

УДК 512.579

©2011. А.В. Жучок

ДІМОНОЇДИ З ІДЕМПОТЕНТНОЮ ОПЕРАЦІЄЮ

У роботі доведено кілька структурних теорем для дімоноїдів з ідемпотентною операцією.

Ключові слова: дімоноїд з ідемпотентною операцією, напівгрупа ідемпотентів, конгруенція, дісполука піддімоноїдів.

1. Вступ. Відомо, що універсальна обгортуюча алгебра алгебри Лі має структуру асоціативної алгебри. У 1993 році Ж.-Л. Лоде ввів поняття алгебри Лейбница [1], яке узагальнює поняття алгебри Лі, та показав, що зв'язок між алгебрами Лі та асоціативними алгебрами є аналогічним зв'язку між алгебрами Лейбница та так званими діалгебрами [2], які узагальнюють асоціативні алгебри. Зокрема, Ж.-Л. Лоде встановив, що будь-яка діалгебра стає алгеброю Лейбница, якщо на ній ввести дужки Лейбница за правилом $[x, y] = x \prec y - y \succ x$, та універсальна обгортуюча алгебра алгебри Лейбница має структуру діалгебри.

З іншого боку, діалгебра є лінійним аналогом поняття дімоноїда [2], введеного Ж.-Л. Лоде для вивчення властивостей алгебр Лейбница. Одним з перших результатів про дімоноїди є опис вільного дімоноїда на заданій множині [2]. За допомогою вільних дімоноїдів Ж.-Л. Лоде дав опис вільної діалгебри [2]. Структуру комутативних дімоноїдів та ідемпотентних дімоноїдів було описано в термінах дісполук піддімоноїдів у [3] та, відповідно, [4]. Вільні комутативні дімоноїди було побудовано в [5]. У [6] автор описав будову довільної дісполуки піддімоноїдів. У [7] доведено, що вільний дімоноїд є напівструктурою s -простих піддімоноїдів, кожен із яких є прямокутною сполукою піддімоноїдів.

У цій роботі продовжено вивчення структурних властивостей дімоноїдів за допомогою дісполук піддімоноїдів, розпочате в [3] (див. також [4], [6], [7]). Для дімоноїдів з ідемпотентною операцією отримано кілька структурних теорем. Основні результати цієї роботи узагальнюють деякі результати [8].

2. Основні поняття. Множина D з визначеними на ній бінарними операціями $\prec$ і $\succ$, які задовольняють аксіоми:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. У випадку, коли операції дімоноїда збігаються, він перетворюється у напівгрупу. Приклади дімоноїдів можна знайти в [2]–[7].

Відображення f дімоноїда D_1 у дімоноїд D_2 називається гомоморфізмом, якщо

$$(x \prec y)f = xf \prec yf, \quad (x \succ y)f = xf \succ yf$$

для всіх $x, y \in D_1$. Якщо $f : D_1 \rightarrow D_2$ – гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_f позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді D_1 .

Дімоноїд $(D, \prec, \succ)$ називається дімоноїдом ідемпотентів або дісполукою, якщо $x \prec x = x = x \succ x$ для всіх $x \in D$.

Поняття дісполуки піддімоноїдів було введено в [3] та охарактеризовано в [6]. Нагадаємо його означення.

Нехай S – довільний дімоноїд, J – деякий дімоноїд ідемпотентів. Якщо існує гомоморфізм

$$\alpha : S \rightarrow J : x \mapsto x\alpha,$$

то кожний клас конгруенції Δ_α є піддімоноїдом дімоноїда S , а сам дімоноїд S є об'єднанням таких дімоноїдів S_ξ , $\xi \in J$, що

$$\begin{aligned} x\alpha = \xi &\Leftrightarrow x \in S_\xi = \{t \in S \mid (x; t) \in \Delta_\alpha\}, \\ S_\xi \prec S_\varepsilon &\subseteq S_{\xi \prec \varepsilon}, \quad S_\xi \succ S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \succ \varepsilon}, \\ \xi \neq \varepsilon &\Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \emptyset. \end{aligned}$$

У цьому випадку говоритимемо, що S розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або S є дісполукою J піддімоноїдів S_ξ , $\xi \in J$). Якщо ж J є напівгрупою ідемпотентів (=сполукою), то говоритимемо, що S є сполукою J піддімоноїдів S_ξ , $\xi \in J$.

