УДК 517.947

В. П. Бурский

ОБ ОДНОЙ КОММУТАТИВНОЙ ДИАГРАММЕ, СЛЕДАХ РЕШЕНИЙ И СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ

В статье строится коммутативная диаграмма, отвечающая граничным свойствам функций, связанных с дифференциальной операцией с постоянными коэффициентами в области. В диаграмму попадают максимальный, минимальный операторы, пространство Коши и другие объекты, связанные с операцией. Показаны точность и расщепляемость строк и столбцов диаграммы, получены условия, выделяющие следы функций из ядра. Построенная схема применяется к изучению корректных краевых задач для оператора Лапласа в круге. Дано описание некоторого класса таких задач.

1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $\mathscr{L} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha, D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}, \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, |\alpha| = \sum\limits_k \alpha_k$ — дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами; L — максимальный оператор, порожденный операцией $\mathscr{L}$ (см. [1]), с областью определения $\mathscr{D}(L)$, являющейся замыканием $C^\infty(L)$ в норме графика: $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2$; L^+ — максимальный оператор, порожденный формально сопряженной операцией $\mathscr{L}^+ = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \bar{a}_\alpha D^\alpha$; L_0 — минимальный оператор, порожденный операцией $\mathscr{L}$, с областью определения $\mathscr{D}(L_0)$, являющейся замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ в норме графика $\|u\|_L$, множество значений $R(L_0)$ при этом, очевидно, замкнутое линейное подпространство в $L_2(\Omega)$, причем его ортогональное дополнение есть в точности $\ker L^+$ — ядро оператора L^+, ядро $\ker L$ замкнуто в $\mathscr{D}(L)$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & \mathscr{D}(L_0) \arrow[r, "L_0"] \arrow[d, "i_0"] & R(L_0) \arrow[r] \arrow[d, "i_R"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{D}(L) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Gamma"] & L_2(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(L) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d] & C(L) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \ker L^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D})$$

В этой диаграмме пока не определены объекты $C(L)$, $C^0(L)$ и морфизмы γ, Γ, i_C, σ, если, конечно, считать ясным, что i_L, i_0, i_R — мономорфизмы вложения; l — отображение факторизации. Заметим, что верхний квадрат коммутативен по определению операторов L и L_0.

Обращаем внимание читателя на следующее обстоятельство. Эпиморфность морфизма здесь будет пониматься как сюрьективность соответствующего непрерывного отображения, а не как эпиморфность в категории гильбертовых пространств.

В последней категории как подкатегории категории топологических групп эпиморфизмами являются линейные непрерывные отображения на плотную часть (см. [2]), понятие мономорфизма от забывания топологии не меняется и будем считать мономорфизмом инъективное линейное непрерывное отображение. Точность последовательности морфизмов $\xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta}$ в члене M означает, что $\operatorname{im}\alpha = \ker\beta$, а точность последовательности из нескольких морфизмов означает точность в каждом члене, при этом точность последовательности $0 \to M \xrightarrow{\alpha}$ означает мономорфность α, а точность $\xrightarrow{\sigma} M \to 0$ — эпиморфность σ. Напомним также, что термин «точная последовательность $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ расщепляется» означает, что $B \approx A \oplus C$, т. е. существуют морфизмы $\beta : B \to A$, $\varkappa : C \to B$ со свойствами: 1) $\beta\alpha = \mathrm{id}_A$; 2) $\sigma\varkappa = \mathrm{id}_C$; 3) $\alpha\beta + \varkappa\sigma = \mathrm{id}_B$ (у нас топологическая прямая сумма).

Правый столбец в $(\mathcal{D})$ точен и расщепляется в ортогональную сумму, поскольку $(L_0^+)^* = L_0$ [3]. Далее показано [1], что у операторов L_0 и L_0^+ есть непрерывные обратные L_0^{-1} и $(L_0^+)^{-1}$, что влечет за собой, во-первых, точность верхней строки, во-вторых, точность средней строки в члене $L_2(\Omega)$ (лемма 1.7 [1] утверждает, что препятствие к сюрьективности оператора L лежит в ядре $\ker L_0^+$ оператора L_0^+), в-третьих, существование (см. ниже) корректно поставленной граничной задачи (в более точной терминологии работы [3] правильного оператора), обеспечивающее расщепление средней строки.

