

УДК 521.1:531

©2017. А.И. Андрюхин, С.Н. Судаков

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ ДЛЯ ЖИДКОГО ЭЛЛИПСОИДА И ДВУХ ОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ШАРОВ

Получены уравнения движения для задачи о движении трех взаимно притягивающихся тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а два других – твердые однородные шары. Закон изменения стратифицированной вязкости выбран так, чтобы обеспечить однородное вихревое движение жидкости. В качестве примера с помощью метода Рунге–Кутты сделан расчет движения для задачи с массово-геометрическими параметрами системы Земля–Луна–Солнце.

Ключевые слова: задача трех тел, жидкий эллипсоид переменной вязкости, однородное вихревое движение.

Введение. В геофизике и геодезии фундаментальную роль играет понятие референц-поверхности, т. е. поверхности постоянного гравитационного потенциала, совпадающей с поверхностью океана и простирающейся под континентами. Именно от нее ведутся все отсчеты. Долгое время хорошим приближением такой поверхности считался эллипсоид Маклорена – самогравитирующий жидкий осесимметричный эллипсоид, вращающийся вокруг своей оси симметрии. Однако в последнее время, благодаря точным измерениям, проведенным с использованием космических аппаратов, было выяснено, что поверхность Земли не является точно эллипсоидом вращения [1].

В связи со сказанным возникает вопрос: в какой мере поверхность Земли, рассматриваемая как поверхность жидкого эллипсоида, будет отклоняться от эллипсоида Маклорена под действием гравитационного притяжения таких небесных тел как Луна и Солнце. С этой целью ниже рассмотрена задача трех тел, одно из которых жидкий эллипсоид с массово-геометрическими параметрами Земли, а два других – твердые однородные шары с массами Луны и Солнца.

Задача о вращении жидких гравитирующих эллипсоидов не является новой. Начиная с Ньютона, она привлекала внимание многих ученых и была подробно исследована [1–6]. Гораздо менее изучены важные для астрономии задачи о движении нескольких взаимогравитирующих жидких и твердых тел. Здесь широко известна проблема Роша об определении формы Луны [4]. Е.В. Петкевичем [7,8] получены уравнения движения для задачи двух жидких тел. Поскольку эти проблемы имеют фундаментальное значение для теории вращающихся звезд и жидких планет, представляется важным продолжить эти исследования. Ниже рассмотрена задача о движении трех тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а два других – твердые однородные шары (см. рис. 1). Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к твердым телам по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [9].

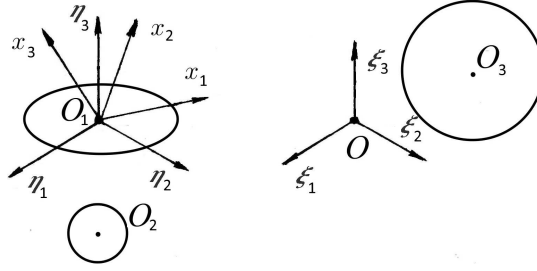


Рис. 1. Используемые системы координат.

1. Уравнения движения. Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ обозначим подвижные прямоугольные оси, начало которых O_1 совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Через $O_1x_1x_2x_3$ обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида.

Положение осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ определим углами Эйлера φ, ψ, θ . Матрица перехода $A = (a_{ij})$ от осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ к $O_1x_1x_2x_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Пусть $(\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13})$ – координаты центра масс (ЦМ) жидкого эллипсоида в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$; $(\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23})$ и $(\xi_{31}, \xi_{32}, \xi_{33})$ – соответственно координаты ЦМ второго и третьего тел в тех же осях. Координаты ЦМ жидкого эллипсоида в осях $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ будут равны $\eta_{11} = 0, \eta_{12} = 0, \eta_{13} = 0$, а координаты ЦМ второго и третьего тел соответственно будут следующими:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= \xi_{21} - \xi_{11}, & \eta_{22} &= \xi_{22} - \xi_{12}, & \eta_{23} &= \xi_{23} - \xi_{13}, \\ \eta_{31} &= \xi_{31} - \xi_{11}, & \eta_{32} &= \xi_{32} - \xi_{12}, & \eta_{33} &= \xi_{33} - \xi_{13}. \end{aligned}$$

Используя матрицу перехода A от системы координат $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ к $Ox_1x_2x_3$, находим координаты второго и третьего тел в осях $O_1x_1x_2x_3$:

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\eta_{2j}, \quad x_{3i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\eta_{3j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя матрицу перехода A , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O_1x_1x_2x_3$:

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

где w_1, w_2, w_3 – компоненты ускорения точки O_1 в подвижных осях $O\eta_1, \eta_2, \eta_3$.

