

Том 33
Донецк, 2019

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>А.Б. Бирюков, А.А. Иванова</i> Общие подходы к диагностике аэрогидродинамического состояния элементов теплотехнологического оборудования	3
<i>В.В. Волчков, Вит.В. Волчков</i> Новое свойство круга	11
<i>Ya.I. Granovskyi</i> Krein extension of an even order differential operator on a finite interval	22
<i>Д.А. Зарайский</i> Класс функций, периодических в среднем, однозначно определяющихся своими значениями на «периоде»	38
<i>Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц, Г.В. Мозалевская</i> Анализ условий динамического равновесия оси симметрии артиллерийского снаряда	42
<i>Г.А. Котов, Ю.Ю. Пилпани</i> Исследование движений симметричного гиростата, имеющего неподвижную точку, в случае переменного гиросtatического момента.	51
<i>Д.В. Лиманский</i> Априорные оценки для слабо коэрцитивной системы минимальных дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева	61
<i>А.Д. Манов</i> Принцип максимума для решений одной задачи Коши и его связь с проблемой Шёнберга	71
<i>А.С. Миненко</i> О доказательстве аналитичности свободной границы в одной задаче осесимметричного течения	81
<i>О.А. Рудакова</i> О сходимости решений вариационных задач с вырождениями на множествах с односторонними поточно функциональными ограничениями в переменных областях	92
<i>Д.А. Сапронов</i> Разрешимость задачи Коши для вырождающихся многомерных параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии–конвекции с неограниченной энергией	101

<i>И.А. Тарасова</i> Аналитическое задание многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных	114
<i>С.Н. Царенко, Г.М. Улитин, С.А. Фоменко</i> Продольный удар неоднородного стержня о массивную преграду на упругом основании	122
<i>О.Н. Швидкий</i> Разрешимость начальной задачи для уравнения теплопроводности с дробным оператором Лапласа	131

УДК 681.518.5

©2019. А. Б. Бирюков, А. А. Иванова

ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К ДИАГНОСТИКЕ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕПЛОТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Представлены основы построения и реализации систем диагностики аэрогидродинамических параметров применительно к анализу работы ЗВО МНЛЗ и дымового тракта печного агрегата. Изложена сущность метода анализа погрешности представленных систем.

Ключевые слова: система диагностики, аэрогидродинамические параметры, потери давления, расход среды, косвенное определение величин, ЗВО МНЛЗ, печной агрегат, дымовой тракт.

Введение. В подавляющем количестве промышленных объектов и технологических процессов явления течения жидких или газообразных сред играют значительную роль. Движение жидких (газообразных) сред сопровождается потерями давления на трение и местные сопротивления. Величины всех потерь прямо пропорциональны динамическому напору среды, который в свою очередь пропорционален объемному расходу среды во второй степени. При неизменном располагаемом напоре, обуславливающем перемещение среды, увеличение коэффициентов трения или местного сопротивления приведет к уменьшению объемного расхода, что во многих случаях внесет изменения в нормальный ход процессов и приведет к аварийным ситуациям.

Целью данной работы является анализ известных разработок в области диагностики гидравлического состояния элементов теплотехнологического оборудования и выделение общих моментов, позволяющих упростить выполнение таких разработок для других процессов.

1. Общие подходы к определению потерь давления. В общем случае потери давления складываются из потерь давления на трение, местные сопротивления и геометрических потерь [1]:

– потери давления на трение определяются как

$$\Delta P_{fr} = \lambda \cdot \frac{L}{d_g} \cdot \frac{\rho_0 V_0^2}{2F^2} \cdot \frac{t + 273}{273},$$

где λ – коэффициент гидравлического трения (в общем случае определяется в зависимости от критерия Re и показателей шероховатости поверхности трения); L – длина участка трения, м; $d_g = 4F/P$ – гидравлический диаметр канала (F – сечение канала, м²; P – смачиваемый периметр канала, м), м; ρ_0 – плотность движущейся среды (н.ф.у.), кг/м³; V_0 – расход движущейся среды (н.ф.у.), м³/с; t – температура движущейся среды, °C.

– потери давления на местном сопротивлении определяются как

$$\Delta P_{mr} = k_{mr} \cdot \frac{\rho_0 V_0^2}{2F^2} \cdot \frac{t + 273}{273},$$

где k_{mr} – коэффициент местного сопротивления.

– геометрические потери давления определяются как

$$\Delta P_g = \pm h g (\rho_a - \rho),$$

где ρ – плотность продуктов сгорания в исследуемом элементе дымового тракта (д.ф.у.), кг/м³; h – высота участка подъема или спуска, м; g – ускорение свободного падения, м/с²; ρ_a – плотность среды, окружающей канал, кг/м³. Знак «+» или «–» выбирается в зависимости от направления движения продуктов сгорания в вертикальном направлении.

Для сложных аэрогидродинамических систем, в которых имеют место различные потери давления, значение давления, которое позволит обеспечить прокачивание заданного расхода теплоносителя, определяется по следующей зависимости [1]:

$$P \geq \sum_{i=1}^N P_{mp_i} + k_m \cdot \sum_{j=1}^M P_{mp_j} + \sum_{k=1}^L P_{g_k},$$

где N, M, L – число участков трения, местного сопротивления и гидростатических потерь соответственно; k_m – коэффициент взаимного влияния местных сопротивлений, зависит от гидравлической схемы дымового тракта, для предварительных расчетов может быть принят на уровне 1,1–1,2.

2. Общая методология проведения диагностики. Для характеристики гидродинамических параметров оборудования используется понятие напорно-расходной характеристики. Для каналов, в которых происходит течение сред, строится зависимость потерь давления от расхода в виде функции $\Delta P = f(Q)$. Функция является возрастающей и, как правило, наиболее близка к квадратичной зависимости. Вид напорно-расходной характеристики может быть спрогнозирован расчетным способом либо установлен экспериментально. Меняя расход среды и измеряя требуемый для ее прокачивания перепад давлений, получаем набор экспериментальных точек $(Q_i, \Delta P_i)$, в результате обработки которых при помощи методов математической статистики получаем напорно-расходную характеристику.

Далее в процессе эксплуатации оборудования производится периодическое (или непрерывное) снятие экспериментальных точек и их сопоставление с эталонной напорно-расходной характеристикой. Если предположить идеальный случай отсутствия погрешностей, как при построении эталонной кривой, так и при идентификации точек, то расположение экспериментальной точки выше эталонной кривой говорит о возрастании потерь давления, что может быть вызвано:

- уменьшением проходного сечения канала;
- повышением шероховатости поверхностей канала, контактирующих с движущейся средой;

- повышением плотности прокачиваемой среды.

Если экспериментальная точка ложится ниже эталонной кривой, можно сделать обратные выводы:

- увеличение проходного сечения канала;
- снижение шероховатости поверхностей канала, контактирующих с движущейся средой;
- снижение плотности прокачиваемой среды.

Попадание снятых точек на эталонную кривую говорит о сохранении условий течения и характеристик канала. Менее вероятен случай, когда имеются отклонения взаимно-компенсирующие друг друга.

3. Примеры практической реализации систем диагностики гидродинамических параметров.

Прогнозирование гидравлического состояния элементов зоны вторичного охлаждения МНЛЗ.

Одним из важнейших технологических элементов машин непрерывно литья заготовок (МНЛЗ) является зона вторичного охлаждения (ЗВО). В этой зоне отвод теплоты от формирующейся непрерывнолитой заготовки осуществляется благодаря орошению её поверхности водой или водо-воздушной смесью через форсунки. На практике может иметь место засорение форсунок вторичного охлаждения, что приводит к искажению температурного поля заготовки [2]. Некоторые аспекты этого явления исследованы в работе [3].

На практике засорение форсунок может иметь место по целому ряду причин (трубопроводы выполнены не из нержавеющей стали, выход из строя водяного фильтра и т.д.). При этом важно оперативно идентифицировать такого рода отклонения и принимать адекватное решение о продолжении или приостанове разливки.

В [4] предложен подход, позволяющий оценить количество засоренных форсунок в секторе в зависимости от давления, которое устанавливает регулятор расхода для прокачивания заданного количества воды через сектор. В его основе лежит рассмотрение семейства напорно-расходных характеристик сектора, построенных для разного количества работающих форсунок (начиная от номинального, и далее уменьшаемого с заданным шагом). Пример такого семейства напорно-расходных кривых для сектора, физически состоящего из 72 форсунок производства одной из современных фирм, приведен на рис. 1.

Положение текущей рабочей точки с координатами (Q, P) автоматически определяется в области семейства напорно-расходных характеристик. При этом устанавливается, какая кривая наиболее приближена к данной точке, что служит указанием на количество засоренных форсунок.

Неудобство такого подхода заключается в том, что алгоритм идентификации положения рабочей точки выполняется методами графического анализа.

В [5] предложен аналогичный подход, основанный на составлении выражения для расчетного определения величины давления жидкости, необходимого для про-

качивания заданного её расхода, в зависимости от базовых гидравлических параметров сектора и его состояния.

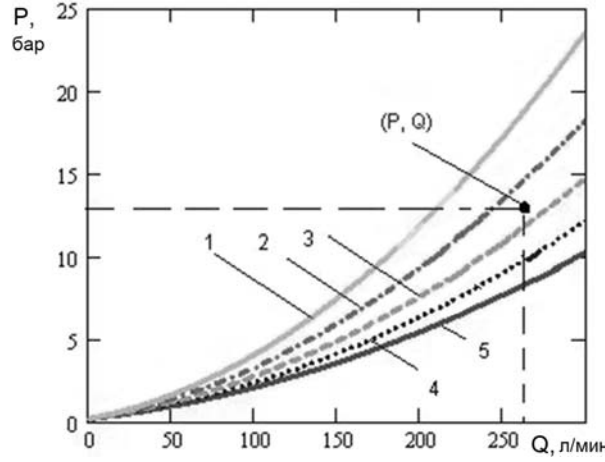


Рис. 1. Семейство напорно-расходных характеристик сектора ЗВО для различного количества работающих форсунок. 1 – 40 форсунок; 2 – 45; 3 – 50; 4 – 65; 5 – 72

Статьи расхода энергии избыточного давления потока жидкости при работе сектора ЗВО (P_c) можно разделить на две части:

- потери давления на трение и местные сопротивления от точки измерения давления до форсунок (P_p);
- потери давления на организацию истечения жидкости из форсунок (P_f).

Таким образом, $P_c = P_p + P_f$.

Первая статья потерь является значительно меньшей, однако для повышения точности расчетов её целесообразно в общем случае учесть следующим образом [5]:

$$P_p = \sum_{i=1}^N \left(\lambda_i \cdot \frac{L_i}{D_i} \cdot \frac{\rho \cdot \left(\frac{Q_i \cdot 10^{-3}}{60 \cdot F_i} \right)^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^M \left(k_j \cdot \frac{\rho \cdot \left(\frac{Q_j \cdot 10^{-3}}{60 \cdot F_j} \right)^2}{2} \right), \quad (1)$$

где i, j – индексы для указания участков трения и местного сопротивления; N, M – число участков трения и местного сопротивления; Q – расход жидкости на участке, л/мин; F – живое сечение трубопровода, m^2 ; λ – коэффициент трения трубопроводов; L – длина участка трения, м; D – диаметр трубопровода, м; k – коэффициент местного сопротивления; ρ – плотность воды, kg/m^3 .

Потери давления на истечение жидкости через форсунки зависят от числа открытых форсунок (N_{of}) и выражаются следующим образом:

$$P_f = P_c - P_p = k_f \cdot \frac{\rho \cdot \left(\frac{Q \cdot 10^{-3}}{60 \cdot N_{of} \cdot F_f} \right)^2}{2}, \quad (2)$$

где F_f – живое сечение внутреннего канала форсунки со стороны входа, м; k_f – коэффициент местного сопротивления форсунки, отнесенный к динамическому напору во входном канале форсунки.

При использовании зависимости (2) в качестве расхода жидкости подставляется полный расход воды на сектор.

Итоговые выражения для прогнозирования количества открытых и засоренных форсунок (N_{zf}) получаем в результате простых преобразований выражения (2):

$$N_{of} = \sqrt{\frac{\rho \cdot k_f}{2 \cdot F_f^2}} \cdot \frac{Q \cdot 10^{-3}}{60} \cdot \frac{1}{P_f} = \sqrt{\frac{\rho \cdot k_f}{2 \cdot F_f^2}} \cdot \frac{Q \cdot 10^{-3}}{60} \cdot \frac{1}{P_c - P_p}, \quad (3)$$

$$N_{zf} = N_p - N_{of}, \quad (4)$$

где N_p – полное количество форсунок в секторе, шт.

Для использования зависимостей (3), (4) значения P_c и Q автоматически берутся на основании сигналов соответствующих чувствительных элементов, а величина P_p определяется по зависимости (1).

Использование усовершенствованной методики прогнозирования гидравлического состояния секторов ЗВО проиллюстрировано для следующих исходных данных: номинальное число форсунок в секторе: 48 шт; длина участка трения: 2 м; коэффициент трения трубопроводов: 0,015; гидравлический диаметр сектора: 0,052 м; диаметр входного канала форсунки: 0,013 м; коэффициент местного сопротивления форсунки: 1980.

Результаты определения количества открытых и засоренных форсунок для разных значений расхода охладителя и давления (для приведенных выше исходных данных) систематизированы на рис. 2.

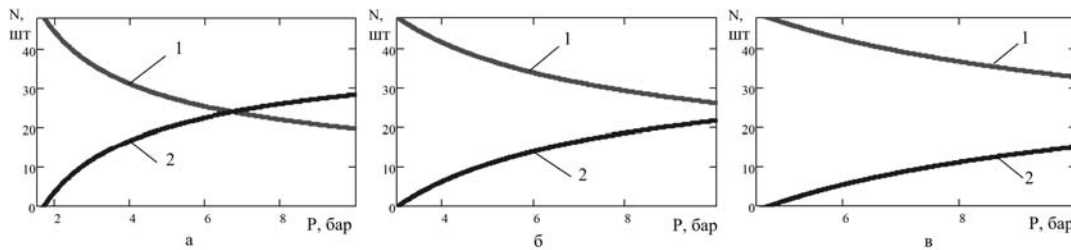


Рис. 2. Зависимость числа открытых и засоренных форсунок исследуемого сектора ЗВО от давления, устанавливаемого регулятором (1 – число открытых форсунок, 2 – число засоренных форсунок, а – для расхода воды 150 л/мин, б – 200 л/мин, в – 250 л/мин)

В общем случае результаты, полученные при использовании усовершенствованной методики, являются дробными числами, которые для удобства использования можно округлять на основании общепринятых правил округления. При этом, получив результат, например, $N_{zf} = 3$, нельзя утверждать, идет ли речь о трёх полностью засоренных форсунках или некотором большем числе частично забитых форсунок. Таким образом, полученный результат несёт в себе некоторую

условность. Однако его ценность заключается в том, что он даёт усредненное представление о гидравлическом состоянии сектора и динамике его изменения, что в значительной части случаев достаточно для принятия соответствующих технологических решений.

Анализ аэродинамического состояния дымового тракта.

Такой анализ может быть выполнен на основании анализа напорно-расходной характеристики дымового тракта, методология построения которого предложена в [6]. При этом для удобства управления зависимость $\Delta P = f(V)$ может быть заменена зависимостью относительной высоты подъема шибера h от расхода топлива.

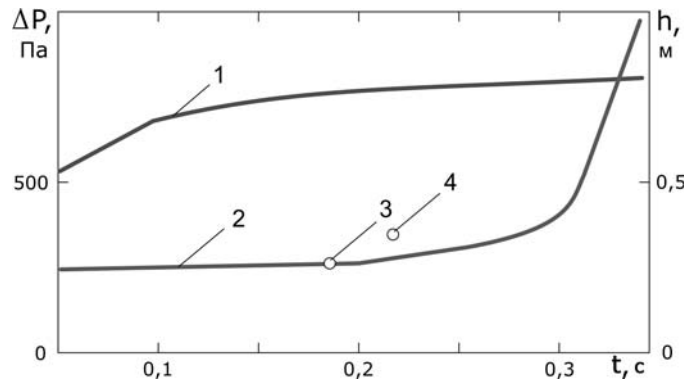


Рис. 3. Аэродинамическая характеристика дымового тракта (1 – зависимость разрежения, создаваемого дымовой трубой от расхода топлива; 2 – зависимость относительной высоты подъема шибера от расхода топлива; 3, 4 – идентифицированные точки)

На рис. 3 показан пример напорно-расходной характеристики дымового тракта. Для построения использованы типовые данные о геометрии дымохода нагревательной печи средней мощности (12 МВт), снабженной керамическим рекуператором поверхностью 800 м². В качестве топлива рассмотрен природный газ с удельным выходом продуктов сгорания 12 м³/м³, высота дымовой трубы: 100 м.

Для функционирующего агрегата при текущих параметрах нагрева сопоставление положения дымового шибера, определенного при помощи аэродинамической характеристики, с положением этого органа, автоматически устанавливаемым АСУ ТП для поддержания заданного давления в камере печи, дает возможность проверить точность гидравлического расчета дымового тракта и в случае необходимости внести коррективы.

В дальнейшем после такой отладки анализ рассогласования расчетных положений шибера с устанавливаемыми автоматически даёт представление об изменении сопротивления дымового тракта, например, за счёт забивания рекуператора или зарастания дымохода. Например, попадание идентифицированной точки (V_{Ti}, h_i) на эталонную напорно-расходную кривую (точка 3 на рис. 3) говорит о неизменности аэродинамических характеристик газохода, а расположение точки выше эталонной кривой (точка 4 на рис. 3) говорит о повышении сопротивления газохода.

4. Анализ погрешности системы диагностики. Для оценки погрешности системы диагностики использован подход, описанный в [7]. В его основе лежит реализация следующего алгоритма. Назначается базовый набор значений входных величин и определяется соответствующий ему результат диагностики. Для каждого из аргументов вносится предельная абсолютная погрешность, соответствующая классу точности прибора, измеряющего данную входную величину. Определяется выходная величина, её значение сравнивается с базовым. Таким образом, устанавливается погрешность входной величины и её знак (увеличение входной величины приводит к росту или уменьшению искомой величины). Далее имитируется ситуация, когда все входные величины принимают максимальные погрешности с таким знаком, чтобы их действие на результат было однонаправленным. Полученная погрешность определения искомой величины будет являться предельно возможной.

Ниже рассмотрен пример оценки погрешности системы диагностики гидродинамических параметров, определяющей количество засоренных форсунок [5]:

- в инженерном вычислительном пакете сформированы функция, описывающая «истинное» значение $N_{of}(Q, P)$, и функции, имитирующие погрешности, соответствующие двухпроцентным ошибкам в измерении давления и расхода:

$N_{of1}(Q, 1.02P)$; $N_{of2}(1.02Q, P)$;

- для нескольких зафиксированных значений расхода (150, 200, 250 л/мин) рассмотрена функция $\Delta E_P(P) = N_{of}(Q, P) - N_{of1}(Q, 1.02P)$;

- для нескольких зафиксированных значений давления (3, 5, 7 бар) рассмотрена функция $\Delta E_Q(Q) = N_{of2}(1.02Q, P) - N_{of}(Q, P)$.

Графическое представление результатов исследования дано на рис. 4.

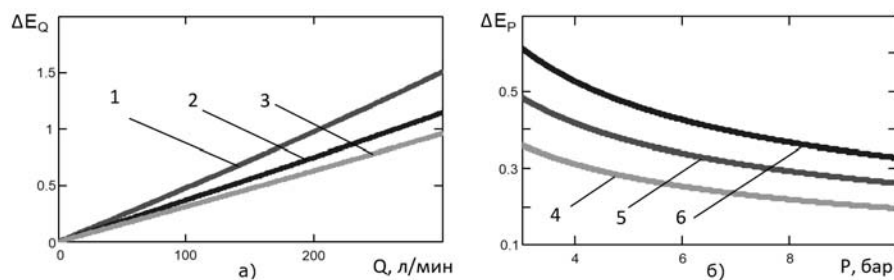


Рис. 4. Анализ влияния погрешности приборов, измеряющих давление и расходы охлаждающей среды, на ошибку определения количества открытых форсунок (а – функция $\Delta E_Q(Q)$; б – функция $\Delta E_P(P)$; 1 – для давления воды 3 бар, 2 – 5 бар, 3 – 7 бар; 4 – для расхода воды 150 л/мин, 5 – 200 л/мин, 6 – 250 л/мин)

В результате анализа значений функций $\Delta E_Q(Q)$ и $\Delta E_P(P)$ установлено, что в диапазоне возможных значений изменения величин расхода и давления охлаждающего для сектора ЗВО сортовой МНЛЗ при погрешности измерительных приборов до 2% ошибка в определении количества засоренных форсунок не превышает двух штук.

Выводы. Представлены основы построения систем диагностики аэрогидродинамических параметров, заключающиеся в построении эталонной напорно-расход-

ной характеристики объекта и сопоставлении с ней точек с координатами, соответствующими текущим значениям расхода среды и потерь давления.

Раскрыты сущность и основы реализации систем диагностики аэрогидродинамических параметров применительно к анализу работы ЗВО МНЛЗ и дымового тракта печного агрегата. Первая система позволяет прогнозировать количество засоренных форсунок, а вторая оценивать изменение сопротивления дымового тракта.

Представлена сущность метода анализа погрешности систем диагностики гидродинамических параметров, заключающаяся в эмуляции наиболее неблагоприятной ситуации с односторонним воздействием максимально возможных погрешностей входных величин, соответствующих классам точности измерительных приборов. Показано применение такого метода для системы диагностики гидродинамических параметров ЗВО.

1. Курбатов Ю.Л., Шелудченко В.И., Кравцов В.В. Механика жидкости и газа: учебное пособие. – Севастополь: Вебер, 2003. – 226 с.
2. Смирнов А.Н., Куберский А.Л., Поджорытов А.Л. Непрерывная разливка сортовой заготовки. – Донецк: Цифровая типография, 2012. – 417 с.
3. Бирюков А.Б. Теплотехника непрерывной разливки стали и тепловой обработки заготовок. – Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 444 с.
4. Бирюков А.Б. Современные аспекты теплового мониторинга работы МНЛЗ // Металл и литье Украины. – 2008. – № 7–8. – С. 37–40.
5. Бирюков А.Б. Совершенствование метода диагностики гидравлического состояния секторов вторичного охлаждения МНЛЗ // Металл и литье Украины. – 2015. – № 3. – С. 1–4.
6. Бирюков А.Б. Аэродинамическая характеристика дымового тракта печного агрегата и ее использование для анализа мероприятий по совершенствованию тепловой работы печи // Металл и литье Украины. – 2013. – № 7. – С. 18–21.
7. Бирюков А.Б., Иванова А.А. Основы построения и использования систем диагностики на базе анализа моментальных тепловых балансов // Труды ИПММ. – 2018. – **32**. – С. 13–22.

A. B. Biryukov, A. A. Ivanova

General approaches to diagnostics of aerohydrodynamic state of elements of heat and technology equipment.

The fundamentals of constructing and implementing systems for diagnosing aerohydro-dynamic parameters are presented in relation to the analysis of the operation of the CCM and the smoke path of the furnace unit. The essence of the method for analyzing the error of the presented systems is described.

Keywords: diagnostic system, aerohydrodynamic parameters, pressure loss, flow rate, indirect determination of values, SCZ of CCM, furnace unit, smoke path.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
biryukov.ttf@gmail.com
ivanova.iamm@mail.ru

Получено 24.10.19

УДК 517.5

©2019. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

НОВОЕ СВОЙСТВО КРУГА

Доказано, что некоторая переопределенная граничная задача Неймана имеет решение только для круга.

Ключевые слова: гармонические функции, граничная задача Неймана, пространства Харди.

Введение. В настоящее время хорошо известен ряд утверждений, характеризующих круг как множество точек на плоскости с различными экстремальными свойствами (см., например, [1] и библиографию к этой работе). Отдельные результаты такого вида формулируются в терминах теории функций [2, с. 48], интегральной геометрии (см. [3, с. 58]), математической физики (см. [4]).

В данной работе показано, что круг является единственной областью, для которой имеет решение некоторая внешняя переопределенная граничная задача Неймана. Этот результат (см. теорему 1 ниже) интересно сравнить со старой гипотезой Шиффера, связанной с описанием множеств со свойством Помпейю (см. [5, с. 58]).

1. Формулировки основных результатов. Пусть Γ – замкнутая гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ , $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Как обычно, символом $\frac{\partial}{\partial n}$ будем обозначать оператор дифференцирования в направлении внешней (по отношению к G) нормали к Γ .

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Предположим, что существует функция f , непрерывная в $\mathbb{C} \setminus G$ и гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $f = 0$ на Γ ;
2. $\frac{\partial f}{\partial n} = 1$ на Γ ;
3. $f(z) = o(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$.

Тогда область G является кругом, и при этом

$$f(z) = R \ln \frac{|z - z_0|}{R},$$

где z_0 , R – центр и радиус круга G .

Доказательство теоремы 1 приводится в § 3. Оно основано на применении конформного отображения внешности единичного круга на область $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Соответствующие вспомогательные конструкции и утверждения содержатся в § 2. Отметим, что отсутствие подобной теории конформных отображений в многомерном случае оставляет открытым вопрос о существовании аналога теоремы 2 в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$.

Следующий результат показывает необходимость условий 1, 2 и точность условия 3 в теореме 1.

Теорема 2. *Существуют отличная от круга ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ с гладкой жордановой границей Γ и функции f_1, f_2, f_3 , непрерывные в $\mathbb{C} \setminus G$ и гармонические в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, такие что:*

1. f_1 удовлетворяет условиям 1 и 3 теоремы 1;
2. f_2 удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы 1;
3. f_3 удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 1, и при этом

$$f_3(z) = O(|z|^2) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 2 содержится в § 4.

2. Вспомогательные конструкции. Пусть $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ и функция u непрерывна в $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$. При любом фиксированном $\rho \geq 1$ функции $u(\rho e^{i\varphi})$ соответствует ряд Фурье

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

где

$$u_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (2)$$

Из (2) следует, что

$$|u_n(\rho)| \leq \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |u(\rho e^{i\varphi})| \quad (3)$$

для любых $n \in \mathbb{Z}$, $\rho \geq 1$. Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Если $u \in C^2(A)$, то простые вычисления с использованием (2) показывают, что при любых $\rho > 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\Delta(u_n(\rho) e^{in\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta u)(\rho e^{it}) e^{in(\varphi-t)} dt. \quad (4)$$

Кроме того,

$$\Delta(u_n(\rho) e^{in\varphi}) = \left(u_n''(\rho) + \frac{u_n'(\rho)}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} u_n(\rho) \right) e^{in\varphi}. \quad (5)$$

По теореме Римана о конформном отображении существует единственная голоморфная в области A функция $w = \psi(z)$, которая отображает A конформно на область $\mathbb{C} \setminus G$ при условиях

$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(\infty) = a > 0. \quad (6)$$

Первое условие в (6) показывает, что функция $w = \psi(z)$ точку $z = \infty$ переводит в точку $w = \infty$, а второе условие означает, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{z} = a > 0. \quad (7)$$

Из условий (6) и (7) следует, что функция ψ , являясь голоморфной в области A , имеет в точке $z = \infty$ простой полюс, и поэтому ее лорановское разложение в A имеет вид

$$\psi(z) = az + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^{-n}, \quad a > 0. \quad (8)$$

Согласно принципу соответствия границ при конформных отображениях функция ψ может быть продолжена по непрерывности на множество $\bar{A}$. Для этого продолжения мы сохраним обозначение $w = \psi(z)$.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Как обычно, обозначим через $H_p(\mathbb{D})$, $p > 0$, класс функций f , голоморфных в $\mathbb{D}$ и таких, что для каждой из них интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \quad (9)$$

ограничен при $0 \leq r < 1$. При $z \in \mathbb{D}$ положим

$$h(z) = a - \sum_{n=0}^{\infty} n\psi_n z^{-n-1} = \psi' \left(\frac{1}{z} \right). \quad (10)$$

Отметим, что в силу однолиственности ψ функция h не имеет нулей в $\mathbb{D}$. Далее нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения о свойствах функций h и ψ .

Лемма 1. *Функции h и $1/h$ принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при всех $p > 0$.*

Доказательство. Пусть $b \in G$. Обозначим через $d(b)$ расстояние от точки b до Γ . Тогда при любом $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\left| \psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right| \geq d(b) > 0.$$

Из этого неравенства и (8) следует, что существует постоянная $c_1 > 0$, такая что

$$\left| z \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right) \right| > c_1 \quad (11)$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Кроме того, из (8) и определения ψ получаем, что

$$\left| z \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right) \right| < c_2, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (12)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от z . Далее, при $z \in \mathbb{D}$ из (10) находим

$$h(z) = -z^2 \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right)^2 \lambda'(z), \quad (13)$$

где

$$\lambda(z) = \left(\psi\left(\frac{1}{z}\right) - b \right)^{-1}.$$

Учитывая оценки (11) и (12), при любых $p > 0$, $r \in [0, 1]$ из (13) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (|h(re^{i\varphi})|^p + |h(re^{i\varphi})|^{-p}) d\varphi < \\ & < c_2^{2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^p d\varphi + c_1^{-2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^{-p} d\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Функция λ отображает круг $\mathbb{D}$ конформно и однолистно на некоторую ограниченную область с гладкой жордановой границей. По теореме Линделёфа (см. [6, гл. 10, § 1, теорема 4]), при надлежащем выборе ветви аргумента функции $\arg \lambda'(z)$ и $\arg 1/\lambda'(z)$ могут быть продолжены до непрерывных функций на $\overline{\mathbb{D}}$. Отсюда следует (см. [6, гл. 10, § 1, теорема 5]), что функции λ и $1/\lambda$ принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при любом $p > 0$. Таким образом, интегралы в правой части неравенства (14) ограничены по r . Отсюда и из (14) получаем утверждение леммы 1. $\square$

Следствие 1. *Функция h имеет почти всюду на $\mathbb{T}$ конечные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию $h(e^{i\varphi})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. При этом $h(e^{i\varphi}) \in L^p(0, 2\pi)$ для любого $p > 0$ и*

$$h(e^{i\varphi}) \neq 0 \quad \text{для почти всех } \varphi \in (0, 2\pi). \quad (15)$$

Доказательство. Утверждение о существовании указанной предельной функции $h(e^{i\varphi})$ и ее принадлежности классу $L^p(0, 2\pi)$ следует из леммы 1 и хорошо известного аналогичного свойства для любой функции класса $H_p(\mathbb{D})$ (см., например, [6, гл. 9, § 4]). Применяя данное свойство к функции $1/h$ и используя лемму 1, получим (15). $\square$

Следствие 2. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $|\alpha| \geq |\beta| > 0$. Тогда функция*

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}$$

принадлежит классу $H_p(\mathbb{D})$ при всех $0 < p < \frac{1}{4}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $|\beta| = |\alpha|$. В этом случае $\alpha + \beta z = \beta(z - e^{i\gamma})$ при некотором $\gamma \in [0, 2\pi]$. Пусть $0 < p < \frac{1}{4}$. Выберем $q > 1$ так, чтобы $qp < \frac{1}{4}$. Используя неравенство Гельдера и лемму 1, для любого $r \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |h_1(re^{i\varphi})|^p d\varphi = \int_0^{2\pi} |h(re^{i\varphi})|^p |\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})|^{-2p} d\varphi \leq \\ & \leq \left(\int_0^{2\pi} |h(re^{i\varphi})|^{\frac{pq}{q-1}} d\varphi \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^{2\pi} |\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})|^{-2pq} d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq c \left(\int_0^{2\pi} |1 - re^{i(\varphi-\gamma)}|^{-2pq} d\varphi \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (16)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от r . Поскольку

$$|1 - re^{i(\varphi-\gamma)}| \geq 1 - \cos(\varphi - \gamma)$$

и $pq < \frac{1}{4}$, из (16) получаем требуемое утверждение. В случае $|\alpha| > |\beta| > 0$ утверждение очевидно в силу леммы 1 и неравенства

$$|\alpha + \beta z| \geq |\alpha| - |\beta|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

□

Лемма 2. Для почти всех (по мере Лебега) $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi'((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}, \quad (17)$$

где оба предела существуют и конечны.