Теперь расширим диаграмму. Пространство Коши $C(L)$ Л. Хермандер определил в [1] как фактор $G(L)/G(L_0)$, где $G(L)$, $G(L_0)$ — графики операторов L и L_0 соответственно. Напомним, что график оператора $T : H_1 \to H_2$ есть по определению линейное многообразие пар $\{(h, Th) \mid h \in \mathcal{D}(T)\}$, замкнутое в норме пространства $H_1 \oplus H_2$, если оператор T замкнут. В нашем случае $\mathcal{D}(L)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_L = (u, v)_{L_2(\Omega)} + (Lu, Lv)_{L_2(\Omega)}$, $\mathcal{D}(L_0)$ — его замкнутое подпространство, $C(L) = G(L)/G(L_0) \approx \mathcal{D}(L)/\mathcal{D}(L_0)$, т. е. средний столбец точен и расщепляется. Оператор γ есть ограничение оператора факторизации Γ на ядро $\ker L$, а пространство $C^0(L)$ — его образ, поэтому левый столбец точен, а левый квадрат коммутативен (обозначения Γ и γ взяты из [1]). Оператор σ определим следующей конструкцией:

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & Lu \\ \downarrow & & \downarrow \\ g = \Gamma u = u + \mathcal{D}(L_0) & & \{Lu\} = Lu + R(L_0) \end{array} \qquad \sigma g = \{Lu\}$$

Для каждого элемента $y \in C(L)$ находим какой-нибудь элемент u со свойством $\Gamma u = y$ и к нему применяем оператор lL. Ясно, что результат не зависит от выбора элемента u, а построенное отображение линейно. Его непрерывность следует из непрерывности оператора L. По построению правый нижний квадрат коммутативен. Из алгебраической 3×3-леммы для C-модулей получаем точность нижней строки (см. [4]). Таким образом, доказано

Предложение 1. Диаграмма $(\mathcal{D})$ коммутативна и состоит из точных строк и столбцов.

Напомним теперь, что линейной однородной граничной задачей называется задача нахождения решения u уравнений

$$Lu = f, \quad \Gamma u \in B, \tag{1}$$

где B — линейное многообразие в $C(L)$. Граничное условие $\Gamma u \in B$ порождает подпространство $\mathcal{D}(L_B) = \Gamma^{-1}(B)$ в пространстве $\mathcal{D}(L)$ и оператор L_B, являющийся сужением оператора L на $\mathcal{D}(L_B)$ и расширением оператора L_0.

Граничная задача называется корректно поставленной [1—5], а оператор L_B — правильным [3], если L_B имеет непрерывный обратный определенный на всем $L_2(\Omega)$. Для оператора с постоянными коэффициентами L_0 существует правильный оператор (см. [1, 3, 5]), при этом $C(L) = C^0(L) \oplus B$ [1]. Ясно, что при этом $B \approx \ker L^+$ и нижняя строка расщепляется. Средняя строка расщепляется в силу существования оператора L_B^{-1}. Мы получили

Предложение 2. Строки и столбцы в диаграмме ($\mathcal{D}$) расщепляются. Если рассматривать операторы с переменными коэффициентами, то рассмотрения из [1] показывают, что препятствия к расщеплению строк лежат в ядрах $\ker L_0$ и $\ker L_0^+$.

2. Рассмотрим теперь подробнее пространства $C(L)$ и $C^0(L)$.

Предложение 3. Для любой пары функций w и φ из $W_2^m(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина:

$$\int\limits_{\Omega} (w\overline{L^+\varphi} - \bar{\varphi}Lw)\, dx = \sum_{q=0}^{m-1} \langle L_{m-1-q}w, \partial_\nu^q \varphi\rangle_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

где $\partial_\nu^q \varphi = \varphi_{\nu^q}^{(q)}$; $L_q = \sum\limits_{s=0}^{p} L_\tau^{p,s}\partial_\nu^s$ — оператор степени p; $L_\tau^{p,s}$ — некоторый линейный дифференциальный оператор по касательным направлениям τ с гладкими коэффициентами степени $p-s$.