Нагадаємо (див. [8]), що напівгрупа ідемпотентів S називається

- (а) правою регулярною, якщо $ab = bab$ для всіх $a, b \in S$;
- (б) лівою регулярною, якщо $ab = aba$ для всіх $a, b \in S$;
- (в) регулярною, якщо $abca = abaca$ для всіх $a, b, c \in S$;
- (г) правою напіврегулярною, якщо $axy = axuayxu$ для всіх $a, x, y \in S$;
- (д) лівою напіврегулярною, якщо $xua = xuxaxua$ для всіх $x, y, a \in S$;
- (е) правою нормальною, якщо $yxa = xya$ для всіх $y, x, a \in S$;
- (ж) лівою нормальною, якщо $axy = ayx$ для всіх $a, x, y \in S$;
- (з) нормальною, якщо $abca = acba$ для всіх $a, b, c \in S$;
- (и) правою напівнормальною, якщо $axy = axuay$ для всіх $a, x, y \in S$;
- (й) лівою напівнормальною, якщо $xua = xaxua$ для всіх $x, y, a \in S$;
- (к) правою квазінормальною, якщо $axy = axay$ для всіх $a, x, y \in S$;
- (л) лівою квазінормальною, якщо $xua = xaxua$ для всіх $x, y, a \in S$.

3. Допоміжні леми. У цьому пункті доведено необхідні нам леми.

3.1. Напівгрупу S будемо називати прямокутною, якщо $xuz = xz$ для всіх $x, y, z \in S$. Прямокутними напівгрупами є, наприклад, прямокутні сполуки, напівгрупи з нульовим множенням.

Має місце така лема.

Лема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Якщо напівгрупа $(D, \prec)$ є напівгрупою лівих нулів, то напівгрупа $(D, \succ)$ є прямокутною.

Доведення. Для всіх $a, b, c \in D$ маємо

$$(a \prec b) \succ c = a \succ c = a \succ b \succ c = a \succ (b \succ c)$$

згідно з аксіомами дімоноїда.

Лему доведено.

Нехай $(X, \prec)$ – напівгрупа лівих нулів, $(X, \succ)$ – прямокутна напівгрупа. Дімоноїд $(X, \prec, \succ)$ назвемо $(lz; rs)$ -дімоноїдом.

3.2. Якщо ρ – така конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$, що $(D, \prec, \succ)/\rho$ є дімоноїдом ідемпотентів, то будемо говорити, що ρ – ідемпотентна конгруенція.

Визначимо відношення Σ на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ за правилом:

$$a \Sigma b \text{ тоді і тільки тоді, коли } a = a \prec b, \quad b = b \prec a.$$

У термінах дісполуки піддімоноїдів (див. п.2) має місце лема.

Лема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд з ідемпотентною операцією $\prec$. Якщо відношення Σ є конгруенцією на напівгрупі $(D, \prec)$, то Σ є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ та операції фактор-дімоноїда $(D, \prec, \succ)/\Sigma$ збігаються. У цьому випадку $(D, \prec, \succ)$ є сполукою $(lz; rs)$ -піддімоноїдів.

Доведення. Нехай Σ є конгруенцією на напівгрупі $(D, \prec)$. Покажемо, що Σ є стабільним відносно операції $\succ$.

Нехай $a \Sigma b$, $a, b, c \in D$. Тоді $a \prec c \Sigma b \prec c$. Це означає, що

$$a \prec c = (a \prec c) \prec (b \prec c), \quad (1)$$

$$b \prec c = (b \prec c) \prec (a \prec c). \quad (2)$$

Домножимо обидві частини рівності (1) на $a \succ c$ та рівності (2) на $b \succ c$, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} (a \succ c) \prec (a \prec c) &= (a \succ c) \prec (a \succ c) = \\ &= a \succ c = (a \succ c) \prec ((a \prec c) \prec (b \prec c)) = \\ &= ((a \succ c) \prec (a \prec c)) \prec (b \prec c) = \\ &= (a \succ c) \prec (b \prec c) = (a \succ c) \prec (b \succ c), \\ (b \succ c) \prec (b \prec c) &= (b \succ c) \prec (b \succ c) = \\ &= b \succ c = (b \succ c) \prec ((b \prec c) \prec (a \prec c)) = \\ &= ((b \succ c) \prec (b \prec c)) \prec (a \prec c) = \\ &= (b \succ c) \prec (a \prec c) = (b \succ c) \prec (a \succ c) \end{aligned}$$

згідно з аксіомами дімоноїда та ідемпотентністю операції $\prec$. Отже, $a \succ c \Sigma b \succ c$. Аналогічно можна показати, що $c \succ a \Sigma c \succ b$. Таким чином, Σ є конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$.

