третьего уравнения системы (6).

Из (3) следует, что левая часть равенства (34) неотрицательна в рассматриваемом случае А, когда  $\beta^0$  — точка минимума функции  $U_*(p^0, \beta)$ , и поэтому  $e \geq 0$ . А поскольку рассматриваемое решение (33) предполагается отличным от стационарной точки (32), имеем  $e > 0$ . Так как значение  $\beta = \beta^0$  является точкой локального минимума разности  $U_*(p^0, \beta) - U_*(p^0, \beta^0)$ , то при достаточно малых значениях  $e > 0$  соотношение (34) определяет на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  замкнутые кривые, охватывающие точку  $(\beta^0, 0)$  (рис. 1). Они соответствуют колебаниям, для которых  $\beta(t)$  — периодическая функция времени.

Но если коэффициент при  $\dot{\beta}(t)$  в соотношении (35) отличен от тождественного нуля, то это соотношение определяет кривые, для которых  $\dot{\beta}$  является однозначной функцией  $\beta$ . Такие кривые не могут быть замкнутыми. Значит, данный коэффициент тождественно равен нулю, т. е. выполнено равенство  $K_1(\beta(t)) \equiv 0$ , где  $K_1(\beta) = G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)$ . В таком случае соотношение (35) принимает вид тождественного по  $t \geq 0$  равенства

$$\frac{[p^0 - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} \equiv k,$$

где  $k$  — постоянная. Так как на замкнутых кривых величина  $\beta$  не является постоянной, то полученные два равенства должны быть тождествами не только по  $t$ , но и по  $\beta$ , т. е. должны выполняться тождества

$$K_1(\beta) \equiv 0, \quad \frac{[p^0 - \omega Q(\beta)]Q(\beta)}{G(\beta)} \equiv k \quad (k = \text{const}). \quad (36)$$

Таким образом, приведенная система  $S_{p^0}$  имеет нестационарное решение (33), на котором  $\dot{v}_{p^0}(t) \equiv 0$ , только в том случае, когда выполняются тождества (36). Но из приведенных ниже лемм 2, 3 следует, что это невозможно. Значит, в рассматриваемом случае множество  $\mathcal{M}$  точек фазового пространства системы  $S_{p^0}$  не содержит в окрестности стационарной точки (32) положительных полутраекторий, кроме самой этой точки, т. е. выполнено и условие 2 теоремы 1. Следовательно, стационарное решение (32) приведенной системы  $S_{p^0}$  неустойчиво.  $\square$

Доказательства приведенных ниже лемм 2, 3 даны в [6].

**Лемма 2.** Значение  $\tilde{p}$  постоянной  $p$ , при котором справедливы тождества (36), существует тогда и только тогда, когда коэффициенты формул (2) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} g_2 = 0, \quad g_3 = 0, \quad g_4 \neq 0, \quad q_0(2q_0g_4 + q_1g_1) - q_1^2(g_0 + g_4) = 0, \\ g_0R - q_0n_0 - q_1n_1/2 = 0, \quad g_1R - q_0n_1 - q_1n_0 = 0, \\ n_2 = 0, \quad g_4R + q_1n_1/2 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

В этом случае

$$\tilde{p} = 2\omega q_0 + \omega q_1 g_1 / 2g_4.$$

**Лемма 3.** Конструкции гироскопа в кардановом подвесе, удовлетворяющей соотношениям (37), не существует.

**4. Неустойчивость стационарных решений в случаях Ва, Са, Вб, Сб.** Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** В случаях Ва, Вб, Са, Сб, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет в точке  $\beta = \beta^0$  изолированный локальный максимум или перегиб с горизонтальной касательной, а функция  $U_1(\gamma)$  имеет при  $\gamma = \gamma^0$  локальный максимум или минимум, стационарное решение (8) преобразованной системы (6) неустойчиво.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Чтобы доказать неустойчивость решения (8) преобразованной системы (6), достаточно доказать неустойчивость соответствующего решения (32) приведенной системы  $S_{p^0}$ . С этой целью, как и при доказательстве теоремы 2, воспользуемся теоремой 1, приняв в ней в качестве функции  $V$  функцию  $v_{p^0}$ , где функция  $v_p$  определена в (23). Функция  $v_{p^0}$  обращается в нуль в стационарной точке (32) системы  $S_{p^0}$ . Разность  $U_*(p^0, \beta) - U_*(p^0, \beta^0)$  принимает отрицательные значения в любой окрестности точки  $\beta = \beta^0$ , поскольку значение  $\beta = \beta^0$  является для функции  $U_*(p^0, \beta)$  точкой локального максимума или перегиба с горизонтальной касательной. Поэтому функция  $v_{p^0}$  принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарной точки (32) приведенной системы  $S_{p^0}$ . Таким образом, условие 1 теоремы 1 выполнено.