Доказательство, а также сложный вид операторов $L_\tau^{p,s}$ легко получаются перебрасыванием производных. Отметим только, что

$$(L_0 w)(x) = L_\tau^{p,p} w(x) = l_0(x)\, w(x), \; l_0(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (\nu(x))^\alpha.$$

Пусть $J_{m,q} : W_2^{m-q-1/2}(\partial\Omega) \to W_2^m(\mathbf{R}^n)$, $q = 0, 1, \ldots, m-1$, — непрерывный оператор продолжения со свойством $\partial_\nu^p (J_{m,q}\psi)|_{\partial\Omega} = \delta_q^p \psi$, $p = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$. Подставим в (2) вместо φ функцию $J_{m,q}\psi$, а вместо w последовательность $\{w_k\} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, сходящуюся к решению u уравнения $Lu = f$, где $f \in L_2(\Omega)$. Левая часть равенства (2) будет стремиться к выражению линейному и непрерывному по $\psi \in W_2^{m-q-1/2}(\partial\Omega)$, в правой части будет стоять $\langle L_{m-1-q}w_k, \psi\rangle_{\partial\Omega}$, поэтому предел правой части также существует и задает нам функционал $L_{m-1-q}u \in W_2^{-m+q+1/2}(\partial\Omega)$. Распределение $L_p u$ назовем p-м следом функции $u \in \mathcal{D}(L)$, ассоциированным с оператором L, или просто p-м L-следом функции u на $\partial\Omega$. Ясно, что если $u \in \mathcal{D}(L_0)$, то все ее L-следы тривиальны. Итак, доказано

Предложение 4. L-следы функций из $\mathcal{D}(L)$ существуют, $L_p u \in W_2^{-p-1/2}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$, а пространство Коши $C(L)$ — подпространство в $W_2^{-1/2}(\partial\Omega) \times W_2^{-3/2}(\partial\Omega) \times \ldots \times W_2^{-m+1/2}(\partial\Omega)$, состоящее из всех наборов L-следов функций из $\mathcal{D}(L)$.

Предложение 5. Для того чтобы набор $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ из $C(L)$ был набором L-следов решения u уравнения $Lu = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого решения v уравнения $L^+v = 0$ было выполнено условие

$$\sum_{q=0}^{m-1} \langle u_{m-q-1}, \partial_\nu^q v\rangle_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Доказательство следует из формулы (2). Во-первых, легко заметить, что левая часть в (3) существует $\forall \{u_p\} \in C(L)$, $\forall v \in \mathcal{D}(L^+)$. Действительно, подставим в (2) вместо u $\{w_k\} \to u$, а вместо v $\{z_k\} \to v$. Получим формулу Грина

$$\forall u \in \mathcal{D}(L), \forall v \in \mathcal{D}(L^+), \int_\Omega (u\overline{L^+v} - \bar{v}Lu)\, dx = \sum_{q=0}^{m-1} \langle L_{m-1-q}u, \partial_\nu^q v\rangle. \tag{4}$$

Необходимость видна. Достаточность получим, вспомнив, что если $\{u_p\} \in C(L)$, то существует $W \in \mathcal{D}(L)$, для которой $\{u_p\}$ является набором L-следов. Из (4) имеем

$$\int_\Omega \bar{v}LW dx = 0, \ \forall v \in \ker L^+.$$

Из факта расщепления правого столбца в $(\mathcal{D})$ в ортогональную сумму находим, что существует $w_0 \in \mathcal{D}(L_0)$ такое, что $LW = Lw_0$. Тогда $L(W - w_0) = 0$, у функции w_0 L-следы тривиальны, поэтому функция $u = W - w_0$ — решение уравнения $Lu = 0$, а ее L-следами являются u_p.

Предложение 6. Пусть символ $\bar{l}(\xi)$ оператора L^+ раскладывается в произведение различных неприводимых полиномов, а область Ω выпукла. Для того чтобы набор $\{u_p\} \in C(L)$ был набором L-следов решения уравнения $Lu = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \xi \in \overline{\Lambda} = \{\xi \in \mathbf{C}^n \mid l(\xi) = 0\}, \ l(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha,$$
$$\sum_{q=0}^{m-1} \langle u_{m-1-q}, (i\nu(x)\cdot\xi)^q \exp(ix\cdot\xi)\rangle_{x, \partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Доказательство сразу следует из предложения (5) и плотности экспоненциальных решений уравнения $L^+v = 0$ в $\ker L^+$ [6]. Заметим, что условие (5) позволило исследовать некоторые граничные задачи в круге для уравнений с однородным символом [7—9].