Оскільки

$$\begin{aligned} a \prec b &= (a \prec b) \prec (a \prec b) = (a \prec b) \prec (a \succ b), \\ a \succ b &= (a \succ b) \prec (a \succ b) = (a \succ b) \prec (a \prec b) \end{aligned}$$

для всіх $a, b \in D$ згідно з ідемпотентністю операції $\prec$ та аксіомами дімоноїда, то $a \prec b \Sigma a \succ b$. Звідси випливає, що операції фактор-дімоноїда $(D, \prec, \succ)/\Sigma$ збігаються. Тоді з ідемпотентності операції $\prec$ випливає ідемпотентність конгруенції Σ .

Доведемо останнє твердження леми.

Якщо Σ – конгруенція на напівгрупі $(D, \prec)$, то Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$. Тоді

$$(D, \prec, \succ) \rightarrow (D, \prec, \succ)/\Sigma : x \mapsto [x]$$

є гомоморфізмом ($[x]$ – клас конгруенції Σ , який містить x). З означення Σ випливає, що кожний клас A конгруенції Σ є напівгрупою лівих нулів відносно операції $\prec$. Звідси згідно з лемою п.3.1 A є прямокутною напівгрупою відносно операції $\succ$. Таким чином, A – $(lz; rs)$ -піддімоноїд дімоноїда $(D, \prec, \succ)$.

Лему доведено.

3.3. Має місце така лема.

Лема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Якщо напівгрупа $(D, \succ)$ є напівгрупою правих нулів, то напівгрупа $(D, \prec)$ є прямокутною.

Доведення. Для всіх $a, b, c \in D$ маємо

$$a \prec (b \succ c) = a \prec c = a \prec b \prec c = (a \prec b) \prec c$$

згідно з аксіомами дімоноїда.

Лему доведено.

Нехай $(X, \prec)$ – прямокутна напівгрупа, $(X, \succ)$ – напівгрупа правих нулів. Дімоноїд $(X, \prec, \succ)$ назовемо $(rs; rz)$ -дімоноїдом.

3.4. Визначимо відношення Ω на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\succ$ за правилом:

$$a\Omega b \text{ тоді і тільки тоді, коли } a = b \succ a, \quad b = a \succ b.$$

У термінах дісполуки піддімоноїдів (див. п.2) має місце лема.

Лема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд з ідемпотентною операцією $\succ$. Якщо відношення Ω є конгруенцією на напівгрупі $(D, \succ)$, то Ω є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ та операції фактор-дімоноїда $(D, \prec, \succ)/\Omega$ збігаються. У цьому випадку $(D, \prec, \succ)$ є сполукою $(rs; rz)$ -піддімоноїдів.

Доведення. Нехай Ω є конгруенцією на напівгрупі $(D, \succ)$. Покажемо, що Ω є стабільним відносно операції $\prec$.

Нехай $a\Omega b, a, b, c \in D$. Тоді $a \succ c\Omega b \succ c$. Це означає, що

$$a \succ c = (b \succ c) \succ (a \succ c), \quad (3)$$

$$b \succ c = (a \succ c) \succ (b \succ c). \quad (4)$$

Домножимо обидві частини рівності (3) на $a \prec c$ та рівності (4) на $b \prec c$, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
 (a \succ c) \succ (a \prec c) &= (a \prec c) \succ (a \prec c) = \\
 &= a \prec c = ((b \succ c) \succ (a \succ c)) \succ (a \prec c) = \\
 &= (b \succ c) \succ ((a \succ c) \succ (a \prec c)) = \\
 &= (b \succ c) \succ (a \prec c) = (b \prec c) \succ (a \prec c), \\
 (b \succ c) \succ (b \prec c) &= (b \prec c) \succ (b \prec c) = \\
 &= b \prec c = ((a \succ c) \succ (b \succ c)) \succ (b \prec c) = \\
 &= (a \succ c) \succ ((b \succ c) \succ (b \prec c)) = \\
 &= (a \succ c) \succ (b \prec c) = (a \prec c) \succ (b \prec c)
 \end{aligned}$$

згідно з аксіомами дімоноїда та ідемпотентністю операції $\succ$. Отже, $a \prec c \Omega b \prec c$. Аналогічно можна показати, що $c \prec a \Omega c \prec b$. Таким чином, Ω є конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$.