Проекции на оси $O_1x_1x_2x_3$ гравитационной силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны твердых тел, определяются формулами

$$f_i = G\rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r_{12}^2 [(\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2]^{3/2}} + \\ + G\rho m_3 \frac{\tilde{x}_{3i} - \tilde{x}_i}{r_{13}^2 [(\tilde{x}_{31} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{32} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{33} - \tilde{x}_3)^2]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная, ρ – плотность жидкости, $r_{1k}^2 = x_{k1}^2 + x_{k2}^2 + x_{k3}^2$, $\tilde{x}_{ki} = x_{ki}/r_{12}$ ($k = 2, 3$); $\tilde{x}_i = x_i/r_{12}$; x_1, x_2, x_3 – координаты рассматриваемой частицы жидкости в осях $Ox_1x_2x_3$.

В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние r_{1k} между точками O_1 и O_k , $k = 2, 3$, настолько велико, что можно провести линеаризацию величин f_i по $\tilde{x}_i$, $i = 1, 2, 3$. Такая линеаризация обеспечит существование однородного вихревого движения жидкости и сохранение ее эллипсоидальной формы. После линеаризации и возврата к величинам без знака “тильда” будем иметь

$$f_1 = \frac{G\rho m_2}{r_{12}^5} [x_{21}r_{12}^2 + (3x_{21}^2 - r_{12}^2)x_1 + x_{21}x_{22}x_2 + 3x_{21}x_{23}x_3] + \\ + \frac{G\rho m_3}{r_{13}^5} [x_{31}r_{13}^2(3x_{31}^2 - r_{13}^2)x_1 + 3x_{31}x_{32}x_2 + 3x_{31}x_{33}x_3] \quad (123),$$

где $r_{13}^2 = x_{31}^2 + x_{32}^2 + x_{33}^2$. Символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величинам m_2 , m_3 , к первому индексу величин x_{2i} , x_{3i} , $i = 1, 2, 3$, и к обоим индексам величин r_{12} , r_{13} .

Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [7]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} + 2\sigma \nabla \nu - \\ - \mathbf{w} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость движения жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – координатный вектор, ρ – плотность жидкости, p – давление, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – полу-длины главных осей жидкого эллипсоида, $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ – абсолютное ускорение точки O_1 , $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

Величина кинематической вязкости $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ определяется выражением $\nu = \nu_0 (1 - x_1^2/c_1^2 - x_2^2/c_2^2 - x_3^2/c_3^2)$, где $\nu_0 = \text{const}$. Граница жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$ задается уравнением $x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1$. Следовательно, на границе жидкости $\nu = 0$.

Отметим, что задание кинематической вязкости как функции координат, на первый взгляд, может показаться неестественным. Однако, в дальнейшем будут рассматриваться только однородные вихревые движения эллипсои-

дальней массы жидкости, при которых вязкость имеет одно и то же значение на каждом эллипсоиде из семейства соосных концентрических эллипсоидов, подобных границе жидкости. Частицы жидкости, лежащие в какой-то момент времени на одном из таких эллипсоидов, никогда не сходят с него. То есть вязкость каждой частицы жидкости остается постоянной.

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости σ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал Φ гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]: $\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0)$, где

$$\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \quad D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

В случае однородного вихревого движения компоненты скорости жидкости v_1, v_2, v_3 и давление p ищем в виде

$$v_1 = \frac{\dot{c}_1}{c_1} x_1 - \frac{c_1}{c_2} \Omega_3 x_2 + \frac{c_1}{c_3} \Omega_2 x_3 \quad (123), \quad p = -p_0(t) \left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1 \right), \quad (3)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и $p_0(t)$ – неизвестные функции времени t . Подставляя (3) в уравнения движения жидкости (2), получаем