Доказательство. Из соотношения (10) имеем

$$\psi'((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = h((1 + \varepsilon)^{-1}e^{-i\varphi})$$

для любых $\varepsilon > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда и из следствия 1 вытекает существование конечного предела в левой части равенства (17) для почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. По теореме о среднем для таких φ выполнено равенство

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \varepsilon \psi'(\xi e^{i\varphi})$$

для любого $\varepsilon > 0$ и некоторого $\xi \in (1, 1 + \varepsilon)$, зависящего от ε . Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho,$$

который равен пределу в левой части равенства (17). Поскольку

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \frac{\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}},$$

отсюда получаем утверждение леммы 2. □

Лемма 3. Для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует $\delta = \delta(\varphi) > 0$, такое что при любом $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$ круг

$$K_{\varepsilon, \varphi} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\psi'(e^{i\varphi})| \right\} \quad (18)$$

не пересекается с Γ .

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ положительных чисел такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ и при любом j круг $K_{\varepsilon_j, \varphi}$ пересекается с Γ . Обозначим через φ_j одну из точек полуинтервала $[0, 2\pi)$, для которой $\psi(e^{i\varphi_j}) \in K_{\varepsilon_j, \varphi} \cap \Gamma$. Тогда имеем

$$|\psi(e^{i\varphi_j}) - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon_j e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})| \leq \frac{\varepsilon_j}{2} |\psi'(e^{i\varphi})|. \quad (19)$$

Из этого неравенства и однолиственности ψ заключаем, что $\varphi_j \rightarrow \varphi$ при $j \rightarrow \infty$.

Далее, функция $\psi(e^{it})$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и для почти всех $t \in [0, 2\pi]$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \psi(e^{it}) = i e^{it} \psi'(e^{it}) \quad (20)$$

(см. [6, гл. 10, § 1, теорема 1]).

Предположим теперь, что $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$ и

$$\psi(e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi_j}) = i \psi'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} (\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j) \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Из следствия 1 и равенства (20) следует, что эти требования выполняются для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. Сопоставляя (21) и (19) и учитывая, что $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$, приходим к неравенству

$$|\varepsilon_j + i(\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j)| \leq \frac{\varepsilon_j}{2} \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

При достаточно больших j последнее неравенство противоречиво, откуда следует утверждение леммы 3. $\square$

Лемма 4. Пусть функция f гармонична в круге $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| < r\}$ и

$$M = \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| < +\infty. \quad (22)$$

Тогда при любом $\zeta \in K$ имеет место оценка

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq \frac{2M|\zeta - \zeta_0|}{r - |\zeta - \zeta_0|}. \quad (23)$$

Доказательство. Из условия леммы получаем, что функция $w(z) = f(rz + \zeta_0)$ гармонична в $\mathbb{D}$ и $|w(z)| \leq M$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Отсюда следует (см., например, [6, гл. 9, § 2, следствие 2]), что почти всюду на $\mathbb{T}$ функция w имеет некасательные конечные предельные значения. Как обычно, сохраним обозначение $w(e^{it})$ для соответствующей предельной функции, определенной почти всюду на $\mathbb{T}$. Тогда

из (22) имеем $|w(e^{it})| \leq M$. Кроме того, для любого $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \rho < 1$ выполнена формула Пуассона

$$w(z) - w(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(e^{it}) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n(\varphi - t)) dt \quad (24)$$

(см. [6, гл. 9, § 2, теорема 3]). Интеграл справа не превосходит выражения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w(e^{it})| \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n dt \leq \frac{2M\rho}{1-\rho},$$

поэтому оценка (23) следует из (24). $\square$

Лемма 5. Для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ выполнено следующее утверждение: если f гармонична в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, непрерывна в $\mathbb{C} \setminus G$, и существует производная $\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi}))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi})) |\psi'(e^{i\varphi})|.$$

Доказательство. Из следствия 1 и леммы 2 вытекает, что для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует отличный от нуля конечный предел в левой части равенства (17) и

$$\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}) + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (25)$$

Следовательно, для таких φ точка $\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})$ содержится в круге $K_{\varepsilon, \varphi}$ (см. (18)) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Применим теперь лемму 4, полагая

$$\zeta_0 = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}), \quad r = \frac{\varepsilon}{2} |\psi'(e^{i\varphi})|,$$

$$\zeta = \psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi}),$$

где $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$ – достаточно мало. Поскольку круг $K_{\varepsilon, \varphi}$ содержится в круге

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq |\psi(e^{i\varphi})| + \frac{3}{2} \delta(\varphi) |\psi'(e^{i\varphi})| \right\},$$

существует константа M_φ , не зависящая от ε , такая что

$$\sup_{K_{\varepsilon, \varphi}} |f| \leq M_\varphi \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta(\varphi)).$$

Тогда из (25) и леммы 4 получаем

$$f(\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})) = o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (26)$$

Далее, из определения нормальной производной имеем

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon |\psi'(e^{i\varphi})|}.$$

Из этого равенства и соотношения (26) следует утверждение леммы 5. $\square$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 1. Докажем, что G – круг и

$$f(z) = R \ln \frac{|z - z_0|}{R},$$

где z_0 , R – центр и радиус круга G .

Рассмотрим функцию $u(z) = f(\psi(z))$, где ψ – функция, определенная в §2. Из условия теоремы 1 получаем, что u гармонична в области A и непрерывна в $\overline{A}$, при этом

$$u(e^{i\varphi}) = 0 \quad \text{для любого } \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (27)$$

Кроме того, из условия 3 теоремы 1 и равенства (8) следует, что

$$u(z) = o(|z|^2) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

При любом фиксированном $\rho \geq 1$ функции $u(\rho e^{i\varphi})$ соответствует ряд Фурье (1), в котором функции $u_n(\rho)$ являются непрерывными на $[1, +\infty)$ (см. (2)). Из гармоничности u и соотношения (4) получаем, что функции $u_n(\rho)e^{in\varphi}$ являются гармоническими в A при всех n . В силу (5), это означает, что

$$u_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho, \quad u_n(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n} \quad \text{при } n \neq 0,$$

где $\rho \geq 1$ и a_n , b_n – комплексные постоянные. Из равенств (27) и (2) следует, что $u_n(1) = 0$, откуда

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad a_n + b_n = 0 \quad \text{при } n \neq 0. \quad (29)$$

Далее, из (3) и (28) получаем

$$u_n(\rho) = o(\rho^2) \quad \text{при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Последнее равенство означает, что $a_n = 0$ и $b_{-n} = 0$ при $n \geq 2$. Сопоставляя это с (29), приходим к выводу, что при $|z| \geq 1$

$$u(z) = b_0 \ln |z| + a_1 \left(z - \frac{1}{\bar{z}} \right) + a_{-1} \left(\frac{1}{z} - \bar{z} \right), \quad (30)$$

где черта означает знак комплексного сопряжения. Из этого равенства находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{u((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) - u(e^{i\varphi})}{\varepsilon} = b_0 + 2a_1 e^{i\varphi} - 2a_{-1} e^{-i\varphi}$$

для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда и из леммы 5 заключаем, что

$$b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi} = |h(e^{i\varphi})| \quad (31)$$

для почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

По теореме Фейера–Рисса (см. [8, приложение 5]) неотрицательный тригонометрический полином в левой части равенства (31) можно представить в виде

$$b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi} = |\alpha + \beta e^{i\varphi}|^2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (32)$$

где комплексные постоянные α, β таковы, что

$$\alpha + \beta z \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{D}. \quad (33)$$

Докажем, что $\beta = 0$. Предположим противное, тогда из (33) имеем $|\alpha| \geq |\beta| > 0$. Применяя лемму 1 и следствие 2, отсюда заключаем, что функции

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}, \quad h_2(z) = \frac{1}{h_1(z)}$$

принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при $p \in (0, 1/4)$. Кроме того, из (31) и (33) следует, что

$$|h_1(e^{i\varphi})| = |h_2(e^{i\varphi})| = 1$$

для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. В силу теоремы В.И. Смирнова (см. [6, гл. 9, § 4, теорема 4]), это означает, что $|h_1(z)| = 1$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Следовательно, $h(z) = \gamma(\alpha^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 z^2)$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. Учитывая (10), отсюда получаем $\beta = 0$, что противоречит нашему предположению. Данное рассуждение и формулы (31) и (32) показывают, что $\beta = a_1 = a_{-1} = 0$ и $|h(e^{i\varphi})| = b_0$ для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. Как и выше, отсюда и из теоремы В.И. Смирнова заключаем, что h – тождественная константа. Учитывая (10) и (8), имеем $h(z) = a$ в $\mathbb{D}$ и $\psi(z) = az + \psi_0$ в A . Таким образом, полагая $R = a$ и $z_0 = \psi_0$, приходим к утверждению теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Очевидно, при любом достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9(1-\varepsilon)^2} < (1-\varepsilon)^2. \quad (34)$$

Для таких ε обозначим

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 - \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = z - \frac{2}{3z} - \frac{1}{27z^3}, \quad z \in A_\varepsilon. \quad (35)$$

Для любых $z_1, z_2 \in A_\varepsilon$ имеем оценки

$$|z_1 z_2| > (1 - \varepsilon)^2, \quad |z_1^{-2} + (z_1 z_2)^{-1} + z_2^{-2}| < \frac{3}{(1 - \varepsilon)^2}. \quad (36)$$

Кроме того, из (35) находим

$$\Phi(z_1) - \Phi(z_2) = (z_1 - z_2) \left(1 + \frac{1}{z_1 z_2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{27} (z_1^{-2} + (z_2 z_1)^{-1} + z_2^{-2}) \right) \right).$$

Учитывая неравенства (34) и (36), из последнего соотношения заключаем, что $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Таким образом, Φ однолистка в области A_ε . Положим

$$\Phi(A_\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A_\varepsilon\},$$

и обозначим через g обратную к Φ функцию, действующую из $\Phi(A_\varepsilon)$ на A_ε . Из формулы (35) следует, что при любом $z \in A_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |\Phi(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3}.$$

Отсюда и из определения g получаем, что

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |g(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} \quad (37)$$

при всех $z \in \Phi(A_\varepsilon)$.

Положим теперь

$$G = \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(A)}, \quad \text{где} \quad \Phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A\}.$$

В силу однолиственности Φ множество G является ограниченной областью с гладкой жордановой границей $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in \mathbb{T}\}$. Кроме того, поскольку

$$\Phi(1) = -\Phi(-1) = \frac{8}{27} \quad \text{и} \quad \Phi(i) = -\Phi(-i) = \frac{44}{27}i,$$

область G не является кругом.

Рассмотрим функции

$$f_1 = \ln |g|, \quad f_2 = \frac{10}{9} \ln |g| - \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{g^2} \right),$$

$$f_3 = \frac{10}{9} \ln |g| + \frac{1}{6} \operatorname{Re} \left(g^2 - \frac{1}{g^2} \right).$$

Из определения g следует, что g голоморфна в $\Phi(A_\varepsilon)$ и не обращается в нуль. Отсюда получаем, что функции f_1, f_2, f_3 являются гармоническими в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и непрерывными в $\mathbb{C} \setminus G$. Используя также (37), приходим к выводу, что функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют всем требованиям теоремы 2.

1. Бляшке В. Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
2. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.

3. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – М.: Наука, 1983. – 360 с.
4. Поля Г., Сеге Г. Изометрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
5. Беренштейн К.А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. ВИНТИ. – 1989. – **54**. – С. 5–111.
6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 630 с.
7. Волчков В.В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Известия АН России. Сер. матем. – 1994. – **58**, № 1. – С. 182–194.
8. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

A new property of a disk.

It is shown that some overdetermined boundary Neumann problem has a solution only for a disk.

Keywords: *harmonic functions, boundary Neumann problem, Hardy spaces.*

Донецкий национальный ун-т
valeriyvolchkov@gmail.com
volna936@gmail.com

Получено 25.08.19

UDK 517.923

©2019. Ya. I. Granovskyi

KREIN EXTENSION OF AN EVEN ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR ON A FINITE INTERVAL

We describe the Krein extension of minimal operator associated with the expression $\mathcal{A} := (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}$ on a finite interval (a, b) in terms of boundary conditions. All non-negative extensions of the operator A as well as extensions with a finite number of negative squares are described.

Keywords: non-negative extension, Friedrichs' extension, Krein's extension, boundary triplet, Weyl function.

1. Introduction. Let A be a semi-bounded symmetric operator in a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$. It is well known that the operator A admits self-adjoint extensions preserving the lower bound (see [1, Ch. VIII] and [31, I]). According to the classical Krein's result [31, I], in the set $\text{Ext}_A(0, \infty)$ of all non-negative self-adjoint extensions of the operator A , there exist two «extreme» extensions $\hat{A}_F$ and $\hat{A}_K$ uniquely determined by the following inequalities:

$$\left(\hat{A}_F + x\right)^{-1} \leq \left(\tilde{A} + x\right)^{-1} \leq \left(\hat{A}_K + x\right)^{-1}, \quad x \in (0, \infty), \quad \tilde{A} \in \text{Ext}_A(0, \infty). \quad (1)$$

The extension $\hat{A}_F$ is called Friedrichs' (or a hard), and the extension $\hat{A}_K$ is called Krein's (or a soft), see [31, I]. In the case of positively definite operator $A > \varepsilon I > 0$, M.G. Krein showed that

$$\hat{A}_K = A^* \upharpoonright (\text{dom } A \dot{+} \ker A^*) \quad (2)$$

(see [31, I]).

In the case of non-negative operator $A \geq 0$, the extensions $\hat{A}_F$ and $\hat{A}_K$ were first described in [13] in terms of abstract boundary conditions. Namely, it was shown that

$$\begin{aligned} \text{dom } \hat{A}_K &= \{f \in \text{dom } A^* : \Gamma_1 f = M(0) \Gamma_0 f\}, \\ \text{dom } \hat{A}_F &= \{f \in \text{dom } A^* : \Gamma_1 f = M(-\infty) \Gamma_0 f\}, \end{aligned} \quad (3)$$

where $M(0) = M(0-)$ is a limit value of the Weyl function at zero, and $M(-\infty)$ is a limit value of the Weyl function at infinity (see Definition 2.3).

Description of the Friedrichs extension independent of (3) is known in many cases. For instance, M.G. Krein showed that for ordinary differential operators on a finite interval extension $\hat{A}_F$ is generated by the Dirichlet problem [31, II].

H. Kalf in [27] investigated the general three-term Sturm–Liouville differential expression

$$\tau u = \frac{1}{k} [-(pu')' + qu] \quad (4)$$

on an interval $(0, \infty)$ under the following assumptions on coefficients:

- (i) $k, p > 0$ a.e. on $(0, \infty)$; $k, 1/p \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$; $q \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$ is real-valued.
- (ii) There exists a number $\mu \in \mathbb{R}$ and functions $g_0, g_\infty \in AC_{\text{loc}}(0, \infty)$ with $pg'_0, pg'_\infty \in AC_{\text{loc}}(0, \infty)$ and $g_0 > 0$ near 0, $g_\infty > 0$ near ∞ such that

$$\int_0^\infty \frac{1}{pg_0^2} = \int_0^\infty \frac{1}{pg_\infty^2} = \infty \quad (5)$$

and

$$q \geq \frac{(pg'_0)'}{g_0} - \mu k \quad \text{near } 0, \quad q \geq \frac{(pg'_\infty)'}{g_\infty} - \mu k \quad \text{near } \infty. \quad (6)$$

The main result of the paper [27] is the following description of Friedrichs' extension $\widehat{T}_F$ of the minimal operator $T_{\min}$ associated with (4):

$$\text{dom } \widehat{T}_F = \left\{ u \in \text{dom } T_{\max} : \int_0^\infty pg_0^2 \left| \left(\frac{u}{g_0} \right)' \right|^2 < \infty, \int_0^\infty pg_\infty^2 \left| \left(\frac{u}{g_\infty} \right)' \right|^2 < \infty \right\}. \quad (7)$$

For more information see [27, Theorem 1] and related remarks.

This result has been extended in [16] to the case of singular differential operators on arbitrary intervals $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ associated with four-term general differential expressions of the type

$$\tau u = \frac{1}{k} \left(-(u^{[1]})' + su^{[1]} + qu \right), \quad (8)$$

where

$$u^{[1]} := p[u' + su], \quad (9)$$

and the coefficients p, q, k, s are real-valued and Lebesgue measurable on (a, b) , with $p \neq 0, k > 0$ a.e. on (a, b) , and $p^{-1}, q, k, s \in L^1_{\text{loc}}((a, b); dx)$, and u is supposed to satisfy

$$u \in AC_{\text{loc}}(a, b), \quad u^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(a, b). \quad (10)$$

In particular, this setup implies that τ permits a distributional potential coefficient, including potentials in $H^{-1}_{\text{loc}}(a, b)$.

Imposing additional to (5)–(6) assumptions on coefficients, the authors characterize the Friedrichs extension of $T_{\min}$ by the same conditions (7). For more details see [16, Theorems 11.17 and 11.19].

In [16] it is also described the Krein extension of $T_{\min}$ on a finite interval (a, b) in the special case where τ is regular (i.e. p^{-1}, q, k and s are integrable near a and b). A description is given as follows:

$$\text{dom } \widehat{T}_K = \left\{ g \in \text{dom } T_{\max} : \begin{pmatrix} g(b) \\ g^{[1]}(b) \end{pmatrix} = R_K \begin{pmatrix} g(a) \\ g^{[1]}(a) \end{pmatrix} \right\}, \quad (11)$$

where

$$R_K = \frac{1}{u_1^{[1]}(a)} \begin{pmatrix} -u_2^{[1]}(a) & 1 \\ u_1^{[1]}(a)u_2^{[1]}(b) - u_1^{[1]}(b)u_2^{[1]}(a) & u_1^{[1]}(b) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

and $u_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, are positive solutions of $\tau u = 0$ determined by the conditions

$$\begin{aligned} u_1(a) &= 0, & u_1(b) &= 1, \\ u_2(a) &= 1, & u_2(b) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

For more details see [16, Theorem 12.3].

Several papers (see [16]–[19], [27]–[30] and the references therein) are devoted to the spectral analysis of boundary value problems for the one-parametric Bessel's differential expression

$$\tau_\nu = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad \nu \in [0, 1) \setminus \{1/2\}. \quad (14)$$

We especially note the papers of H. Kalf and W. Everitt [27, 17], where the explicit form of the Weyl–Titchmarsh m -coefficient of the expression τ_ν in $L^2(\mathbb{R}_+)$ was found.

In [2, 12, 17, 27], there were described domains of the Friedrichs extension for the minimal operator $A_{\nu,\infty}$ associated with expression (14) in $L^2(\mathbb{R}_+)$. In [17] the same was done for all self-adjoint extensions of the operator $A_{\nu,\infty}$. The most complete result was obtained in [2]. Namely, $\widehat{A}_{\nu,\infty,F}$ and $\widehat{A}_{\nu,\infty,K}$ are the restrictions of the maximal operator $A_{\nu,\infty}^* = A_{\nu,\infty,\max}$ to the domains

$$\text{dom } \widehat{A}_{\nu,\infty,F} = \left\{ f \in \text{dom } A_{\nu,\infty}^* : [f, x^{\frac{1}{2}+\nu}]_0 = 0 \right\} \quad (15)$$

and

$$\text{dom } \widehat{A}_{\nu,\infty,K} = \begin{cases} \{f \in \text{dom } A_{\nu,\infty}^* : [f, x^{\frac{1}{2}-\nu}]_0 = 0\}, & \nu \in (0, 1), \\ \{f \in \text{dom } A_{0,\infty}^* : [f, x^{\frac{1}{2}}]_0 = 0\}, & \nu = 0 \end{cases} \quad (16)$$

respectively, where

$$\text{dom } A_{\nu,\infty}^* = \begin{cases} H_0^2(\mathbb{R}_+) \dot{+} \text{span}\{x^{1/2+\nu}\xi(x), x^{1/2-\nu}\xi(x)\}, & \nu \in (0, 1), \\ H_0^2(\mathbb{R}_+) \dot{+} \text{span}\{x^{1/2}\xi(x), x^{1/2}\log(x)\xi(x)\}, & \nu = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Here $[f, g]_x := f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)}$ for all $x \in \mathbb{R}_+$, and $\xi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$ is a function such that $\xi(x) = 1$ whenever $x \in [0, 1]$. For more details see [2, Proposition 5.7 and Remark 5.8].

Friedrichs' and Krein's extensions $\widehat{A}_{\nu,b,F}$ and $\widehat{A}_{\nu,b,K}$ of the minimal operator corresponding to (14) on a finite interval $(0, b)$ were also described there (see [2, Proposition 4.5]).

M.G. Krein [31, II] investigated certain extensions of the minimal operator $T_{\min}$ associated in $L^2(a, b)$ with the following quasi-derivative expression

$$Tf := f^{[2n]}. \quad (18)$$

Here

$$\begin{aligned} f^{[k]}(x) &= f^{(k)}(x), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, & f^{[n]}(x) &= p_0(x)f^{(n)}(x), \\ f^{[n+k]}(x) &= p_k(x)f^{(n-k)}(x) - \frac{d}{dx}f^{[n+k-1]}(x), & k &\in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (19)$$

In the case of sufficiently smooth coefficients p_k , $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, expression (18) can be written in the Jacobi–Bertrand form:

$$f^{[2n]} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_{n-k} \frac{d^k f}{dx^k} \right). \quad (20)$$

In [31, II] Friedrichs' extension of the minimal operator $T_{\min}$ corresponds to Dirichlet realization:

$$\text{dom } \widehat{T}_F = \{f \in \text{dom } T_{\max} : f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}. \quad (21)$$

In the paper by A.A. Lunyov [32] the spectral properties of the operator A generated in $L^2(\mathbb{R}_+)$ by the differential expression

$$l := (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \quad (22)$$

are investigated, and the Krein extension of the corresponding minimal operator $A_{\min}$ in terms of boundary conditions is described in the following way:

$$y^{(n)}(0) = y^{(n+1)}(0) = \dots = y^{(2n-1)}(0) = 0. \quad (23)$$

Using the technique of boundary triplets and the corresponding Weyl functions the author found explicit form of the characteristic matrix and the corresponding spectral function for the Friedrichs and Krein extensions of the minimal operator $A_{\min}$ (see [32, Theorems 1 and 2]).

Also it is shown in [33] that if $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ is a sequence of densely defined closed symmetric and non-negative operators in $\mathfrak{H}_j$, and $\widehat{A}_{j,F}$ and $\widehat{A}_{j,K}$ are the Friedrichs and Krein extensions of A_j , respectively, and $A := \bigoplus_{j=1}^\infty A_j$, then

$$\widehat{A}_F = \bigoplus_{j=1}^\infty \widehat{A}_{j,F} \quad \text{and} \quad \widehat{A}_K = \bigoplus_{j=1}^\infty \widehat{A}_{j,K}. \quad (24)$$

For more details see [33, Corollary 3.10].

In [6] the unitary equivalence of the inverse of the Krein extension (on the orthogonal complement of its kernel) of a densely defined, closed, strictly positive operator, $S \geq \varepsilon I_{\mathcal{H}}$ for some $\varepsilon > 0$ in a Hilbert space $\mathcal{H}$ to an abstract buckling problem operator is proved.

Several papers are devoted to Friedrichs' and Krein's extensions of perturbed Laplacian on bounded and unbounded domains.

For instance on the subject of semibounded extensions of non-negative symmetric operators we refer to M.Sh. Birman [10], G. Grubb [23] (elliptic operators on bounded domains with smooth boundary), J. Behrndt et al. [8, 9] (elliptic operators on Lipschitz domains), F. Gesztesy and M. Mitrea [20] (Laplacian on non-smooth domains).

In [5] the authors study spectral properties for $\widehat{H}_{K,\Omega}$, the Krein extension of the perturbed Laplacian $-\Delta + V$ defined on $C_0^\infty(\Omega)$, where V is measurable, bounded and nonnegative, in a bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ belonging to a class of nonsmooth domains which contains all convex domains, along with all domains of class $C^{1,r}$, $r > 1/2$.

See also [3, 4, 7, 11, 21, 24, 25, 26, 34] and the references therein.

However, the problem of finding $M(0)$ is nontrivial even in the case of positively definite operator. Its solution is known in some cases – see papers [12, Theorem 1.1], [2, Proposition 4.5 (ii), Proposition 5.7 (ii)], [11, Theorem 1], [32, Theorem 2] mentioned above.

Here we consider the minimal operator $A := A_{\min}$ associated with the differential expression

$$\mathcal{A} := (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \quad (25)$$

on a finite interval (a, b) , we describe its Krein's extension in terms of boundary conditions. In this way we find $M(0)$ for special (natural) boundary triplet for A^* . Note that the corresponding boundary operator is expressed by means of blocks of certain auxiliary Toeplitz matrix (see (39)). Using the technique of boundary triplets and the corresponding Weyl functions developed in [13] we describe all non-negative extensions of $A_{\min}$ as well as extensions with the finite negative spectrum.

2. Preliminaries. Let A be a densely defined closed symmetric operator in a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices $n_\pm(A) = \dim \mathfrak{N}_{\pm i} \leq \infty$, where $\mathfrak{N}_z := \ker(A^* - z)$ is the defect subspace.

DEFINITION 2.1. A closed extension A' of A is called a *proper one* if $A \subset A' \subset A^*$. The set of all proper extensions of A completed by the (non-proper) extensions A and A^* is denoted by Ext_A .

Assume that operator $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ is non-negative. Then the set $\text{Ext}_A(0, \infty)$ of its non-negative self-adjoint extensions is non-empty (see [1, 28]). Moreover, there is a maximal non-negative extension $\widehat{A}_F$ (also called Friedrichs' or hard extension), and there is a minimal non-negative extension $\widehat{A}_K$ (Krein's or soft extension) satisfying (1). For details we refer the reader to [1, 22].

DEFINITION 2.2. ([22]). A triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is called a boundary triplet for the adjoint operator A^* if $\mathcal{H}$ is an auxiliary Hilbert space and $\Gamma_0, \Gamma_1: \text{dom } A^* \rightarrow \mathcal{H}$ are linear mappings such that the abstract Green identity

$$(A^*f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^*g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom } A^*, \quad (26)$$

holds and the mapping $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}: \text{dom } A^* \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ is surjective.

First, note that a boundary triplet for A^* exists whenever the deficiency indices of A are equal, $n_+(A) = n_-(A)$. Moreover, $n_\pm(A) = \dim \mathcal{H}$ and $\ker \Gamma = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 = \text{dom } A$. Note also that Γ is a bounded mapping from $\mathfrak{H}_+ = \text{dom } A^*$ equipped with the graph norm to $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

A boundary triplet for A^* is not unique. Moreover, for any self-adjoint extension $\tilde{A} := \tilde{A}^*$ of A there exists a boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ such that $\ker \Gamma_0 = \text{dom } \tilde{A}$.

DEFINITION 2.3.([13]). Let A be a densely defined closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices, and let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* . The operator valued functions $\gamma(\cdot): \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ and $M(\cdot): \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0$, defined by

$$\gamma(z) := (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1} \quad \text{and} \quad M(z) := \Gamma_1 \gamma(z), \quad z \in \rho(A_0), \quad (27)$$

are called the γ -field and the Weyl function, respectively, corresponding to the boundary triplet Π .

Remark 2.4.([35], [1, Ch. VIII]). In the case of $n_{\pm}(A) = m < \infty$, the set of all self-adjoint extensions of the operator A is parametrized as follows:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A \ni \tilde{A} = \tilde{A}^* = A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \\ \text{where } CD^* = DC^*, \quad \det(CC^* + DD^*) \neq 0, \quad C, D \in \mathbb{C}^{m \times m}. \end{aligned} \quad (28)$$

DEFINITION 2.5. Let T be a self-adjoint operator in $\mathfrak{H}$, and let $E_T(\cdot)$ be its spectral measure. It is said that the operator T has κ negative eigenvalues if

$$\kappa_-(T) := \dim E_T(-\infty, 0) = \kappa. \quad (29)$$

In the following proposition all self-adjoint extensions of an operator $A \geq 0$ with a finite negative spectrum are described.

Proposition 2.6. ([13, 15]). *Let A be a densely defined non-negative symmetric operator in $\mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = m < \infty$, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* such that $A_0 \geq 0$, and let $A_{C,D}$ be an arbitrary self-adjoint extension of the form (28). Let also $M(\cdot)$ be the corresponding Weyl function. Then:*

(i) *There exist strong resolvent limits*

$$M(0) := s - R - \lim_{x \uparrow 0} M(x), \quad M(-\infty) := s - R - \lim_{x \downarrow -\infty} M(x). \quad (30)$$

(ii) $\text{dom } A_0 \cap \text{dom } \hat{A}_K = \text{dom } A$ ($\text{dom } A_0 \cap \text{dom } \hat{A}_F = \text{dom } A$) *if and only if* $M(0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ($M(-\infty) \in \mathbb{C}^{m \times m}$). *Moreover, in this case*

$$\hat{A}_K = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_0) \quad \left(\hat{A}_F = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - M(-\infty)\Gamma_0) \right). \quad (31)$$

(iii) $A_0 = \hat{A}_F$ ($A_0 = \hat{A}_K$) *if and only if*

$$\lim_{x \downarrow -\infty} (M(x)f, f) = -\infty \quad \left(\lim_{x \uparrow 0} (M(x)f, f) = +\infty \right), \quad f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}. \quad (32)$$

(iv) If $A_0 = \widehat{A}_F$, then the following identity holds:

$$\kappa_-(A_{C,D}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*). \quad (33)$$

In particular, $A_{C,D} \geq 0$ if and only if $CD^* - DM(0)D^* \geq 0$.

(v) The extension $A_B = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$ is symmetric (self-adjoint) if and only if B is symmetric (self-adjoint).

Theorem 2.7. (31, I, Theorem 14). Let A be a symmetric positively definite operator. Then $\text{dom } \widehat{A}_K = \text{dom } A \dot{+} \mathfrak{N}_0$, and

$$\widehat{A}_K(f + f_0) = Af \quad \text{for any } f \in \text{dom } A, f_0 \in \mathfrak{N}_0. \quad (34)$$

3. Main result. Let $A := A_{\min}$ be the minimal operator generated in $\mathfrak{H} = L^2(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, by the differential expression (25). In view of [14], the boundary triplet for $A^* := A_{\max}$ can be taken as

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2n}, \quad \Gamma_0 f = \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) \\ f(b) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f^{(n)}(a) \\ (-1)^n f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ -f^{(n)}(b) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

The main result of this paper is presented by the following theorem.