Оскільки

$$\begin{aligned}
 a \succ b &= (a \succ b) \succ (a \succ b) = (a \prec b) \succ (a \succ b), \\
 a \prec b &= (a \prec b) \succ (a \prec b) = (a \succ b) \succ (a \prec b)
 \end{aligned}$$

для всіх $a, b \in D$ згідно з ідемпотентністю операції $\succ$ та аксіомами дімоноїда, то $a \succ b \Omega a \prec b$. Звідси випливає, що операції фактор-дімоноїда $(D, \prec, \succ)_{/\Omega}$ збігаються. Тоді з ідемпотентності операції $\succ$ випливає ідемпотентність конгруенції Ω .

Доведемо останнє твердження леми.

Якщо Ω – конгруенція на напівгрупі $(D, \succ)$, то Ω – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$. Тоді

$$(D, \prec, \succ) \rightarrow (D, \prec, \succ)_{/\Omega} : x \mapsto [x]$$

є гомоморфізмом $([x])$ – клас конгруенції Ω , який містить x). З означення Ω випливає, що кожний клас A конгруенції Ω є напівгрупою правих нулів відносно операції $\succ$. Звідси згідно з лемою п.3.3 A є прямокутною напівгрупою відносно операції $\prec$. Таким чином, A – $(rs; rz)$ -піддімоноїд дімоноїда $(D, \prec, \succ)$.

Лему доведено.

3.5. Має місце така лема.

Лема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – довільний дімоноїд, $x, a_i \in D, 1 \leq i \leq n, n \in N, n > 1$.

Тоді

- (i) $(a_n \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_1) \succ x = a_n \succ \dots \succ a_i \succ \dots \succ a_1 \succ x$;
- (ii) $x \prec (a_1 \succ \dots \succ a_i \succ \dots \succ a_n) = x \prec a_1 \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_n$.

Доведення. Доведемо (i), використовуючи індукцію за n . Для $n = 2$ маємо $(a_2 \prec a_1) \succ x = a_2 \succ a_1 \succ x$ згідно з аксіомами дімоноїда. Нехай

$$(a_k \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_1) \succ x = a_k \succ \dots \succ a_i \succ \dots \succ a_1 \succ x$$

для $n = k$. Тоді для $n = k + 1$ одержуємо

$$\begin{aligned}
 & (a_{k+1} \prec a_k \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_1) \succ x = \\
 & = (a_{k+1} \prec (a_k \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_1)) \succ x = \\
 & = a_{k+1} \succ ((a_k \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_1) \succ x) = \\
 & = a_{k+1} \succ a_k \succ \dots \succ a_i \succ \dots \succ a_1 \succ x
 \end{aligned}$$

згідно з аксіомами дімоноїда та із урахуванням зробленого припущення. Таким чином, $(a_n \prec \dots \prec a_i \prec \dots \prec a_1) \succ x = a_n \succ \dots \succ a_i \succ \dots \succ a_1 \succ x$ для всіх $n > 1$.

Аналогічно можна довести рівність (ii).

Лему доведено.

3.6. Відомо (див. [8]), що напівгрупа ідемпотентів є регулярною тоді і тільки тоді, коли вона є напіврегулярною і зліва, і справа, та напівгрупа ідемпотентів є нормальною тоді і тільки тоді, коли вона є квазінормальною і зліва, і справа.

Дімоноїд ідемпотентів $(D, \prec, \succ)$ назвемо регулярним, якщо напівгрупи $(D, \prec)$ та $(D, \succ)$ є регулярними напівгрупами ідемпотентів.

Критерій регулярності дімоноїда ідемпотентів дає така лема.

Лема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд ідемпотентів. Тоді $(D, \prec, \succ)$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec)$ є правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів та $(D, \succ)$ є лівою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів.

Доведення. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – регулярний дімоноїд ідемпотентів. Тоді з означення регулярного дімоноїда та з критерію регулярності напівгрупи ідемпотентів випливає, що $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів.

