

УДК 533.6.013.42

©2011. Н.К. Дидок

ЗАДАЧА Л.Н. СРЕТЕНСКОГО ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА С УПРУГИМ ДНОМ И ЖИДКОСТЬЮ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрена задача о поперечных колебаниях цилиндрического сосуда с упругим плоским дном и жидкостью со свободной поверхностью. Проведен анализ присоединенной массы жидкости и влияния упругости дна на устойчивость движения твердого тела.

Ключевые слова: *гидроупругость, твёрдое тело, устойчивость, модальный анализ, частотное уравнение.*

1. Введение. В 1951 году Л.Н. Сретенский рассмотрел задачу о плоских колебаниях прямоугольного сосуда с идеальной жидкостью, под действием упругой силы [1]. Чуть позже в более общей постановке рассмотрел аналогичную задачу Н.Н. Моисеев [2]. По-видимому, эти работы были первыми публикациями по динамике тела с жидкостью в предположении, что жидкость тяжёлая и имеет свободную поверхность. При исследовании частотного уравнения Л.Н. Сретенский в статье [1] сделал вывод о возможности развивающихся колебаний твёрдого тела и жидкости. Н.Н. Моисеев в работе [2] показал ошибочность данного утверждения. В связи с тем, что Л.Н. Сретенский был первым, кто поставил и исследовал задачу о колебании открытого сосуда с жидкостью под действием упругой силы, в литературе эту задачу часто называют задачей Л.Н. Сретенского. Некоторые обобщения задачи Л.Н. Сретенского сделал Г.К. Пожарицкий [3]. Он показал, что в случае, когда на твёрдое тело наложены связи, допускающие только поступательные перемещения тела из положения равновесия, то если потенциальная энергия затвердевшей системы имеет минимум в положении равновесия, то равновесие будет устойчиво [3]. Дальнейшее развитие задача Л.Н. Сретенского получила в работах Ю.Н. Кононова, который провёл обобщение этой задачи на случай многослойной идеальной жидкости и многослойной жидкости, разделённой упругими пластинами в цилиндрическом сосуде с абсолютно жёстким дном [4].

В данной работе на основе модального анализа задача Л.Н. Сретенского обобщается на случай, когда цилиндрический сосуд с идеальной жидкостью имеет упругое основание. Собственные и вынужденные осесимметричные колебания упругого дна прямого кругового цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью были рассмотрены в работах М.П. Петренко [5, 6]. В статье [7] на основе подхода Л.В. Докучаева результаты [5] были обобщены на случай цилиндрического сосуда произвольного поперечного сечения. С позиций функционального анализа эта задача рассмотрена в монографии Н.Д. Копачевского, С.Г. Крейна, Нго Зуй Кана [8]. В работе [9] представлены экспериментальные исследования динамических процессов в жёстком цилиндрическом сосуде с упругим днищем, частично заполненным

жидкостью.

2. Постановка задачи. Рассматривается механическая система в виде цилиндрического сосуда произвольного поперечного сечения Ω , заполненного идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ (рис.1). Боковая стенка сосуда предполагается абсолютно твёрдой, а днище представляет собой жестко заземленную по контуру γ упругую изотропную пластину с изгибной жесткостью D и подверженную растягивающему усилию T в срединной поверхности. Объем, занимаемый жидкостью в невозмущенном состоянии, обозначим через V .

Рассмотрим в линейной постановке поперечные колебания данной механической системы под действием упругой силы. Движение жидкости будем предполагать потенциальным, а совместные колебания жидкости и днища – безотрывными. Предварительное натяжение и жесткость пластины будем считать достаточно большими. При отсутствии предварительного натяжения ($T = 0$) в монографии [8] получены условия на величину изгибной жёсткости, при которых существует решение задачи на собственные колебания.