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{i0} &= w_{x_i} - Gm_2 x_{2i}/r_{12}^3 - Gm_3 x_{3i}/r_{13}^3, \quad i = 1, 2, 3, \\ k_{11} &= \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\frac{c_3}{c_1} \Omega_2 \omega_2 - 2\frac{c_2}{c_1} \Omega_3 \omega_3 + \\ &\quad + 2\pi \rho G \alpha_1 - Gm_2(3x_{21}^2 - r_{12}^2)/r_{12}^5 - Gm_3(3x_{31}^2 - r_{13}^2)/r_{13}^5, \\ k_{12} &= -2\frac{\dot{c}_1}{c_2} \Omega_3 - \frac{c_1}{c_2} \dot{\Omega}_3 + \frac{c_1}{c_2} \Omega_1 \Omega_2 + \frac{2\nu_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \Omega_3 + 2\frac{c_3}{c_2} \Omega_1 \omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_3 - \\ &\quad - \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 - 3Gm_2 x_{21} x_{22}/r_{12}^5 - 3Gm_3 x_{31} x_{32}/r_{13}^5, \\ k_{13} &= 2\frac{\dot{c}_1}{c_3} \Omega_2 + \frac{c_1}{c_3} \dot{\Omega}_2 + \frac{c_1}{c_3} \Omega_1 \Omega_3 + \frac{2\nu_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \Omega_2 + \frac{2\dot{c}_3}{c_3} \omega_2 + \frac{2c_2}{c_3} \Omega_1 \omega_3 + \\ &\quad + \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 - 3Gm_2 x_{21} x_{23}/r_{12}^5 - 3Gm_3 x_{31} x_{33}/r_{13}^5 \quad (123), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости ω осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ на себя; символ циклической перестановки индексов (123) не распространяется на m_2, m_3 , первые индексы координат x_{2i}, x_{3i} и на оба индекса величин r_{12}, r_{13} .

Равенства (4) должны выполняться при любых значениях x_1, x_2, x_3 из области, занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

где k_{ij} определены выражениями (5). Далее, исключая переменную p_0 , представим уравнения (6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \frac{c_2 c_3}{c_2^2 - c_3^2} (f_{23} - f_{32}), \quad \dot{\omega}_1 = \frac{c_2^2 f_{32} - c_3^2 f_{23}}{c_2^2 - c_3^2} \quad (123), \\ \ddot{c}_1 &= \left[\left(1 + \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) F_1 - \frac{c_3^2}{c_1^2} F_2 \right] \Delta^{-1}, \quad \ddot{c}_2 = \left[\left(1 + \frac{c_3^2}{c_1^2} \right) F_2 - \frac{c_3^2}{c_2^2} F_1 \right] \Delta^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta = 1 + R^6/(c_1^4 c_2^2) + R^6/(c_1^2 c_2^4)$, $c_3 = R^3/(c_1 c_2)$;

$$\begin{aligned} f_{23} &= -\frac{2\dot{c}_2}{c_3} \Omega_1 + \frac{c_2}{c_3} \Omega_2 \Omega_3 + \omega_2 \omega_3 + 2\frac{c_1}{c_3} \Omega_2 \omega_3 - 2\frac{\dot{c}_3}{c_3} \omega_1 + \frac{2\nu_0}{c_3^2} \left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \Omega_1 - \\ &\quad - 3Gm_2 x_{22} x_{23} / r_{12}^5 - 3Gm_3 x_{32} x_{33} / r_{13}^5, \\ f_{32} &= -\frac{2\dot{c}_3}{c_2} \Omega_1 - \frac{c_3}{c_2} \Omega_2 \Omega_3 - \omega_2 \omega_3 - 2\frac{c_1}{c_2} \Omega_3 \omega_2 - 2\frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_1 - \frac{2\nu_0}{c_2^2} \left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \Omega_1 + \\ &\quad + 3Gm_2 x_{22} x_{23} / r_{12}^5 + 3Gm_3 x_{32} x_{33} / r_{13}^5, \\ f_{33} &= -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\frac{c_2}{c_3} \Omega_1 \omega_1 - 2\frac{c_1}{c_3} \Omega_2 \omega_2 + 4\nu_0 \frac{\dot{c}_3}{c_3^3} + 2\pi \rho G \alpha_3 - \\ &\quad - Gm_2 (3x_{23}^2 - r_{12}^2) / r_{12}^5 - Gm_3 (3x_{33}^2 - r_{13}^2) / r_{13}^5 \quad (123), \\ F_i &= 2\frac{c_3^2}{c_i^2} \left(\frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2} + \frac{\dot{c}_1 \dot{c}_2}{c_1 c_2} + \frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2} \right) + \frac{c_3^2}{c_i^2} f_{33} - f_{ii}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Движение осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ относительно $O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3$ описывается кинематическими уравнениями для углов Эйлера φ, ψ, θ , которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \quad \dot{\psi} = (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) / \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Движение центров масс эллипсоида O_1 и твердых тел O_2, O_3 , благодаря линеаризации выражений для f_i , описывается уравнениями задачи трех тел, которые не зависят от колебаний жидкого эллипсоида:

$$\frac{d^2 \xi_{1i}}{dt^2} = m_2 G \frac{\xi_{2i} - \xi_{1i}}{r_{12}^3} + m_3 G \frac{\xi_{3i} - \xi_{1i}}{r_{13}^3} \quad (123), \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где $r_{12} = r_{21} = \sqrt{(\xi_{11} - \xi_{21})^2 + (\xi_{12} - \xi_{22})^2 + (\xi_{13} - \xi_{23})^2}$ (123).

Уравнения (7)–(9) представляют собой систему двадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двадцати неизвестных $c_1, c_2, \varphi, \psi, \theta, \Omega_i, \omega_i, \xi_{ki}, \xi_{ki}$ ($k, i = 1, 2, 3$), которая, после задания начальных условий, полностью описывает движение рассматриваемой механической системы.

2. Численный расчет. В качестве примера взята система Земля–Луна–Солнце в эпоху, когда, согласно гипотезе Канта–Лапласа, Земля была жидкой, и рассмотрено движение Земли. Для численного решения уравнений (7)–(9) вводим безразмерные переменные $\tau = t/T$, $\zeta_i = c_i/R$, $u_i = d\zeta_i/d\tau$, $\tilde{\Omega}_i = T\Omega_i$, $\tilde{\omega}_i = T\omega_i$, $i = 1, 2, 3$; $\tilde{r}_1 = r_1/R$, где T – характер времени, $R = \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3}$. Для решения уравнений был использован численный метод Рунге–Кутты 4–5. Массово-геометрические параметры системы:

$$\begin{aligned} m_1 &= 5973.0 \cdot 10^{21} \text{ кг}, & m_2 &= 0.0123 \cdot m_1, & m_3 &= 332946 \cdot m_1, \\ R &= 6.371000685 \cdot 10^6 \text{ м}, & \nu_0 &= 5 \cdot 10^8 \text{ м}^2/\text{с}, & \rho &= 5516.977018 \text{ кг/м}^3, \\ G &= 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), & T &= 24 \cdot 60^2 \text{ с}. \end{aligned}$$

На рис. 2–7 приведены графики решения. На рис. 4 показана разность полуосей $c_* = c_1(\tau) - c_2(\tau)$. На рис. 5–7 – зависимость от времени τ углов Эйлера φ, ψ, θ , определяющих направление главных осей жидкого эллипсоида.