Theorem 3.1. Let A be the minimal operator defined by (25). Let also $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be the boundary triplet for A^* defined by relations (35). Then the following assertions hold.

(i) The domain of Krein's extension $\widehat{A}_K$ is of the form

$$\text{dom } \widehat{A}_K = \left\{ f \in W^{2n,2}(a, b) : \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f(a) \end{pmatrix} \right\}, \quad (36)$$

where T is the Toeplitz lower-triangular $2n \times 2n$ matrix of the form

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & & \mathbf{0} \\ b-a & 1 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(b-a)^{2n-2}}{(2n-2)!} & \dots & b-a & 1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

(ii) Krein's extension $\widehat{A}_K$ is given by

$$\text{dom } \widehat{A}_K = \{f \in W^{2n,2}(a, b) : \Gamma_1 f = B_K \Gamma_0 f\}, \quad (38)$$

where

$$B_K = \begin{pmatrix} QT_2^{-1}T_1S & -QT_2^{-1}S \\ -QT_1T_2^{-1}T_1S & QT_1T_2^{-1}S \end{pmatrix}, \quad (39)$$

and T_1, T_2, Q, S are the following $n \times n$ matrices:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ b-a & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & b-a & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} (-1)^n & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \\ T_2 &= \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^n}{n!} & \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & b-a \\ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} & \frac{(b-a)^n}{n!} & \cdots & \frac{(b-a)^2}{2!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(b-a)^{2n-2}}{(2n-2)!} & \cdots & \frac{(b-a)^n}{n!} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Proof. (i) Let us consider the k -th row in (36):

$$f^{(2n-k)}(b) = \sum_{m=1}^k \frac{f^{(2n-m)}(a)}{(2n-m)!} (b-a)^{2n-m}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (41)$$

Due to the Theorem 2.7, it suffices to prove (41) for $\ker A^* = \text{span}\{1, x, \dots, x^{2n-1}\}$. Since $\ker A^*$ consists of polynomials of degree not greater than $2n-1$, the formula (41) follows from Taylor's one for polynomials.

(ii) Let

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(b) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(a) \\ \vdots \\ f(a) \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ f^{(n)}(b) \end{pmatrix}, \\ U_4 &= \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f^{(n)}(a) \end{pmatrix}, \quad U_{1,t} = \begin{pmatrix} f(b) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}, \quad U_{2,t} = \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Then

$$\Gamma_0 f = \begin{pmatrix} SU_2 \\ SU_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{2,t} \\ U_{1,t} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} -QU_4 \\ QU_3 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

and hence the equality in (36) takes the form

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & \mathbb{O} \\ T_2 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{cases} U_3 = T_1 U_4 + \mathbb{O} U_2, \\ U_1 = T_2 U_4 + T_1 U_2 \end{cases} \quad (44)$$

Expressing U_4 and U_3 from the latter we get

$$\begin{cases} U_4 = T_2^{-1}U_1 - T_2^{-1}T_1U_2, \\ U_3 = T_1T_2^{-1}U_1 - T_1T_2^{-1}T_1U_2 \end{cases} \quad (45)$$

Multiplying from the left the first equality by $-Q$ and the second one by Q we obtain

$$\begin{cases} -QU_4 = -QT_2^{-1}U_1 + QT_2^{-1}T_1U_2, \\ QU_3 = QT_1T_2^{-1}U_1 - QT_1T_2^{-1}T_1U_2 \end{cases} \quad (46)$$

Since $U_1 = SU_{1,t}$, $U_2 = SU_{2,t}$ then (46) yields

$$\begin{cases} -QU_4 = QT_2^{-1}T_1SU_{2,t} - QT_2^{-1}SU_{1,t}, \\ QU_3 = -QT_1T_2^{-1}T_1SU_{2,t} + QT_1T_2^{-1}SU_{1,t} \end{cases} \quad (47)$$

or

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} QT_2^{-1}T_1S & -QT_2^{-1}S \\ -QT_1T_2^{-1}T_1S & QT_1T_2^{-1}S \end{pmatrix} \Gamma_0 f. \quad (48)$$

Thus, we arrive at the representation $\Gamma_1 f = B_K \Gamma_0 f$, and the equality (39) is proved.

□

Proposition 3.2. *Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be the boundary triplet for A^* defined by (35), and let $M(\cdot)$ be the corresponding Weyl function. Then $B_K = M(0) = B_K^*$.*

Proof. Combining Proposition 2.6 (ii) with Theorem 3.1 (ii) we arrive at the desired result. □

In the following theorem we describe all non-negative extensions of the operator A as well as extensions having exactly κ negative squares.

Theorem 3.3. *Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be the boundary triplet for operator A^* defined by (35), and let B_K be the matrix defined by (39). Let also matrices $C, D \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ satisfy the conditions $CD^* = DC^*$, $\det(CC^* + DD^*) \neq 0$, and*

$$A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0) = A_{C,D}^*. \quad (49)$$

Then:

- (i) *The following equivalence holds:*

$$\kappa_-(A_{C,D}) = \kappa \iff \kappa_-(CD^* - DB_K D^*) = \kappa. \quad (50)$$

In particular, $A_{C,D} \geq 0 \iff CD^ - DB_K D^* \geq 0$.*

- (ii) *The operator $A_{C,D}$ is positively definite if and only if the same holds for the matrix $CD^* - DB_K D^*$.*

Proof. Due to Proposition 3.3, one has $B_K = M(0)$. To complete the proof, it suffices to use Proposition 2.6 (iv). $\square$

Corollary 3.4. *Let $\{A_j\}_{j=1}^\infty := \{A_{j,\min}\}_{j=1}^\infty$ be the sequence of minimal operators generated in $\mathfrak{H}_j = L^2(a_j, b_j)$, respectively, by the differential expression (25). Let also $A := \bigoplus_{j=1}^\infty A_j$. Then*

$$\widehat{A}_K = \bigoplus_{j=1}^\infty \widehat{A}_{j,K}, \quad (51)$$

where $\widehat{A}_{j,K}$ is given by (36) and (38).

Proof. Combining Theorem 3.1 with Corollary 3.10 from [33] we arrived at the desired result. $\square$

4. Examples. To facilitate the reading, let us provide five examples for $a = 0, b = 1$ and $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Example 4.1. Let $n = 1$, i.e. $Ay = -y''$. Then

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

and the boundary conditions from (36) take the form:

$$\begin{cases} f'(1) = f'(0), \\ f(1) = f'(0) + f(0) \end{cases} \quad (53)$$

It follows from (40) and (39) that

$$T_1 = (1), \quad T_2 = (1), \quad Q = (-1), \quad S = (1), \quad (54)$$

and

$$B_K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

is symmetric as required.

Example 4.2. Let $n = 2$, i.e., $Ay = y^{IV}$. Then

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

and the boundary conditions from (36) take the form:

$$\begin{cases} f'''(1) = f'''(0), \\ f''(1) = f'''(0) + f''(0), \\ f'(1) = \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0), \\ f(1) = \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0) \end{cases} \quad (57)$$

It follows from (40) and (39) that

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

and

$$B_K = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & -4 & 6 & -2 \\ 12 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Example 4.3. Let $n = 3$, i.e. $Ay = -y^{VI}$. Then

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

and the boundary conditions are the following:

$$\begin{cases} f^V(1) = f^V(0), \\ f^{IV}(1) = f^V(0) + f^{IV}(0), \\ f'''(1) = \frac{1}{2}f^V(0) + f^{IV}(0) + f'''(0), \\ f''(1) = \frac{1}{6}f^V(0) + \frac{1}{2}f^{IV}(0) + f'''(0) + f''(0), \\ f'(1) = \frac{1}{24}f^V(0) + \frac{1}{6}f^{IV}(0) + \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0), \\ f(1) = \frac{1}{120}f^V(0) + \frac{1}{24}f^{IV}(0) + \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0) \end{cases} \quad (61)$$

Both (40) and (39) imply that

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

and

$$B_K = \begin{pmatrix} -720 & -360 & -60 & 720 & -360 & 60 \\ -360 & -192 & -36 & 360 & -168 & 24 \\ -60 & -36 & -9 & 60 & -24 & 3 \\ 720 & 360 & 60 & -720 & 360 & -60 \\ -360 & -168 & -24 & 360 & -192 & 36 \\ 60 & 24 & 3 & -60 & 36 & -9 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Example 4.4. Let $n = 4$, i.e., $Ay = y^{VIII}$. Then

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

and the boundary conditions are the following:

$$\begin{cases} f^{VII}(1) = f^{VII}(0), \\ f^{VI}(1) = f^{VII}(0) + f^{VI}(0), \\ f^V(1) = \frac{1}{2}f^{VII}(0) + f^{VI}(0) + f^V(0), \\ f^{IV}(1) = \frac{1}{6}f^{VII}(0) + \frac{1}{2}f^{VI}(0) + f^V(0) + f^{IV}(0), \\ f'''(1) = \frac{1}{24}f^{VII}(0) + \frac{1}{6}f^{VI}(0) + \frac{1}{2}f^V(0) + f^{IV}(0) + f'''(0), \\ f''(1) = \frac{1}{120}f^{VII}(0) + \frac{1}{24}f^{VI}(0) + \frac{1}{6}f^V(0) + \frac{1}{2}f^{IV}(0) + f'''(0) + f''(0), \\ f'(1) = \frac{1}{720}f^{VII}(0) + \frac{1}{120}f^{VI}(0) + \frac{1}{24}f^V(0) + \frac{1}{6}f^{IV}(0) + \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0), \\ f(1) = \frac{1}{5040}f^{VII}(0) + \frac{1}{720}f^{VI}(0) + \frac{1}{120}f^V(0) + \frac{1}{24}f^{IV}(0) + \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0). \end{cases}$$

Both (40) and (39) imply that

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (65)$$

and

$$B_K = \begin{pmatrix} -100800 & -50400 & -10080 & -840 & 100800 & -50400 & 10080 & -840 \\ -50400 & -25920 & -5400 & -480 & 50400 & -24480 & 4680 & -360 \\ -10080 & -5400 & -1200 & -120 & 10080 & -4680 & 840 & -60 \\ -840 & -480 & -120 & -16 & 840 & -360 & 60 & -4 \\ 100800 & 50400 & 10080 & 840 & -100800 & 50400 & -10080 & 840 \\ -50400 & -24480 & -4680 & -360 & 50400 & -25920 & 5400 & -480 \\ 10080 & 4680 & 840 & 60 & -10080 & 5400 & -1200 & 120 \\ -840 & -360 & -60 & -4 & 840 & -480 & 120 & -16 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Example 4.5. Let $n = 5$, i.e., $Ay = -y^X$. Then

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{40320} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{362880} & \frac{1}{40320} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

and the boundary conditions are the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{IX}(1) = f^{IX}(0), \\ f^{VIII}(1) = f^{IX}(0) + f^{VIII}(0), \\ f^{VII}(1) = \frac{1}{2}f^{IX}(0) + f^{VIII}(0) + f^{VII}(0), \\ f^{VI}(1) = \frac{1}{6}f^{IX}(0) + \frac{1}{2}f^{VIII}(0) + f^{VII}(0) + f^{VI}(0), \\ f^V(1) = \frac{1}{24}f^{IX}(0) + \frac{1}{6}f^{VIII}(0) + \frac{1}{2}f^{VII}(0) + f^{VI}(0) + f^V(0), \\ f^{IV}(1) = \frac{1}{120}f^{IX}(0) + \frac{1}{24}f^{VIII}(0) + \frac{1}{6}f^{VII}(0) + \frac{1}{2}f^{VI}(0) + f^V(0) + f^{IV}(0), \\ f'''(1) = \frac{1}{720}f^{IX}(0) + \frac{1}{120}f^{VIII}(0) + \frac{1}{24}f^{VII}(0) + \frac{1}{6}f^{VI}(0) + \frac{1}{2}f^V(0) + f^{IV}(0) + \\ + f'''(0), \\ f''(1) = \frac{1}{5040}f^{IX}(0) + \frac{1}{720}f^{VIII}(0) + \frac{1}{120}f^{VII}(0) + \frac{1}{24}f^{VI}(0) + \frac{1}{6}f^V(0) + \\ + \frac{1}{2}f^{IV}(0) + f'''(0) + f''(0), \\ f'(1) = \frac{1}{40320}f^{IX}(0) + \frac{1}{5040}f^{VIII}(0) + \frac{1}{720}f^{VII}(0) + \frac{1}{120}f^{VI}(0) + \frac{1}{24}f^V(0) + \\ + \frac{1}{6}f^{IV}(0) + \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0), \\ f(1) = \frac{1}{362880}f^{IX}(0) + \frac{1}{40320}f^{VIII}(0) + \frac{1}{5040}f^{VII}(0) + \frac{1}{720}f^{VI}(0) + \frac{1}{120}f^V(0) + \\ + \frac{1}{24}f^{IV}(0) + \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0) \end{array} \right.$$

Both (40) and (39) imply that

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{40320} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{362880} & \frac{1}{40320} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{68}$$

and the matrix B_K is of the form $B_K = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, where

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} -25401600 & -12700800 & -2721600 & -302400 & -15120 \\ -12700800 & -6451200 & -1411200 & -161280 & -8400 \\ -2721600 & -1411200 & -317520 & -37800 & -2100 \\ -302400 & -161280 & -37800 & -4800 & -300 \\ -15120 & -8400 & -2100 & -300 & -25 \end{pmatrix}, \\
 B_2 &= \begin{pmatrix} 25401600 & -12700800 & 2721600 & -302400 & 15120 \\ 12700800 & -6249600 & 1310400 & -141120 & 6720 \\ 2721600 & -1310400 & 267120 & -27720 & 1260 \\ 302400 & -141120 & 27720 & -2760 & 120 \\ 15120 & -6720 & 1260 & -120 & 5 \end{pmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} 25401600 & 12700800 & 2721600 & 302400 & 15120 \\ -12700800 & -6249600 & -1310400 & -141120 & -6720 \\ 2721600 & 1310400 & 267120 & 27720 & 1260 \\ -302400 & -141120 & -27720 & -2760 & -120 \\ 15120 & 6720 & 1260 & 120 & 5 \end{pmatrix}, \\
 B_4 &= \begin{pmatrix} -25401600 & 12700800 & -2721600 & 302400 & -15120 \\ 12700800 & -6451200 & 1411200 & -161280 & 8400 \\ -2721600 & 1411200 & -317520 & 37800 & -2100 \\ 302400 & -161280 & 37800 & -4800 & 300 \\ -15120 & 8400 & -2100 & 300 & -25 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{69}$$

1. *Akhiezer N.I., Glazman I.M.* Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces. – M.: Nauka, 1978. – 544 p.
2. *Ananieva A.Yu., Budyika V.S.* To the spectral theory of the Bessel operator on finite interval and half-line // J. of Math. Scien. – 2015. – **211**, no. 5. – P. 624–645.
3. *Ando T. and Nishio K.* Positive selfadjoint extensions of positive symmetric operators // Tohoku Math. J. – 1970. – **22**. – P. 65–75.

4. *Arlinskii Yu.M.* Abstract boundary conditions for maximal sectorial extensions of sectorial operators // *Math. Nachr.* – 2000. – **209**. – P. 5–36.
5. *Ashbaugh M.S., Gesztesy F., Mitrea M., Shterenberg R. and Teschl G.* Spectral theory for perturbed Krein Laplacians in nonsmooth domains // *Adv. Math.* – 2010. – **223**. – P. 1372–1467.
6. *Ashbaugh M.S., Gesztesy F., Mitrea M., Shterenberg R. and Teschl G.* The Krein-von Neumann extension and its connection to an abstract buckling problem // *Math. Nachr.* – 2010. – **283**, no. 2. – P. 165–179.
7. *Ashbaugh M.S., Gesztesy F., Mitrea M., Shterenberg R. and Teschl G.* A survey of the Krein-von Neumann extension, the corresponding abstract buckling problem, and Weyl-type spectral asymptotics for perturbed Krein Laplacians in non smooth domains // In *Mathematical Physics, Spectral Theory and Stochastic Analysis*, M. Demuth and W. Kirsh (eds.), *Operator Theory: Advances and Applications*. – **232**. – Basel: Birkhäuser, Springer, 2013. – P. 1–106.
8. *Behrndt J., Gesztesy F., Micheler T. and Mitrea M.* The Krein-von Neumann realization of perturbed Laplacians on bounded Lipschitz domains // *Operator Theory: Advances and Applications*. – **255**. – Basel: Birkhäuser, Springer, 2016. – P. 49–66.
9. *Behrndt J. and Micheler T.* Elliptic differential operators on Lipschitz domains and abstract boundary value problems // *J. Funct. Anal.* – 2014. – **267**. – P. 3657–3709.
10. *Birman M.Sh.* Perturbations of the continuous spectrum of a singular elliptic operator by varying the boundary and the boundary conditions // *Vestnik Leningrad Univ.* – 1962. – **17**, no. 1. – P. 22–55 (Russian); transl. in *Spectral Theory of Differential Operators: M. Sh. Birman 80th Anniversary Collection*, T. Suslina and D. Yafaev (eds.), *AMS Translation, Ser. 2, Advances in the Mathematical Sciences*. – 2008. – **225**. RI: AMS, Providence. – P. 19–53.
11. *Malkolm Brown B., Christiansen J.S.* On the Krein and Friedrichs extension of a positive Jacobi operator // *Expo. Math.* – 2005. – **23**. – P. 176–186.
12. *Bruneau L., Dereziński J., Georgescu V.* Homogeneous Schrödinger Operators on Half-line // *Ann. Henri Poincaré*. – 2011. – **12**. – P. 547–590.
13. *Derkach V.A., Malamud M.M.* Generalized resolvent and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // *J. Funct. Anal.* – 1991. – **95**, no. 1. – P. 1–95.
14. *Derkach V.A., Malamud M.M.* Characteristic of almost solvable extensions of a Hermitian operators // *Ukr. Mat. Zh.* – 1992. – **44**, no. 4. – P. 435–459.
15. *Derkach V.A., Malamud M.M.* The extension theory of Hermitian operators and the moment problem // *J. Math. Sci. (New York)* – 1995. – **73**. – P. 141–242.
16. *Eckhardt J., Gesztesy F., Nichols R., Teschl G.* Weyl–Titchmarsh Theory for Sturm–Liouville Operators With Distributional Potentials // *Opuscula Math.* – 2013. – **33**, no. 3. – P. 467–563.
17. *Everitt W.N., Kalf H.* The Bessel differential equation and the Hankel transform // *Jour. of Comput. and App. Math.* – 2007. – **208**. – P. 3–19.
18. *Fulton C.* Titchmarsh–Weyl m -functions for second-order Sturm–Liouville problems with two singular endpoints // *Math. Nachr.* – 2008. – **281**, no. 10. – P. 1418–1475.
19. *Fulton C., Langer H.* Sturm–Liouville operators with singularities and generalized Nevanlinna functions // *Complex Analysis and Operator Theory*. – 2010. – **4**, no. 2. – P. 179–243.
20. *Gesztesy F. and Mitrea M.* A description of all self-adjoint extensions of the laplacian and Krein-type resolvent formulas on non-smooth domains // *J. Analyse Math.* – 2011. – **113**. – P. 53–172.
21. *Gesztesy F. and Mitrea M.* Robin-to-Robin maps and Krein-type resolvent formulas for Schrödinger operators on bounded Lipschitz domains // In *Modern Analysis and Applications. The Mark Krein Centenary Conference*. – **2**. Adamyan V., Berezhansky Y.M., Gohberg I., Gorbachuk M.L., Gorbachuk V., Kochubei A.N., Langer H. and Popov G. (eds.), *Operator Theory: Advances and Applications*. – **191**. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 81–113.
22. *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991. – **48**. – 284 p.
23. *Grubb G.* A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* – 1968. – **22**, no. 3. – P. 425–513.
24. *Grubb G.* Spectral asymptotics for the «soft» selfadjoint extension of a symmetric elliptic differential

- operator // J. Operator Th. – 1983. – **10**. – P. 9–20.
25. *Hartman P.* Perturbation of spectra and Krein extensions // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1957. – **5**, no. 2. – P. 341–354.
 26. *Hassi S., Malamud M. and H. de Snoo* On Krein’s extension theory of nonnegative operators // Math. Nachr. – 2004. – **274–275**. – P. 40–73.
 27. *Kalf H.* A characterization of the Friedrichs extension of Sturm-Liouville operators // J. London Math. Soc. – 1978. – **17**, no. 2. – P. 511–521.
 28. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. – Berlin, Springer-Verlag, 1966. – 740 p.
 29. *Kochubei A.N.* Self-adjoint extensions of the Schrödinger operator with singular potential // Sib. Mat. Zh. – 1991. – **32**, no. 3. – P. 60–69.
 30. *Kostenko A., Teschl G.* On the singular Weyl-Titchmarsh function of perturbed spherical Schrödinger operators // J. Diff. Equ – 2011. – **250**. – P. 3701–3739.
 31. *Krein M.G.* The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian transformations and its applications // I, Math. Sb. – 1947. – **20**, no. 3. – P. 431–495; II, ibid. – 1947. – **21**, no. 3. – P. 365–404 (Russian).
 32. *Lunyov A.A.* Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2013. – **19**, no. 4. – P. 319–326.
 33. *Malamud M.M., Neidhardt H.* Sturm-Liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence // J. Diff. Equ. – 2012. – **252**. – P. 5875–5922, arXiv:0907.0650v1 [math-ph].
 34. *Nenciu G.* Applications of the Krein resolvent formula to the theory of self-adjoint extensions of positive symmetric operators // J. Operator Th. – 1983. – **10**. – P. 209–218.
 35. *Rofe-Beketov F.S.* Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector-valued functions // Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Prilozen. – 1969. – **8**. – P. 3–24 (Russian).

Я. И. Грановский

Крейновское расширение дифференциального оператора четного порядка на конечном отрезке.

Мы описываем крейновское расширение минимального оператора, ассоциированного с выражением $\mathcal{A} = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}$ на отрезке $[a, b]$, в терминах граничных условий. Описываются все неотрицательные расширения оператора $\mathcal{A}$, а также расширения, имеющие конечное число отрицательных квадратов.

Ключевые слова: неотрицательное расширение, фридрихсово расширение, крейновское расширение, граничная тройка, функция Вейля.

УДК 517.9:517.5

©2019. Д. А. Зарайский

КЛАСС ФУНКЦИЙ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ, ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЮЩИХСЯ СВОИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА «ПЕРИОДЕ»

Построен класс радиальных свёртывателей T , таких что решения однородного уравнения свёртки $f * T = 0$ однозначно определяются своим ограничением на выпуклую оболочку носителя T .

Ключевые слова: уравнения свёртки, периодичность в среднем.

1. Введение. Будем обозначать $B_r(a)$ – открытый шар радиуса r с центром в точке a в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\overline{B}_r(a)$ – замкнутый шар; полагаем также $B_r = B_r(0)$, $\overline{B}_r = \overline{B}_r(0)$. Пусть, далее, $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ – пространство радиальных (инвариантных относительно группы вращений $SO(n)$) распределений на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Для ненулевого распределения $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ обозначим $r(T)$ радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего $\text{supp } T$ (носитель T).

Для открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и распределений $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ область определения свёртки $f * T$ – множество $\{x \in \mathbb{R}^n : x - \text{supp } T \subset \mathcal{U}\}$, очевидно, открытое, [1, § 4]. Если $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ и $r = r(T)$, то область определения $f * T$ содержит множество

$$\mathcal{U}_r = \{x \in \mathcal{U} : \overline{B}_r(x) \subset \mathcal{U}\}.$$

Последнее также открыто и совпадает со всей областью определения $f * T$ в случаях, когда $\text{supp } T = \overline{B}_r$, либо когда $\mathcal{U}$ выпукло.

Классы решений однородного уравнения свёртки $f * T = 0$ (называемых также периодическими в среднем относительно T функциями), соответствующие радиальным свёртывателям T , изучались многими авторами, см. [2] и приведённую там библиографию. Для открытого множества $\mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать $\mathcal{D}'_T(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) : f * T = 0 \text{ на } \mathcal{U}_{r(T)}\}$, $C^\infty_T(\mathcal{U}) = \mathcal{D}'_T(\mathcal{U}) \cap C^\infty(\mathcal{U})$.

Например, в случае, когда $T = \chi_{[-r,r]}$ – индикатор отрезка, $f \in C^\infty_T(\mathbb{R})$ – это гладкие $2r$ -периодические функции на вещественной оси, имеющие нулевой интеграл по периоду. Таким образом, выпуклую оболочку носителя T , $\overline{B}_{r(T)}$, естественно считать «периодом» периодической в среднем функции $f \in C^\infty_T(\mathbb{R})$.

Как и обычные периодические функции, при $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ периодические в среднем функции определяются значениями вблизи своего «периода». Имеет место следующая теорема единственности, впервые установленная Ф. Йоном для сферических средних [3, гл. VI]: если $f \in \mathcal{D}'_T(B_R)$, и $f = 0$ на $B_{r+\varepsilon}$, $r < r + \varepsilon < R$, то $f = 0$ на B_R [2, § 14.2]. Кроме того, если $f \in C^\infty_T(B_R)$, единственность имеет место и в предположении, что $f = 0$ на B_r [2, Ch. 14], причём для определённых T отбросить условие гладкости, либо заменить порядок гладкости на конечный здесь уже нельзя ([3, гл. VI] – случай сферических средних, [4, § 6] – случай $T = \chi_{B_r}$).

Отметим следующий результат автора [5]: с точки зрения теоремы единственности для $\mathcal{D}'_T$ свёртыватели $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ делятся на два класса в зависимости от того, имеется ли у распределения $\text{pr}_1^* T$ фундаментальное решение $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $E * T = \delta_0$, с носителем в $[r(T), \infty)$, или нет (через $\text{pr}_1^* T$ мы обозначаем прямой образ распределения T при проектировании на первую координату $\text{pr}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{pr}_1(x) = x_1 = (x, e_1)$, $x \in \mathbb{R}^n$). В первом случае (включающем случаи сферических и шаровых средних) можно дать описание множества всех $SO(n)$ -финитных распределений из $\mathcal{D}'_T(B_R)$, равных 0 на $B_{r(T)}$, во втором случае это множество состоит только из нулевого распределения, и для $\mathcal{D}'_T(B_R)$ имеет место более сильная теорема единственности – того же вида, что и для $C_T^\infty(B_R)$ [5].

С использованием приведённого результата можно доказать обобщение «теоремы о полусфере» В. В. Волчкова [2, § 14.2] (теорема единственности, в которой гладкость f требуется лишь в окрестности полусферы радиуса $r(T)$), где полусфера заменяется более общим множеством [6].

Во время доклада автора [6] В. В. Волчков задал ему вопрос, сводится ли класс свёртывателей $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$, для которых имеет место указанная более сильная форма теоремы единственности, к распределениям, гладким вблизи сферы $\{|x| = r(T)\}$, ср. [2, Th. 14.2]. Теорема 1 настоящей работы даёт отрицательный ответ на указанный вопрос и вместе с теоремой 2 описывает широкий класс свёртывателей T , для которых произвольное $f \in \mathcal{D}'_T(B_R)$ определяется своим ограничением на $B_{r(T)}$.

2. Формулировки основных результатов.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$, $r = r(T)$, и распределение T таково, что $\text{pr}_1^* T = \varphi^{(m)}$ в окрестности точки $-r$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, а $\varphi(t)$ – некоторая локально интегрируемая функция, для произвольного $k \in \mathbb{N}$ равная $o(|t + r|^k)$, $t \rightarrow -r$.

Тогда любое распределение $f \in \mathcal{D}'_T(B_R)$, равное 0 на B_r , равно 0 на B_R .

Следующее следствие обобщает утверждение (iii) теоремы 14.2 монографии [2] (где требуется гладкость T в окрестности сферы $\{x: |x| = r\}$).

Следствие. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$, $r = r(T)$, и T является интегрируемой функцией в окрестности сферы $\{x: |x| = r\}$, причём $T = o((r - |x|)^k)$, $|x| \rightarrow r$, для произвольного $k \in \mathbb{N}$. Тогда любое $f \in \mathcal{D}'_T(B_R)$, равное 0 на B_r , равно 0 на B_R .

Теорема 2. Пусть задана последовательность $\{T_j\}_{j=1}^\infty$ радиальных распределений порядка не выше k , где k не зависит от j , с носителями, содержащимися в $\overline{B_r}$. Тогда найдётся такая последовательность $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ положительных чисел, что для любых λ_j , не превосходящих по абсолютной величине γ_j , ряд $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j T_j$ сходится в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ к некоторому распределению T , причём, если $r(T) = r$, то T удовлетворяет условиям теоремы 1.

Отметим, что если существует последовательность точек

$$x_j \in \text{supp } T_j \setminus \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{j\}} \text{supp } T_i}, \quad (1)$$

$|x_j| \rightarrow r$, $j \rightarrow \infty$, то условие $r(T) = r$ в теореме 2 выполняется автоматически для произвольной последовательности $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$, содержащей бесконечное число нену-

левых членов. В частности, если $\{a_j\}_1^\infty$ – возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к r , то (1) выполнено для любых распределений T_j , ограничения которых на $B_{a_j, a_{j+1}} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < |x| < a_{j+1}\}$ отличны от нуля, а носители содержатся в $\overline{B_{a_j, a_{j+1}}}$. Это даёт большое число примеров свёртывателей, удовлетворяющих теореме 1 (при этом распределение T совпадает на шаровых слоях $B_{a_j, a_{j+1}}$ с $\lambda_j T_j$).

3. Доказательства.

Лемма 1. Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ – распределения с носителями, содержащимися в полупрямой $[0, \infty)$ и g является в окрестности нуля функцией, такой что для произвольного k $g(t) = o(t^k)$, $t \rightarrow 0$. Тогда свёртка $f * g$ не может совпадать в окрестности нуля с δ_0 .

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если распределение f имеет порядок m в окрестности 0, то $f * \chi_+^{m+1}$ является вблизи нуля непрерывной функцией. (Здесь и далее, следуя [1], обозначаем χ_+^s , $s > -1$, функцию из $L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, равную нулю на $(-\infty, 0)$ и $x^s/\Gamma(s+1)$ на $(0, \infty)$).

Предположим, что заключение леммы не выполнено. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ на $(-\infty, \varepsilon)$ имеет место равенство $f * g = \delta_0$, и распределения $f * \chi_+^{m+1}$ и g являются ограниченными функциями на том же интервале, для которых при $t \in [0, \varepsilon)$ выполнены неравенства $|(f * \chi_+^{m+1})(t)| \leq C_1$, $|g(t)| \leq C_2 t^{m+1}$.

Но тогда при $t \in (0, \varepsilon)$

$$t^{m+1}/(m+1)! = \chi_+^{m+1}(t) = |(f * \chi_+^{m+1} * g)(t)| \leq C_1 C_2 t^{m+2}/(m+2).$$

Последнее противоречие и доказывает лемму. $\square$

Лемма 2. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $-r \in \text{supp } T \subset [-r, r]$, и в окрестности точки $-r$ имеет место равенство $T = \varphi^{(m)}$, где $\varphi(t)$ – локально интегрируемая функция, такая что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ $\varphi(t) = o(|t+r|^k)$, $t \rightarrow -r$. Тогда у распределения T не существует фундаментального решения с носителем в $[r, \infty)$.