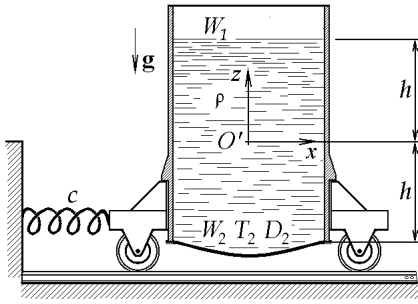


Рис. 1. Рассматриваемая механическая система

Введем неинерциальную систему координат $O'xyz$, жестко связанную с цилиндром. Ось $O'z$ направим вдоль образующей боковой поверхности цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$, а плоскость $O'xy$ расположим посередине между днищем и свободной поверхностью жидкости (ось $O'y$ перпендикулярна плоскости чертежа и на рисунке не обозначена). Для исследования поперечных колебаний цилиндрического сосуда введем неподвижную систему координат $OXYZ$, совпадающую в положении равновесия с $O'xyz$. Будем считать, что механическая система может двигаться только вдоль оси OX . Этого всегда можно добиться, накладывая на систему дополнительные связи (например, располагая сосуд с жидкостью на тележке, движущейся по рельсам). Перемещения по оси OX обозначим через X .

3. Вывод основных уравнений. Полная система уравнений относительных движений жидкости и упругой пластины имеет вид [8, 10]

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\rho g W_1 = -\rho \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=h} + \tilde{Q} - \rho x \ddot{X}, \quad (2)$$

$$\chi_0 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D \Delta_2^2 W_2 - T \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = \rho \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=-h} + 2\rho g h - \tilde{Q} + \rho x \ddot{X}, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (5)$$

$$W_2|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_2}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} W_1 d\Omega = \int_{\Omega} W_2 d\Omega, \quad (7)$$

$$W_l < \infty, \quad \nabla W_l < \infty. \quad (8)$$

Здесь W_1 и W_2 – возмущение свободной поверхности и нормальный прогиб днища, соответственно; Σ – боковая поверхность цилиндрического сосуда; ν – внешняя нормаль к Σ ; $\chi_0 = \rho_0 \delta_0$; ρ_0 и δ_0 – соответственно толщина и плотность материала пластины; Δ_2 – двумерный оператор Лапласа (по переменным x и y); $\tilde{Q}$ – произвольная функция времени.

Из теоремы об изменении количества движения системы получим следующее уравнение, описывающее движение сосуда с жидкостью вдоль оси OX

$$M\ddot{X} + \rho \int_V \frac{dv_x}{dt} dV = -cX, \quad (9)$$

где $M = M_1 + M_2$, M_1 – масса твердого тела и упругой пластины, M_2 – масса жидкости, c – коэффициент жесткости пружины. Под интегралом в формуле (9) стоит проекция на ось OX полной производной скоростей жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$ по времени, которая в переменных Эйлера имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (10)$$

Поскольку в линейной постановке функция $\mathbf{v}$ и её частные производные по всем переменным считаются бесконечно малыми первого порядка, то величиной конвективной составляющей $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ в выражении (10) можно пренебречь, как бесконечно малой более высокого порядка, чем $\partial \mathbf{v} / \partial t$. Отсюда следует, что в линейном приближении полную производную скорости по времени (10) можно отождествлять с частной (локальной).

В уравнении (3) функция W_2 представляет собой сумму статического и динамического прогибов днища. Статический прогиб определяется из краевой задачи

$$D\Delta_2^2 W_2 - T\Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = 2\rho g h$$

с граничными условиями (6).

Далее будем рассматривать динамическую часть уравнения (3) и под W_2 понимать только динамическую компоненту прогиба.

Общее решение уравнения (1), ограниченное в объёме V и удовлетворяющее граничному условию непротекания (4), для цилиндрической полости имеет вид [10]

$$\varphi(t, x, y, z) = a_0 + a_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z} \right] \psi_n(x, y), \quad (11)$$

где a_0 , a_1 , A_n и B_n – некоторые функции времени; $\psi_n(x, y)$ и k_n – собственные функции и соответствующие им собственные числа краевой задачи о колебании идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде с жёсткой боковой поверхностью

$$\Delta_2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \text{в области} \quad \Omega, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = 0. \quad (13)$$

Функции $\psi_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) вместе с константой образуют полную ортогональную систему на множестве функций из L_2 , удовлетворяющих условию (13) [11]. Это позволяет представить функцию W_1 в виде следующего разложения в обобщенный ряд Фурье

$$W_1 = W_{10}(t) + \sum_n W_{1n}(t) \psi_n(x, y). \quad (14)$$

Здесь

$$W_{10}(t) = \frac{1}{S} \int_{\Omega} W_1 d\Omega, \quad W_{1n}(t) = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} W_1 \psi_n d\Omega, \\ S = \text{mes } \Omega, \quad N_n^2 = \int_{\Omega} \psi_n^2 d\Omega.$$