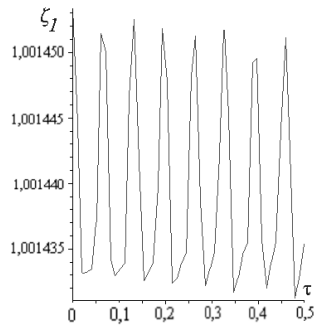


Рис. 2

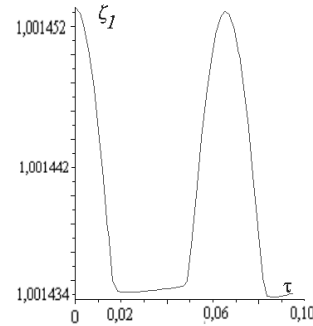


Рис. 3

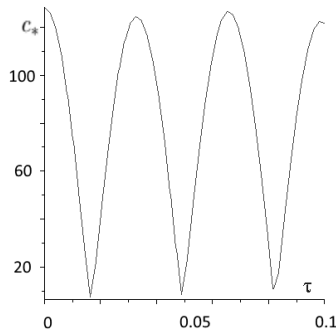


Рис. 4

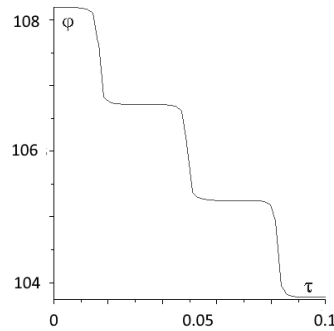


Рис. 5

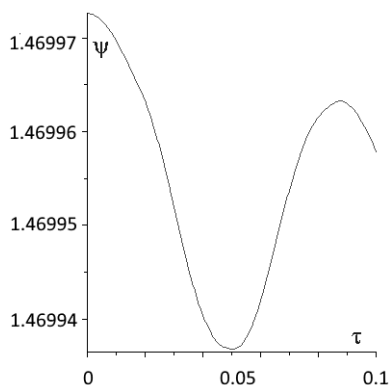


Рис. 6

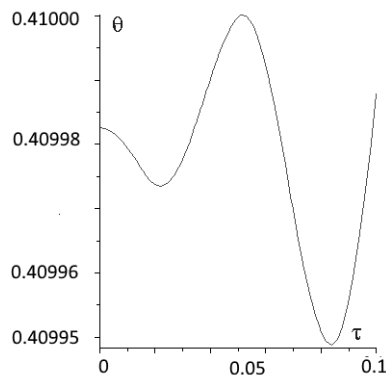


Рис. 7

Начальные условия при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 1.00143337102364871, & \zeta_2 &= 1.00143318912771906, \\ u_1 &= -3.99726666799916140 \cdot 10^{-9}, & u_2 &= 8.77743740509621554 \cdot 10^{-10}, \\ \tilde{\Omega}_1 &= -0.107456678954105066 \cdot 10^{-3}, & \tilde{\Omega}_2 &= -2.93804410774078165 \cdot 10^{-7}, \\ & & \tilde{\Omega}_3 &= 6.03585129313196234, \\ \tilde{\omega}_1 &= -0.475877966250700194 \cdot 10^{-5}, & \tilde{\omega}_2 &= 2.94046254130352368 \cdot 10^{-7}, \\ & & \tilde{\omega}_3 &= .243354793234692474, & \varphi &= 108.188083562994422, \\ \psi &= 1.46997262798553964, & \theta &= 0.409982577490330790, \\ \tilde{r}_1 &= 0.730391117870160977, & \varphi_1 &= 12.2820403947446515, \\ \theta_1 &= 0, & \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= 0.221922287024808568, & \frac{d\theta_1}{d\tau} &= 0.\end{aligned}$$

Выводы. Получены уравнения движения для задачи трех тел (жидкого эллипсоида переменной вязкости и двух абсолютно твердых однородных шаров). Составлена компьютерная программа для численного решения полученных уравнений и выполнены пробные расчеты при массово-геометрических параметрах системы Земля–Луна–Солнце. Движение Земли моделировалось жидким эллипсоидом переменной вязкости. Результаты расчетов представлены графически на рис. 2–7. Из рис. 2 следует, что большая экваториальная ось эллипсоидальной массы жидкости за 0.5 суток совершает примерно семь с половиной колебаний.

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.;Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Стеклов В.А. Работы по механике. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2011. – 492 с.
4. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.

5. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.
6. Ядрицкий В.С. Теория фигур небесных тел. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2011. – 298 с.
7. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – **3**, 9. – 1977. – С. 424–428.
8. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Письма в Астрономический журнал. – **3**, 11. – 1977. – С. 522–525.
9. Судаков С.Н. О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 208–217.

A.I. Andryukhin, S.N. Sudakov

**The problem of three bodies for the ellipsoidal mass of liquid
and two homogeneous rigid spheres**

The problem of three gravitating bodies, one of which is a liquid ellipsoid and two others are rigid homogeneous spheres, is the subject of investigation in the paper. The motion of the liquid ellipsoid is assumed to be the homogeneous vortex flow, and this liquid has a special stratified distribution of viscosity that makes possible such motion. The equations of motion of this system are obtained, and they are solved for example by Runge–Kutta method for the case of the system with mass–geometric parameters of the Earth–Moon–Sun system.

Keywords: *the problem of three bodies, ellipsoidal mass of liquid, homogeneous vortex flow.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный техн. ун-т”,
ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
sudakov@iamm.su

Получено 19.06.17