Доказательство. По условию для достаточно малого ε функция φ принадлежит $L^1(-r-\varepsilon, -r+\varepsilon)$, и $\varphi^{(m)} = 0$ на интервале $(-r-\varepsilon, -r)$. Тогда φ п. в. на $(-r-\varepsilon, -r)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше $m-1$; указанный полином равен нулю, поскольку $\varphi(t) = O(|t+r|^m)$, $t \rightarrow -r$.

Для $T_1 = T * \chi_+^{m-1}$ на $(-r-\varepsilon, -r+\varepsilon)$ имеем: $T_1^{(m)} = T = \varphi^{(m)}$, и, т. к. $T_1 = \varphi = 0$ на $(-r-\varepsilon, -r)$, то $T_1 = \varphi$ на $(-r-\varepsilon, -r+\varepsilon)$. Поэтому $g = T_1(\cdot - r) = T * \chi_+^{m-1} * \delta_r$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Если предположить теперь, что существует $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\text{supp } E \subset [r, \infty)$, такое что $E * T = \delta_0$, то для $f = E * \delta_{-r}^{(m)}$ имеет место равенство $f * g = \delta_0$, что противоречит лемме 1. $\square$

Теорема 1 вытекает из леммы 2 и результатов [5, § 1].

Доказательство теоремы 2. По условию все распределения T_i непрерывны

на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ по одной и той же полунорме p , в качестве таковой можно взять

$$p(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{|x| \leq r+1} |\varphi^{(\alpha)}(x)|.$$

Поэтому при $|\lambda_j| \leq \tilde{\gamma}_j = 2^{-j}/c_j$, где c_j – константа в неравенстве $|\langle T_j, \varphi \rangle| \leq c_j p(\varphi)$, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T_j$ сходится в сильной топологии пространства $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $\text{pr}_{1*} T_j$ является распределением порядка k с носителем, содержащимся в $[-r(T_j), r(T_j)]$, свёртка $\chi_+^{k+1} * (\text{pr}_{1*} T_j)$ будет непрерывной функцией с носителем в $[-r(T_j), \infty)$. Поскольку $r(T_j) < r$, мы можем выбрать константу $\gamma_j \leq \tilde{\gamma}_j$ столь малой, чтобы функция $\gamma_j \chi_+^{k+1} * (\text{pr}_{1*} T_j)$ на $(-r, 0)$ не превосходила по абсолютной величине $2^{-j} \exp(-1/(r+t))$.

$$\chi_+^{k+1} * (\text{pr}_{1*} T) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_+^{k+1} * (\text{pr}_{1*} T_j),$$

ряд в правой части равномерно сходится на $(-\infty, 0)$ к непрерывной функции, равной нулю на $(-\infty, r]$ и не превосходящей $\exp(-1/(r+t))$ по абсолютной величине на $(-r, 0)$. $\square$

1. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
2. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 672 p.
3. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
4. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Математический сборник. – 1995. – **186**, №6. – С. 15–34.
5. Зарайский Д.А. Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свёртки // Труды ИПММ. – 2006. – **12**. – С. 69–75.
6. Зарайский Д.А. Теорема единственности для решений уравнения свёртки с радиальным свёртывателем // Материалы конф. Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности, г. Донецк, 31 октября 2019 г. – Том 1 Физико-математические и технические науки. – Часть 1. – 2019. – С. 127–128.

D. A. Zaraisky

A class of mean-periodic functions which are uniquely determined by their restrictions to the «period».

A class of radial convolutors T with the following property is constructed: solutions of homogeneous convolution equation $f * T = 0$ are uniquely determined by their restrictions to the convex hull of $\text{supp } T$.

Keywords: convolution equations, mean periodicity.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 18.11.2019

УДК 531.35

©2019. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч, Г. В. Мозале́вская

АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ОСИ СИММЕТРИИ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

Для описания движения быстровращающегося артиллерийского снаряда как твердого тела в работе используется система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой приняты выражения аэродинамических сил и моментов, линеаризованные по пространственному углу атаки. Показано, что предложенное Р. Лиеске и М. Рейтер определение положения динамического равновесия оси симметрии снаряда отличается от определения этого положения как квазистационарного решения уравнений углового движения оси симметрии отсутствием коэффициента экваториального демпфирующего момента.

Ключевые слова: артиллерийский снаряд, динамика полета, положение динамического равновесия.

Введение. В 1966 г. американские баллистики Р. Лиеске и М. Рейтер предложили упрощенную математическую модель, которая позволяет в десятки раз уменьшить вычислительные затраты при определении траектории полета снаряда, обеспечивая при этом достаточно высокую точность вычисления его траектории и, в частности, бокового отклонения [1]. Ее называют модифицированной моделью траектории снаряда как материальной точки, или *m*-моделью. Эта модель основана на полученной авторами [1] физически мотивированной неявной формуле, определяющей положение динамического равновесия оси симметрии снаряда. Известен другой способ построения *m*-модели, который основан на определении положения динамического равновесия как приближенного квазистационарного решения дифференциальных уравнений углового движения оси симметрии снаряда.

В данной статье для описания движения артиллерийского снаряда как твердого тела используется система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой приняты выражения аэродинамических сил и моментов, линеаризованные по пространственному углу атаки. Показано, что определение положения динамического равновесия по Лиеске и Рейтер отличается от определения этого положения как квазистационарного решения уравнений углового движения оси симметрии отсутствием коэффициента экваториального демпфирующего момента.

1. Исходные соотношения. В работе рассматривается движение быстровращающегося артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием принятой в баллистике системы аэродинамических сил и моментов. Вращение Земли и наличие ветра не учитывается.

Для описания движения снаряда используются следующие переменные (см. [2]). Положение центра масс снаряда, точки *C*, определяют его декартовы координаты *x, y, z* в неподвижной стартовой системе декартовых координат *Oxyz*. Ее начало совпадает с положением центра масс в момент выстрела, ось *Ox* направлена го-

Таблица 1. Косинусы углов между единичными векторами x, y, z и x_0, y_0, z_0

	x	y	z
x_0	$\cos \theta \cos \psi$	$\sin \theta \cos \psi$	$\sin \psi$
y_0	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	0
z_0	$-\cos \theta \sin \psi$	$-\sin \theta \sin \psi$	$\cos \psi$

ризонтально в сторону стрельбы, а ось Oy – вертикально вверх. Компонентами вектора v скорости центра масс являются v, θ, ψ , где v – модуль v , θ – угол между осью Ox и проекцией v на вертикальную плоскость Oxy , ψ – угол между вектором v и плоскостью Oxy . Поворотами на углы θ, ψ стартовая система координат $Oxyz$, параллельно перенесенная в начало C , переводится в полускоростную систему координат $Cx_0y_0z_0$. Ее ось Cx_0 имеет направление вектора v . В таблице 1 приведены косинусы углов между единичными векторами систем координат $Cxyz$ и $Cx_0y_0z_0$. Направление оси симметрии снаряда определяют величины α и β – проекции единичного вектора оси симметрии на вторую и третью оси полускоростной системы координат $Cx_0y_0z_0$; через p, q, r обозначаются проекции вектора угловой скорости снаряда на оси полусвязанной (невращающейся) системы координат (ее первая ось направлена вдоль оси симметрии). Через I_1, I_2, m обозначаются осевой и экваториальный центральные моменты инерции снаряда и его масса, g – ускорение свободного падения.

Для аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд, используются такие обозначения: R_x – сила лобового сопротивления ($R_x \leq 0$), R_y – подъемная сила, R_z – сила Магнуса, M_y – момент Магнуса, M_z – опрокидывающий момент. Проекция вектора демпфирующего момента на ось симметрии представляется в виде $M_p p$, а его проекции на поперечные оси полусвязанной системы координат равны $M_\Omega q, M_\Omega r$. Как известно, величины R_x, M_p, M_Ω являются четными, а R_y, R_z, M_y, M_z – нечетными функциями пространственного угла атаки δ между вектором v и осью симметрии. Все они зависят от y, v , а R_z и M_y зависят еще и от p . В уравнения движения снаряда, записанные относительно переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta$, эти величины входят через аэродинамические функции

$$\begin{aligned}
 K_x(y, v, \delta) &= \frac{R_x(y, v, \delta)}{m}, & K_y(y, v, \delta) &= \frac{R_y(y, v, \delta)}{mv \sin \delta}, \\
 K_z(y, v, p, \delta) &= \frac{R_z(y, v, p, \delta)}{mv \sin \delta}, & K_p(y, v, \delta) &= \frac{M_p(y, v, \delta)}{I_1}, \\
 A_\Omega(y, v, \delta) &= \frac{M_\Omega(y, v, \delta)}{I_2}, & B_y(y, v, p, \delta) &= \frac{M_y(y, v, p, \delta)}{I_2 \sin \delta}, \\
 B_z(y, v, \delta) &= \frac{M_z(y, v, \delta)}{I_2 \sin \delta}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Они являются непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам в предпо-

ложении, что аэродинамические силы и моменты являются дважды непрерывно дифференцируемыми. При этом функции $R_y/\sin \delta$, $R_z/\sin \delta$, $M_y/\sin \delta$, $M_z/\sin \delta$ непрерывно дифференцируемы по всем аргументам во всей рабочей области, в том числе и при $\delta = 0$. Все функции (1) являются четными по δ , и в случае малых δ они могут быть аппроксимированы своими значениями при $\delta = 0$. Тогда при малых δ имеем для этих функций выражения

$$\begin{aligned} K_x^{(0)}(y, v) &= \frac{R_x^{(0)}(y, v)}{m}, \quad K_y^{(0)}(y, v) = \frac{R_y^\delta(y, v)}{mv}, \quad K_z^{(0)}(y, v, p) = \frac{R_z^\delta(y, v, p)}{mv}, \\ K_p^{(0)}(y, v) &= \frac{M_p^{(0)}(y, v)}{I_1}, \quad A_\Omega^{(0)}(y, v) = \frac{M_\Omega^{(0)}(y, v)}{I_2}, \quad B_y^{(0)}(y, v, p) = \frac{M_y^\delta(y, v, p)}{I_2}, \\ B_z^{(0)}(y, v) &= \frac{M_z^\delta(y, v)}{I_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь верхним индексом (0) отмечены значения четных по δ функций при $\delta = 0$, а верхним индексом δ отмечены коэффициенты при δ в приближенных формулах $R_y(y, v, \delta) = R_y^\delta(y, v)\delta$, $R_z(y, v, p, \delta) = R_z^\delta(y, v, p)\delta$, $M_y(y, v, \delta) = M_y^\delta(y, v)\delta$, $M_z(y, v, p, \delta) = M_z^\delta(y, v, p)\delta$ для нечетных по δ аэродинамических сил и моментов. Функции $R_x^{(0)}(y, v)$, $R_y^\delta(y, v)$, $R_z^\delta(y, v, p)$, $M_p^{(0)}(y, v)$, $M_\Omega^{(0)}(y, v)$, $M_y^\delta(y, v, p)$, $M_z^\delta(y, v)$, входящие в правые части формул (2), в баллистике представляют при помощи безразмерных аэродинамических коэффициентов, зависящих от числа Маха $M = a(y)/v$, где $a(y)$ – скорость звука на высоте y .

Для хорошо сконструированного снаряда пространственный угол атаки δ принимает на всей траектории его полета малые значения вместе с переменными α , β . Малые значения принимает и угол ψ . Поэтому можно ожидать, что динамика полета хорошо сконструированного снаряда с высокой точностью описывается системой дифференциальных уравнений, которая получается из исходной «точной» системы уравнений движения снаряда как твердого тела путем отбрасывания в ней членов, нелинейных по α , β , ψ . Эта система линейна по переменным q , r , α , β , ψ , в связи с чем назовем ее *l-системой*. В работе [2] *l-система* записана в виде уравнений (17), (18). Она состоит из подсистемы уравнений поступательного движения и продольного вращения снаряда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{z} = v\psi, \\ \dot{v} &= K_x^{(0)}(y, v) - g \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{g \cos \theta}{v} + K_y^{(0)}(y, v)\alpha - K_z^{(0)}(y, v, p)\beta, \\ \dot{\psi} &= \frac{g}{v}\psi \sin \theta + K_z^{(0)}(y, v, p)\alpha + K_y^{(0)}(y, v)\beta, \\ \dot{p} &= K_p^{(0)}(y, v)p \end{aligned} \quad (3)$$

и подсистемы уравнений углового движения оси симметрии снаряда, которая после

введения комплексных переменных

$$\Omega = q + ir, \quad \Delta = \alpha + i\beta \quad (4)$$

записывается в виде

$$\dot{\Omega} = a(y, v, p)\Omega + b(y, v, p)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y, v, p)\Delta + l(v, \theta, \psi). \quad (5)$$

Здесь коэффициенты a, b, k, l выражаются по формулам

$$\begin{aligned} a(y, v, p) &= A_{\Omega}^{(0)}(y, v) + ipI, \quad b(y, v, p) = B_y^{(0)}(y, v, p) + iB_z^{(0)}(y, v), \\ k(y, v, p) &= K_y^{(0)}(y, v) + iK_z^{(0)}(y, v, p), \quad l(v, \theta, \psi) = L_1(v, \theta) + iL_2(v, \theta, \psi), \end{aligned} \quad (6)$$

где $I = I_1/I_2$. Входящие в (6) функции $K_y^{(0)}, K_z^{(0)}, K_p^{(0)}, A_{\Omega}^{(0)}, B_y^{(0)}, B_z^{(0)}$ определены формулами (2), через L_1, L_2 обозначены функции

$$L_1(v, \theta) = \frac{g}{v} \cos \theta, \quad L_2(v, \theta, \psi) = -\frac{g}{v} \psi \sin \theta.$$

В [3] дана оценка погрешности решения l -системы по сравнению с решением исходной нелинейной системы при тех же начальных условиях в момент выстрела.

2. Определения m_1 -модели и m_2 -модели траектории снаряда. На решении уравнений (3) поступательного движения и продольного вращения коэффициенты уравнений (5) углового движения являются функциями времени. Как известно, общее решение линейной системы (5) представляется в виде суммы какого-либо ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы. Приближенное общее решение уравнений (5) иногда получают, рассматривая коэффициенты (6) этих уравнений как постоянные величины. Более точно приближенное общее решение уравнений (5) строится на основе идей асимптотического метода ВКБ [4–6]. В обоих случаях приближенное общее решение описывает быстрые двухчастотные колебания (4) комплексных переменных Ω, Δ относительно их медленно изменяющихся средних значений e, d . Эти квазистационарные значения определяются из условия равенства нулю правых частей уравнений (5) и, следовательно, они выражаются по формулам

$$e = e(y, v, \theta, \psi, p) = \frac{bl}{ib - ak}, \quad d = d(y, v, \theta, \psi, p) = -\frac{al}{ib - ak}. \quad (7)$$

Выделим в выражении (7) функции $d(y, v, \theta, \psi, p)$ ее действительную и мнимую части, полагая

$$d(y, v, \theta, \psi, p) = d_1(y, v, \theta, \psi, p) + id_2(y, v, \theta, \psi, p).$$

Явные формулы для функций $d_1, d_2(y, v, \theta, \psi, p)$ следуют из определения (7) функции d и формул (6). Подставив функции $d_1, d_2(y, v, \theta, \psi, p)$ в уравнения (3) вместо переменных α, β , получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений

(*m*₂-системе)

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{z} = v\psi,$$

$$\dot{v} = K_x^{(0)}(y, v) - g \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{v} + K_y^{(0)}(y, v)d_1(y, v, \theta, \psi, p) - K_z^{(0)}(y, v, p)d_2(y, v, \theta, \psi, p),$$

$$\dot{\psi} = \frac{g}{v}\psi \sin \theta + K_z^{(0)}(y, v, p)d_1(y, v, \theta, \psi, p) + K_y^{(0)}(y, v)d_2(y, v, \theta, \psi, p),$$

$$\dot{p} = K_p^{(0)}(y, v)p.$$

Она определяет *m*₂-модель – модифицированную модель траектории снаряда как материальной точки.

В работе [1] отклонение оси симметрии снаряда от направления вектора скорости его центра масс относительно воздуха определено вектором, который в обозначениях [7] выражается формулой

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \mathbf{i} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{i}). \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – единичный вектор оси симметрии снаряда, $\mathbf{i}$ – единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{v}$ скорости центра масс снаряда относительно воздуха. Из формулы (8) следует, что $\boldsymbol{\alpha}_R$ – это составляющая единичного вектора $\mathbf{x}$ оси симметрии снаряда, ортогональная его воздушной скорости $\mathbf{v}$. Проекциями вектора $\boldsymbol{\alpha}_R$ на оси Cy_0, Cz_0 являются введенные в п. 1 проекции α, β единичного вектора оси симметрии на эти оси. Из определения вектора $\boldsymbol{\alpha}_R$ следует, что его модуль равен модулю синуса пространственного угла атаки.

В [1, 7] при ряде физически мотивированных предположений для вектора $\boldsymbol{\alpha}_R$ получена приближенная формула. В [7] она записана в следующем виде

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \frac{-2I_x p C_{L\alpha}(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{V}}) - 2mpd^2 C_{M_{P\alpha}}[\mathbf{v} \times (\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{g})]}{\rho S d v^2 (v^2 C_{L\alpha} C_{M\alpha} + p^2 d^2 C_{N_{P\alpha}} C_{M_{P\alpha}})}. \quad (9)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, $\mathbf{V}$ – скорость центра масс снаряда относительно земной поверхности, $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{W}$ – скорость центра масс относительно воздуха, $\mathbf{W}$ – скорость ветра. Кроме того, используются обозначения (в круглых скобках даны соответствующие им обозначения для *l*-системы, используемые в статье [2]): I_x – осевой момент инерции снаряда (I_1), m – масса снаряда (m), d – опорный диаметр снаряда (D), ρ – плотность воздуха ($\rho(y)$), $S = \pi d^2/4$ – площадь опорного поперечного сечения снаряда (S). В формулу (9) входят следующие аэродинамические коэффициенты: $C_{L\alpha}$ – коэффициент подъемной силы, $C_{M_{P\alpha}}$ – коэффициент силы Магнуса, $C_{M\alpha}$ – коэффициент опрокидывающего момента, $C_{N_{P\alpha}}$ – коэффициент момента Магнуса.

Формула (9) определяет вектор $\boldsymbol{\alpha}_R$ неявно, так как в ее правую часть через $\dot{\mathbf{V}}$ входит сам этот вектор, а аэродинамические коэффициенты в общем случае зависят от квадрата его модуля.

Определяемое формулой (9) положение оси симметрии снаряда рассматривается в [1, 7] как положение ее динамического равновесия. Вектор α_R , найденный с помощью формулы (9), подставляется в векторное уравнение движения центра масс. К полученной таким путем системе шести скалярных дифференциальных уравнений первого порядка присоединяется уравнение, определяющее производную $\dot{p}$ от продольной угловой скорости. В результате получается система семи дифференциальных уравнений первого порядка, которая определяет модифицированную модель траектории снаряда как материальной точки. В данной работе она названа *m₁-моделью*.

3. Сравнение условий динамического равновесия в *m₁*-модели и в *m₂*-модели. Чтобы сравнить определения положения динамического равновесия в *m₁*-модели и в *m₂*-модели, перейдем в формуле (9) для α_R к обозначениям, с помощью которых в п. 2 записана формула (7) для d . Для этого сначала запишем приведенные в [7] выражения (2.6-b), (2.19-b), (2.21-b), (2.23-b) аэродинамических сил и моментов через аэродинамические коэффициенты. Воспользовавшись обозначениями сил и моментов, введенными в п. 1, приходим к формулам

$$\begin{aligned} R_y &= C_{L\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S \sin \alpha_t, & M_z &= C_{M\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S d \sin \alpha_t, \\ R_z &= C_{N_{P\alpha}} \frac{\rho v^2}{2} S \left(\frac{pd}{v} \right) \sin \alpha_t, & M_y &= -C_{M_{P\alpha}} \frac{\rho v^2}{2} S d \left(\frac{pd}{v} \right) \sin \alpha_t, \end{aligned} \quad (10)$$

где α_t – пространственный угол атаки (в п. 1 он обозначен через δ). В правой части последней из формул (10) взят знак минус, так как направление, принятое для момента Магнуса в качестве положительного в п. 1, противоположно направлению, которое считается для него положительным в [7].

Разрешив формулы (10) относительно аэродинамических коэффициентов, находим выражения этих коэффициентов через соответствующие силы и моменты

$$\begin{aligned} C_{L\alpha} &= \frac{2R_y}{\rho v^2 S \sin \alpha_t}, & C_{M\alpha} &= \frac{2M_z}{\rho v^2 S d \sin \alpha_t}, \\ C_{N_{P\alpha}} &= \frac{2R_z}{\rho v S p d \sin \alpha_t}, & C_{M_{P\alpha}} &= -\frac{2M_y}{\rho v S p d^2 \sin \alpha_t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем формулы (11), пользуясь вместо аэродинамических сил и моментов R_y , M_z , R_z , M_y соответствующими аэродинамическими функциями K_y , B_z , K_z , B_y , которые определены формулами (1). Вместо обозначений I_x , I_y , d , α_t при этом принимаем обозначения I_1 , I_2 , D , δ , введенные в п. 1. Тогда формулы (11) преобразуются к виду

$$C_{L\alpha} = \frac{2mvK_y}{\rho v^2 S}, \quad C_{M\alpha} = \frac{2I_2 B_z}{\rho v^2 S D}, \quad C_{N_{P\alpha}} = \frac{2mvK_z}{\rho v p S D}, \quad C_{M_{P\alpha}} = -\frac{2I_2 B_y}{\rho v p S D^2}. \quad (12)$$

Умножим теперь обе части формулы (9) для α_R на знаменатель ее правой

части и перейдем в ней от обозначений I_x, d к обозначениям I_1, D . Получаем

$$\alpha_R \rho S D v^2 (v^2 C_{L\alpha} C_{M\alpha} + p^2 D^2 C_{N_{P\alpha}} C_{M_{P\alpha}}) + \\ + 2I_1 p C_{L\alpha} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{V}}) + 2mp D^2 C_{M_{P\alpha}} [\mathbf{v} \times (\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{g})] = 0.$$

В результате подстановки сюда выражений (12) для аэродинамических коэффициентов приходим к формуле, которая определяет вектор α_R при помощи аэродинамических функций K_y, B_z, K_z, B_y :

$$\alpha_R v^2 (K_y B_z - B_y K_z) + p I K_y (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{V}}) - B_y [\mathbf{v} \times (\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{g})] = 0. \quad (13)$$

Здесь $I = I_1/I_2$. Далее в работе рассматривается случай отсутствия ветра. В этом случае $\mathbf{v} = \mathbf{V}$, и формула (13) переходит в формулу

$$\alpha_R v^2 (K_y B_z - B_y K_z) + (p I K_y - B_y) (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) + B_y (\mathbf{v} \times \mathbf{g}) = 0. \quad (14)$$

Запишем векторное равенство (14) в проекциях на оси полускоростной системы координат $Cx_0y_0z_0$. Проекции вектора α_R на эти оси обозначим через $\alpha_{R0}, \alpha_{R1}, \alpha_{R2}$, так что

$$\alpha_R = \alpha_{R0} \mathbf{x}_0 + \alpha_{R1} \mathbf{y}_0 + \alpha_{R2} \mathbf{z}_0. \quad (15)$$

Воспользовавшись таблицей 1, получаем для вектора $\mathbf{g} = -g\mathbf{y}$ разложение

$$\mathbf{g} = -g \sin \theta \cos \psi \mathbf{x}_0 - g \cos \theta \mathbf{y}_0 + g \sin \theta \sin \psi \mathbf{z}_0. \quad (16)$$

Вектор $\mathbf{v}$ скорости центра масс представляется в виде

$$\mathbf{v} = v \mathbf{x}_0. \quad (17)$$

Отсюда, пользуясь правилом дифференцирования вектора в подвижной системе координат, получаем формулу

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{x}_0 + v (\dot{\theta} \mathbf{z} - \dot{\psi} \mathbf{y}_0) \times \mathbf{x}_0, \quad (18)$$

где $\dot{\theta} \mathbf{z} - \dot{\psi} \mathbf{y}_0$ – угловая скорость системы координат $Cx_0y_0z_0$. Согласно таблице 1, для вектора $\mathbf{z}$ имеем разложение $\mathbf{z} = \sin \psi \mathbf{x}_0 + \cos \psi \mathbf{z}_0$, при учете которого формула (18) принимает вид

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{x}_0 + v \dot{\theta} \cos \psi \mathbf{y}_0 + v \dot{\psi} \mathbf{z}_0. \quad (19)$$

В данной работе движение снаряда описывается l -системой (3), (5). В таком случае в формуле (14) вместо аэродинамических функций K_y, K_z, B_y, B_z надо взять их приближенные значения $K_y^{(0)}, K_z^{(0)}, B_y^{(0)}, B_z^{(0)}$ при $\delta = 0$, а в формуле (19) следует заменить производные $\dot{v}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ правыми частями соответствующих уравнений (3) и принять $\sin \psi$ и $\cos \psi$ равными ψ и 1.

После замены аэродинамических функций их приближенными значениями равенство (14) принимает вид

$$\alpha_R v^2 (K_y^{(0)} B_z^{(0)} - B_y^{(0)} K_z^{(0)}) + (p I K_y^{(0)} - B_y^{(0)}) (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) + B_y^{(0)} (\mathbf{v} \times \mathbf{g}) = 0.$$

Отсюда при учете (16)–(19) получаем векторное равенство, которое эквивалентно трем скалярным равенствам

$$\begin{aligned} v^2(K_y^{(0)}B_z^{(0)} - B_y^{(0)}K_z^{(0)})\alpha_{R0} &= 0, \\ v^2(K_y^{(0)}B_z^{(0)} - B_y^{(0)}K_z^{(0)})\alpha_{R1} - (pIK_y^{(0)} - B_y^{(0)})v^2\dot{\psi} - B_y^{(0)}gv\dot{\psi}\sin\theta &= 0, \\ v^2(K_y^{(0)}B_z^{(0)} - B_y^{(0)}K_z^{(0)})\alpha_{R2} + (pIK_y^{(0)} - B_y^{(0)})v^2\dot{\theta} - B_y^{(0)}gv\cos\theta &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В общем случае, когда $K_y^{(0)}B_z^{(0)} - B_y^{(0)}K_z^{(0)} \neq 0$, из первого равенства (20) находим $\alpha_{R0} = 0$. Два других равенства (20) запишем, подставив в них вместо $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ правые части соответствующих уравнений (3), где в качестве α, β взяты α_{R1}, α_{R2} . Получаем для α_{R1}, α_{R2} систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} (pIK_z^{(0)} - B_z^{(0)})\alpha_{R1} + (pIK_y^{(0)} - B_y^{(0)})\alpha_{R2} &= pIL_2, \\ (pIK_y^{(0)} - B_y^{(0)})\alpha_{R1} - (pIK_z^{(0)} - B_z^{(0)})\alpha_{R2} &= pIL_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Умножим первое уравнение (21) на мнимую единицу и сложим со вторым. Полагая $\alpha_R = \alpha_{R1} + i\alpha_{R2}$, получаем одно комплексное уравнение, которое определяет положение динамического равновесия для m_1 -модели по формуле

$$\alpha_R = \alpha_R(y, v, \theta, \psi, p) = -\frac{a_*l}{ib - a_*k} = -\frac{ipIl}{ib - ipIk}, \quad (22)$$

где $a_* = ipI$ – мнимая часть коэффициента $a = A_\Omega^{(0)} + ipI$, определенного в (6). Здесь $I = I_1/I_2$, $A_\Omega^{(0)} = M_\Omega^{(0)}/I_2$ согласно (2). Следовательно, формула (22) для комплексной величины α_R , определяющей положение динамического равновесия α_R в m_1 -модели, получается из формулы (7), определяющей положение динамического равновесия d в m_2 -модели, путем пренебрежения коэффициентом $M_\Omega^{(0)}$ экваториального демпфирующего момента по сравнению с проекцией pI_1 вектора кинетического момента снаряда на его ось симметрии.

1. Lieske R.F., Reiter M.L. Equations of motion for a modified point mass trajectory // Ballistic research laboratory report. – 1966. – No. 1314. – 25 p.
2. Konosevich B., Konosevich Yu. Error estimate of the modified point-mass trajectory model of an artillery shell // Nonlinear Dynamics. – 2017. – **90**, no.1. – P. 203–221. – DOI 10.1007/s11071-017-3655-2.
3. Коносеvич Б.И. Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 6. – С. 930–941.
4. Пугачев В.С. Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
6. Коносеvич Б.И. Оценка погрешности асимптотического представления угловых колебаний оси симметрии вращающегося твердого тела // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 4. – С. 102–116.
7. McCoy R.L. Modern exterior ballistics. – Atglen: Schiffer publishing Ltd., 2012. – 328 p.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich, G. V. Mozalevskaya

Analysis of the dynamic equilibrium conditions for the symmetry axis of an artillery shell.

Motion of a fast spinning artillery shell as a rigid body is described in the article by an ODE system, where expressions of aerodynamic forces and moments are taken, which are linearized in the total angle of attack. It is shown that the definition of the dynamic equilibrium position of the symmetry axis of the shell, proposed by R. Lieske and M. Reiter, differs from its definition as a quasi-stationary solution of the equations of angular motion of the symmetry axis only by the lack of the pitch damping moment coefficient.

Keywords: *artillery shell, flight dynamics, dynamic equilibrium position.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
`konos.donetsk@yandex.ru`

Получено 25.01.19

УДК 531.38; 531.39

©2019. Г. А. Котов, Ю. Ю. Пилпани

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Исследованы условия существования прецессионных движений гиростата, несущего один неравномерно вращающийся ротор, в случае, когда движение происходит под действием силы тяжести, и в случае воздействия на гиростат потенциальных сил. На основе анализа уравнений движения записано выражение для гиростатического момента, использование которого позволяет указать три первых интеграла для системы дифференциальных уравнений движения. С помощью методов решения обратных задач механики построена силовая функция на инвариантных соотношениях, описывающих прецессию общего вида, и функция, характеризующая скорость собственного вращения тела.

Ключевые слова: *тяжелый гиростат, переменный гиростатический момент, потенциальные силы, прецессии общего вида.*

Введение. В исследовании движений абсолютно твердого тела значительное внимание уделяется рассмотрению системы «тело-носитель и присоединенное тело». Эта система носит название гиростат, которое впервые было введено английскими механиками. Если присоединенное тело не вносит вклад в гиростатический момент системы, то уравнения движения гиростата имеют три первых интеграла.

Например, изучая интегрирование уравнений движения тела, Д.Н. Горячев [1] рассматривал в основном, первые интегралы, поскольку в случае нового интеграла применима теория Якоби сведения задачи к квадратурам.

В случае, когда симметричное присоединенное тело – ротор – вращается относительно оси закрепления с переменной скоростью, гиростатический момент всей системы является переменным. Постановке задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом посвящена статья П.В. Харламова [2]. Особенностью такой задачи является наличие только двух первых интегралов, что приводит к необходимости рассмотрения дополнительных условий движения или инвариантных соотношений.

Разработка метода инвариантных соотношений (ИС) построения частных решений уравнений движения [2, 3] позволила найти многочисленные классы решений в классических задачах динамики (см. обзоры [4, 5]). Актуален подход в исследовании условий существования инвариантных соотношений, основанный на рассмотрении специальных (программных) классов движений тела, имеющего неподвижную точку [4–6].