Подставив разложение (11), (14) в (5) и воспользовавшись ортогональностью функций ψ_n , получим

$$a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\varkappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{-\varkappa_n/2}}{2k_n \sinh \varkappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\varkappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{\varkappa_n/2}}{2k_n \sinh \varkappa_n}, \quad (15)$$

где

$$W_{20}(t) = \frac{1}{S} \int_{\Omega} W_2 d\Omega, \quad W_{2n}(t) = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} W_2 \psi_n d\Omega, \quad \varkappa_n = 2k_n h.$$

Используя выражения (15), уравнения движения (2) и (3) можно привести к виду

$$\begin{cases} \rho g W_1 = -\rho h \ddot{W}_{20} + \rho \sum_n \frac{\ddot{W}_{2n} - \cosh \varkappa_n \ddot{W}_{1n}}{k_n \sinh \varkappa_n} \psi_n + Q^* - \rho x \ddot{X}, \\ \chi_0 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D \Delta_2^2 W_2 - T \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = \\ = -\rho h \ddot{W}_{20} + \rho \sum_n \frac{\ddot{W}_{1n} - \cosh \varkappa_n \ddot{W}_{2n}}{k_n \sinh \varkappa_n} \psi_n - Q^* + \rho x \ddot{X}, \end{cases} \quad (16)$$

Из (11) следует соотношение

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \sum_n \left(\dot{A}_n e^{k_n z} + \dot{B}_n e^{-k_n z} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x},$$

с учётом которого уравнение (9) примет вид

$$M \ddot{X} + \rho \sum_n C_n \left(\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n} \right) = -cX, \quad (17)$$

здесь $C_n = \frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega$, $Q^* = \tilde{Q} - \rho \dot{a}_0$.

4. Метод решения. Система (16) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций W_1 и W_2 . Введем векторную функцию $W = (W_1; W_2)$ и представим систему (16) в виде обобщенного волнового уравнения [12]

$$A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + CW = f. \quad (18)$$

Здесь A и C , соответственно, инерционный и упругий операторы, включающие в себя не только дифференциальные уравнения, но и граничные условия (5)–(8) (через область определения этих операторов):

$$A = \begin{pmatrix} \sum_n c_n \psi_n F_n & \rho h F_0 - \sum_n b_n \psi_n F_n \\ -\sum_n b_n \psi_n F_n & \chi_0 + \rho h F_0 + \sum_n c_n \psi_n F_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \rho g & 0 \\ 0 & D \Delta_2^2 - T \Delta_2 - \rho g \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} -\rho x \ddot{X} \\ \rho x \ddot{X} \end{pmatrix}, \quad F_0[W_l] = \frac{1}{S} \int_{\Omega} W_l d\Omega, \quad F_n[W_l] = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} W_l \psi_n d\Omega,$$

$$b_n = \frac{\rho}{k_n \sinh \varkappa_n}, \quad c_n = \frac{\rho}{k_n \tanh \varkappa_n}.$$

Для определенных в области Ω двумерных векторных функций u и v введем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{\Omega} u_1 v_1 d\Omega + \int_{\Omega} u_2 v_2 d\Omega.$$

Краевые задачи для консервативных механических систем всегда описываются самосопряженными операторами [13]. В этом случае, когда оператор C самосопряжен, оператор A положительно определен, все собственные числа ω_k^2 соответствующего (18) однородного уравнения действительны и изолированы, а его собственные функции w_k попарно ортогональны по кинетической и потенциальной энергиям

$$(Aw_j, w_k) = 0 \quad (Cw_j, w_k) = 0 \quad j \neq k. \quad (19)$$

Если же $j = k$, то

$$(Cw_k, w_k) = \omega_k^2 (Aw_k, w_k). \quad (20)$$

Собственные формы совместных колебаний пластин и жидкости w_k образуют полный базис, т.е. любую функцию W , квадратично интегрируемую, удовлетворяющую краевым условиям (5)–(8) и такую, что CW существует почти всюду на Ω , можно представить в виде ряда

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) w_k, \quad (21)$$

сходящегося, во всяком случае, по энергетической норме или в среднем [12, 13].

