УДК 539.3:534.1

©2016. **Вит.В. Волчков, С.В. Сторожев**

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СКОРОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЕЛЕЕВСКОГО ТИПА В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

На основе эвристического принципа обобщения построены нечетко-множественные оценки для фазовых скоростей ультраакустических поверхностных упругих волн релеевского типа в изотропных и трансверсально-изотропных полупространствах со свободной граничной поверхностью из материалов с разбросом в экспериментально определяемых значениях физико-механических постоянных. Представлен пример конкретной численной реализации синтезированной методики.

Ключевые слова: *изотропные и трансверсально-изотропные упругие полупространства; поверхностные ультраакустические волны релеевского типа; факторы неопределенности физико-механических параметров; аппарат теории нечетких множеств; эвристический принцип обобщения; нечеткие оценки фазовых скоростей.*

Введение и постановка проблемы. Прикладное использование эффектов распространения ультраакустических поверхностных упругих волн (ПАВ) получило самое широкое применение в ряде важных научно-технических отраслей, к которым относятся ультраакустическая дефектоскопия, горная сейсмоакустика, акустоэлектроника [1–6]. Основные подходы и поэтапные достижения в исследованиях свойств ПАВ, составляющих теоретическую основу перечисленных направлений, с высокой степенью полноты изложены в монографиях, обзорных и обобщающих публикациях [7–11].

Вместе с тем, можно констатировать, что данные исследования базируются на классических детерминистических подходах и четких моделях в исследованиях акустических поверхностных волн в твердых деформируемых телах. В этой связи существует актуальная потребность в распространении теоретических методик исследования на реальные ситуации наличия факторов неопределенности в особенностях протекания и параметрах моделируемых волновых процессов. В первую очередь это касается учета влияния неопределенностей в виде разброса экспериментальных значений физико-механических постоянных рассматриваемых сред на эндогенные параметры фазовых и групповых скоростей, а также на кинематические и энергетические характеристики ПАВ [12]. В качестве методологии учета такого рода неопределенностей в теоретических моделях волновых деформационных процессов могут применяться методы стохастического анализа [13], однако следует учитывать, что корректность их использования обусловлена требованиями к вероятностному характеру экспериментальной информации, подлежащей получению на основе обработки выборок большой мощности по данным измерений. В случае же экспертной либо не имеющей выраженной вероятностной природы неопределенной исходной информации для учета разброса экзогенных данных в моделях волновой механики деформируемых сред могут быть применены методы теории нечетких множеств. Такие исследования представлены в [14–17] применительно к проблемам теории линейных объемных упругих волн в изотропных и анизотропных средах с нечеткими физико-механическими характеристиками; в [18] применительно к проблеме описания нелинейных ангармонических возмущений в анизотропной среде кубической системы с имеющими экспериментальный разброс значениями упругих постоянных второго и третьего порядка; в [19–20] применительно к проблеме оценивания фазовых и групповых скоростей нормальных упругих волн в анизотропных пластинах из ортотропных материалов с нечеткими значениями параметров механических свойств при смешанных краевых условиях на гранях.

В настоящей работе данный подход распространяется на проблемы нечеткого оценивания скоростей ПАВ Релея в изотропном упругом полупространстве и ПАВ релеевского типа в анизотропном полупространстве из материала гексагональной системы с экспериментальным разбросом в значениях параметров плотности и модулей упругости.

1. Получение нечетких оценок для скоростей волн Релея в изотропном полупространстве со свободной границей. Фазовая скорость ϑ распространения бездисперсных поверхностных волн Релея в характеризуемом постоянными Ламе λ, μ и параметром плотности ρ изотропном упругом полупространстве со свободной границей, занимающем координатную подобласть $V = \{(x_1, x_2) \in R^2,\ x_3 \le 0\}$, в рамках детерминистического подхода [4] может быть определена из трансцендентного уравнения

$$(2-\eta)^2 - 4((1-\eta)(1-\gamma\eta))^{1/2} = 0, \qquad (1)$$

в котором $\eta = (\rho/\mu)\vartheta^2$, $\gamma = \mu/(\lambda + 2\mu)$. На основе преобразования (1) в полиномиальное уравнение

$$\eta^3 - 8\eta^2 + 8(3-2\gamma)\eta + 16(\gamma - 1) = 0 \qquad (2)$$

и использования квадратурных формул для корней кубического уравнения (2) могут быть записаны в явном виде три ветви явных представлений для ϑ:

$$\vartheta = \vartheta_1(\rho,\lambda,\mu) = [\big(2\mu/(3\rho)\big)\big(4 - 2(1-6\gamma)/\phi(\lambda,\mu) + \phi(\lambda,\mu)\big)]^{1/2},$$

$$\vartheta = \vartheta_2(\rho,\lambda,\mu) =$$
$$= [\big(\mu/(3\rho)\big)\big(8 + 2(1+i\sqrt{3})(1-6\gamma)/\phi(\lambda,\mu) - (1-i\sqrt{3})\phi(\lambda,\mu)\big)]^{1/2}, \qquad (3)$$

$$\vartheta = \vartheta_3(\rho,\lambda,\mu) =$$
$$= [\big(\mu/(3\rho)\big)\big(8 + 2(1-i\sqrt{3})(1-6\gamma)/\phi(\lambda,\mu) - (1+i\sqrt{3})\phi(\lambda,\mu)\big)]^{1/2},$$

где

$$\phi(\lambda,\mu) = \left[45\gamma - 17 + 3(3(11 - 62\gamma + 107\gamma^2 - 64\gamma^3))^{1/2}\right]^{1/3}. \qquad (4)$$

В рамках задачи описания разброса значений скоростей волн Релея при нечетко заданных экспериментальных значениях физико-механических параметров среды полагается, что упругие постоянные λ, μ материала полупространства и его плотность ρ описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\rho}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{\lambda}}$, $\mu_{\tilde{\mu}}$, $\mu_{\tilde{\rho}}$, характеризуемыми кортежами реперных точек

$$\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad \tilde{\mu} = (\mu_{1,}\mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4). \tag{5}$$

Нечеткие оценки для скоростей рассматриваемых ПАВ формируются на основе применения эвристического принципа обобщения теории нечетких множеств [21–22], позволяющего расширить области определения классических функциональных отображений на нечеткие подмножества универсального множества. При реализации данного принципа в рассматриваемой задаче выделяется та ветвь $\vartheta = \vartheta(\rho, \lambda, \mu)$ явных аналитических представлений (3), (4), которая является действительнозначной в рассматриваемом диапазоне изменения параметров и используются разложения нечетко-интервальных величин физико-механических постоянных (5) по множествам α-срезов

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \alpha\lambda_3 + (1-\alpha)\lambda_4),\\
\tilde{\mu} &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \alpha\mu_3 + (1-\alpha)\mu_4),\\
\tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4).
\end{aligned}$$

В этом случае неопределенные значения скоростей ПАВ Релея соответственно описываются нечетким множеством $\tilde{\vartheta}$, также представляемым в форме разложения по α-срезам и имеющим вид

$$\begin{gathered}
\tilde{\vartheta} = \bigcup_{\alpha\in[\ 0,1]} [\underline{\vartheta}_\alpha, \overline{\vartheta}_\alpha],\\
\underline{\vartheta}_\alpha = \inf_{\substack{\rho\in[\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]\\ \lambda\in[\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]\\ \mu\in[\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha]}} \vartheta(\rho, \lambda, \mu), \quad \overline{\vartheta}_\alpha = \sup_{\substack{\rho\in[\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]\\ \lambda\in[\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]\\ \mu\in[\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha]}} \vartheta(\rho, \lambda, \mu).
\end{gathered} \tag{6}$$

Представление (6) непосредственно используется для формирования вычислительного алгоритма в случае, когда не применима описываемая в [22] модификация α-уровневой формы принципа обобщения, связанная с возможностями оценивания знакоопределенности частных производных аналитического представления $\vartheta = \vartheta(\rho, \lambda, \mu)$ по аргументам во всех интервалах их изменения.

2. Получение нечетких оценок для скоростей поверхностных волн релеевского типа у границы свободного трансверсально-изотропного полупространства. В случае, когда материал полупространства V является трансверсально-изотропным, имеет ориентированную вдоль координатного направления Ox_3 ось изотропии и характеризуется набором физико-механических постоянных $\rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$, дисперсионное уравнение для ПАВ релеевского типа, локализованных у свободной границы $x_3 = 0$ полупространства, может быть записано в форме [23]