К таким программным движениям принадлежат прецессионные движения тела, имеющего неподвижную точку. Известная регулярная прецессия гироскопа Лагранжа [7, 8] послужила основанием для рассмотрения прецессий тяжёлого

твёрдого тела относительно наклонной оси (прецессия Д. Гриоли [9]).

В статье П.В. Харламова [10] представлена перспектива развития обобщённых задач динамики твёрдого тела. В данной статье рассматривается движение гиростата с переменным гиростатическим моментом как под действием силы тяжести, так и в поле, порождаемом силовой функцией.

В задачах о движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных сил прецессионные движения изучены только в рамках прямой задачи механики [11]. В данной статье при нахождении условий существования прецессий использован метод решения обратных задач механики и результаты [12]. Получены новые виды силовой функции на ИС прецессионных движений, которые позволили построить новые классы решений уравнений движения тела в потенциальном поле сил.

1. Прецессионные движения тяжелого симметричного гиростата, несущего один ротор. Рассмотрим уравнения движения тяжелого гиростата в предположении, что система «тело-носитель и присоединенный ротор» обладает динамической симметрией. В качестве подвижной системы координат выберем главную систему, в которой тензор инерции гиростата, построенный относительно неподвижной точки, с учетом симметрии гиростата имеет вид $A = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$. Полагаем, что скорость вращения ротора относительно оси вращения не является постоянной. В таком случае гиростатический момент $\lambda(t)$ является функцией времени [2].

Пусть ось закрепления ротора в теле-носителе расположена таким образом, что изменение вектора гиростатического момента происходит вдоль третьей оси подвижной системы координат: $\lambda(t) = (0, 0, \lambda(t))$. Считаем, что вектор s , характеризующий положение обобщенного центра масс, не коллинеарен вектору гиростатического момента, т.е. $s \neq (0, 0, s_3)$.

Уравнения движения тяжелого гиростата таковы [2]:

$$\begin{aligned} (A\omega + \lambda(t))^\bullet &= (A\omega + \lambda(t)) \times \omega + s \times \nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе дифференциальных уравнений (1), кроме уже описанных ранее обозначений, использованы следующие: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести. Точка над переменными обозначает производную по времени t .

Запишем динамическое уравнение из (1) в скалярной форме

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 [(A_1 - A_3)\omega_3 - \lambda(t)] + s_2 \nu_3 - s_3 \nu_2, \\ A_1 \dot{\omega}_2 &= -\omega_1 [(A_1 - A_3)\omega_3 - \lambda(t)] + s_3 \nu_1 - s_1 \nu_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= -\dot{\lambda}(t) + s_1 \nu_2 - s_2 \nu_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим движение гиростата, полагая

$$\lambda(t) = (A_1 - A_3)\omega_3(t). \quad (3)$$

Соотношение (3) будем считать инвариантным соотношением системы (1). Запишем уравнения (2) с учетом (3) в векторной форме и присоединим к ним уравнение Пуассона из (1)

$$A_1 \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

Уравнения (4) допускают три первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad A_1 \boldsymbol{\omega}^2 - 2\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E, \quad (5)$$

где k, E – произвольные константы.

В предположениях $A_1 = A_2$ и $\mathbf{s} \neq (0, 0, s_3)$ тело-носитель по распределению масс не является гироскопом Лагранжа. В частном случае оно может быть или гироскопом Ковалевской, или гироскопом Горячева–Чаплыгина. Здесь не будем ограничиваться данными примерами, а только примем условие $A_1 = A_2$.

Рассмотрим обратную задачу механики об условиях существования прецессионных движений для уравнений (4) с первыми интегралами (5). Введем неизменно связанный с телом единичный вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ (т.е. $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$). Тогда для прецессий выполняются инвариантные соотношения

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\nu}, \quad (6)$$

где $\varphi(t), \psi(t)$ – углы Эйлера, $a_0 = \cos \theta_0$, $\theta_0 = \angle(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})$.

Подставим значение угловой скорости из (6) во второе соотношение системы (5) и в уравнение Пуассона из (4). Тогда получим

$$\dot{\psi} = k - a_0 \dot{\varphi}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}). \quad (7)$$

В силу (7) вектор угловой скорости из (6) примет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + (k - a_0 \dot{\varphi}) \boldsymbol{\nu}. \quad (8)$$

Запишем третий интеграл из (5) с учетом значения (8)

$$A_1(a_0'^2 \dot{\varphi}^2 + k^2) = 2(E + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (9)$$

где $a_0' = \sin \theta_0$. Подставим значение (8) в динамическое уравнение из (4) и рассмотрим равенство, которое следует после операции скалярного умножения левой и правой частей полученного уравнения на вектор $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}$

$$A_1 a_0'^2 \dot{\varphi} (k - a_0 \dot{\varphi}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = a_0 (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}). \quad (10)$$

Если в уравнении (10) положить $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \pi/2$), то на основании первого равенства из (7) следует $\dot{\psi} = k$, а из уравнения (10) получим для $\dot{\varphi}$ постоянное значение. То есть прецессия тела-носителя является регулярной.

При этом, в силу полученных результатов, из равенства (9) можно сделать заключение, что вектор $\mathbf{a}$ коллинеарен вектору $\mathbf{s}$.

Пусть в уравнении (10) параметр $a_0 \neq 0$. Исключая из уравнений (9), (10) переменную $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}$, приходим опять к выводу, что прецессия тела-носителя является регулярной. Очевидно и в этом случае вектор $\mathbf{a}$ направлен по вектору $\mathbf{s} : \mathbf{a} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}$.

Условия на постоянные E, k найдем из (9), (10).

Положим $\dot{\varphi} = n, \dot{\psi} = m$, где n, m – постоянные и покажем, что в случае регулярной прецессии зависимости функций $\nu_i(t), \omega_i(t)$ от времени описываются элементарными функциями. Из (6) получаем,

$$\boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + m\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (11)$$

или в скалярной форме для компонент ω_i имеем

$$\omega_i = na_i + m\nu_i \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (12)$$

Рассмотрим уравнение для $\boldsymbol{\nu}$ из (7), полагая в нем $\boldsymbol{\omega}$ в виде (11),

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}). \quad (13)$$

Для задания компонент a_i ($i = \overline{1, 3}$) положим

$$a_1 = \sin \mu_0 \cos \sigma_0, \quad a_2 = \sin \mu_0 \sin \sigma_0, \quad a_3 = \cos \mu_0, \quad (14)$$

где $\mu_0 \in (0, \pi), \sigma_0 \in [0, 2\pi]$ – параметры. Соотношения (14) имеют особенности при $\mu_0 = 0$ и $\mu_0 = \pi$. В этом случае принимаем $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$.

Из равенства $\dot{\varphi}(t) = n$, полагая начальное условие $\varphi(0) = 0$, определим скорость собственного вращения в виде $\varphi = nt$. Запишем общее решение уравнения (13), используя инвариантное соотношение $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0$ из (11). Тогда

$$\begin{aligned} \nu_1 &= a_0 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a'_0(\sin \sigma_0 \cos nt - \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt), \\ \nu_2 &= a_0 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a'_0(\cos \sigma_0 \cos nt + \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt), \\ \nu_3 &= a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin nt. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $a'_0 = \sin \theta_0$. Компоненты угловой скорости находим из равенств (12)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (n + a_0 m) \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a'_0 m(\sin \sigma_0 \cos nt - \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt), \\ \omega_2 &= (n + a_0 m) \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a'_0 m(\cos \sigma_0 \cos nt + \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin nt), \\ \omega_3 &= (n + a_0 m) \cos \mu_0 - a'_0 m \sin \mu_0 \sin nt. \end{aligned}$$

Отметим, что a_i – компоненты вектора $\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}$ в силу полученных выше условий существования прецессии (11). Условие $A_2 = A_1$ позволяет с помощью поворота подвижной системы координат считать одну из величин s_1, s_2 равной нулю, то есть, например, $s_2 = 0$. Тогда в формулах (14), (15) полагаем $\sigma_0 = 0$.

После нахождения $\omega_i(t)$ функция $\lambda(t)$ определяется из (3)

$$\lambda(t) = (A_1 - A_3)(a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin nt). \quad (16)$$

2. Движение динамически симметричного гиростата в потенциальном поле сил. Вид уравнений (1) позволяет записать уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных сил

$$A\dot{\omega} + \dot{\lambda}(t) = (A\omega + \lambda(t)) \times \omega + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu, \quad (17)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega.$$

Здесь использованы обозначения, введенные ранее, а $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – силовая функция, дифференцируемая по всем своим аргументам.

Исследование уравнений (17) проводится при тех же предположениях на распределение масс гиростата и положение вектора переменного гиростатического момента: $A = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ и $\lambda(t) = (0, 0, \lambda(t))$. Запишем динамическое уравнение из (17) в скалярной форме

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= \omega_2[(A_1 - A_3)\omega_3 - \lambda(t)] + \frac{\partial U}{\partial \nu_2}\nu_3 - \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\nu_2, \\ A_1\dot{\omega}_2 &= -\omega_1[(A_1 - A_3)\omega_3 - \lambda(t)] + \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\nu_1 - \frac{\partial U}{\partial \nu_1}\nu_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 + \dot{\lambda}(t) &= \frac{\partial U}{\partial \nu_1}\nu_2 - \frac{\partial U}{\partial \nu_2}\nu_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть выполнено условие (3). Тогда $\dot{\lambda}(t) = (A_1 - A_3)\dot{\omega}_3$ и уравнения (18) примут вид

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= \frac{\partial U}{\partial \nu_2}\nu_3 - \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\nu_2, \\ A_1\dot{\omega}_2 &= \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\nu_1 - \frac{\partial U}{\partial \nu_1}\nu_3, \\ A_1\dot{\omega}_3 &= \frac{\partial U}{\partial \nu_1}\nu_2 - \frac{\partial U}{\partial \nu_2}\nu_1, \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$A_1\dot{\omega} = \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu. \quad (19)$$

Присоединим к уравнениям (19) уравнение Пуассона $\dot{\nu} = \nu \times \omega$ и от системы (17) перейдем к рассмотрению системы

$$A_1\dot{\omega} = \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (20)$$

Система (20) допускает три первых интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad \omega \cdot \nu = k, \quad A_1\omega^2 - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad (21)$$

где k, E – произвольные постоянные.

Аналогично случаю тяжелого гиростата, рассмотрим обратную задачу механики об условиях существования прецессионных движений для уравнений (20) с первыми интегралами (21). Используем введенный ранее неизменно связанный с телом единичный вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ такой, что $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0$. Тогда вектор угловой скорости тела-носителя представим в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\mathbf{a} + \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\boldsymbol{\nu}. \quad (22)$$

Здесь $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – некоторые дифференцируемые по всем своим аргументам функции, подлежащие определению.

Представим (22) в скалярной форме

$$\omega_i = a_i\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_i\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Равенства (23) являются системой трех инвариантных соотношений уравнений (20). Условия (3) и (23) вместе представляют систему уже четырех инвариантных соотношений для системы (17).

Запишем интеграл момента количества движения из (21) с учетом (22)

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \quad (24)$$

Из равенства (24) определим функцию $\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$:

$$\psi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{\boldsymbol{\nu}^2}[k - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})]. \quad (25)$$

С помощью третьего интеграла из (21) с учетом (22), (25) выразим функцию $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$:

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{A_1[\varphi^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\boldsymbol{\nu}^2 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2) + k^2]}{2\boldsymbol{\nu}^2} - E. \quad (26)$$

Используя результат [13], запишем необходимое условие существования инвариантных соотношений (23) для уравнений (20)

$$\frac{\partial \omega_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \omega_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} + \frac{\partial \omega_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} = 0, \quad (27)$$

где с учетом (25) компоненты угловой скорости таковы:

$$\omega_i = a_i\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_i \frac{k - \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3)}{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Преобразуем уравнение (27) на основании указанных компонент вектора угловой скорости

$$\begin{aligned} & (a_1(\nu_2^2 + \nu_3^2) - a_2\nu_1\nu_2 - a_3\nu_1\nu_3) \frac{\partial \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} + \\ & + (a_2(\nu_1^2 + \nu_3^2) - a_1\nu_1\nu_2 - a_3\nu_2\nu_3) \frac{\partial \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} + \\ & + (a_3(\nu_1^2 + \nu_2^2) - a_1\nu_1\nu_3 - a_2\nu_2\nu_3) \frac{\partial \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} - \\ & - 2(a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3)\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + k = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнение (28) является неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Исследование этого уравнения проведем в случае

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad (29)$$

полагая в (14) $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$, $\sigma_0 = 0$.

Используя равенства (29), преобразуем основное уравнение (28) для прецессионных движений к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} (\nu_2^2 + \nu_3^2) - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_3} \nu_1 \nu_3 = 2\varphi \nu_1 - k. \quad (30)$$

Согласно теории интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [14], для сведения уравнения (30) к однородному уравнению введем функцию $V(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$. Дифференциальное уравнение относительно функции $V(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$ в общем случае имеет три первых интеграла, после нахождения которых из условия $V(c_1, c_2, c_3) = 0$, где c_i – постоянные первых интегралов, можно определить функцию $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Запишем дифференциальное уравнение относительно функции $V(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi)$, эквивалентное (30),

$$(\nu_2^2 + \nu_3^2) \frac{\partial V}{\partial \nu_1} - \nu_1 \nu_2 \frac{\partial V}{\partial \nu_2} - \nu_1 \nu_3 \frac{\partial V}{\partial \nu_3} + (2\varphi \nu_1 - k) \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (31)$$

Из уравнения (31) составим систему уравнений для характеристических кривых

$$\frac{d\nu_1}{(\nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{d\nu_2}{-\nu_1 \nu_2} = \frac{d\nu_3}{-\nu_1 \nu_3} = \frac{d\varphi}{2\varphi \nu_1 - k}. \quad (32)$$

Из семейства характеристик (32) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\nu_2}{\nu_2} = \frac{d\nu_3}{\nu_3},$$

интегралом которого является равенство

$$\frac{\nu_3}{\nu_2} = c_2, \quad (33)$$

где c_2 – постоянная.

С помощью интеграла (33) из уравнения

$$\frac{d\nu_1}{(\nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{d\nu_3}{-\nu_1 \nu_3},$$

вытекающего из системы (32), получаем интеграл

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_1^2. \quad (34)$$

Здесь c_1 – постоянная.

С помощью интегралов (33) и (34) из семейства характеристик (32) получим обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\varphi(\nu_1)}{d\nu_1} - \frac{2\nu_1}{c_1^2 - \nu_1^2} \varphi(\nu_1) = \frac{-k}{c_1^2 - \nu_1^2},$$

интегралом которого является равенство

$$(c_1^2 - \nu_1^2)\varphi(\nu_1) + k\nu_1 = c_3,$$

где c_3 – произвольная постоянная. С учетом первого интеграла (34) из последнего равенства получим третий интеграл уравнения (31)

$$(\nu_2^2 + \nu_3^2)\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + k\nu_1 = c_3. \quad (35)$$

Таким образом, в силу указанных первых интегралов (33), (34), (35) уравнения (31), можем записать равенство

$$V\left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2}, \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) (\nu_2^2 + \nu_3^2) + k\nu_1\right) = 0,$$

из которого определим функцию $\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ как решение уравнения (30)

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{(\nu_2^2 + \nu_3^2)} \left[\Phi(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \frac{\nu_3}{\nu_2}) - k\nu_1 \right]. \quad (36)$$

В формуле (36) функция Φ – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Рассмотрим уравнение Пуассона из (20) в скалярной форме с учетом (22), (29).

$$\dot{\nu}_1 = 0, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_3 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \dot{\nu}_3 = -\nu_2 \varphi(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \quad (37)$$

Для прецессионных движений векторы $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ образуют постоянный угол θ_0 , косинус которого в силу первого равенства из (6) равен a_0 . Учитывая данное свойство и равенство (29), для компоненты ν_1 из (37) получаем решение $\nu_1 = a_0$.

Геометрическому интегралу из (21) при известной первой компоненте $\nu_1 = a_0$ удовлетворим, положив

$$\nu_2 = a'_0 \sin \gamma(t), \quad \nu_3 = a'_0 \cos \gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ – вспомогательная переменная, $a'_0 = \sin \theta_0$. На многообразии

$$\nu_1 = a_0, \quad \nu_2 = a'_0 \sin \gamma(t), \quad \nu_3 = a'_0 \cos \gamma(t) \quad (38)$$

функцию (36) можно записать так

$$\varphi(\gamma(t)) = \frac{\Phi(\operatorname{ctg} \gamma(t)) - ka_0}{a_0'^2}. \quad (39)$$

Подставляя выражения для ν_2, ν_3 из (38) во второе уравнение из (37) и учитывая вид функции (39), получим уравнение для определения переменной $\gamma(t)$

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\Phi(\operatorname{ctg} \gamma) - ka_0} = \frac{t - t_0}{a_0'^2}. \quad (40)$$

Функции (25), (26) преобразуем к виду

$$\psi(\gamma(t)) = \frac{k - a_0\Phi(\operatorname{ctg} \gamma(t))}{a_0'^2}, \quad U(\gamma(t)) = A_1 \left[\frac{(\Phi(\operatorname{ctg} \gamma(t)) - a_0k)^2 + a_0'^2k^2}{2a_0'^2} \right] - E.$$

Решение уравнений (20) таково:

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0, a_0' \sin \gamma(t), a_0' \cos \gamma(t)), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a_0'^2} \left[\Phi(\operatorname{ctg} \gamma(t))(\mathbf{a} - a_0\boldsymbol{\nu}) + k(\boldsymbol{\nu} - a_0\mathbf{a}) \right].$$

На основании указанных зависимостей для векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ вектор переменного гиросtatического момента (3) представим так

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = (A_1 - A_3) \frac{\cos \gamma(t)}{a_0'} \left[k - a_0\Phi(\operatorname{ctg} \gamma(t)) \cos \gamma(t) \right].$$

В последних формулах переменная $\gamma(t)$ находится путем обращения интеграла (40).

Данное решение описывает прецессионное движение общего вида. Если ось собственного вращения принадлежит горизонтальной плоскости ($a_0 = 0$), то движение представляет собой полурегулярную прецессию первого типа.

3. Заключение. В статье рассмотрены условия существования программных прецессионных движений как тяжелого динамически симметричного гиростата, несущего один неравномерно вращающийся ротор, так и гиростата, совершающего движения под действием потенциальных сил. На основании подходов решения обратных задач динамики с помощью этих ИС построена силовая функция, характеризующая потенциальное поле. В этом случае получено разрешающее дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее условие существования инвариантных соотношений, соответствующих прецессионным движениям. Для вектора угловой скорости тела-носителя и вектора вертикали выписаны явные зависимости от времени, указана функция, задающая изменение величины переменного гиросtatического момента.

1. Горячев Д.Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. – Варшава, 1910. – 62 с.
2. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.

4. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Дон-НУ, 2010. – 364 с.
5. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 408 с.
6. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2018. – 265 с.
7. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
8. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. – NY: Johnson Reprint Corp, 1965. – 966 s.
9. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
10. Харламов П.В. Современное состояние и перспектива развития классических задач динамики твёрдого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
11. Горр Г.В. О прецессиях гиростата в потенциальном поле сил // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 11. – С. 64–67;
12. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой // Диф. уравнения. – 1972. – **8**, № 8. – С. 1357–1362.
13. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). – М. ; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
14. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – М. ; Л: ОНТИ ГТТИ, 1934. – 359 с.

G. A. Kotov, Yu. Yu. Pilpani

The investigation of motions of the symmetric gyrostat with fixed point in the case of variable gyrostatic moment.

Existence conditions are studied for precession motions of a gyrostat with one non-uniformly rotating rotor in the cases, when epy gyrostat moves in the gravity field or under the action of potential forces. On the basis of analysis of equations of motion, an expression is written for the gyrostatic moment, which allows to derive three first integrals for the system of equations of motion. By means of methods, using for solving the inverse problems of mechanics, a forcing function is constructed on the invariant relations describing precessions of the general type, and a forcing function characterizing the speed of proper rotation of the body is build.

Keywords: *heavy gyrostat, variable gyrostatic moment, potential forces, general case precessions.*

Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры, г. Макеевка
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк

Получено 22.10.19

УДК 517.983.36

©2019. Д. В. Лиманский

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СЛАБО КОЭРЦИТИВНОЙ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

В статье найдены необходимые и достаточные условия слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева $\dot{W}_{\infty}^l(\mathbb{R}^n)$, где $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами, причем наименьшее общее кратное чисел $l_1, \dots, l_n$ совпадает с наибольшим из этих чисел.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, априорная оценка, квазиэллиптичность, слабая коэрцитивность, пространство Соболева, определитель Вандермонда.

Введение. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := (l_1, \dots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha : l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^{\alpha}, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (1)$$

с локально ограниченными в Ω коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot)$.

Обозначим через $P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha : l|=1} a_{j\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ символ l -главной части $P_j^l(x, D) := \sum_{|\alpha : l|=1} a_{j\alpha}(x) D^{\alpha}$ оператора $P_j(x, D)$. Напомним следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [1, 2] Систему дифференциальных операторов вида (1) называют l -квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq (0, \dots, 0), \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

и, в частности, эллиптической порядка l (l -эллиптической), если $l_1 = \dots = l_n = l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [1] Система дифференциальных операторов вида (1) называется коэрцитивной в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha : l| \leq 1} \|D^{\alpha} f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2)$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^{\infty}(\bar{\Omega})$.

Хорошо известно [1–4], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω , система (1) l -квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\dot{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (2) для

l -квазиэллиптической системы утрачивает силу. Так, в случае $p = \infty$ М.М. Маламудом [5] было доказано, что из априорной оценки

$$\|Q(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\bar{\Omega}),$$

вытекает тождество $Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) P_j^l(x, \xi)$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, для l -главных символов операторов $Q(x, D)$ и $P_j(x, D)$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами и области $\Omega = \mathbb{R}^n$ это утверждение доказано еще ранее де Лю и Миркилом [6]). Отсюда следует, что l -квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$ лишь в исключительных случаях.

Тем не менее, для l -квазиэллиптической системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ верна более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \quad (3)$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [5]. Этот результат делает естественным следующее введенное в [7] определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. [7] Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (3), в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

В случае изотропного пространства Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, т.е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, неравенство $|\alpha:l| < 1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая одного оператора еще ранее де Лю и Миркил [6] показали, что при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D) = P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. [6] При $n \geq 3$ эллиптичность дифференциального полинома порядка $l \geq 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$.

Условие $n \geq 3$ в теореме 1 существенно. Так, в [6] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $\dot{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

В работе [8] автором и М.М. Маламудом теорема де Лю и Миркила была распространена на систему операторов с постоянными коэффициентами, а также был получен ее аналог для оператора $P(x, D)$ с переменными коэффициентами. Кроме этого, в той же работе дано полное описание слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ операторов от двух переменных и построены примеры широких классов слабо коэрцитивных, но не эллиптических операторов в шкале изотропных пространств $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$.

Обратимся теперь к анизотропному случаю. В работе автора [9] рассматривался случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух

переменных с l -квазиоднородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$. Для такого оператора был доказан аналог теоремы де Лю и Миркила в случае, когда l_1 не делится на l_2 . В случае же, когда l_1 кратно l_2 , в [9] был построен пример широкого класса слабо коэрцитивных в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, но не l -квазиэллиптических операторов.

Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Не нарушая общности, можно считать, что $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$. Разобьем числа $l_1, \dots, l_n$ на m групп, отнеся в k -ю группу все равные между собой числа. Пусть в k -й группе n_k чисел, $n_1 + \dots + n_m = n$. Введем дополнительно обозначения: $u_0 := 0$, $u_k := \sum_{j=1}^k n_j$, $k \in \{1, \dots, m\}$, так что в k -ю группу входят числа $l_{u_{k-1}+1}, \dots, l_{u_k}$. Тогда $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму координатных подпространств

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_m, \quad \text{где } E_k := \text{span} \{\xi_{u_{k-1}+1}, \dots, \xi_{u_k}\}. \quad (4)$$

Обозначим через $[l_1, \dots, l_n]$ наименьшее общее кратное чисел $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$, через $(P[E])(\xi)$ – сужение полинома $P(\xi)$ на координатное подпространство E .

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 2. Пусть вектор $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ такой, что $l_1 \geq \dots \geq l_n$ и $[l_1, \dots, l_n] = l_1$, и пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ – система дифференциальных операторов вида (1) с постоянными коэффициентами и линейно независимыми l -главными частями $\{P_j^l(D)\}_1^N$.

(i) Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ является l -квазиэллиптической, то она слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие:

$$\text{система полиномов } \{(P_j[E_k])(\xi)\}_1^N \text{ } l_{u_k} \text{ – эллиптична, } k \in \{1, \dots, m\}, \quad (5)$$

где $E_1, \dots, E_m$ – координатные подпространства из разложения (4).

(ii) Обратно, если система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (5), то она l -квазиэллиптична.

Отметим, что аналог теоремы 2 для случая $[l_1, \dots, l_n] > l_1$ был получен в недавней работе автора [10].

Обозначения.

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ – множества соответственно действительных, целых и натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i \frac{\partial}{\partial x_k}$, $D := (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, то $|\alpha : l| := \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n}$. Пусть также $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Для вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ через $r[E]$ обозначим его сужение на координатное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$. Для натуральных чисел $m, n, \dots, p$ обозначим через $[m, n, \dots, p]$ их наименьшее общее кратное. Пусть также $\delta_i^j := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера, $C_n^m := \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – биномиальный коэффициент, 0_k – нулевой вектор $(0, \dots, 0)$ длины k .

Через $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ обозначим $n \times n$ -матрицу с элементами a_{jk} , через $\det \|a_{jk}\|$ – ее определитель. Для чисел $m_1, \dots, m_n$ их определитель Вандермонда будет обозначаться через $W(m_1, \dots, m_n) := \prod_{j>k} (m_j - m_k)$.

Для дифференциального полинома $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha D^\alpha$ обозначим через $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ, через $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \xi^\alpha$ – его главный l -квазиоднородный символ. Для координатного подпространства $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $(P[E](\xi))$ сужение на E символа $P(\xi)$ оператора $P(D)$, а сужение на E самого оператора обозначим $(P[E](D))$. Через $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ будет обозначаться линейная оболочка, натянутая на единичные орты координатных осей $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Через $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\mathcal{F}f = \hat{f}$ – преобразование Фурье (Фурье–Стилтьеса) функции (меры) f . Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций в норме $\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева

$W_p^l(\Omega)$ обозначается как $\dot{W}_p^l(\Omega)$. Символ $\Rightarrow$ обозначает равномерную сходимость.

1. Вспомогательные утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. [11] Пусть $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки

$$f \mapsto T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F} f$$

отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Известно полное описание этой алгебры при $p = 1, 2, \infty$ (см. [11]). Нас интересует описание алгебры $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{M}$.

Предложение 1. [11] Алгебра $\mathcal{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье–Стилтьеса:

$$\Phi \in \mathcal{M} \iff \Phi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (6)$$

При выполнении равенства (6) будем говорить, что функция $\Phi(\cdot)$ порождается конечной мерой μ .

Из предложения 1 следует, что все функции $\Phi \in \mathcal{M}$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов $\mathcal{M}$ инвариантна относительно отражений $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(-\xi)$, сдвигов $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(\xi - \eta)$ ($\eta \in \mathbb{R}^n$), растяжений $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(r\xi)$ ($r > 0$) и вращений $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(\rho\xi)$ ($\rho = (\rho_{jk})_{n \times n}$ – ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$ с определителем $\det(\rho_{jk}) = 1$). Наконец, отметим, что $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$ (см. [11]).

Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $P(\xi) = \sum_{|\alpha: l| \leq 1} a_\alpha \xi^\alpha$ – полином от n переменных с l -квазиоднородной главной частью $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha: l|=1} a_\alpha \xi^\alpha$. Так как наименьшее общее кратное $[l_1, \dots, l_n]$ чисел $l_1, \dots, l_n$ равно l_1 , то числа $m_k := \frac{l_1}{l_k}$ ($k = 2, \dots, n$) – натуральные и взаимно простые. Обозначим также $m_1 := 1$, $m := (m_1, \dots, m_n)$.

Соотношение $|\alpha : l| = \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n = 1$, определяющее l -главную часть $P^l(\xi)$, можно переписать в виде $\langle \alpha, m \rangle := \alpha_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_n m_n = l_1$. Для всех остальных мономов ξ^α , входящих в $P(\xi)$, справедливо соотношение $\langle \alpha, m \rangle \leq l_1 - 1$.

Лемма 1. Пусть $m_1, \dots, m_n$ – произвольные натуральные числа. Тогда определитель биномиальной $n \times n$ -матрицы $\mathcal{M} := \|C_{jm_k}^j\|_{j,k=1}^n$ равен

$$\Delta := \det \mathcal{M} = \left[\prod_{k=1}^n \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} \right] m_1 \dots m_n W(m_1, \dots, m_n), \quad (7)$$

где $W(m_1, \dots, m_n) := \prod_{j>k} (m_j - m_k)$ – определитель Вандермонда.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{m_1}{2m_1(2m_1-1)} & \frac{m_2}{2m_2(2m_2-1)} & \dots & \frac{m_n}{2m_n(2m_n-1)} \\ \frac{3m_1(3m_1-1)(3m_1-2)}{3!} & \frac{3m_2(3m_2-1)(3m_2-2)}{3!} & \dots & \frac{3m_n(3m_n-1)(3m_n-2)}{3!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (nm_1 - j) & \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (nm_2 - j) & \dots & \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (nm_n - j) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \frac{2}{1!} \varphi_2(m_1) & \frac{2}{1!} \varphi_2(m_2) & \dots & \frac{2}{1!} \varphi_2(m_n) \\ \frac{3^2}{2!} \varphi_3(m_1) & \frac{3^2}{2!} \varphi_3(m_2) & \dots & \frac{3^2}{2!} \varphi_3(m_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_n(m_1) & \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_n(m_2) & \dots & \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_n(m_n) \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} \right) \det \|\varphi_j(m_k)\|, \end{aligned}$$

где $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^n$ – полиномы степени j со старшим коэффициентом 1, $\varphi_1(x) \equiv x$.

Ясно, что

$$\det \|\varphi_j(m_k)\| = m_1 \dots m_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \dots & m_n^{n-1} \end{vmatrix} = m_1 \dots m_n W(m_1, \dots, m_n),$$

и, следовательно, справедливо равенство (7). Лемма доказана. $\square$

Приведем несколько утверждений, касающихся априорных оценок в L^∞ .