Модальный анализ заключается в том, что решение неоднородного уравнения (18) ищется в виде разложения в ряд (21) по собственным формам $w_k = (w_{1k}; w_{2k})$.

Собственные формы колебаний днища и свободной поверхности (соответствующие k -й собственной частоте ω_k) получим по методике, изложенной в статье [7]:

$$w_{1,k} = \sum_{i=1}^2 A_i \left\{ \frac{q\omega_k^2 h \zeta_{ik0}^0}{g(q + \rho\omega_k^2 h)} + \sum_n \frac{\omega_k^2 d_n \zeta_{ikn}^0}{(d_n - \tau_n)(\omega_k^2 - \tilde{\omega}_n^2) \cosh \kappa_n} \psi_n \right\} + \frac{q_2 + 2\rho\omega_k^2 h}{\rho g(q_2 + \rho\omega_k^2 h)} Q,$$

$$w_{2,k} = \sum_{i=1}^2 A_i \left\{ w_i^0 - \frac{\rho\omega_k^2 h \zeta_{i0}^0}{q + \rho\omega_k^2 h} + \sum_n \frac{\tau_n \zeta_{in}^0}{(d_n - \tau_n)} \psi_n \right\} + \frac{Q}{q + \rho\omega_k^2 h},$$

где $q = \chi_0 \omega_k^2 + \rho g$, $\tau_n = \frac{\rho\omega_k^2 \tanh \kappa_n}{k_n} \cdot \frac{\omega_k^2 - \tilde{\omega}_n^2 \coth \kappa_n}{\omega_k^2 - \tilde{\omega}_n^2}$, $d_n = (Dk_n^2 + T) k_n^2 - q$, $\zeta_{ik0}^0 = F_0[w_i^0]$, $\zeta_{ikn}^0 = F_n[w_i^0]$; функции w_i^0 представляют собой ограниченные независимые решения однородного уравнения $D\Delta_2^2 w_i^0 - T\Delta_2 w_i^0 - q w_i^0 = 0$, а неизвестные константы A_1 , A_2 и Q с точностью до постоянного множителя определяются из следующей системы линейных уравнений [7]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ Q \end{pmatrix} = 0, \quad (22)$$

в которой

$$a_{1i} = w_i^0|_{\gamma} - \frac{q\omega_k^2 h \zeta_{ik0}^0}{q + \rho\omega_k^2 h} + \sum_n \frac{\tau_n \zeta_{ikn}^0}{(d_n - \tau_n)} \psi_n|_{\gamma}, \quad a_{2i} = \frac{\partial w_i^0}{\partial \nu}|_{\gamma}, \quad a_{3i} = \frac{q(g - \omega_k^2 h)}{g(q + \rho\omega_k^2 h)} \zeta_{ik0}^0,$$

$$a_{13} = \frac{1}{q + \rho\omega_k^2 h}, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = \frac{\rho(g - \omega_k^2 h) - (q + \rho\omega_k^2 h)}{g(q + \rho\omega_k^2 h)} \quad (i = \overline{1, 2}).$$

Из равенства нулю определителя однородной системы линейных уравнений (22) следует частотное уравнение для ω_k . Далее собственные формы и частоты будем считать известными.

Подставляя разложение (21) в уравнение (18), умножая левую и правую части этого уравнения на w_k и интегрируя по области Ω с учетом (19) и (20), получаем счетную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для обобщенной координаты p_k , характеризующей деформацию днища и возмущение свободной поверхности при возбуждении k -го тона колебаний

$$\mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_k = (Aw_k, w_k) = \rho h S \zeta_{1k0}^2 + (\chi_0 + \rho h) S \zeta_{2k0}^2 + \\ + \sum_{l=1}^2 N_n^2 [(\chi_0 + c_n) \zeta_{2kn}^2 + c_n \zeta_{1kn}^2 - 2b_n \zeta_{1kn} \zeta_{2kn}], \end{aligned}$$

$$\zeta_{lk0} = F_0[w_{lk}], \quad \zeta_{lkn} = F_n[w_{lk}], \quad f_k = (f, w_k) = \tilde{\alpha}_k \ddot{X},$$

$$\tilde{\alpha}_k = \rho \int_{\Omega} (w_{2k} - w_{1k}) x d\Omega = \rho \sum_n C_n (\zeta_{2kn} - \zeta_{1kn}).$$

Последнее равенство вытекает из равенства $C_n = \frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_n x d\Omega$, которое является непосредственным следствием первой формулы Грина, применяемой к функциям ψ_n , удовлетворяющим краевой задаче (12), (13).