Навпаки, нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд з правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ та з лівою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \succ)$. Оскільки $(D, \prec)$ – права напіврегулярна напівгрупа ідемпотентів, то

$$a \prec x \prec y = a \prec x \prec y \prec a \prec y \prec x \prec y$$

для всіх $a, x, y \in D$. Домножимо обидві частини останньої рівності на y відносно операції $\succ$, тоді отримаємо:

$$(a \prec x \prec y) \succ y = a \succ x \succ y \succ y = a \succ x \succ y,$$

$$\begin{aligned}
 & (a \prec x \prec y \prec a \prec y \prec x \prec y) \succ y = \\
 & = a \succ x \succ y \succ a \succ y \succ x \succ y \succ y = \\
 & = a \succ x \succ y \succ a \succ y \succ x \succ y
 \end{aligned}$$

згідно з лемою п.3.5 та ідемпотентністю операції $\succ$. Отже, $(D, \succ)$ – права напіврегулярна напівгрупа ідемпотентів. Таким чином, напівгрупа ідемпотентів $(D, \succ)$ є напіврегулярною і зліва, і справа. Звідси за критерієм регулярності напівгрупи ідемпотентів $(D, \succ)$ є регулярною напівгрупою ідемпотентів.

Оскільки $(D, \succ)$ – ліва напіврегулярна напівгрупа ідемпотентів, то

$$x \succ y \succ a = x \succ y \succ x \succ a \succ x \succ y \succ a$$

для всіх $x, y, a \in D$. Домножимо обидві частини останньої рівності на x відносно операції $\prec$, тоді отримаємо:

$$x \prec (x \succ y \succ a) = x \prec x \prec y \prec a = x \prec y \prec a,$$

$$\begin{aligned} x \prec (x \succ y \succ x \succ a \succ x \succ y \succ a) &= \\ = x \prec x \prec y \prec x \prec a \prec x \prec y \prec a &= \\ = x \prec y \prec x \prec a \prec x \prec y \prec a \end{aligned}$$

згідно з лемою п.3.5 та ідемпотентністю операції $\prec$. Отже, $(D, \prec)$ є лівою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. Таким чином, напівгрупа ідемпотентів $(D, \prec)$ є напіврегулярною і справа, і зліва. Звідси за критерієм регулярності напівгрупи ідемпотентів $(D, \prec)$ є регулярною напівгрупою ідемпотентів.

Таким чином, за означенням $(D, \prec, \succ)$ – регулярний дімоноїд ідемпотентів.

Лему доведено.

4. Основні результати. У цьому пункті наведено основні результати роботи.

4.1. В умовах та позначеннях пунктів 3.1–3.4 має місце теорема.

Теорема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Відношення Σ (відповідно Ω) є ідемпотентною конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ (відповідно $\succ$) тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. У цьому випадку $(D, \prec, \succ)$ з правою (відповідно лівою) напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) регулярною сполукою $(lz; rs)$ -піддімоноїдів (відповідно $(rs; rz)$ -піддімоноїдів).

Доведення. Нехай Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$. Тоді за теоремою 1 роботи [8] $(D, \prec)$ є правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. Навпаки, нехай $(D, \prec)$ є правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. Тоді за теоремою 1 роботи [8] Σ є конгруенцією на напівгрупі ідемпотентів $(D, \prec)$. Звідси згідно з лемою п.3.2 Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$.

Нехай тепер Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$. Згідно з лемою п.3.2 операції фактордімоноїда $(D, \prec, \succ)/\Sigma$ збігаються та $(D, \prec, \succ)$ є сполукою $(D, \prec)/\Sigma$ $(lz; rs)$ -піддімоноїдів. Але в цьому випадку за теоремою 1 роботи [8] $(D, \prec)/\Sigma$ – права регулярна напівгрупа ідемпотентів. Отже, $(D, \prec, \succ)$ є правою регулярною сполукою $(lz; rs)$ -піддімоноїдів.

Аналогічно, використовуючи теорему 1 роботи [8] та лему п.3.4, можна довести двоїстий випадок.

Теорему доведено.

Ця теорема узагальнює теорему 1 роботи [8].

4.2. З теореми п.4.1, з леми п.3.6 та з критерію регулярності напівгрупи ідемпотентів (п.3.6) отримуємо наслідок.

Наслідок. Відношення Σ та Ω є конгруенціями на дімоноїді ідемпотентів $(D, \prec, \succ)$ тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec, \succ)$ – регулярний дімоноїд ідемпотентів.

Цей наслідок узагальнює першу частину наслідку теореми 1 роботи [8].

4.3. З теореми п.4.1 та з критерію регулярності напівгрупи ідемпотентів отримуємо наслідок.