3. Рассмотрим теперь с иллюстративными целями задачу (1), где $L = \tilde{\Delta}$ — максимальный оператор, порожденный оператором Лапласа Δ, $\Omega = K = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$ — круг. Предположим, что задача (1) порождает правильный оператор Δ_B, и пусть μ — регулярная точка оператора Δ_B^{-1}. Это означает, что оператор $\Delta_B^{-1} - \mu$ ограниченно обратим, т. е. задача

$$\Delta v - \mu^{-1}v = g, \ \Gamma v \in B \tag{6}$$

порождает правильный оператор. В самом деле, вместо u в равенство $(\Delta_B^{-1} - \mu)u = g$ подставив $\Delta_B v$, получим $v - \mu\Delta_B v = g$, т. е. (6) и ограниченная обратимость оператора $\Delta_B^{-1} - \mu$ означают существование правильного оператора, порожденного нашей краевой задачей. Для удобства запишем задачу в виде $(\lambda \neq 0)$

$$\Delta v + \lambda^2 v = g, \ \Gamma v \in B. \tag{7}$$

Как отмечалось, предположение о существовании ограниченного обратного $(\Delta_B + \lambda^2)^{-1}$ означает, что пространство Коши $C_\lambda = C(\tilde{\Delta} + \lambda^2)$ раскладывается в топологическую прямую сумму $C_\lambda = B \oplus C^0_\lambda$, где

$$C^0_\lambda = \Gamma \ker(\tilde{\Delta} + \lambda^2). \tag{8}$$

Заметим, во-первых, что пространство Коши C_λ не зависит от λ. Действительно, норма графика $\|\cdot\|_{\Delta+\lambda^2}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_\Delta$, поэтому $C_\lambda = \mathcal{D}(\tilde{\Delta} + \lambda^2)/\mathcal{D}(\Delta_0 + \lambda^2) = \mathcal{D}(\tilde{\Delta})/\mathcal{D}(\Delta_0) = C$ в силу того, что $\mathcal{D}(\tilde{\Delta}) = \mathcal{D}(\tilde{\Delta} + \lambda^2)$, $\mathcal{D}(\Delta_0) = \mathcal{D}(\Delta_0 + \lambda^2)$.

Во-вторых, пространство $C = C_\lambda \supset W_2^{1/2}(\partial K) \times W_2^{3/2}(\partial K)$. Заметим, что из предложения 4 $C \subset W_2^{-1/2}(\partial K) \times W_2^{-3/2}(\partial K)$.

В-третьих, подпространство C^0_λ, как следует из предложения 6, выделяется в пространстве C условием

$$\forall \xi \in \Lambda^\lambda, \int_{\partial K} [\psi_0 e^{-ix(\tau)\cdot\xi}(-i)\, x(\tau)\cdot\xi + \psi_1 e^{-ix(\tau)\cdot\xi}]\, d\tau = 0, \tag{9}$$

где τ — угловая координата; $x(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$; $\psi_0 = L_0 u = u|_{\partial K} \in W_2^{-1/2}(\partial K)$, $\psi_1 = L_1 u = -u'_\nu|_{\partial K} \in W_2^{-3/2}(\partial K)$; $\Lambda^\lambda = \{\xi \in C^2 \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 = \lambda^2\}$. Условие (9) записывается в терминах коэффициентов Фурье a_k, b_k функций $\psi_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\tau}$, $\psi_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\tau}$ в виде

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ a_k \lambda J'_k(\lambda) + b_k J_k(\lambda) = 0. \tag{10}$$

Действительно, условие (9) переписывается в виде

$$\int_{\partial K} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\tau} \xi \cdot \nabla e^{-ix(\tau)\cdot\xi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\tau} e^{-ix(\tau)\cdot\xi} \right] d\tau = 0,\ \forall \xi \in \Lambda^\lambda,$$

откуда в силу того, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(\xi_1\cos\tau + \xi_2\sin\tau) + ik\tau} d\tau = e^{ik\tau} J_k\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right), \tag{11}$$

$\operatorname{tg}\varphi = \xi_2/\xi_1 \neq \pm i$ $(\lambda \neq 0!)$, получим $\sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \lambda J'_k(\lambda) + b_k J_k(\lambda)]\, e^{ik\tau} = 0$, $\forall \tau \in [0, 2\pi]$, из чего следует (10).