Для того, чтобы система (23) стала замкнутой, необходимо ещё уравнение для поперечного перемещения сосуда X , которое получим из уравнения (17). Для этого присутствующие в (17) коэффициенты $\ddot{W}_{ln}$ преобразуем с учетом разложения функций W_l в ряд по собственным формам (21). В итоге получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = \tilde{\alpha}_k \ddot{X}, \\ M \ddot{X} + cX = \sum_k \tilde{\alpha}_k \ddot{p}_k. \end{cases} \quad (24)$$

Разрешив систему (24) относительно $\ddot{p}_k$, получим

$$(M_1 + M_{2x}) \ddot{X} + cX = - \sum_k \tilde{\alpha}_k \omega_k^2 p_k,$$

где через

$$M_{2x} = M_2 - \sum_k \frac{\tilde{\alpha}_k^2}{\mu_k} \quad (25)$$

обозначена присоединенная масса жидкости при движении сосуда вдоль оси OX . Через $\tilde{M}$ обозначим сумму в правой части равенства (25). Поскольку $\mu_k > 0$, то $M_{2x} \leq M_2$. В случае абсолютно жесткого основания $\tilde{M} = \rho \sum_k \frac{C_n^2 k_n \tanh \kappa_n}{N_n^2}$. Если собственные функции ψ_n оказываются ортогональными x ($C_n \equiv 0$), имеет место равенство $M_{2x} = M_2$. В этом случае, как следует из первого уравнения (24), собственные частоты системы будут совпадать с собственными частотами колебаний жидкости и упругого основания в неподвижном сосуде. Соответствующие этим частотам главные колебания не могут возбуждаться движением твердого тела и не оказывают на него влияния. При поступательном движении – это те колебания, которые не изменяют положения центра масс механической системы. Например, если сосуд является прямоугольным параллелепипедом, и упругая сила действует вдоль одной из сторон параллелепипеда, то возбуждаются только упругие колебания пластинки и свободной поверхности, несимметричные относительно соответствующей плоскости симметрии сосуда. Если сосуд осесимметричный (прямой круговой или коаксиальный цилиндр), то возбуждаются только одноузловые несимметричные колебания [10, 14].

5. Частотное уравнение. Положив в (24) $X = X_0 e^{i\sigma t}$, $p_k = p_{k0} e^{i\sigma t}$ и $x = \sigma^2$, получим следующее уравнение для частот σ поперечных колебаний системы

$$Mx - c = x^2 \sum_k \frac{\tilde{\alpha}_k^2}{\mu_k (x - \omega_k^2)}. \quad (26)$$

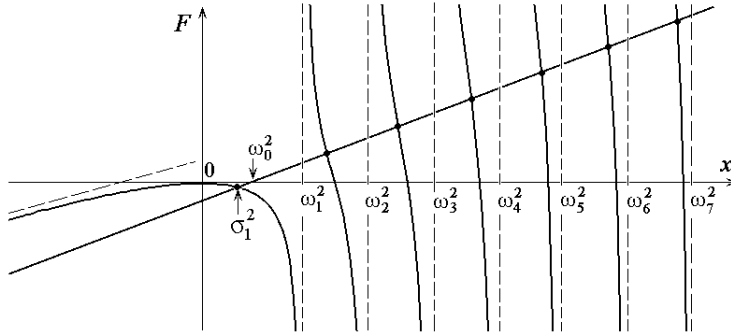


Рис. 2. Графики левой и правой частей уравнения (26)

Полученное частотное уравнение позволяет провести аналитические и численные исследования частотного спектра, в зависимости от глубины заполнения жидкости, её плотности, упругих параметров пластины, и устойчивости положения равновесия.

Представив левую и правую части уравнения (26), соответственно, как функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (рис.2), проведем графическое исследование этого уравнения [14].