Согласно (4), (21), имеем  $\dot{v}_{p^0}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq 0$ . Поэтому для того, чтобы воспользоваться теоремой 1, надо проверить выполнение ее условия 2 об отсутствии в окрестности стационарной точки (32) отличных от этой точки целых положительных полутраекторий, на которых выполняется условие  $\dot{v}_{p^0} = 0$ . В соответствии с леммой 1, множество  $\mathcal{M}$  точек фазового пространства системы  $S_{p^0}$ , составленное из таких полутраекторий, содержится во множестве, которое определено равенствами (25), (26). Из них следует, что если система  $S_{p^0}$  имеет определенное при  $t \geq 0$  решение, на котором  $\dot{v}_{p^0}(t) \equiv 0$ , то в этом решении отличными от постоянных являются только функции  $\beta(t), \dot{\beta}(t)$ . Эти функции связаны соотношением (34), которое следует из формул (20), (21), (19), (16) для  $v, \dot{v}, T_*, T_1$  и равенств (25).

Рассмотрим на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  кривые, задаваемые соотношением (34) в случаях В, С, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет при  $\beta = \beta^0$  локальный максимум

или перегиб с горизонтальной касательной. Эти кривые являются проекциями фазовых траекторий системы  $S_{p^0}$  на плоскость  $(\beta, \dot{\beta})$ . Как показывает рис. 1, в случаях В, С соотношение (34) при  $e \neq 0$  не определяет целых положительных полутраекторий в окрестности стационарной точки (32). При  $e = 0$  это соотношение определяет, кроме самой стационарной точки, целые положительные полутраектории, вдоль которых решение стремится к стационарной точке при  $t \rightarrow \infty$ . В случае В такими полутраекториями являются кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  или их части, содержащие стационарную точку, а в случае С – кривая  $\Gamma$  или ее часть, содержащая стационарную точку. Поэтому, строго говоря, условие 2 теоремы 1 здесь не выполняется.

Однако в доказательстве этой теоремы используется не полное отсутствие в  $\mathcal{M}$  целых положительных полутраекторий, отличных от рассматриваемой стационарной точки, а лишь отсутствие в  $\mathcal{M}$  целых полутраекторий, лежащих в шаровом слое с центром в этой точке. Такое условие здесь выполнено, и поэтому утверждение теоремы 1 о неустойчивости остается верным и в данном случае.  $\square$

1. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Устойчивость стационарных решений уравнений многогоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 87–100.
2. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. – 2012. – Вып. 4. – С. 18–27.
3. Коносевиц Ю.Б. Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 115–123.
4. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 3. – С. 57–73.
5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
6. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Свойство притяжения стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 3–14.

**B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich**

### **Stability of steady solutions of equations of a multi-current model of a gimbals mounted synchronous gyroscope**

The subject of investigation is the dynamics of a gimbals mounted gyroscope placed on the immovable foundation in the field of gravity and supplied with the synchronous electric motor, which sets the gyroscope (rotor) in rotation. A mathematical model of the synchronous electric motor is taken that includes differential equations for electric currents in windings of the rotor. Frictional and control torques acting about the axis of gimbals are assumed to be zero. The frictional torque acting about the axis of the rotor is assumed to be nonlinear function of its angular velocity with respect to the stator. It is proved that in non-special cases, when the reduced potential energy of gravity is not constant, steady-state motions of the device are unstable under assumption that the total reduced potential energy has no minimum in the respective point.

**Keywords:** *gimbals mounted gyroscope, synchronous electric motor, stability.*