Лемма 2 (Эберлейна). [6] Пусть μ – конечная мера в $\mathbb{R}^n$ и $c = \mu(0)$. Тогда функция, тождественно равная c , равномерно приближается выпуклыми комбинациями сдвигов функции $M(\xi) := \hat{\mu}(\xi)$, порождаемой мерой μ , т.е.

$$\sum_{k=1}^q c_k M(\xi - \xi^k) \rightrightarrows c, \quad \text{где } c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^q c_k = 1, \quad \xi^1, \dots, \xi^q \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 2. [6] Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ – дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (8)$$

эквивалентна тождеству для их символов

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где $\{M_j(\xi)\}_1^{n+1}$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 3. [5, 6] Из справедливости априорной оценки (8) для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ вида (1) вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

для символов их l -главных частей $Q^l(\xi)$ и $P_j^l(\xi)$. При этом $\lambda_j = \mu_j(0)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, где μ_j – конечные борелевские меры, порождающие мультипликаторы $M_j(\xi)$, $j \in \{1, \dots, N\}$ из тождества (9), справедливого в силу предложения 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Координатным подпространством в $\mathbb{R}^n$ размерности $k \in \{1, \dots, n\}$ называется линейное подпространство, натянутое на единичные орты координатных осей $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, т. е. подпространство вида

$$A_k = \text{span} \{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}\} = \{c_1 \xi_{j_1} + \dots + c_k \xi_{j_k}, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}. \quad (11)$$

Отметим, что подпространства A_k изоморфны $\mathbb{R}^k$, поэтому вместо пространства $\dot{W}_\infty^l(A_k)$ мы будем писать $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть A_k – координатное подпространство вида (11). Сужением вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ на A_k будем называть вектор $\tilde{r} := r|_{A_k} := (r_{j_1}, \dots, r_{j_k})$. Сужением полинома $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ на A_k будем называть полином

$$\tilde{P}(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}) := P(0, \dots, 0, \xi_{j_1}, 0, \dots, 0, \xi_{j_k}, 0, \dots, 0), \quad (12)$$

зависящий только от k переменных $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}$, и обозначать $\tilde{P}(\xi) = (P \upharpoonright A_k)(\xi)$.

Дифференциальный оператор, символом которого является полином (12), будем называть *сужением оператора* $P(D)$ на A_k и обозначать $(P \upharpoonright A_k)(D)$.

Предложение 4. [6] Для произвольного координатного подпространства $A_k \subset \mathbb{R}^n$ вида (11) априорная оценка (8) сохраняется при сужении всех операторов на это подпространство.

Из предложений 2 и 4 вытекает следующее важное утверждение.

Предложение 5. Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, то после сужения на произвольное координатное подпространство $A_k \subset \mathbb{R}^n$ вида (11) система $\{(P_j \upharpoonright A_k)(D)\}_1^N$ остается слабо коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^{l'}(\mathbb{R}^k)$, где $l' = l \upharpoonright A_k$.

2. Доказательство теоремы 2.

(i) Пусть система $\{P_j(D)\}_1^N$ l -квазиэллиптическая. Тогда она слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ (см. введение). Предположим, что условие (5) нарушено при некотором $k \in \{1, \dots, m\}$, т.е. символы суженных l -главных частей $\{(P_j^l \upharpoonright E_k)(\xi)\}_1^N = \{(P_j \upharpoonright E_k)^{l_{u_k}}(\xi)\}_1^N$ имеют общий нетривиальный нуль $\beta \in \mathbb{R}^{n_k} \setminus \{0\}$. Но тогда и символы исходных l -главных частей $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ также имеют общий нетривиальный нуль $(0_{n_1}; \dots; 0_{n_{k-1}}; \beta; 0_{n_{k+1}}; \dots; 0_{n_m})$, где $0_{n_j} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Последнее свойство противоречит l -квазиэллиптичности системы $\{P_j(D)\}_1^N$.

(ii) Пусть теперь система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (5). Предположим противное, т.е. что система $\{P_j(D)\}_1^N$ не является l -квазиэллиптической, т.е. $P_j^l(\alpha) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ортогональными преобразованиями в пределах каждого подпространства E_k можно добиться, чтобы сужения вектора α на E_k имели вид $\alpha \upharpoonright E_k = (0, \dots, 0, \gamma_k)$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что при таких преобразованиях слабая коэрцитивность системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ сохранится.

Пусть $i_1, \dots, i_s$ – индексы, для которых $\gamma_{i_j} \neq 0$. Сузим операторы $\{P_j(D)\}_1^N$ на подпространство $E := \text{span} \{\xi_{u_{i_1}}, \dots, \xi_{u_{i_s}}\}$. При этом суженная система $\{(P_j \upharpoonright E)(D)\}_1^N$ будет слабо коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^{l'}(\mathbb{R}^s)$, где $l' := l \upharpoonright E$ (см. предложение 5), а вектор $\alpha \upharpoonright E = (\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_s})$ с ненулевыми компонентами будет общим нетривиальным нулем символов l' -главных частей $\{(P_j \upharpoonright E)^{l'}(\xi)\}_1^N$. Покажем, что $s \geq 2$. В самом деле, в противном случае ($s = 1$) вектор α имеет вид

$$\alpha = (0_{n_1}; \dots; 0_{n_{i_1-1}}; 0, \dots, 0, \gamma_{i_1}; 0_{n_{i_1+1}}; \dots; 0_{n_m}), \quad \gamma_{i_1} \neq 0,$$

т.е. его сужение $\alpha \upharpoonright E_{i_1} = (0, \dots, 0, \gamma_{i_1})$ на подпространство E_{i_1} является общим нетривиальным нулем символов $\{(P_j \upharpoonright E_{i_1})^{l_{u_{i_1}}}(\xi)\}_1^N$, что противоречит условию (5).

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что для векторов $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие условия:

- (a) $n \geq 2$ и $l_1 > l_2 > \dots > l_n$; (b) $\alpha_j \neq 0$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Далее, положим

$$m_k := \frac{l_1}{l_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad m := (m_1, \dots, m_n);$$

$$P_j^{l-1}(\xi) := \sum_{\langle \beta, m \rangle = l_1 - 1} a_{j\beta} \xi^\beta, \quad \text{если} \quad P_j(\xi) = \sum_{\langle \beta, m \rangle \leq l_1} a_{j\beta} \xi^\beta, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Разложим каждый из символов $P_j(\xi)$ в сумму

$$P_j(\xi) = P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots, \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

где многоточие соответствует сумме мономов $a_\beta \xi^\beta$, для которых $\langle \beta, m \rangle < l_1 - 1$.

Выберем дифференциальный моном $Q(D) := D^\nu = D_1^{\nu_1} \dots D_n^{\nu_n}$ с символом

$$Q(\xi) := \prod_{k=1}^n \left(\frac{\xi_k}{\alpha_k} \right)^{\nu_k}, \quad \text{где} \quad \langle \nu, m \rangle = l_1 - 1.$$

Он обладает очевидными свойствами: $Q(\alpha) = 1$ и $Q(t\xi) \equiv t^{l_1-1}Q(\xi)$, где $t > 0$.

В силу слабой коэрцитивности системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, справедлива априорная оценка (8), которая, ввиду предложения 2, равносильна тождеству

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) \left[P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots \right] + M_{N+1}(\xi), \quad (13)$$

где $\{M_j(\xi)\}_1^{N+1}$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Покажем сначала, что $(P_1^{l-1}(\alpha), \dots, P_N^{l-1}(\alpha)) \neq (0, \dots, 0)$. В самом деле, предпологая противное, подставим $\xi := t\alpha$ в (13). Так как $P_j^l(t\alpha) = t^{l_1} P_j^l(\alpha) = 0$ и $P_j^{l-1}(t\alpha) = t^{l_1-1} P_j^{l-1}(\alpha) = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$, после указанной подстановки в левой части (13) получим t^{l_1-1} , а в правой – величину $o(t^{l_1-1})$ (при $t \rightarrow +\infty$), так как функции $M_j(\xi)$ ограничены. Получили противоречие. Значит, после линейного преобразования системы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ можно считать, что

$$P_j^{l-1}(\alpha) = \delta_1^j, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Обозначим также $u_{jk} := \frac{\partial P_j^l}{\partial x^k}(\alpha)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Далее, рассмотрим семейство $\mathcal{N}$ кривых $x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ в $\mathbb{R}^n$ вида

$$x_k(t) := \alpha_k t^{m_k} + a_k t^{m_k-1} + \dots, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (14)$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ – произвольные числа, $t > 0$. В тождестве (13) сделаем подстановку $\xi_k := x_k(t)$, где $x_k(t)$ – функции (14), применяя к каждому из полиномов формулу Тейлора в точке $(\alpha_1 t^{m_1}, \dots, \alpha_n t^{m_n})$. Имеем

$$t^{l_1-1} = \sum_{j=1}^N M_j(x(t)) \left[\sum_{k=1}^n u_{jk} a_k + \delta_1^j \right] t^{l_1-1} + o(t^{l_1-1}). \quad (15)$$

Деля обе части (15) на t^{l-1} и затем переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получим:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N M_j(x(t)) \left[\sum_{k=1}^n u_{jk} a_k + \delta_1^j \right] = 1. \quad (16)$$

Далее, будем последовательно подставлять в (13) функции

$$\xi = x((t + \tau)^k), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

где $\tau \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная, а $x(t) \in \mathcal{N}$. Учитывая соотношение (16), получим, что числа

$$v_k := \alpha_k \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N u_{jk} M_j(x(t)), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

удовлетворяют системе n однородных линейных уравнений с биномиальной матрицей $\mathcal{M} := \|C_{jm_k}^j\|_{j,k=1}^n$. Так как $m_1, \dots, m_n$ различны, то матрица $\mathcal{M}$ невырождена (см. лемму 1). Отсюда и из условия $\alpha_k \neq 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$, следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N u_{jk} M_j(x(t)) = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (17)$$

После изменения порядка суммирования в (16), из равенств (17) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[M_1(x(t)) + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N u_{jk} M_j(x(t)) \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} M_1(x(t)) = 1, \quad x(t) \in \mathcal{N}. \quad (18)$$

Покажем, что соотношение (18) невозможно. В самом деле, так как $Q^l(\xi) \equiv 0$ и справедливо тождество (10) (см. предложение 3), то $\sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi) \equiv 0$, следовательно, $\lambda_j = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, в силу линейной независимости l -главных символов $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$. Значит, ввиду того же предложения, $\lambda_1 = \mu_1(0) = 0$, где μ_1 – конечная борелевская мера, порождающая мультипликатор $M_1(\xi)$. Тогда в силу леммы 2 выпуклые комбинации сдвигов функции $M_1(\xi)$ равномерно стремятся к $\mu_1(0) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдутся числа $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^q c_k = 1$, и векторы $\xi^1, \dots, \xi^q \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\left| \sum_{k=1}^q c_k M_1(\xi - \xi^k) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Подставляя в это неравенство функции $\xi_k = x_k(t)$ вида (14) и затем переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, с учетом (18) имеем $|\sum_{k=1}^q c_k| < \varepsilon < 1$, что неверно, поскольку $\sum_{k=1}^q c_k = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Бесов О.В. О коэрцитивности в анизотропном пространстве С.Л. Соболева // Матем. сборник. – 1967. – **73** (115). № 4. – С. 585–599.
4. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Мир, 1959. – 252 с.
5. Маламуд М.М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Труды ММО. – 1995. – **56**. – С. 206–261.
6. De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Illinois J. Math. – 1964. – **8**, № 1. – P. 112–124.
7. Лиманский Д.В. О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞ // Доклады РАН. – 2004. – **397**, № 4. – С. 453–458.
8. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. – 2008. – **199**, № 11. – С. 75–112.
9. Лиманский Д.В. О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева // Труды ИПММ. – 2016. – **30**. – С. 109–119.
10. Лиманский Д.В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 68–76.
11. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

D. V. Limanskii

A priori estimates for a weakly coercive system of minimal differential polynomials in the anisotropic Sobolev space.

In the paper there are found necessary and sufficient conditions for a system of minimal differential polynomials in the anisotropic Sobolev space $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, where $l = (l_1, \dots, l_n)$ is the vector of positive integers such that the least common multiple of $l_1, \dots, l_n$ coincides with the maximal number among them.

Keywords: differential operator, a priori estimate, quasi-ellipticity, weak coercivity, Sobolev space, Vandermonde determinant.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»,
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
4125aa@gmail.com

Получено 01.11.19

УДК 517.955 : 517.518

©2019. А. Д. Манов

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ И ЕГО СВЯЗЬ С ПРОБЛЕМОЙ ШЁНБЕРГА

В данной работе доказывается принцип максимума для решений одной задачи Коши. Выявлена его связь с теорией положительно определённых функций и, в частности, с проблемой Шёнберга.

Ключевые слова: задача Коши, положительно определённые функции, проблема Шёнберга.

Введение. Обозначим символом $C_b(\mathbb{R}^n)$ множество ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. Если $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье функции u определяется как $\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-i(x,\xi)}dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$. Если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то её преобразование Фурье мы также будем обозначать символом $\widehat{u}$. В этом случае преобразование Фурье $\widehat{u}$ определено с точностью до значений на множестве меры нуль.

Пусть $\psi \in C(\mathbb{R}^n)$ и $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Определим оператор A_ψ равенством $\widehat{A_\psi u}(\xi) = \psi(\xi)\widehat{u}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Иначе говоря,

$$A_\psi u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| \leq k} \psi(\xi) \widehat{u}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi, \quad (1)$$

где предел понимается в смысле $L_2(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что областью определения оператора является следующее множество:

$$D(A_\psi) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^n) : \psi \widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)\}. \quad (2)$$

В данной работе мы рассматриваем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_\psi u = 0, & \text{для п. в. } x \in \mathbb{R}^n \text{ и } t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3)$$

где $u(x, 0) := \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Например, если взять $\psi(x) = \|x\|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 2$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма, то на функциях из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ оператор A_ψ совпадает с дробным оператором Лапласа $(-\Delta)^\alpha$, а задача (3) является задачей Коши для уравнения теплопроводности с дробным оператором Лапласа.

Далее мы будем рассматривать класс функций ψ , к которому, в частности, принадлежит функция из примера выше и который тесно связан с классом положительно определённых функций. Пусть E нетривиальное вещественное линейное

пространство. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на E ($f \in \Phi(E)$), если при любом $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $x_1, \dots, x_m$ из E и для любой системы комплексных чисел $c_1, \dots, c_m$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^m c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\psi(0) = 0$ и $e^{-t\psi(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(\mathbb{R}^n)$ для всех $t > 0$. Пусть также оператор A_ψ определён равенством (1) и $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда следующая функция является решением задачи Коши (3):

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_\psi(x - y, t) u_0(y) dy, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_\psi(x, t) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\psi(\xi)} e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (5)$$

Кроме того, если u_0 вещественнозначна и $u_0(x) \not\equiv 0$, то справедливы неравенства

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) < u(x, t) < \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (6)$$

Замечание 1. Неравенство (6), по сути, является принципом максимума для решений вида (4) задачи (3). Принцип максимума для решений задачи Коши с дробным оператором Лапласа в различных видах рассматривался, например, в работах [1–3].

Замечание 2. Наиболее существенным условием на функцию ψ в теореме 1 является положительная определённость функции $e^{-t\psi(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, для всех $t > 0$. Из теоремы Шёнберга (см., например, [4, Theorem 7.8], [5, Proposition 4.4], [6, гл. 4, § 1, п. 4(3)]) вытекает, что класс функций $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\psi(0) \geq 0$ и $e^{-t\psi(\cdot)} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ для всех $t > 0$ совпадает с классом отрицательно определённых на $\mathbb{R}^n$ функций. Комплекснозначная функция ψ называется отрицательно определённой на вещественном линейном пространстве E ($\psi \in \mathcal{N}(E)$), если $\psi(0) \geq 0$, $\overline{\psi(x)} = \psi(-x)$, $x \in E$, и для любого $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $\{x_k\}_{k=1}^m \subset E$ и для любых чисел $\{c_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{C}$ таких, что $\sum_{k=1}^m c_k = 0$, выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^m c_k \bar{c}_j \psi(x_k - x_j) \leq 0$.

Хорошо известно, что если $\psi \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, то $|\psi(x)| \leq C_\psi(1 + \|x\|^2)$, $x \in \mathbb{R}^n$, где константа C_ψ не зависит от x . Отсюда, в частности, вытекает, что если $\psi \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, то область определения оператора A_ψ включает в себя пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Из теоремы Леви–Хинчина (см., например, [4, Theorem

10.8], [5, Theorem 4.15]) следует, что в этом случае на функциях $u \in S(\mathbb{R}^n)$ оператор A_ψ определён следующим образом:

$$A_\psi u(x) = au(x) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - \sum_{k,j=1}^n q_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(u(x-y) - u(y) + \frac{1}{1+\|y\|} \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right) d\nu(y), \text{ для п. в. } x \in \mathbb{R}^n,$$

где $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\{q_{kj}\}_{k,j=1}^n$ — положительно определённая матрица и ν — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \min\{1, \|y\|^2\} d\nu(y) < \infty$.

Замечание 3. Отметим, что функция $\psi(x) = \|x\|^\alpha$, $\alpha > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 1 лишь при условии $0 < \alpha \leq 2$. В целом задача о нахождении условий, при которых некоторая *неотрицательная, однородная* функция ψ удовлетворяет условиям теоремы 1, равносильна задаче Шёнберга.

Введём следующие обозначения. Линейное пространство E и функцию $\rho: E \rightarrow \mathbb{R}$ с условиями $\rho(x) \geq 0$, $\rho(tx) = |t|\rho(x)$, $x \in E$, $t \in \mathbb{R}$, и $\rho(x) \not\equiv 0$ на E , мы обозначим (E, ρ) . Символом $\Phi(E, \rho)$ обозначим класс всех непрерывных функций $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что функция $f \circ \rho \in \Phi(E)$.

Обозначим символом l_p^n пару $(\mathbb{R}^n, \rho)$, $n \in \mathbb{N}$, с функцией $\rho(x) := \|x\|_p$, $0 < p \leq \infty$, где $\|x\|_p^p := \sum_{k=1}^n |x_k|^p$ при $0 < p < \infty$ и $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Бесконечномерные пространства l_p определяются аналогично.

Проблема Шёнберга формулируется следующим образом: *для заданной пары (E, ρ) требуется определить все такие $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых функция $f(t) = e^{-t^\lambda}$ принадлежит классу $\Phi(E, \rho)$.*

Хорошо известно, что $\exp(-t^\lambda) \in \Phi(E, \rho) \iff 0 \leq \lambda \leq \alpha(E, \rho)$, где

$$\alpha(E, \rho) := \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \exp(-t^\lambda) \in \Phi(E, \rho) \right\}. \quad (7)$$

Величину (7) для данного (E, ρ) будем называть константой Шёнберга.

Для пространств l_p^n константы Шёнберга известны:

$$\alpha(l_p^n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 1, 0 < p \leq \infty; \\ p, & \text{если } n \geq 2, 0 < p \leq 2; \\ 1, & \text{если } n = 2, 2 < p \leq \infty; \\ 0, & \text{если } n \geq 3, 2 < p \leq \infty. \end{cases} \quad (8)$$

При $0 < p \leq 2$ этот результат был известен Шёнбергу, а в остальных случаях независимо и разными методами был доказан в 1991 Колдобским [7] и Заставным [8–10] ($2 < p \leq \infty$, $n \geq 2$). Случай $p = \infty$ исследовали в 1989 Misiewicz [11] ($n \geq 3$) и Курицын [12] ($n = 2$).

Из результата Герца [13] вытекает, что, если ρ – норма в E и $\dim E = 2$, то $\alpha(E, \rho) \geq 1$.

Отметим также, что если $\rho(x) > 0$, $x \neq 0$, то $e^{-\rho^\lambda(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $e^{-t^\lambda} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ при некотором $0 < \lambda \leq \alpha(\mathbb{R}^n, \rho)$, то $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ (см. [14]).

Работа организована следующим образом. В разделе 1 приведены вспомогательные факты и утверждения. В разделе 2 мы докажем теорему 1.

1. Вспомогательные факты и утверждения. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(E)$. Пусть $f, f_i \in \Phi(E)$. Тогда:

- 1) $|f(x)| \leq f(0)$, $\overline{f(-x)} = f(x)$, $x \in E$;
- 2) $|f(x+y) - f(x)|^2 \leq 2f(0)(f(0) - \Re f(y))$, $x, y \in E$;
- 3) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $\bar{f}$, $\Re f$, $f_1 f_2 \in \Phi(E)$, где $\lambda_i \geq 0$;
- 4) если для всех $x \in E$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: g(x)$, то $g \in \Phi(E)$;
- 5) $|f(0)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leq (f^2(0) - |f(x)|^2)(f^2(0) - |f(y)|^2)$, $x, y \in E$.

Свойства 1)–5) хорошо известны (см., например, [5, 6, 15, 16]). В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин доказали следующий критерий положительной определённости.

Теорема 2 (Бохнер–Хинчин). *Функция $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} d\mu(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [5, 6, 15, 16]. Как прямое следствие мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье:

Следствие 1. *Если $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff \hat{f}(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$.*

Замечание 4. Если функция $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, то соответствующая ей мера μ в представлении (9) определяется однозначно. Далее для удобства, меру μ из представления (9) будем называть мерой Бохнера функции f .

Также нам потребуется следующая теорема Леви о непрерывности (см. [6, гл. IV, теорема 3.2], [16, Theorem 1.6.3]).

Теорема 3 (Леви). *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность непрерывных положительно определённых на $\mathbb{R}^n$ функций таких, что $f_n(0) = 1$ и $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность отвечающих им мер Бохнера. Если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ и функция $g \in C(\mathbb{R}^n)$, то последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ слабо сходится к мере μ , которая является мерой Бохнера функции g ,*

т.е. для любой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x).$$

Лемма 1. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $p > 0$, то $f \in L_q(\mathbb{R}^n)$ для всех $q \geq p$.

Доказательство вытекает из неравенства:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \leq \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|^{q-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Также нам потребуются следующие две леммы (см. [17, теорема 1.3], [18, теорема 4.2] и [17, теорема 2.6], [18, теорема 5.8], соответственно).

Лемма 2. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f * g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 3. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$.

Формулировка и доказательство следующей леммы принадлежат В.П. Заставному

Лемма 4. Пусть функция $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $e^{-t\psi(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(\mathbb{R}^n)$ для всех $t > 0$ и

$$\Gamma(x, z) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z\psi(\xi)} e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Тогда:

1) $\Gamma(x, z) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}_+)$ и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $\Gamma(x, z)$ является аналитической по $z \in \mathbb{C}_+$;

2) Для всех $t > 0$ функция $\Gamma(\cdot, t) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \geq 1$ и справедливы равенства:

$$e^{-t\psi(x)} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) e^{-i(x, y)} dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

$$\Gamma(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t-\lambda) \Gamma(y, \lambda) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad \lambda \in (0, t). \quad (11)$$

3) $\Gamma(x, t) > 0$ для всех $t > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что утверждение 3) леммы 4 для функций ψ вида $\psi(x) = \rho^\lambda(x)$, $0 < \lambda \leq \alpha(\mathbb{R}^n, \rho)$, было ранее доказано для случая евклидовой

нормы в работах Куттнера [19, лемма 2], Ю.В. Линника [20, § 47] при $n = 1$ и Б.И. Голубова [21, лемма 2] при $n \geq 2$. Для однородных функций $\rho(x) > 0$, $x \neq 0$ – в работе [14].

Доказательство леммы 4. Пусть $m > 0$. Рассмотрим функцию

$$\Gamma_m(x, z) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| \leq m} e^{-z\psi(\xi)} e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция $\Gamma_m(x, z) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C})$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ является аналитической по $z \in \mathbb{C}$. Из положительной определённости $e^{-\psi(x)}$ следует, что $\psi(x) \geq \psi(0)$ и $\psi(-x) = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Поэтому для всех $\alpha > 0$, всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $z \in \mathbb{C}_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq \alpha\}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left| e^{z\psi(0)} (\Gamma_m(x, z) - \Gamma(x, z)) \right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| \geq m} e^{-(\psi(\xi) - \psi(0))\Re z} d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| \geq m} e^{-(\psi(\xi) - \psi(0))\alpha} d\xi = \frac{e^{\alpha\psi(0)}}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| \geq m} e^{-\alpha\psi(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, при $\alpha > 0$ последовательность $e^{z\psi(0)} \Gamma_m(x, z)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}_\alpha$ к функции $e^{z\psi(0)} \Gamma(x, z)$. Утверждение 1) доказано.

Из следствия 1 и леммы 1 вытекает, что для всех $t > 0$ функция $\Gamma(\cdot, t) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \geq 1$. Из формулы обращения для преобразования Фурье следует, что равенство (10) выполняется при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. А в силу непрерывности правой и левой частей равенство (10) выполняется при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

При фиксированном $t > 0$ и $\lambda \in (0, t)$ равенство (11) справедливо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, так как преобразование Фурье левой и правой частей в (11) совпадают всюду. В силу непрерывности левой и правой частей в (11) это равенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Утверждение 2) доказано.

Докажем, что $\Gamma(x, t) > 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$. Предположим, что найдутся $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 > 0$ такие, что $\Gamma(x_0, t_0) = 0$. Из (11) и неотрицательности (см. следствие 1) и непрерывности $\Gamma(x, t)$ вытекает, что

$$\Gamma(y - x_0, t_0 - \lambda) \Gamma(y, \lambda) = 0 \quad \text{при } \lambda \in (0, t_0), \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Так как $\Gamma(0, t_0 - \lambda) > 0$, то из непрерывности $\Gamma(x, t)$ на $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ и теоремы о сохранении знака следует, что найдётся $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$, $\varepsilon < \min\{\lambda, t_0 - \lambda\}$ такое, что при $\|y - x_0\| < \varepsilon$ и $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ выполняется неравенство $\Gamma(y - x_0, t_0 - \mu) > 0$. Из (12) следует, что $\Gamma(y, \mu) = 0$ при $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y - x_0\| < \varepsilon$ и $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$. Из аналитичности $\Gamma(x, t)$ вытекает, что

$$\Gamma(y, t) = 0 \quad \text{при } y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y - x_0\| < \varepsilon \text{ и } t > 0.$$

Рассмотрим множество

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n : \Gamma(x, t_0) = 0\}.$$

Очевидно, что F замкнуто, а так как $x_0 \in F$, то $F \neq \emptyset$. С другой стороны, по доказанному F является открытым, так как, если $\Gamma(\tilde{x}_0, t_0) = 0$ для некоторого $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то $\Gamma(y, t_0) = 0$ при $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y - \tilde{x}_0\| < \varepsilon$. Таким образом, $F = \mathbb{R}^n$, и значит, $e^{-t_0\psi(\xi)} \equiv 0$. Получили противоречие. $\square$

2. Доказательство теоремы 1.

а) Проверим, что функции $u(x, t)$ удовлетворяют первому равенству в (3).

Покажем вначале, что функции $u(x, t)$ принадлежат области определения оператора A_ψ при всех $t > 0$. Так как $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $\Gamma_\psi(\cdot, t) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ при $t > 0$ (см. лемму 4), то из леммы 1 вытекает, что $u(\cdot, t) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$. Найдём преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi, t)$:

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-t\psi(\xi)} \widehat{u_0}(\xi), \quad \text{для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (13)$$

Покажем теперь, что $\psi(\xi) \widehat{u}(\xi, t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$. Так как $\psi(\xi) e^{-\frac{t}{2}\psi(\xi)} \widehat{u_0}(\xi) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$, то

$$\psi(\xi) \widehat{u}(\xi, t) = \left(\psi(\xi) e^{-\frac{t}{2}\psi(\xi)} \widehat{u_0}(\xi) \right) \cdot e^{-\frac{t}{2}\psi(\xi)} \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad t > 0.$$

Так как $\psi(\xi) \widehat{u}(\xi, t) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$, то из леммы 1 вытекает, что $\psi(\xi) \widehat{u}(\xi, t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$.

Докажем теперь, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $u(x, t)$ дифференцируема по t и справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) = -\psi(\xi) e^{-t\psi(\xi)} \widehat{u_0}(\xi) \quad \text{для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (14)$$

Из леммы 4 вытекает, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $\Gamma_\psi(x, t)$ дифференцируема по t . Несложно показать, что

$$\frac{\partial \Gamma_\psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{-t\psi(\xi)} e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma_\psi}{\partial t}(x - y, t) u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (15)$$

Из лемм 2 и 3 вытекает равенство (14). Отметим, что производную по t можно было внести под интеграл, так как

$$\left| \psi(\xi) e^{-t\psi(\xi)} e^{i(x, \xi)} \right| = \psi(\xi) e^{-t\psi(\xi)} \leq C e^{-\frac{t_0}{2}\psi(\xi)} \quad \text{при } t > t_0,$$

где $t_0 \in (0, +\infty)$, константа $C > 0$ и от t не зависит, т.е. для любого $t > 0$ модуль подынтегрального выражения в (15) ограничен интегрируемой функцией, не зависящей от t .

Рассмотрим функцию

$$F(x) := \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + A_\psi u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Из определения оператора A_ψ и равенств (13), (14) вытекает, что $\widehat{F}(\xi) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, и значит, $F(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$.

б) Проверим, что функции $u(x, t)$ удовлетворяет второму равенству в (3).

Из условий теоремы вытекает, что функция ψ является чётной. Соответственно, функция $\Gamma_\psi(y, t)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, является чётной по y . Из леммы 4 вытекает, что функция $\Gamma_\psi(y, t)$ является плотностью для меры Бохнера функции $e^{-t\psi(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Так как $e^{-t\psi(x)} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то по теореме 3 меры $\Gamma_\psi(y, t) dy$ слабо сходятся к мере δ_0 – Бохнера функции $g(x) \equiv 1$, которая сосредоточена в нуле.

Из того, что $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_\psi(y, t) u_0(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x - y) d\delta_0(y) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

с) Докажем неравенство (6). Так как $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, то выполняются неравенства

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) \leq u_0(y) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x), \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (16)$$

Из утверждения 3) леммы 4 вытекает, что $\Gamma_\psi(x, t) > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Домножим неравенство (16) на $\Gamma_\psi(x - y, t)$ и проинтегрируем его по переменной y по всему пространству $\mathbb{R}^n$. Учитывая, что $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_\psi(x, t) dx = e^{-t\psi(0)} = 1$, получаем неравенства

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x), \quad t > 0.$$

Предположим теперь, что для некоторых $t_0 > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $u(x_0, t_0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x)$. Отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) - u_0(y) \right) \Gamma_\psi(x_0 - y, t_0) dy = 0.$$

Так как под интегралом стоит неотрицательная непрерывная функция, то

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) - u_0(y) \right) \Gamma_\psi(x_0 - y, t_0) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $\Gamma_\psi(x_0 - y, t_0) > 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$u_0(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x), \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то $u_0(x) \equiv 0$. Второе неравенство в (6) доказано. Аналогично доказывается первое неравенство в (6).

Теорема 1 доказана.

Заключение. Очевидно, что если $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, то функция $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, определённая равенством (4), также принадлежит множеству непрерывных и ограниченных функций $C_b(\mathbb{R}^n)$. Естественно возникает вопрос о том, можно ли продолжить оператор A_ψ на более широкий класс функций при условии, что функция ψ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Также, по мнению автора, представляет интерес вопрос о единственности решения задачи Коши (3).

Автор выражает благодарность С.П. Дегтяреву и В.П. Заставному за ценные замечания и предложения.