Штриховой линией на рисунке обозначены асимптоты кривой $F = F_2(x)$. Из приведенного рисунка видно, что высокие частоты колебаний системы σ_k^2 весьма близки к собственным частотам колебаний свободной поверхности жидкости и упругой пластинки в неподвижном сосуде ω_k^2 .

Как было отмечено ранее [2, 3], наличие свободной поверхности не нарушает устойчивость положения равновесия. Покажем, что влияние упругости основания цилиндра совместно со свободной поверхностью также не приведет к потере устойчивости.

В случае затвердевшей жидкости ($\tilde{\alpha}_k^2 = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$) уравнение (26) имеет единственное решение $\sigma^2 = \omega_0^2 = c/M$. Из рис.2 следует, что наличие свободной поверхности жидкости и упругости днища ($\tilde{\alpha}_k^2 \neq 0$) может только уменьшить запас устойчивости, так как сдвигает корни влево. Наибольший интерес представляет вопрос о возможности пересечения графиков функций $F = F_1(x)$ и $F = F_2(x)$ в левой полуплоскости, что будет соответствовать неустойчивости положения равновесия. Чтобы показать, что графики не пересекаются в левой полуплоскости, заметим, что прямая $F = F_1(x)$ имеет тангенс угла наклона равный полной массе системы M , а функция $F = F_2(x)$ монотонна при $x < 0$ и имеет наклонную асимптоту с тангенсом угла наклона $\tilde{M}$. Так как $F_1(0) = -c < 0 = F_2(0)$ и $\tilde{M} \leq M_2 < M$, то графики функций $F = F_1(x)$ и $F = F_2(x)$ в левой полуплоскости не пересекаются.

Таким образом, упругость днища совместно со свободной поверхностью в рамках необходимых условий не приводит к потере устойчивости положения равновесия данной механической системы.

1. Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. – 1951. – № 10. – С. 1483-1494.
2. Моисеев Н.Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // Докл. АН СССР. – 1952. – **85**, №4. – С. 719-722.
3. Пожарицкий Г.К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, вып.4. – С. 593-605.
4. Кононов Ю.Н. Про стійкість і стабілізацію руху твердого тіла та системи зв'язаних твердих тіл з порожнинами, які містять багатошарову рідину та пружні включення: Автореф. дис... докт. фіз.-мат. наук: 01.02.01/ПММ НАНУ. – Донецьк, 2006. – 14 с.
5. Петренко М.П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикл. механика. – 1969. – Т. 5, № 6. – С. 44-50.
6. Петренко М.П. Вынужденные колебания жидкости и упругого днища // Прикл. механика. – 1969. – Т. 6, № 6. – С. 127-131.
7. Карнаух А.Ю., Дидок Н.К. Собственные формы совместных колебаний упругого дна и жидкости со свободной поверхностью // Тр. Ин-та прикл. матем. и мех. НАНУ. – 2010. – Т. 20. – С. 102-109.
8. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. – 416 с.
9. Лакиза В.Д. Исследование динамических процессов в жестком цилиндрическом сосуде с упругим дном, частично заполненным жидкостью // ПМ. – 2006. – Т. 42. – №11. – С. 102-109.
10. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966. – 270 с.
11. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.

12. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
13. Михлин С.Г. Вариационные методы математической физики. М.: Наука, 1970. – 512 с.
14. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 439 с.

N. C. Didok

Transverse oscillations of cylindrical vessel with flat elastic bottom and a liquid with a free surface.

The problem about transverse oscillation of cylindrical vessel with flat elastic bottom and a liquid with free surface is considered. The analysis of added mass of liquid and influence of bottom elasticity on stability of rigid body movement carried out.

Keywords: *hydro-elasticity, rigid body, stability, modal analysis, frequency equation.*

М. К. Дідок

Поперечні коливання циліндра з пружним дном та рідиною із вільною поверхнею.

Розглянуто задачу про поперечні коливання циліндричної посудини з плоским пружним дном та рідиною з вільною поверхнею. Проведено аналіз приєднаної маси рідини та впливу пружності дна на стійкість руху твердого тіла.

Ключові слова: *гідропружність, тверде тіло, стійкість, модальний аналіз, частотне рівняння.*

Донецкий национальный ун-т
nick_di@rambler.ru

Получено 05.05.11