$$R(\vartheta, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}) = 0, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} R(\vartheta, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}) = (1-\theta\zeta)\big[(c_{13}/c_{44})\alpha_2^{-1}(1-\zeta)+ \\ +2\alpha_1(\theta\alpha_2)^{-1} - (\theta\alpha_2)^{-1}(\alpha_2+\theta)\zeta+ \\ +\theta^{-1}(\alpha_4 - \theta^{-1}(1-\theta\zeta))\big]+ \\ +\delta_1\delta_2[\theta^{-1}(1-\theta\zeta) - (c_{13}/c_{44})(\alpha_4 - \theta^{-1}(1-\theta\zeta))], \end{gathered}$$

$$\zeta = (\rho/c_{44})\vartheta^2, \quad \theta = c_{44}/c_{11}, \quad \alpha_1 = (2c_{11}c_{44})^{-1}(c_{11}c_{33} - c_{13}(c_{13}+2c_{44})),$$

$$\alpha_2 = c_{33}/c_{11}, \quad \alpha_3 = 2c_{44}/(c_{11}-c_{12}), \quad \alpha_4 = c_{13}(c_{13}+c_{44})/(c_{33}c_{44}),$$

$$\begin{gathered} \delta_j = (\alpha_2)^{-1/2}[\alpha_1 - (\alpha_2+\theta)\zeta/2 + (-1)^{j+1}\times \\ \times((\alpha_1 - (\alpha_2+\theta)\zeta/2)^2 - \alpha_2(1-\zeta)(1-\theta\zeta))^{1/2}] \quad (j=1,2). \end{gathered}$$

В данном случае для получения нечетких оценок скорости ПАВ подлежит использованию алгоритм применения эвристического принципа обобщения для неявных функциональных зависимостей. В предположении о том, что упругие постоянные c_{ij} материала трансверсально-изотропного полупространства и его плотность ρ описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{c}_{ij}$, $\tilde{\rho}$ с реперными точками $\tilde{c}_{ij} = (c_{1ij}, c_{2ij}, c_{3ij}, c_{4ij})$, $\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ и представляются разложениями по множествам α-срезов

$$\begin{gathered} \tilde{c}_{ij} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{c}_{ij\alpha}, \overline{c}_{ij\alpha}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)c_{1ij} + \alpha c_{2ij}, \alpha c_{3ij} + (1-\alpha)c_{4ij}), \\ \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} ((1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4), \end{gathered}$$

нечеткая оценка параметра фазовой скорости ПАВ $\tilde{\vartheta}$ имеет вид (6), где величины $\underline{\vartheta}_\alpha$ и $\overline{\vartheta}_\alpha$ при каждом $\alpha \in [0,1]$ в данном случае соответственно определяются как наименьшее и наибольшее значения корней трансцендентных уравнений (7) с параметрами c_{ij}, ρ, варьируемыми в пределах $\underline{c}_{ij\alpha} \le c_{ij} \le \overline{c}_{ij\alpha}$, $\underline{\rho}_\alpha \le \rho \le \overline{\rho}_\alpha$. При численной реализации количество рассматриваемых для этого α-уровней выбирается из соображений обеспечения необходимой точности вычислений.

3. Численная реализация методики нечеткого оценивания скоростей ПАВ. Примером реализации описываемой методики является получение нечеткой оценки для скорости ультраакустических поверхностных волн

Релея, локализующихся у свободной плоской поверхности конструкционного элемента из титана. Исходя из усредненных данных экспериментальных измерений [24], согласно которым $\lambda \approx 7.360n^*$, $\mu \approx 4.140n^*$, $\rho \approx 4.505\rho^*$, а также в рамках гипотезы о разбросе $\pm 2\%$ для в максимальной степени возможных значений физико-механических характеристик и о разбросе $\pm 5\%$ для предельно возможных отклонений в указанных значениях, для реперных точек нечетких трапецеидальных интервалов $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\rho}$, описывающих физико-механические характеристики титана, задаются величины

$$\lambda_1 = 6.992\, n^*, \quad \lambda_2 = 7.213\, n^*, \quad \lambda_3 = 7.507\, n^*, \quad \lambda_4 = 7.728\, n^*,$$
$$\mu_1 = 3.933\, n^*, \quad \mu_2 = 4.057\, n^*, \quad \mu_3 = 4.223\, n^*, \quad \mu_4 = 4.347\, n^*,$$
$$\rho_1 = 4.280\, \rho^*, \quad \rho_2 = 4.415\, \rho^*, \quad \rho_3 = 4.595\, \rho^*, \quad \rho_4 = 4.730\, \rho^*,$$
$$n^* = 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \rho^* = 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Функции принадлежности $\mu_{\tilde{\lambda}}$, $\mu_{\tilde{\mu}}$, $\mu_{\tilde{\rho}}$ для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\rho}$ соответственно представлены на рис. 1–3.