Наслідок. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Тоді $(D, \prec, \succ)$ з регулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) регулярною сполукою $(lz; rs)$ -піддімоноїдів (відповідно $(rs; rz)$ -піддімоноїдів).

4.4. В умовах та позначеннях пунктів 3.1–3.4 має місце теорема.

Теорема. $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Відношення Σ (відповідно Ω) є ідемпотентною конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ (відповідно $\succ$) і $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ (відповідно $\succ$) є правою (відповідно лівою) нормальною сполукою $(D, \prec)/\Sigma$ (відповідно $(D, \succ)/\Omega$) $(lz; rs)$ -піддімоноїдів (відповідно $(rs; rz)$ -піддімоноїдів) тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) напівнормальною напівгрупою ідемпотентів.

Доведення. Нехай Σ є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ і $(D, \prec, \succ)$ є правою нормальною сполукою $(D, \prec)/\Sigma$ $(lz; rs)$ -піддімоноїдів. Тоді за теоремою 2 роботи [8] $(D, \prec)$ є правою напівнормальною напівгрупою ідемпотентів. Навпаки, нехай $(D, \prec)$ є правою напівнормальною напівгрупою ідемпотентів. Тоді за теоремою 2 роботи [8] Σ є конгруенцією на напівгрупі ідемпотентів $(D, \prec)$ і $(D, \prec)$ є правою нормальною сполукою $(D, \prec)/\Sigma$ напівгруп лівих нулів. Звідси згідно з лемою п.3.2 Σ є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ і $(D, \prec, \succ)$ є правою нормальною сполукою $(D, \prec)/\Sigma$ $(lz; rs)$ -піддімоноїдів.

Аналогічно, використовуючи теорему 2 роботи [8] та лему п.3.4, можна довести двійстий випадок.

Теорему доведено.

Ця теорема узагальнює теорему 2 роботи [8].

4.5. Має місце така теорема.

Теорема. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Тоді $(D, \prec, \succ)$ з правою (відповідно лівою) квазінормальною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) нормальною сполукою $(lz; rs)$ -піддімоноїдів (відповідно $(rs; rz)$ -піддімоноїдів).

Доведення. Згідно з теоремою 3 роботи [8] Σ – конгруенція на правій квазінормальній напівгрупі ідемпотентів $(D, \prec)$ та $(D, \prec)/\Sigma$ – права нормальна напівгрупа ідемпотентів (див. п.3.2). Тоді згідно з лемою п.3.2 $(D, \prec, \succ)$ є правою нормальною сполукою $(D, \prec)/\Sigma$ $(lz; rs)$ -піддімоноїдів.

Аналогічно, використовуючи теорему 3 роботи [8] та лему п.3.4, можна довести двійстий випадок.

Теорему доведено.

4.6. З теореми п.4.5 та з критерію нормальності напівгрупи ідемпотентів (п.3.6) отримуємо наслідок.

Наслідок. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Тоді $(D, \prec, \succ)$ з нормальною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) нормальною сполукою $(lz; rs)$ -піддімоноїдів (відповідно $(rs; rz)$ -піддімоноїдів).

1. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // Enseign. Math. – 1993. – 39. – P. 269-293.
2. Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer, Berlin. – 2001. – 1763. – P. 7-66.
3. Zhuchok A. V. Commutative dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2009. – N 2. – P. 116-127.
4. Zhuchok A. V. Semilattices of subdimonoids // Asian-European Journal of Math. – 2011. – To appear.
5. Zhuchok A. V. Free commutative dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2010. – 9, N 1. – P. 109-119.
6. Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids // Mat. Stud. – 2010. – 33. – P. 120-124.
7. Жучок А.В. Вільні дімоноїди // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, № 2. – С. 165-175.
8. Kimura N. Note on Idempotent Semigroups. III // Proc. Japan Academy. – 1958. – 34, N 2. – P. 113-114.

A.V. Zhuchok

Dimonoids with an idempotent operation.

We prove the structure theorems for dimonoids with an idempotent operation.

Keywords: *dimonoid with an idempotent operation, idempotent semigroup, congruence, diband of subdimonoids.*

А.В. Жучок

Димоноїды с идемпотентной операцией.

В работе доказано несколько структурных теорем для димоноидов с идемпотентной операцией.

Ключові слова: *димоноид с идемпотентной операцией, полугруппа идемпотентов, конгруэнция, дисвязка поддимоноидов.*

Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка
zhuchok_a@mail.ru

Получено 30.03.11