Докажем (11). При $\lambda^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$ $\operatorname{tg}\varphi \neq \pm i$, поэтому существует угол φ — решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \xi_2/\xi_1$. Тогда $\xi_1 \cos\tau + \xi_2 \sin\tau = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cos(\tau - \varphi)$ и мы получаем

$$\int_0^{2\pi} e^{ik(\tau-\varphi) - i\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\cos(\tau-\varphi)} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{ik\tau - i\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\cos\tau} d\tau = J_k\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right).$$

Последнее равенство есть интегральное представление функции Бесселя [11], а первое — простое следствие интегральной теоремы Коши и периодичности подынтегральной функции (путь $(0, 2\pi)$ заменяется путем $(0, \varphi) + (\varphi, \varphi + 2\pi) + (\varphi + 2\pi, 2\pi)$, интегралы по первому и третьему пути уничтожаются, а во втором сделаем замену $\tau_{\text{новое}} = \tau - \varphi$).

Рассмотрим, в-четвертых, случай $\lambda = 0$. Условие (9) запишем в виде

$$\int_{\partial K} [\psi_0(x)\, x\cdot\xi Q'(x\cdot\xi) + \psi_1(x)\, Q(x\cdot\xi)]\, d\tau = 0,\ \forall \xi \in \Lambda_0,\ \forall Q \in \mathbf{C}[z],$$

откуда, подставляя $Q(z) = z^k$, для коэффициентов Фурье получаем

$$b_k + ka_k = 0,$$

что влечет непрерывность семейства $C^0_{\lambda,k}$ по $\lambda \in \mathbf{C}$.

4. Будем рассматривать граничные задачи вида

$$\alpha * u|_{\partial K} - \beta * u'_\nu|_{\partial K} = 0, \tag{12}$$

где $\alpha = \Sigma \alpha_k e^{ik\tau}$; $\beta = \Sigma \beta_k e^{ik\tau}$ — ряды Фурье со свойствами $\exists \gamma > 0$, $\forall k : \beta_k \neq 0$, $|k\alpha_k/\beta_k| < \gamma$, $|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = 1$, $*$ — свертка на $\partial K : \alpha * \psi = \Sigma \alpha_k \psi_k e^{ik\tau}$. Условие (12) для коэффициентов Фурье запишется в виде

$$\forall k \in \boldsymbol{Z},\ \alpha_k a_k + \beta_k b_k = 0. \tag{13}$$

Обозначим через C_k образ вложения $i_k : \mathbf{C}^2 \to C$, действующего по правилу $i_k : (a, b) \to (ae^{ik\tau}, be^{ik\tau})$. Граничная задача (12) задает подпространство B пространства C, которое ввиду (13) пересекает C_k по прямой $B_k = B \cap C_k$. Аналогично из формулы (10) находим, что пространство $C^0_{\lambda,k}$ одномерно. Корректность задачи (12), т. е. разложение в прямую сумму $C = B \oplus C^0_\lambda$, означает теперь, что

$$\exists A > 0,\ \forall k \in \boldsymbol{Z},\ |\sin(\widehat{B_k, C^0_{\lambda,k}})| > A. \tag{14}$$

Условие (14) запишем в виде

$$\forall k, \frac{|\beta_k \lambda J'_k(\lambda) - \alpha_k J_k(\lambda)|}{\sqrt{|\lambda J'_k(\lambda)|^2 + |J_k(\lambda)|^2}} > A > 0 \text{ при } \lambda \neq 0 \text{ и } \frac{|\beta_k - k\alpha_k|}{\sqrt{1+k^2}} > A > 0$$

при $\lambda = 0$ или с учетом асимптотики по k $J_k(\lambda) \sim \lambda^k/k!$ имеем

$$\exists A_1 > 0,\ \forall k, |\beta_k j^1_k(\lambda) - k\alpha_k j^2_k(\lambda)| > A_1, \tag{15}$$

где $j^1_k = (k-1)!\, J'_k(\lambda)/\lambda^{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$; $j^2_k(\lambda) = k!\, J_k(\lambda)/\lambda^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ при $\lambda \neq 0$ и $j^1_k(0) = j^2_k(0) = 1$.

Нетрудно видеть, что условие (15) эквивалентно следующему условию:

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \mu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon],\ \forall k,\ |\beta_k j^1_k(\mu) - k\alpha_k j^2_k(\mu)| \neq 0$$

или окончательно

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \mu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon],\ \forall k,\ |\beta_k \mu J'_k(\mu) - k\alpha_k J_k(\mu)| \neq 0 \text{ при } \mu \neq 0 \tag{16}$$

и $|\beta_k - k\alpha_k| \neq 0$ при $\mu = 0$.