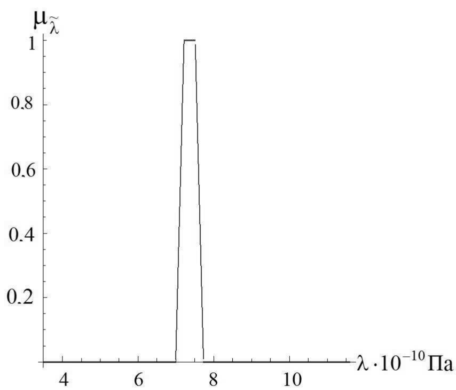

Рис. 1. Функция принадлежности $\tilde{\lambda}$.

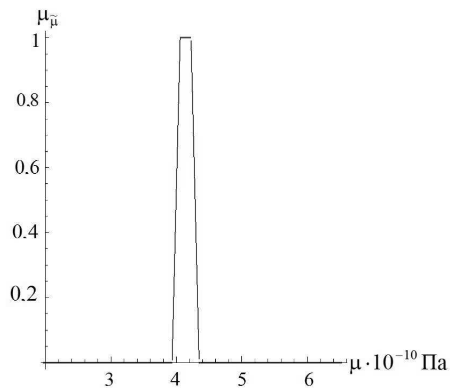

Рис. 2. Функция принадлежности $\tilde{\mu}$.

В соответствии с алгоритмом формирования нечетких оценок для фазовой скорости исследуемых ПАВ в рассматриваемом случае получена оценка ϑ в виде нечеткого множества $\tilde{\vartheta}$ с функцией принадлежности, представленной на рис. 4 и описывающей степень возможности принятия различных значений функцией ϑ при задаваемом характере разброса в экспериментальных значениях физико-механических параметров среды. При реализации алгоритма (6) в контексте необходимости выбора действительнозначной ветви представлений (3) в рассматриваемом диапазоне изменения параметров использовалась ветвь $\vartheta = \vartheta_2(\rho, \lambda, \mu)$. Анализируя полученную нечеткую оценку можно отметить, что по отношению к значению $\vartheta_{\text{средн}}$, получаемому для усредненных экспериментальных значений физико-механических постоянных, разброс

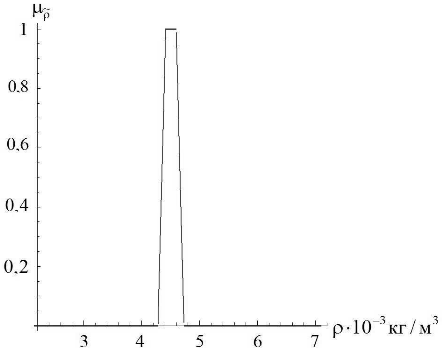

Рис. 3. Функция принадлежности $\tilde{\rho}$.

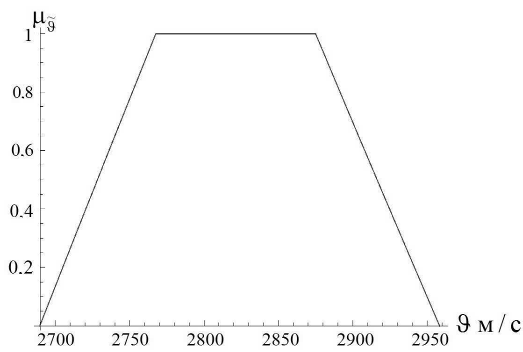

Рис. 4. Функция принадлежности $\tilde{\vartheta}$.

для в предельно наибольшей степени возможных значений нечеткой фазовой скорости $\tilde{\vartheta}$ составляет $\pm 1.9\% \cdot \vartheta_{\text{средн}}$, а предельно возможные отклонения в значениях получаемой оценки для нечеткой характеристики $\tilde{\vartheta}$ от $\vartheta_{\text{средн}}$ лежат в диапазоне $[-4.6\% \cdot \vartheta_{\text{средн}},\ 4.9\% \cdot \vartheta_{\text{средн}}]$.