1. Barrios B., Peral I., Soria F., Valdinoci E.A. Widder's Type Theorem for the Heat Equation with Nonlocal Diffusion // Arch. Rational Mech. Anal. – 2014. – **213**. – P. 631–650.
2. Jarohs T., Weth S. On the strong maximum principle for nonlocal operators // Math. Z. – 2018. – **293**, № 1–2. – P. 81–111.
3. Cheng T., Huang G., Li C. The maximum principles for fractional Laplacian equations and their applications // Communications in Contemporary Mathematics. – 2017. – **19**, № 6.
4. Berg C., Forst G. Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975. – 197 p.
5. Shilling R.L., Song R., Vondraček Z. Bernstein functions. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2010. – 410 p.
6. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 370 с.
7. Колдобский А.Л. Задача Шенберга о положительно определенных функциях // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**. – С. 78–85.
8. Заставный В.П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы. Решение проблемы Шёнберга // Донецк. Институт прикл. мат. и мех. АН Украины, Препринт – 1991. – С. 35.
9. Заставный В.П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы // Доклады РАН. – 1992. – **325**, № 5. – С. 901–903.
10. Zastavnyi V.P. Positive definite functions depending on the norm // Russian J. Math. Physics. – 1993. – **1**, № 4. – P. 511–522.
11. Misiewicz J. Positive definite functions on l_∞ // Statist. Probab. Lett. – 1989. – **8**. – P. 255–260.
12. Kuritsyn Y. Multidimensional versions and two problems of Schoenberg // Problems of Stability of Stochastic Model, VNIISI. – 1989. – P. 72–79.
13. Herz C.S. Class of Negative-Definite Functions // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1963. – **14**, № 4. – P. 670–676.
14. Заставный В.П., Манов А.Д. О положительной определенности некоторых функций, связанных с проблемой Шёнберга // Матем. заметки. – 2017. – **102**, № 3. – С. 355–368.
15. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions. – Berlin: Akad. Verl., 1994. – 208 p.
16. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.
17. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 332 с.

18. Либ Э., Лосс М. Анализ. – Новосибирск: Науч. кн., 1998. – 276 с.
19. Kuttner B. On the Riesz means of a Fourier series // J. London Math. Soc. – 1944. – **19**, № 2. – P. 77–84.
20. Линник Ю.В. Линейные формы и статистические критерии: I, II // Укр. матем. журн. – 1953. – **5**, № 2; 3. – С. 207–243; 247–290.
21. Golubov B.I. On Abel–Poisson type and Riesz means // Analysis Math. – 1981. – **7**. – P. 161–184.

A. D. Manov

Maximum principle for solutions of a Cauchy problem and its connection to Schoenberg's problem.

In this paper we prove maximum principle for solutions of a Cauchy problem and find its connection to positive definite functions and in particular Schoenberg's problem.

Keywords: *Cauchy problem, positive definite functions, Schoenberg's problem.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
Донецкий национальный ун-т
manov.ad@ro.ru

Получено 19.05.19

УДК 517.9

©2019. А. С. Миненко

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ АНАЛИТИЧНОСТИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

Исследуется нелинейная краевая задача, имеющая гидродинамическое происхождение, в случае, когда на свободной границе задается условие Бернулли в виде неравенства. Результаты, изложенные в этой работе, являются естественным продолжением результатов, полученных автором в [1–4] при изучении задачи типа Стефана и в [5] при изучении задачи типа Бернулли.

Ключевые слова: аналитичность свободной границы, закон Бернулли, интегральный функционал, переменная область интегрирования.

Введение. Проблеме разрешимости краевых задач со свободной границей, изучению свойств гладкости решений посвящено много исследований. Укажем наиболее важные в этом смысле работы [6–10]. Байокки [8] редуцировал к эллиптическому вариационному неравенству задачу со свободной границей из теории фильтрации. На этом пути были получены теоремы существования и единственности обобщенных решений. Киндерлереру и Ниренбергу [7] удалось показать, что построенное методом вариационных неравенств обобщенное решение однофазной нестационарной задачи Стефана является на самом деле классическим решением. Альт и Каффарелли [9] изучили проблему минимума интегрального функционала с переменной областью интегрирования. Ими установлена гладкость свободной границы.

Основным результатом настоящей работы является доказательство аналитичности свободной границы. В основу доказательства положена методика, разработанная в [3, 11–13].

1. Постановка задачи. Пусть G – область, ограниченная снизу отрезком $B = (0 \leq x \leq a, y = 0)$, по бокам вертикалями $\Gamma_1 = (x = 0, 0 \leq y \leq c)$, $\Gamma_2 = (x = a, 0 \leq y \leq b)$ и сверху кривой $S: y = g(x), 0 \leq x \leq a$, где $c < b$, $g(0) = c$, $g(a) = b$ и $g(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция такая, что $g'(0) = 0$ и $g'(a) = 0$. Зададим в области G функцию, аналитическую по переменным x, y , непрерывную в $\overline{G}$ и такую, что $V(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \overline{G}$. Допустим также, что функция $V(x, y)$ при $(x, y) \in G$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (yV^2(x, y)) \geq 0. \quad (1)$$

Далее, пусть γ – гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $G \cup S$. При этом одним концом γ является точка $(0, c)$, а другой лежит на вертикали Γ_2 , разбивая её на две части: верхнюю $\Gamma_{1\gamma}$ и нижнюю $\Gamma_{2\gamma}$, т.е. $\Gamma_2 = \Gamma_{1\gamma} \cup \Gamma_{2\gamma}$. Через

$G_\gamma \subset G$ будем обозначать область, ограниченную отрезком B , вертикалями Γ_1, Γ_2 и кривой γ .

Рассмотрим следующую задачу. В односвязной области G требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$ по следующим условиям: функция $\psi(x, y)$ в области G_γ является классическим решением уравнения

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_y = \omega y, \quad (x, y) \in G_\gamma, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (2)$$

непрерывна в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируема в $\overline{G}_\gamma$, за исключением, может быть, угловых точек, и удовлетворяет условиям

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \quad (3)$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \subset \Gamma_{2\gamma}, \quad (4)$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (5)$$

$$\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geq V^2(x, y) \cdot y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (6)$$

причём на части γ , лежащей внутри G , в последнем условии всегда должно выполняться равенство.

В работе [5] установлена эквивалентность краевой задачи (2)–(6) проблеме минимума функционала

$$I(\psi, \gamma) = \iint_{G_\gamma} [\psi_x^2 + \psi_y^2 + V^2(x, y) y^2 + 2\omega y(\psi - 1)] \frac{dx dy}{y}$$

с неизвестной областью интегрирования G_γ на соответствующем множестве R допустимых пар (ψ, γ) : γ – жорданова дуга, расположенная в $G \cup S$, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, b) , причем все точки γ , за исключением точки $(0, c)$, находятся выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области G_γ , равна единице на γ , нулю на отрезке B и имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ , причем $J(\psi, \gamma) < \infty$. Далее, пусть d – точная нижняя грань значений функционала $I(\psi, \gamma)$ на множестве R . Тогда аналогично тому, как это сделано в работе [5], доказывается следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполнено условие (1) и справедливы неравенства

$$1 - \frac{\omega b^3}{3} > 0, \quad V(x, y) < \frac{1}{c^2} \left[2 + \frac{\omega c^3}{3} \right], \quad (x, y) \in G,$$

$$\omega \text{mes } G + \frac{2a}{c^2} \left[1 - \frac{\omega c^3}{3} \right] < \int_S V(x, y) ds.$$

Тогда существует пара (ψ, γ) , удовлетворяющая условиям: $I(\psi, \gamma) = d$, γ – монотонно возрастающая кривая, заданная уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq T$;

функция $\psi(x, y)$ является классическим решением задачи (2)–(5), а условие (6) на части γ , лежащей внутри G , выполняется почти всюду.

Доказательство. Подробное доказательство леммы можно получить с помощью рассуждений, приведённых в [5] (теорема 1). Поэтому укажем основные моменты этих рассуждений.

В работе [5] изучена задача (2)–(6) в случае, когда $V(x, y) = \text{const} > 0$. С помощью вариационного подхода, там доказано существование пары (ψ, γ) такой, что

$$\psi(x, y) \in C(\overline{G}), \quad \psi(x, y) \in C^1(\overline{G}_\gamma \setminus \gamma) \cap C^2(G_\gamma)$$

и $I(\psi, \gamma) = d$, а $\psi(x, y)$ – решение задачи (2)–(5).

Относительно свободной границы на основе применения симметризации Штейнера с учётом условия (1) устанавливается, что γ является монотонно возрастающей кривой, заданной с помощью уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. [5], лемма 3).

Далее, в силу предположений леммы можно показать, что область G_γ не совпадает с G и все точки γ , за исключением точки $(0, c)$, лежат выше прямой $y = c$. Доказательство этого факта проводится аналогично тому, как это сделано в [5] (лемма 4).

Теперь, используя метод внутренних вариаций Шиффера [11], можно показать, что условие (6) на части γ , лежащей внутри G , выполняется почти всюду. Лемма доказана.

Настоящая статья посвящена доказательству аналитичности свободной границы γ . Схема доказательства следующая.

Рассматривается произвольная точка $z_0 = x_0 + iy_0 \in \gamma$, расположенная внутри G вместе с некоторым кругом K_r достаточно малого радиуса с центром в этой точке. С помощью методики работ [3, 11] устанавливается существование аналитической функции $g(t)$, $t = \xi + i\eta$ в области $G_\gamma \cap K_r$, которая непрерывна в этой области вплоть до границы γ и принимает на γ граничное значение $g(t) = \bar{t}$. Затем, обозначая через $w(t)$ конформное отображение $G_\gamma \cap K_r$ на верхнюю полуплоскость, согласно принципу Шварца [12], функции $\Phi_1(t) = g(t) + \bar{t}$ и $\Phi_2(t) = g(t) - \bar{t}$ можно аналитически продолжить через те сегменты действительной оси w -плоскости, которые соответствуют γ . Поэтому функция

$$t(w) = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$$

также аналитически продолжима через эти сегменты, т.е. γ – аналитическая дуга.

Перейдём теперь к доказательству существования аналитической функции $g(t)$, которую можно рассматривать как решение некоторой системы функциональных уравнений. Такая система будет построена в следующем пункте, а её разрешимость в классе аналитических функций доказывается в теореме 1.

2. Система функциональных уравнений для свободной границы γ .

Обозначим через (ψ, γ) пару, построенную в лемме 1. Известно, что ψ является решением задачи (2)–(5), а γ – монотонная дуга, причём на части γ , лежащей

внутри G , условие (6) выполняется почти всюду. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (2):

$$S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) = A(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) \log(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) + B(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}),$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $A(z, \bar{z}; z\bar{z}) = 1$, функция B является регулярной в нуле по переменным x, y , а S , как функция этих переменных, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

Пусть Ω – область с кусочно-гладкой границей L , лежащая внутри G_γ . Применяя вторую формулу Грина к функциям $\psi(x, y)$ и $S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})$, получаем

$$\int_L \left(S \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial S}{\partial n} \right) \frac{ds}{y} = 0, \quad \zeta \in D_\gamma = G \setminus G_\gamma.$$

Далее, аналогично тому, как это было сделано в работе [11], продеформируем контур L (т.е. совершим предельный переход) таким образом, чтобы часть его лежала на γ_ρ , где γ_ρ – часть γ , лежащая внутри круга $K_\rho(|z - z_0| < \rho, z \in \gamma)$, а остальная часть находилась в $G_\gamma \cap K_\rho$. Тогда, учитывая, что условие (6) на γ_ρ выполняется почти всюду, получаем

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) ds + P(\zeta, \bar{\zeta}), \quad \zeta = (\xi + i\eta) \in G_\gamma \cap K_\rho, \quad (7)$$

где

$$V(x, y) = V\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \Psi(z, \bar{z}),$$

а через $P(\zeta, \bar{\zeta})$ обозначен интеграл, взятый вдоль той части L , которая лежит в G_γ после предельного перехода. Функции S и P являются аналитическими по вещественным аргументам ξ и η . Продолжим аналитически эти функции в область комплексных значений $\zeta = \alpha + i\beta$, $\eta = \delta + i\lambda$. Теперь соотношение (7) примет вид

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S(z, \bar{z}; \zeta, \zeta^*) ds = P(\zeta, \zeta^*),$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta = \alpha + i\beta + i(\delta + i\lambda), \quad \zeta^* = \xi - i\eta = \alpha + i\beta - i(\delta + i\lambda).$$

В последнем соотношении сделаем предельный переход, устремив $\bar{\zeta}^* \rightarrow z_0$ при фиксированном ζ . В результате получим

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{z}_0) ds = P(\zeta, \bar{z}_0), \quad z_0 \in \gamma_\rho, \quad \zeta \in G_\gamma \cap K_\rho. \quad (8)$$

Для подынтегральной функции $S = A \log(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}_0) + B$ необходимо выбрать ветвь логарифма, используемую для вычислений. Для этого проведём произвольную кривую от ζ к z_0 , которая лежит в круге K_ρ и пересекает γ только в точке z_0 . Вне разрыва вдоль этой кривой $\log(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}_0)$ есть однозначная функция. Ветвь логарифма выберем таким образом, чтобы аргумент в некоторой фиксированной точке $z_1 \in \gamma$ находился в $[0, 2\pi)$.

Для $\zeta \in G_\gamma \cap K_\rho$ определим аналитическую функцию следующим образом:

$$F(\zeta) = \int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}_0) ds - P(\zeta, \bar{\zeta}_0), \quad (9)$$

где для S выбирается ветвь логарифма, как и раньше. Функция $P(\zeta, \bar{\zeta}_0)$ и интеграл

$$\int_{\gamma_\rho} B(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}_0) ds$$

непрерывны при переходе ζ через γ_ρ . С другой стороны, выражение

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) A(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}_0) \log(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}_0) ds$$

имеет скачок, равный интегралу

$$F(t) = -2\pi i \int_{z_0}^t \Psi(z, \bar{z}) A(z, \bar{z}; t, \bar{\zeta}_0) ds,$$

взятому вдоль γ , когда ζ пересекает γ , двигаясь из D в G_γ , в точке $t \in \gamma_\rho$. Функция $F(\zeta)$ имеет на γ граничное значение

$$F(t) = -2\pi i \int_{z_0}^t \Psi(z, \bar{z}) A(z, \bar{z}; t, \bar{\zeta}_0) ds,$$

где интеграл вычисляется вдоль γ так, что s увеличивается, когда область G остаётся слева.

Продифференцируем теперь выражения (8) и (9) по ζ . Тогда получим

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S_\zeta(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}_0) ds = P'_\zeta(\zeta, \bar{\zeta}_0), \quad \zeta \in G_\gamma \cap K_\rho, \quad (10)$$

$$F'(\zeta) = \int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S_\zeta(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}_0) ds - P'_\zeta(\zeta, \bar{\zeta}_0), \quad (11)$$

где $\zeta \in D_\gamma \cap K_\rho$ и $S_\zeta = \frac{\partial S}{\partial \zeta} = \log(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}_0) \frac{\partial A}{\partial \zeta} + \frac{A}{\zeta - z} + \frac{\partial B}{\partial \zeta}$.

Лемма 2. Производная $F'(\zeta)$ ограничена всюду на γ_ρ , даже в тех точках, где i не существует.

Доказательство. Функция $F'(\zeta)$ при переходе ζ через γ имеет скачок

$$-2\pi i \int_{z_0}^t \Psi(z, \bar{z}) A_t(z, \bar{z}; t, \bar{z}_0) ds - 2\pi i \Psi(z, \bar{t}; t, \bar{z}_0) \bar{t}, \quad t \in \gamma_\rho,$$

почти всюду на γ_ρ . Сравнивая теперь выражения (10) и (11), находим, что для почти всех $t \in \gamma_\rho$ функция $F'(t)$ имеет граничное значение

$$F'(t) = -2\pi i \Psi(t, \bar{t})(z, \bar{t}; t, \bar{z}_0) \bar{t} - 2\pi i \int_{z_0}^t \Psi(z, \bar{z}) A_t(z, \bar{z}; t, \bar{z}_0) ds. \quad (12)$$

Для функции $F'(\zeta)$ справедливо соотношение

$$F'(\zeta) = \varphi(\zeta) + 4\pi \delta(\zeta) A(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta, \bar{z}_0) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta},$$

где $\varphi(\zeta)$ – непрерывная функция при переходе через γ , а $\delta(\zeta)$ – функция, равная единице в $G_\gamma \cap K_\rho$ и нулю в $D_\gamma \cap K_\rho$. Из последнего отношения в силу ограниченности ψ_x, ψ_y в $G_\gamma \cap K_\rho$ [3] следует ограниченность $F'(\zeta)$ всюду на γ_ρ . Лемма доказана.

Представив соотношение (12) в виде

$$\overleftarrow{t} = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, \bar{t}) A(t, \bar{t}; t, \bar{z}_0)} - \int_{z_0}^t \frac{\Psi(z, \bar{z}) A_t(z, \bar{z}; t, \bar{z}_0) \bar{z}}{\Psi(t, \bar{t}) A(t, \bar{t}; t, \bar{z}_0)} dz, \quad \bar{t} = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^t \bar{z}^2 dz,$$

где

$$A(t, \bar{t}; t, \bar{z}_0) = \sqrt{\frac{t - \bar{t}}{t - \bar{z}_0}},$$

рассмотрим систему интегральных уравнений

$$f(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, g(t)) A(t, g(t); t, \bar{z}_0)} - \int_{z_0}^t \frac{\Psi(z, g(z)) A_t(z, g(z); t, \bar{z}_0)}{\Psi(t, g(t)) A(t, g(t); t, \bar{z}_0)} f(z) dz, \quad (13)$$

$$g(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^t f^2(z) dz \quad (14)$$

для определения двух неизвестных аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$ в $G \cap (K_\rho + \gamma_r h_0)$. Ниже будет доказана разрешимость этой системы в классе аналитических функций и установлена единственность этого решения. Тогда решения системы (13), (14) должны согласовываться с известным решением $\bar{t}$ и $\bar{t}$ на γ_ρ . Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Пусть система (13), (14) имеет единственное решение $f(t)$ и $g(t)$ в классе аналитических функций. Тогда функция $g(t)$ имеет непрерывное граничное значение $g(t) = \bar{t}$ на γ_ρ .

3. Разрешимость системы функциональных уравнений (13), (14). Справедлива такая теорема.

Теорема 1. В окрестности каждой точки $z_0 \in \gamma_\rho$, $z_0 \in G$, существуют аналитические функции $f(t)$ и $g(t)$, являющиеся единственным решением системы (13), (14).

Доказательство. Пусть $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \gamma$ – внутренняя точка области G по переменным x, y . Положим $f_0(t) \equiv 0$ и определим $g_0(t)$ по формуле

$$g_0(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^t f_0^2(z) dz = \bar{z}_0.$$

Построим последовательность аналитических функций $f_n(t)$ и $g_n(t)$ следующим образом:

$$f_{n+1}(t) = - \frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, g_n(t)) A(t, g_n(t); t, \bar{z}_0)} - \int_{z_0}^t \frac{\Psi(z, g_n(z)) A_t(z, g_n(z); t, \bar{z}_0)}{\Psi(t, g_n(t)) A(t, g_n(t); t, \bar{z}_0)} f_n(z) dz, \quad (15)$$

$$g_{n+1}(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^t f_{n+1}^2(z) dz. \quad (16)$$

Пусть R – верхняя грань значений по модулю для

$$f_1(t) = - \frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, \bar{z}_0) A(t, \bar{z}_0; t, \bar{z}_0)}$$

в некоторой окрестности $t = z_0$. Эта верхняя грань существует, поскольку, в силу леммы 2, $F'(t)$ ограничена в окрестности точки $t = z_0$, $A(z_0, \bar{z}_0; z_0, \bar{z}_0) = 1$ и $\Psi(z, \bar{z}_0) > 0$.

Предположим, что существует $\delta > 0$ такое, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |f_n| \leq R + \delta, \quad |f_{n-1}| \leq R + \delta, \quad |g_n - \bar{z}_0| \leq \delta, \\ |g_{n-1} - \bar{z}_0| \leq \delta, \quad |z - z_0| \leq \delta, \quad |t - z_0| \leq \delta. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда

$$|g_n(t) - g_{n-1}(t)| \leq M_1 \int_{z_0}^t |f_n(z) - f_{n-1}(z)| |dz|,$$

где $M_1 = 2(R + \delta)$. Для кривых, соединяющих z_0 и t , лежащих в $G_\gamma \cap (K_\rho + \gamma_\rho)$ и имеющих равномерно ограниченную длину, из (15) можно получить неравенство

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq M \int_{z_0}^t |f_n(z) - f_{n-1}(z)| |dz|, \quad (18)$$

при некоторой постоянной M .

Пусть L – некоторый достаточно короткий путь из z_0 в t , лежащий в $G_\gamma \cap (K_\rho + \gamma_\rho)$. Полагая, как и раньше, $f \equiv 0$, из (16) получаем $g_0 = \bar{z}_0$. В случае $n = 1$ имеем

$$f_1(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, \bar{z}_0) A(t, \bar{z}_0; t, \bar{z}_0)}, \quad g_1(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^t f_1^2(z) dz$$

и

$$|f_1(t)| \leq R, \quad |g_1(t) - \bar{z}_0| \leq \int_{z_0}^t |f_1^2(z)| |dz| \leq R^2 s,$$

где s – длина дуги L . Отсюда следует, что условия (17) выполнены при $n = 1$. Поэтому из (18) вытекает оценка

$$|f_2(t) - f_1(t)| \leq M \int_{z_0}^t |f_1(z) - f_0(z)| |dz| \leq M \int_{z_0}^t R |dz| = RM s.$$

Пусть теперь $n = 2$. Тогда, учитывая последнее неравенство, получаем

$$|f_2(t)| \leq |f_1(t)| + RM s \leq R(1 + \delta),$$

$$|g_2(t) - \bar{z}_0| \leq \int_{z_0}^t |f_2^2(z)| |dz| \leq R^2(1 + \delta)^2 s.$$

Поэтому из выполнимости условий (17) при подходящем выборе δ следует

$$|f_3(t) - f_2(t)| \leq M \int_{z_0}^t |f_2(z) - f_1(z)| |dz| \leq RM^2 \frac{s^2}{2!}.$$

Используя затем метод математической индукции, находим

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq R \frac{(Ms)^n}{n!}.$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности точки z_0 справедливы оценки

$$|f_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leq R \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(Ms)^k}{k!} \leq R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ms)^k}{k!} = Re^{Ms},$$

$$|g_n(t) - \bar{z}_0| \leq \int_{z_0}^t |f_n^2(z)| |dz| \leq R^2 \int_{z_0}^t e^{2Ms} ds \leq R^2 \frac{M_0}{M} (e^{Ms} - 1),$$

где $M_0 = (e^{MH} + 1)/2$, а H – оценка сверху путей интегрирования. Таким образом, можно указать верхнюю оценку для длины пути из z_0 в t , для которой неравенства (17) выполняются для всех n . Это означает, что для достаточно коротких путей L интерактивный процесс определён. Из последних оценок получаем, что ряды

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} [f_{n+1}(t) - f_n(t)], \quad g(t) = g_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} [g_{n+1}(t) - g_n(t)]$$

сходятся равномерно и равномерно почти всюду вдоль γ_ρ к решению системы (13), (14) при достаточно малом δ . При этом f и g – аналитические функции в окрестности точки z_0 . Теорема доказана.

4. Исследование свободной границы в угловой точке $z_0 \in \gamma$ и $z_0 \in S$. Используя принцип Фрагмена–Линделефа [14], установим ограниченность производной $F'(z)$ в окрестности угловой точки z_0 . При этом в силу леммы 2 можно считать, что $F'(z)$ ограничена на части γ_ρ , кроме z_0 (т.е. $|F'(z)| \leq P_1$, где $P_1 = \text{const}$). Введём в рассмотрение величину $M(r) = \max |F'(z)|$ при $z \in G_\gamma$, $|z - z_0| = r$. Тогда в силу указанного принципа заключаем, что если $F'(z)$ неограниченна в окрестности z_0 , то $P_2 \exp(P_3 r^{-1/2}) \leq M(r)$, где P_2 и P_3 – некоторые положительные постоянные. Пусть, далее, z – точка на окружности $|z - z_0| = r$, $z \in G_\gamma$, такая, что $|F'(z)| = M(r)$, а ε – наименьшее расстояние от точки z до γ . Теперь нетрудно установить, что $|F'(z)| \leq P_4/\varepsilon$ в окрестности z_0 при некоторой постоянной $P_4 > 0$. Из двух последних неравенств следует $\varepsilon \leq P_5 \exp(-P_3 r^{1/2})$, $P_5 P_2 = P_4$. Обозначим через z_1 точку на γ , ближайшую к z вдоль линии, проходящей через z и наклонённой к оси Ox под углом $\pi/4$, и пусть $w = 2z_1 - z$. Выберем затем замкнутый контур C вокруг точки z , который состоит из открытой дуги l , принадлежащей γ и содержащей точки z_0, z_1 , и некоторой кривой L в G_γ такой, что её кратчайшее расстояние от точек z и w , по крайней мере, порядка r . Оценивая теперь производную $F'(z)$, где

$$F'(z) = F'(z) - F'(w) =$$

$$= \int_C \left[(S_z(t, \bar{t}; z, \bar{z}_0) - S_w(t, \bar{t}; z, \bar{z}_0)) \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} (S_z(t, \bar{t}; z, \bar{z}_0) - S_w(t, \bar{t}; z, \bar{z}_0)) \right] \frac{ds}{y}$$

(здесь $F'(w) = 0$ и $t \in C$), получаем

$$|F'(z)| \leq P_6 \int_C \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{|w-z|}{|t-w||t-z|} \frac{ds}{y} + P_7 \int_{C-1} \frac{|w-z|}{|t-z|^2|t-w|^2} ds,$$

где P_6, P_7 – некоторые положительные постоянные. Пусть $t \in (C-l)$, тогда $|w-t| \geq r$, $|z-t| \geq r$, $|z-w| \leq 6\varepsilon$ и

$$|F'(z)| \leq r^{-4} P_8 \exp(-P_3 r^{-1/2}) + P_9,$$

где величина P_9 содержит члены порядка ε/r^2 , а $P_8 = \text{const}$. Так как $|F'(z)| = M(r)$ в силу выбора точки z , получаем неравенство

$$P_2 \exp(P_3 r^{-1/2}) \leq r^{-4} P_8 \exp(-P_3 r^{-1/2}) + P_9.$$

Пришли к противоречию, ибо при $r \rightarrow 0$ левая часть последнего неравенства неограниченно возрастает, а правая – ограничена. Таким образом, функция $F'(z)$ ограничена в окрестности точки z_0 , включая и саму эту точку. Поэтому для нее справедлива теорема 1.

5. Доказательство аналитичности свободной границы в точках области G . Рассмотрим решение системы уравнений (13), (14). Согласно теореме 1 эти функции являются аналитическими в области $G_\gamma \cap K_\rho$, причём $g(t) = \bar{t}$ на γ_ρ . Поэтому $\Phi_1(t) = g(t) + t$ – есть действительная, а $\Phi_2(t) = g(t) - t$ – чисто мнимая функция на γ_ρ . Пусть $w(t)$ – конформное отображение $G_\rho \cap K_\rho$ на верхнюю полуплоскость. Согласно принципу Шварца [14] функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ могут быть аналитически продолжены через те сегменты действительной оси w -плоскости, которые соответствуют γ_ρ . Таким образом, функция $(\Phi_1 - \Phi_2)/2$ аналитически продолжима через такие сегменты, и там же

$$t(w) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}$$

есть аналитическая функция. Следовательно, γ_ρ состоит из аналитических дуг. Это позволяет сформулировать лемму 1 в следующем виде.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда существует единственное решение задачи (2)–(6). При этом (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ – дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G ; $\Psi(x, y)$ – функция, непрерывная в $\bar{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\bar{G}_\gamma$, за исключением, может быть, точки (a, h) , $c < h < b$, являющейся правым концом γ , и $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ .

1. Миненко А.С. Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 6. – С. 413–416.
2. Данилюк И.И., Миненко А.С. О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – 43, № 5. – С. 228.

3. Миненко А.С. Об аналитичности свободной границы в одной теплофизической задаче // Мат. физика. – 1983. – Вып. 33. – С. 8–82.
4. Данилюк И.И., Миненко А.С. Об одной вариационной задаче со свободной границей // Сб. докл. конф. по смешанным граничным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными и задачам со свободными границами (Штуттгарт, 5–10 сент. 1978 г.). – Штуттгарт, 1978. – С. 9–18.
5. Миненко А.С. Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журнал. – 1995. – **47**, №4. – С. 477–488.
6. Данилюк И.И. Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **118**. – С. 1–112.
7. Kinderlehrer D., Nirenberg L. Regularity in free boundary problem // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. – 1977. – **4**. – P. 373–391.
8. Baiocchi C. Sur une probleme a frontiere libre traduisant le filtrage de liquides a traverse des milieux poreux // C.r. Acad. sci. A. – 1971. – **273**. – P. 1215–1217.
9. Alt. H.W. Caffarelli L.A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary // J. Math. – 1980. – **325**. – P. 107–144.
10. Friedman A. Axially symmetric cavities in flows // Commun. Partial Different. Equat. – 1983. – **8**, № 9. – P. 949–997.
11. Garabedian P.R., Lewy H., Schiffer M. Axially symmetric cavitation flow // Ann. Math. – 1952. – **56**, № 3. – P. 560–602.
12. Миненко А.С. Методы исследования задач со свободной границей. – Донецк: ДонНТУ; Издательство «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2018. – 172 с.
13. Миненко А.С. Моделирование и информационные технологии в задачах распознавания лица по его мимическим составляющим. – Донецк: ДОННТУ, 2019. – 74 с.
14. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 471 с.

A. S. Minenko

On the proof of the analyticity of the free boundary in an axisymmetric flow problem.

A nonlinear boundary-value problem with a hydrodynamic origin is investigated in the case when the Bernoulli condition in the form of an inequality is specified on the free boundary. The results presented in this paper are a natural continuation of the results obtained by the author in [1–4] when studying a problem of Stefan type and in [5] when studying a problem of Bernoulli type.

Keywords: *analyticity of the free boundary, Bernoulli law, integral functional, variable integration domain.*

Донецкий национальный техн. ун-т
sam_dntu@mail.ru

Получено 11.10.19

УДК 517.972

©2019. О. А. Рудакова

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВАХ С ОДНОСТОРОННИМИ ПОТОЧЕЧНО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В настоящей статье для последовательности функционалов, определенных на весовых пространствах Соболева, связанных с последовательностью n -мерных областей, рассматриваются вариационные задачи на множествах с односторонними поточечно функциональными ограничениями. В работе сформулированы достаточные условия сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов рассматриваемых задач.

Ключевые слова: вариационные задачи, переменные весовые пространства Соболева, Γ -сходимость, вырождения, односторонние препятствия, переменные области.

Введение. В настоящей статье рассмотрены последовательность выпуклых интегральных функционалов $J_s: \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ с интегрантами, удовлетворяющими определенным условиям роста и коэрцитивности, содержащими весовую функцию и некоторую, вообще говоря, неограниченную последовательность неотрицательных слагаемых, и последовательность слабо полунепрерывных снизу функционалов $G_s: \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), содержащихся в области Ω , $p > 1$, $\nu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Кроме того, в работе рассмотрена последовательность слабо замкнутых множеств

$$V_s = \{v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) : v \geq \Phi_s(v) \text{ п. в. в } \Omega_s\},$$

где Φ_s – отображение пространства $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ во множество функций, определенных на множестве Ω_s .