Доказано

Предложение 9. Задача (12) для уравнения $\Delta u + \lambda^2 u = g$ корректна тогда и только тогда, когда выполнено условие (16).

Рассмотрим теперь случай нарушения условия корректности (16). Ясно, что с изменением λ условие (16) нарушается. Это происходит при λ, являющемся корнем уравнения

$$\beta_k \lambda J'_k(\lambda) - \alpha_k J_k(\lambda) = 0 \text{ при } \lambda \neq 0,\ \beta_k - k\alpha_k = 0 \text{ при } \lambda = 0. \tag{17}$$

Если σ_k — множество нулей в $\mathbf{C}$ уравнения (17), то находим, что спектр $\sigma(\Delta_B) \subset \overline{\bigcup_k \sigma_k}$. Наоборот, каждый нуль уравнения (17) является собственным значением оператора Δ_B с собственным вектором $u_{\lambda,k}$, существующим по предложению 6 и порожденным набором L-следов: $L_0 u_{\lambda,k} = u_{\lambda,k}|_{\partial K} = \alpha_k e^{ik\tau}$, $L_1 u_{\lambda,k} = -(u_{\lambda,k})'_\nu|_{\partial K} = \beta_k e^{ik\tau}$. Итак, $\bigcup_k \sigma_k$ состоит из собственных значений, а в силу замкнутости спектра получим $\sigma(\Delta_B) \supset \overline{\bigcup_k \sigma_k}$.

Доказано

Предложение 10. Спектр оператора корректной граничной задачи (12) для уравнения $\Delta u = g$ есть $\bigcup\limits_k \sigma_k$, где σ_k — множество собственных значений, являющихся нулями уравнения (17). Он не менее чем счетен.

Из результатов [12, с. 531] (см. также [11]) следует

Предложение 11. Пусть граничная задача (12) C — вещественна, т. е. коэффициенты $\alpha_k, \beta_k \in \in \mathbf{R}$. Спектр $\sigma(\Delta_B)$ вещественен тогда и только тогда, когда при $k > 0$ $-\alpha_k/\beta_k + k > 0$ и $\alpha_{-k}/\beta_{-k} + k > 0$.

Пусть теперь задача (12) вещественна, т. е. вещественны функции α и β: $\alpha_n = \overline{\alpha_{-n}}$, $\beta_n = \overline{\beta_{-n}}$, и пусть оператор Δ_B, ею порожденный, самосопряжен. Отсюда легко заключить, что для каждого k либо $J_k(\lambda) = 0$, либо $\lambda J'_k(\lambda) = 0$. Поэтому каждая такая задача порождает множество $M \subset \mathbf{Z}$ такое, что ее спектр $\sigma(\Delta_B) \subset \sigma^1 \cup \sigma^2$, где $\sigma^1 = \bigcup\limits_{k \in M} \sigma^1_k$; $\sigma^2 = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z} \setminus M} \sigma^2_k$; σ^1_k — нули функции $J_k(\lambda)$; σ^2_k — нули функции $\lambda J'_k(\lambda)$, а их конечное число на каждом конечном интервале. Поэтому обратный оператор Δ_B^{-1} вполне непрерывен.

Предложение 12. Самосопряженный оператор корректной граничной задачи (12) с вещественными функциями α и β имеет вполне непрерывный обратный.

1. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.— М. : ИЛ, 1959.— 131 с.
2. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов.— М. : Мир, 1972.— 259 с.
3. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач.— М. : Наука, 1980.— 208 с.
4. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 543 с.
5. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1952.— № 1.— С. 187—246.
6. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М. : Мир, 1965.— 380 с.
7. *Бурский В. П.* Гармонический анализ в краевых задачах для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 12.— С. 7—10.
8. *Бурский В. П.* Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 2.— С. 22—29.
9. *Бурский В. П.* Некоторые результаты о единственности решения краевых задач для уравнений с постоянными коэффициентами // Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики.— Донецк : ИПММ АН УССР, 1986.— С. 24.
10. *Grubb G.* A characterisation on the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator //Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa.— 1968.— 22.— P. 425—523.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.— М. : Наука, 1977.— 196 с.
12. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций.— М. : ИЛ, 1949.— Т. 1.— 220 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 17.09.87