Выводы. С применением аппарата теории нечетких множеств для исследования проблемы учета факторов неопределенности в математических моделях волновых процессов в деформируемых упругих телах и на базе использования эвристического принципа обобщения получены нечеткие оценки для фазовых скоростей поверхностных упругих волн релеевского типа в изотропных и трансверсально-изотропных полупространствах со свободной граничной поверхностью из материалов с разбросами в экспериментально определяемых значениях физико-механических постоянных. Представлен пример численной реализации изложенной теоретической методики применительно к получению нечетких оценок фазовой скорости волн Релея в изотропном полупространстве из титана. Полученные результаты могут быть использованы как элементы теоретической базы разработок в области технологий геоакустики, ультраакустической диагностики, ультразвукового неразрушающего контроля.

1. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. *Гринченко В.Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. *Шутилов В.А.* Основы физики ультразвука. – Л.: Изд.-во Ленинград. ун-та, 1980. – 280 с.
4. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
5. Фильтры на поверхностных акустических волнах / под ред. Г. Мэттьюза. – М.: Радио и связь, 1981. – 472 с.
6. *Морган Д.* Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах. – М.: Радио и связь, 1990. – 415 с.
7. Поверхностные акустические волны / под ред. А. Олинера. – М.: Мир, 1981. – 384 с.

8. *Бугаев А.С., Дмитриев В.Ф., Кулаков С.В.* Устройства на поверхностных акустических волнах. – С.-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.
9. *Орлов В.С. Бондаренко В.С.* Фильтры на поверхностных акустических волнах. – М.: Радио и связь, 1984. – 272 с.
10. *Речицкий В.И.* Радиокомпоненты на поверхностных акустических волнах. – М.: Сов. радио, 1984. – 112 с.
11. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. – М.: Наука, 1991. – 414 с.
12. *Слободник А. Дж.* Поверхностные акустические волны и материалы для устройств на поверхностных акустических волнах // ТИИЭР. – 1976. – **64**, № 5. – С. 10–26.
13. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
14. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки некоторых характеристик процессов распространения, отражения и преломления волн деформаций // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты. – 2015: Матер. IV Междунар. науч.-практ. Интернет-конф. (Донецк, 25 мая 2015). – Донецк: ДонНУЭТ, 2015. – С. 60–62.
15. *Storozhev S.V.* Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school “Paradigma” (Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O. Ja. Kravets. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2015. – P. 45–52.
16. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки характеристик упругих волн в анизотропных средах // X Всерос. школа-семинар “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете” (пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г., Россия): Тез. докл. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – С. 112.
17. *Сторожев В.И., Сторожев С.В.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
18. *Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде // Вестн. Дон. национального ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38–43.
19. *Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Нечеткие оценки для фазовых скоростей нормальных упругих волн в ортотропном слое с проскальзывающими закреплениями граней // I Междунар. науч. конф. “Донецкие чтения-2016. Образование, наука и вызовы современности” (Донецк, 16–18 мая 2016 г.): Матер. конф. – Т. 1. Физ.-мат., техн. науки и экология. – Ростов-на-Дону: Изд.-во ЮФУ, 2016. – С. 43–46.
20. *Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Модель нечеткого оценивания значений фазовых скоростей нормальных упругих волн в мембранированных ортотропных пластинах // Междунар. науч.-метод. конф. “История и методология науки”, посвящ. 100-летию со дня рожд. А.И. Бородина: Матер. конф. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2016. – С. 81–83.
21. *Алтунин А.Е., Семухин М.В.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. – Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2000. – 352 с.
22. *Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н.* Моделирования и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
23. *Белубекян М.В., Мгерян Д.Э.* Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде // Изв. Национальной акад. наук Армении. – 2006. – **59**, № 2. – С. 3–9.
24. Химическая энциклопедия: в 5 т. – М.: Сов. энциклопедия, 1995. – Т. 4. – С. 590–592.

Vit.V. Volchkov, S.V. Storozhev

Fuzzy evaluation for the velocities of surface waves of Rayleigh type in an elastic half-space

On the basis of the heuristic principle of generalization, fuzzy multiple estimates are built for the phase velocities of ultrasonic surface elastic waves of Rayleigh type in isotropic and transversely isotropic half-spaces with a free boundary surface in the case of variation in the experimentally determined values of physical and mechanical constants of materials. An example of the implementation of the synthesized technique is presented.

Keywords: *isotropic and transversely isotropic elastic half-space; surface ultrasonic waves of Rayleigh type; uncertainties of physical and mechanical parameters; theory of fuzzy sets; heuristic principle of generalization; fuzzy evaluation phase velocities.*

ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т",
ГОУ ВПО "Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры", г. Макеевка
CergeyS@i.ua

Получено 17.05.16