В работе формулируются условия, обеспечивающие определенную сходимость минимизантов и минимальных значений функционалов $J_s + G_s$ на множествах V_s соответственно к минимизанту и минимальному значению некоторого функционала на множестве

$$V = \{v \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) : v \geq \Phi(v) \text{ п. в. в } \Omega\},$$

где Φ – отображение пространства $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ во множество всех функций, определенных на Ω . Среди установленных условий отметим сильную связанность последовательности пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ с «предельным» весовым пространством Соболева $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$, условие «исчерпывания» области Ω областями Ω_s , Γ -сходимость последовательности функционалов $\{J_s\}$ к некоторому функционалу

$J: \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и определенную сходимость последовательности функционалов $\{G_s\}$ к некоторому функционалу $G: \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Кроме того, предполагаются выполненными условия, описывающие свойства отображений Φ_s , $s \in \mathbb{N}$, и устанавливающие их связь с отображением Φ .

Статья имеет следующую структуру. В первом пункте работы рассматриваются весовые пространства Лебега и Соболева, используемые в дальнейшем изложении, а также даются необходимые определения и формулируется общая теорема о сходимости решений вариационных задач для функционалов, заданных на рассматриваемых («переменных») весовых соболевских пространствах. Во втором пункте статьи формулируется основной результат – теорема о сходимости решений вариационных задач на множествах с односторонними поточечно функциональными ограничениями для последовательности рассматриваемых функционалов. Отметим, что этот результат приведен в статье без доказательства.

1. Функциональные пространства и основные определения. Введем используемые в работе функциональные пространства. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, и $p \in (1, n)$. Пусть ν – неотрицательная функция на Ω , причем $\nu > 0$ почти всюду в Ω ,

$$\nu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega). \quad (1)$$

Через $L^p(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω . $L^p(\nu, \Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu, \Omega)} = \left(\int_{\Omega} \nu |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Заметим, что в силу неравенства Юнга и второго из включений (1) имеем $L^p(\nu, \Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Через $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu, \Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu, \Omega)$. $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \left(\int_{\Omega} \nu |u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \nu |D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Полнота пространства $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ устанавливается с использованием второго из включений (1). Рефлексивность этого пространства есть следствие его равномерной выпуклости, что доказывается с помощью неравенств Кларксона (относительно этих неравенств см., например, [2]).

Легко заметить, что в силу первого из включений (1) имеет место вложение $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\nu, \Omega)$. Через $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ обозначим замыкание множества функций

$C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu, \Omega)$. $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с индуцированной нормой пространства $W^{1,p}(\nu, \Omega)$.

Далее, пусть $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω .

Аналогично пространствам, введенным выше, определим функциональные пространства, соответствующие областям Ω_s . Пусть $s \in \mathbb{N}$. Через $L^p(\nu, \Omega_s)$ обозначим множество всех измеримых функций $u: \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω_s . $L^p(\nu, \Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = \left(\int_{\Omega_s} \nu|u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Аналогично можно установить, что в силу неравенства Юнга и второго из включений (1) имеем $L^p(\nu, \Omega_s) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega_s)$.

Через $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu, \Omega_s)$ таких, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u \in L^p(\nu, \Omega_s)$. $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int_{\Omega_s} \nu|u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_s} \nu|D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\tilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ обозначим множество всех сужений на Ω_s функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Через $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ обозначим замыкание множества $\tilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$.

Заметим, что если $u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $u|_{\Omega_s} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s – отображение $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s: \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такая, что:

- (i) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;
- (ii) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ имеем $q_s(l_s u) = u$ п. в. на Ω_s .

Роль сильной связанности функциональных пространств в изучении вопросов усреднения краевых и вариационных задач в переменных областях хорошо известна (см., например, работы [3, 6, 7, 9, 13]).

Отметим, что понятие сильной связанности пространств Соболева (или, в другой терминологии, соответствующих им n -мерных областей) существенно в вопросах усреднения краевых и вариационных задач (см. прежде всего работу Е.Я. Хрушлова [9], где это понятие было введено). Сильная связанность пространств, используемых при исследовании сходимости решений вариационных задач в переменных (например, сильноперфорированных) областях, позволяет перейти от по-

следовательности решений, каждое из которых содержится в «своем» пространстве, к ограниченной последовательности в некотором едином пространстве, что, в свою очередь, является первым шагом к выделению некоторого предельного элемента и последующему доказательству того, что этот элемент есть решение соответствующей усредненной задачи.

Предложение 1. Пусть вложение $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $L^p(\nu, \Omega)$ компактно и последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, причем последовательность норм $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такие, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu, \Omega_{s_j})} = 0$.

Доказательство предложения 1 представлено в статье [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, I – функционал на $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ – сходится к функционалу I , если выполняются условия:

- 1) для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ существует последовательность $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|w_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} I_s(w_s) = I(u)$;
- 2) для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и любой последовательности $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такой, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0$, имеем $\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(u_s) \geq I(u)$.

Относительно Γ -сходимости функционалов заметим, что это особая сходимость функционалов, сопровождающаяся во многих важных случаях сходимостью решений соответствующих вариационных задач. Исследование вопроса Γ -сходимости функционалов (в особенности интегральных) существенно для изучения проблемы усреднения вариационных задач и краевых задач для вариационных уравнений (см., например, [3–5]). Для функционалов с единой областью определения понятие Γ -сходимости было введено в работе [10], где также впервые были описаны общие свойства этого вида сходимости и описаны его приложения к исследованию вариационных задач. Вопросам Γ -сходимости интегральных функционалов с единой областью определения посвящены работы многих итальянских математиков (см., например, работу [12] и приведенную в этой монографии библиографию).

Заметим, что определение Γ -сходимости функционалов, определенных на пространствах $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ к функционалу, определенному на пространстве $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ было введено в работе [7] и соответствующая теорема о Γ -компактности для интегральных функционалов была приведена в [8].

Теорема 1. Предположим, что выполняются следующие условия:

- (*₁) вложение $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $L^p(\nu, \Omega)$ компактно;
- (*₂) последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, I – функционал на $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу I . Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ функция u_s минимизирует функционал I_s на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, причем последовательность норм $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ ограничена.

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такие, что

функция u минимизирует функционал I на $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$;

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu, \Omega_{s_j})} = 0;$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_{s_j}(u_{s_j}) = I(u).$$

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [8].

Далее, для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ обозначим через $\mathfrak{F}(u)$ множество всех последовательностей $\{u_s\}$ таких, что:

- (i) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$;
- (ii) $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} = 0$;
- (iii) $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|u_s\|_{1,p,\nu,s} < +\infty$.

Можно установить, что если $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$, то $\{q_s u\} \in \mathfrak{F}(u)$.

Теперь перейдем к рассмотрению функционалов, для которых будет исследована сходимость минимизантов и минимальных значений на множествах функций с односторонними поточечно функциональными ограничениями.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\psi_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\psi_s \geq 0$ в Ω_s . Будем предполагать, что

$$\text{последовательность норм } \|\psi_s\|_{L^1(\Omega_s)} \text{ ограничена.} \quad (2)$$

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s: \Omega_s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s ; для почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; для почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1 \nu(x) |\xi|^p - \psi_s(x) \leq f_s(x, \xi) \leq c_2 \nu(x) |\xi|^p + \psi_s(x). \quad (3)$$

В силу предположений относительно функций f_s и ψ_s для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ функция $f_s(x, \nabla u)$ суммируема на Ω_s .

Если $s \in \mathbb{N}$, то J_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$

$$J_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla u) dx.$$

В силу условий относительно функций f_s для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал J_s является выпуклым и локально ограниченным. Таким образом, для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал J_s является слабо полунепрерывным снизу.

Далее, пусть $c_3, c_4 > 0$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $G_s: \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ имеет место неравенство

$$G_s(u) \geq c_3 \|u\|_{L^p(\nu, \Omega_s)}^p - c_4. \quad (4)$$

Очевидно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $J_s + G_s$ слабо полунепрерывен снизу. В силу (2)–(4) существуют положительные постоянные c_5 и c_6 такие, что

$$(J_s + G_s)(u) \geq c_5 \|u\|_{1,p,\nu,s}^p - c_6. \quad (5)$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathcal{F}(\Omega_s)$ множество всех функций $u: \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем отображение

$$\Phi_s: \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s).$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(A₁) существует последовательность $\mu_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|\mu_s\|_{1,p,\nu,s}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\mu_s \geq \Phi_s(\mu_s) \text{ п. в. в } \Omega_s;$$

(A₂) если $s \in \mathbb{N}$ и $u_j \rightarrow u$ сильно в $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, то

$$\Phi_s(u_j) \rightarrow \Phi_s(u) \text{ п. в. в } \Omega_s;$$

(A₃) для любых $s \in \mathbb{N}$, $u, v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\Phi_s((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)\Phi_s(v) + \lambda\Phi_s(u) \text{ п. в. в } \Omega_s.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$V_s = \{v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) : v \geq \Phi_s(v) \text{ п. в. в } \Omega_s\}.$$

Из условий (A₁)–(A₃) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество V_s непусто, замкнуто и выпукло.

В силу указанных свойств функционалов $J_s + G_s$ и множеств V_s , и известных результатов о существовании точек минимума функционалов (см., например, [1]) для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в V_s , минимизирующая функционал $J_s + G_s$ на множестве V_s .

2. Основной результат. Через $\mathcal{F}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\Phi: \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$. Положим

$$V = \{v \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) : v \geq \Phi(v) \text{ п. в. в } \Omega\}.$$

Теорема 2. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- (*)₁) *вложение $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $L^p(\nu, \Omega)$ компактно;*
- (*)₂) *последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$;*
- (*)₃) *для любой возрастающей последовательности $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$ имеем*

$$\text{meas} \left(\Omega \setminus \bigcup_j \Omega_{m_j} \right) = 0;$$

- (*)₄) *если $\varepsilon > 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $E \subset \Omega$, $\text{meas } E \leq \delta$, имеем*

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} \psi_s dx \leq \varepsilon;$$

- (*)₅) *существует функционал $J: \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что последовательность $\{J_s\}$ Γ -сходится к функционалу J ;*

- (*)₆) *существует функционал $G: \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что для любой функции $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и любой последовательности $\{v_s\} \in \mathfrak{F}(v)$ имеем $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$;*

- (*)₇) *если $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathfrak{F}(v)$, то существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п. в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\Phi_s(v_s) \geq \Phi(v) - \alpha_s \text{ п. в. в } \Omega_s;$$

- (*)₈) *если $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathfrak{F}(v)$, то существуют последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$, последовательность $z_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и число $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такие, что $t_s \rightarrow 0$, $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{1,p,\nu,s} < +\infty$ и для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$, имеем $\Phi_s(v_s) \leq \Phi(v) + t_s \sigma_s$ п. в. в Ω_s и $z_s - \Phi_s(z_s) \geq \sigma_s$ п. в. в Ω_s .*

Кроме того, предположим, что для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s – функция из V_s , минимизирующая функционал $J_s + G_s$ на множестве V_s .

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V$ такие, что справедливы утверждения:

функция u минимизирует функционал $J + G$ на V ;

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu, \Omega_{s_j})} = 0;$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (J_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) = (J + G)(u).$$

Доказательство теоремы 1 будет опубликовано в ближайшей работе автора. Заметим лишь, что при установлении результатов теоремы существенно использовались идеи работы [6], в которой в случае $\nu = 1$ были рассмотрены аналогичные вариационные задачи и установлены условия сходимости минимизантов и соответствующих минимальных значений исследуемых функционалов.

Упомянутое условие исчерпывания (*₃) области Ω областями Ω_s играет важную роль при исследовании сходимости решений вариационных задач с нерегулярными односторонними препятствиями в переменных областях (см., например, [13]). В заключение отметим, что аналогичное условие использовалось в работе [4] при исследовании сходимости множеств на переменных соболевских пространствах и вопроса коэрцитивности Γ -предельного функционала, определенного на этих пространствах.

1. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
2. *Гилберг Д., Трудингер Н.* Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
3. *Ковалевский А.А.* О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения: сборник научных трудов. – Киев, 1989. – С. 62–70.
4. *Ковалевский А.А.* О необходимых и достаточных условиях Γ -сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вып. 4. – С. 29–39.
5. *Ковалевский А.А.* О Γ -сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Украинский математический журнал. – 1996. – **48**, № 5. – С. 614–628.
6. *Ковалевский А.А.* Вариационные задачи с односторонними поточечно функциональными ограничениями в переменных областях // Тр. ИММ УрО РАН. – 2017. – **23**, № 2. – С. 133–150.
7. *Ковалевский А.А., Рудакова О.А.* О сильной связанности весовых пространств Соболева и компактности последовательностей их элементов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – **12**. – С. 85–99.
8. *Рудакова О.А.* О Γ -сходимости интегральных функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева // Украинский математический журнал. – 2009. – **61**, № 1. – С. 99–115.
9. *Хруслов Е.Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Математический сборник. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604–621.
10. *De Giorgi E.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. e Natur. – 1975. – **58**, № 6. – P. 842–850.
11. *Dal Maso G.* Limits of minimum problems for general integral functionals with unilateral obstacles // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). – 1983. – **74**, № 2. – P. 55–61.
12. *Dal Maso G.* An introduction to Γ -convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – 337 p.
13. *Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.* Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Equ. Appl. – 2009. – **1**, № 4. – P. 517–559.

O. A. Rudakova

On the convergence of solutions of variational problems with degeneration and unilateral functional constraints in variable domains.

In this article we deal with a sequence of functionals defined on weighted Sobolev spaces associated with a sequence of n -dimensional domains. For the given functionals we consider variational problems with sets of pointwise functional constraints. We establish sufficient conditions of convergence of minimizers and minimum values of the variational problems under consideration.

Keywords: *variational problems, varying weighted Sobolev spaces, Γ -convergence, degeneration, pointwise functional constraints, variable domains.*

ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР, Донецк
olga.a.rudakova@gmail.com

Получено 15.10.19

УДК 517.9

©2019. Д. А. Сапронов

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГИЕЙ

В работе установлены в определённом смысле точные изотропные достаточные условия на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, обеспечивающие разрешимость задачи Коши для параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии–конвекции.

Ключевые слова: вырождающиеся параболические уравнения, диффузия, конвекция.

1. Постановка задачи. В области $G_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $n > 1$, рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t + A_p u + B_\lambda u \equiv u_t - \sum_{i=1}^n D_i a_i(t, x, u, \nabla_x u) + \chi \cdot \nabla_x b(t, u) = 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

где каратеодориевы функции $a_i(t, x, s, \xi)$ и непрерывная функция $b(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$a_i(t, x, s, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in G, \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \chi \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta))(\xi_i - \eta_i) \geq d_0 |\xi - \eta|^{p+1} \quad (4)$$

$$\forall (t, x, s, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, \forall (t, x, s, \eta) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, d_0 > 0, p > 1,$$

$$|a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta)| \leq d_1 |\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{p-1} \quad (5)$$

$$\forall (t, x, s, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, \forall (t, x, s, \eta) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, d_1 < \infty,$$

$$b(t, 0) = 0, \quad |b(t, s_1) - b(t, s_2)| \leq d_2 |s_1 - s_2|^\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1, d_2 < \infty, \quad (6)$$

$$d_3 |s|^{\lambda+1} \leq s b(t, s) - \int_0^s b(t, \theta) d\theta \leq d_4 |s|^{\lambda+1} \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad 0 < d_3 < d_4 < \infty. \quad (7)$$

Уравнения структуры (1) и близкие к ним возникают в математической физике при описании различных процессов (фильтрация жидкостей и газов, транспортные потоки, нелинейная теплопроводность, эволюция плазмы и т.д.), в которых в направлении χ присутствует перенос. Важным вопросом в их изучении является

вопрос разрешимости задачи Коши. Первые результаты в этом направлении были получены в [1] при исследовании уравнений ньютоновской фильтрации (см. [2]). Далее они были распространены в [3, 4] на задачи Коши–Дирихле и Коши для одномерных уравнений ньютоновской диффузии–конвекции с непрерывными и ограниченными начально-краевыми условиями. Разрешимость смешанных задач для многомерных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации с младшими членами (абсорбцией и конвекцией) исследовалась многими авторами (к примеру, [5–8] и ссылки к ним).

В случае растущих на бесконечности начальных данных при $n = 1$, $\chi = 0$ изотропные условия существования решения (1)–(2) были установлены в [9] и позже обобщены в [10, 11], соответственно, на многомерные уравнения и уравнения высокого порядка. Наличие «несимметричного» конвективного члена в уравнении в зависимости от показателей нелинейности приводит к возникновению анизотропных ограничений. Так, в [12] и [13] таковые установлены для одномерного уравнения ньютоновской фильтрации–конвекции. В [14] найдены оценки снизу скорости роста ненулевого решения (1), (2) с $u_0 = 0$. В работах [15] и [16] установлены в некотором смысле точные ограничения на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, обеспечивающие разрешимость задачи (1), (2), соответственно, для случаев $1 < \lambda < p$ и $p > 1$, $\lambda \geq p$. При этом, если $1 < \lambda \leq \frac{2p}{p+1}$, то ограничения изотропны, если же $\frac{2p}{p+1} < \lambda$, то анизотропны. В данной работе установлены аналогичные [15] изотропные условия для случая $p > 1$, $\lambda < 1$.

2. Формулировка основных результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Энергетическим обобщенным решением задачи Коши (1), (2) мы назовем функцию $u(t, x)$ такую, что в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$u(t, x) \in V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega)) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}((0, T) \times \Omega)\}$$

удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle u'_t, w \rangle dt + \int_{(0, T) \times \Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) w_{x_i} dx dt + \int_0^T \langle \chi \cdot \nabla_x b(t, u), w \rangle dt = 0$$

при любой $w(t, x) \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^0(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega)$, а также начальному условию (2) в смысле пространства $C([0, T]; L_2(\Omega))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения 1 вытекает справедливость следующего интегрального тождества:

$$2^{-1} \int_{\Omega} |u(T_0, x)|^2 \phi(T_0) \psi(x) dx +$$

$$+ \int_{(0,T_0) \times \Omega} \left[-2^{-1} |u|^2 \phi'(t) \psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) (u \cdot \psi)_{x_i} \phi(t) - \right. \\ \left. - B(t, u) \chi \cdot \nabla_x \psi(x) \phi(t) \right] dx dt = 2^{-1} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 \phi(0) \psi(x) dx, \quad (8)$$

$$B(t, u) = ub(t, u) - \int_0^u b(t, s) ds,$$

для произвольных ограниченных $\Omega \in \mathbb{R}^n$, любых $0 < T_0 \leq T < \infty$, $\phi(t) \in C^1[0, T_0]$, $\psi(x) \in \overset{0}{\text{Lip}}(\overline{\Omega})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу вложения $W_{p+1}^1(\Omega) \subset L_{\lambda+1}(\Omega)$ при $\lambda \leq 1$ выполнено:

$$V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega)), \quad v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega)) \right\},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $f(s)$ назовем регулярно монотонной, если для любого $0 < \delta_1 < 1$ существуют $0 < \delta_2(\delta_1) < \delta_3(\delta_1) < 1$ такие, что

$$\delta_2 f(s) \leq f((1 - \delta_1)s) \leq \delta_3 f(s), \quad 0 < s_0 < s \leq \infty.$$

ПРИМЕР 1. Очевидно, что функция $f(s) = as^b$, $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$, является регулярно монотонной при $\forall s > 0$, $0 < \delta_2 < (1 - \delta_1)^b$, $(1 - \delta_1)^b < \delta_3 < 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega(v, \tau, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : -v < x_1 < s, |x_i| < \tau\}, \quad i = 2, \dots, n, v > 0, \tau > 0, s > 0,$$

$$G_T(v, \tau, s) = (0, T) \times \Omega(v, \tau, s),$$

$$I_T(v, \tau, s) = \int_{G_T(v, \tau, s)} |u|^{p+1} dx dt, \quad J_T(v, \tau, s) = \int_{G_T(v, \tau, s)} |u|^{\lambda+1} dx dt,$$

$$\Phi_T(v, \tau, s) = \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u|^2 dx, \quad h_0(v, \tau, s) = \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u_0|^2 dx,$$

$h_0(v, \tau, s) \leq h(v, \tau, s) \equiv h_2(s)^{1-\kappa_1} h_1(\tau)^{\kappa_1} + h_3(v)^{1-\kappa_2} h_1(\tau)^{\kappa_2}$, $h(v, \tau, s)$ – минимальная непрерывная мажоранта функции $h_0(v, \tau, s)$, $h_2^{-1}(s)$, $h_3^{-1}(v)$ – функции, обратные, соответственно, функциям $h_2(s)$, $h_3(v)$, $0 < \kappa_i < 1$, $i \in \{1, 2\}$ – некоторые постоянные.

Далее, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\chi = (\chi_1, 0, \dots, 0)$, $\chi_1 = \text{const} > 0$.

Теорема 1. Пусть в (1) $\lambda < 1$, а $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$, $h_1(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$ – регулярно монотонные функции. Пусть также функция $h(v, \tau, s)$ удовлетворяет следующим ограничениям на рост при $v \rightarrow +\infty$, $\tau \rightarrow +\infty$, $s \rightarrow +\infty$:

$$h_i(\tau) \leq k_i \tau^{\alpha_1} \quad \forall \tau > \tau' > 0, k_i < \infty, i \in \{1, 2, 3\}, \alpha_1 = n + \frac{2(p+1)}{p-1}. \quad (9)$$

Тогда существует $T^{(1)} = T^{(1)}(k_1, k_2, k_3) > 0$ такое, что задача (1), (2) разрешима в G_T при всех $T < T_1$. Если же дополнительно выполнены условия

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_i(\tau) \tau^{-\alpha_1} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (10)$$

то $T^{(1)} = +\infty$. Кроме того, если $h_1(\tau)$, $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$ – регулярно монотонные функции, то при всех $T < T^{(1)}$ для решения $u(t, x)$ имеет место оценка

$$I_T((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) \leq A_1(\delta_i) T^{1-\theta} h_1(\tau)^{1+\alpha} \quad (11)$$

$$\forall \tau > \tau^{(1)}(T), \text{ где } A_1(\delta_i) = \text{const} > 0, \theta = \frac{n(p-1)}{2(p+1)+n(p-1)}, \quad \alpha = \frac{p+1}{n}\theta,$$

$$\tau^{(1)}(T) = \max\{\tau_i^{(1)}(T), \tau'\}, \quad \tau_1^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} < \delta_1 \tau\}, \quad (12)$$

$$\tau_2^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} < \delta_2 (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_3^{(1)}(T) = \inf\left\{\tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} \left(h_1(\tau) + c \left(\frac{T^{\frac{2}{1-\lambda}} \tau^{n-1} (h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)}{h_1(\tau)} \right)^{\frac{1-\lambda}{2}} \right)^{\alpha_1^{-1}} \right. \\ \left. < \delta_3 (h_3^{-1} \circ h_1)(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $0 < \delta_i < \infty$, $i \in \{1, 2, 3\}$ – произвольные постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\lambda = 1$ заменой переменных $y = x - \chi t$ задача (1), (2) сводится к задаче без конвекции, разрешимость которой исследована в [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условия (9) и (10) совпадают с результатами соответственно [11] для уравнений диффузии без конвекции и [15] в случае $1 < \lambda \leq \frac{2p}{p+1}$.

3. Вспомогательные построения и утверждения. В дальнейшем мы будем использовать следующее интерполяционное неравенство Ниренберга–Гальярдо:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_a(\Omega(v, \tau, s))} &\leq d_5 (\text{meas } \Omega(v, \tau, s))^{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}} \|v\|_{L_d(\Omega(v, \tau, s))} + \\ &+ d_6 \|\nabla_x v\|_{L_b(\Omega(v, \tau, s))}^\theta \|v\|_{L_d(\Omega(v, \tau, s))}^{1-\theta}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из пространства $W_b^1(\Omega(v, \tau, s)) \cap L_d(\Omega(v, \tau, s))$, $a > 1$, $b > 1$, $d > 0$, $d_5 > 0$, $d_6 > 0$, а $\theta \in [0, 1]$ определяется из равенства

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n} \right) \theta + \frac{1}{d} (1 - \theta).$$

Если дополнительно $v \in \overset{0}{W}_b^1(\Omega(v, \tau, s))$, то $d_5 = 0$.

Введем неотрицательную срезающую функцию $\zeta(s)$, обладающую следующими свойствами: $\zeta(s) = 1$ при $s \leq 0$, $\zeta(s) = 0$ при $s \geq 1$, $\zeta(s) = 1 - s$ при $0 < s < 1$.

Обозначим

$$\zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}(x) = \prod_{i=2}^n \zeta\left(\left|\frac{x_i - \tau + \Delta \tau}{\Delta \tau}\right|\right) \zeta_{v, \Delta v, s, \Delta s}^{(1)}(x_1) \quad \forall 0 < \Delta \tau < \tau,$$

где

$$\zeta_{v, \Delta v, s, \Delta s}^{(1)}(x_1) = \begin{cases} \zeta\left(\frac{x_1 - s + \Delta s}{\Delta s}\right), & x_1 \geq 0, 0 < \Delta s < s, \\ \zeta\left(-\frac{x_1 - v + \Delta v}{\Delta v}\right), & x_1 \leq 0, 0 < \Delta v < v. \end{cases}$$

Введем также непрерывную на $\mathbb{R}^n$ функцию $\xi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую следующим требованиям: $\xi_j(x) = 1$ при $|x_i| \leq j$, $\xi_j(x) = 0$ при $|x_i| \geq j + 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 \leq \xi_j(x) \leq 1$ при $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и определим последовательность функций

$$u_0^{(j)}(x) = u_0(x) \xi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

приближающих $u_0(x)$ в пространстве $L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим последовательность задач Коши–Дирихле вида

$$u_t^{(j)} + A_p u^{(j)} + B_\lambda u^{(j)} = 0, \quad (t, x) \in G_T(j+1), \quad T > 0, \quad (16)$$

$$u^{(j)}|_{t=0} = u_0^{(j)}(x) \in L_2(\Omega(j+1)), \quad (17)$$

$$u^{(j)}|_{\partial\Omega(j+1)} = 0 \quad \forall 0 < t < T, \quad \Omega(\tau) = \Omega(\tau, \tau, \tau), \quad G_T(\tau) = (0, T) \times \Omega(\tau). \quad (18)$$

Из [8] вытекает, что задача (16)–(18) имеет решение

$$u^{(j)}(t, x) \in V_T(\Omega(j+1)) = \{v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(j+1))), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(j+1)))\},$$

и, как следствие, $u^{(j)} \in C([0, T]; L_2(\Omega(j+1)))$. В дальнейшем через $u^{(j)}$ будем обозначать продолжение решения задачи (16)–(18) нулем на $(0, T) \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega(j+1))$.

Введем следующие функции, связанные с решением $u^{(j)}(t, x)$:

$$I_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt, \quad J_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{G_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt,$$

$$\Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1} dx dt, \quad \Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 dx,$$

$$F_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 dx dt, \quad h_0^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u_0^{(j)}|^2 dx,$$

при этом $h_0^{(j)}(v, \tau, s) \leq h_0(v, \tau, s) \leq h(v, \tau, s)$.

Лемма 1. Пусть $u^{(j)}(t, x)$ – энергетическое решение задачи (16)–(18) при $\lambda < 1$. Тогда верно следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \Phi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + T^{-1} F_T(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \\ & + \Psi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) \leq c(\Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \\ & + \Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + h_0^{(j)}(v, \tau, s) + T^{\frac{2}{1-\lambda}} v \tau^{n-1} \Delta v^{-\frac{2}{1-\lambda}}), \end{aligned} \quad (19)$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$.

Доказательство. Подставляя в (8) в качестве срезающей функции

$$\psi(x)\phi(t) = \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1}(x) \exp(-tT^{-1}),$$

после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1} dx + \\ & + \int_{G_T(v, \tau, s)} [(T)^{-1} |u^{(j)}|^2 + |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1}] \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1} dx dt + \\ & + \int_{G_T(0, \tau, s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^p \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s} \right) dx dt \leq \\ & \leq c \left(\sum_{i=1}^n \int_{G_T(v, \tau, s)} |\nabla_x u^{(j)}|^p |u^{(j)}| \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^p \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s} \right| dx dt + \right. \\ & \left. + \int_{G_T(v, \tau, 0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^p \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s} \right) dx dt + h_0^{(j)}(v, \tau, s) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Оценивая слагаемые в правой части (20) при помощи неравенства Юнга с ε , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1} dx + \int_{G_T(v, \tau, s)} [T^{-1} |u^{(j)}|^2 + |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1}] \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1} dx dt + \\ & + \int_{G_T(0, \tau, s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^p \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s} \right| dx dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c \sum_{i=1}^n \int_{G_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{p+1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s} \right|^{p+1} dx dt + \\
 &\quad + \varepsilon T^{-1} \int_{G_T(v, \tau, 0)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{\frac{2p}{\lambda+1}} dx dt + \\
 &\quad + c(\varepsilon) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s} \right|^{\frac{2}{1-\lambda}} T^{\frac{2}{1-\lambda}} v \tau^{n-1} + c h_0^{(j)}(v, \tau, s) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (21)
 \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности параметров v, τ, s очевидно вытекает

$$\begin{aligned}
 &\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) + F_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) \leq \varepsilon F_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta \tau, s + \Delta s) + \\
 &\quad + c(\varepsilon) [\Delta v^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta \tau, 0) + \Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta \tau, s + \Delta s) + \\
 &\quad + \Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau + \Delta \tau, s + \Delta s) + \Delta v^{-\frac{2}{1-\lambda}} T^{\frac{2}{1-\lambda}} v \tau^{n-1} + h_0^{(j)}(v, \tau, s)]
 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau > 0, \forall v > 0, \forall s > 0$. Положим в последнем неравенстве $\tau = \tau_0, v = v_0, s = s_0, \tau_{i+1} = \tau_i + 2^{-i} \Delta \tau, v_{i+1} = v_i + 2^{-i} \Delta v, s_{i+1} = s_i + 2^{-i} \Delta s$. Итерируя полученное неравенство k раз, получаем

$$\begin{aligned}
 &\Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) + F_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) \leq \varepsilon^{k+1} F_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta \tau, s + \Delta s) + \\
 &\quad + c(\varepsilon) \sum_{i=0}^k (2^{p+1} \varepsilon)^i [\Delta v^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta \tau, 0) + \\
 &\quad + \Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v + \Delta v, \tau + \Delta \tau, s + \Delta s) + \Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau + \Delta \tau, s + \Delta s)) + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^k [(2^{\frac{2}{1-\lambda}} \varepsilon)^i \Delta v^{-\frac{2}{1-\lambda}} T^{\frac{2}{1-\lambda}} v \tau^{n-1} + \varepsilon^i h_0^{(j)}(v, \tau, s)] \quad (22)
 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau > 0, \forall v > 0, \forall s > 0$. Полагая в (22) $\varepsilon = \min\{2^{-(p+1)-1}, 2^{-\frac{2}{1-\lambda}-1}\}$ и, устремляя в полученном неравенстве $k \rightarrow +\infty$, приходим к требуемому. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть для решений $u^{(j)}$ задач (16)–(18) при $p > 1, 0 < \lambda < 1$ имеет место следующая априорная оценка:

$$\|u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s)))} \leq C(v, \tau, s, T) < \infty \quad \forall T < \infty, \forall 0 < \tau < \infty, \quad (23)$$

$0 < s < \infty, 0 < v < \infty$, где $C(v, \tau, s, T)$ – некоторая постоянная, зависящая только от известных параметров задачи (1), (2) и не зависящая от j . Тогда существует подпоследовательность $u^{(j_k)}$ последовательности $u^{(j)}$, сходящаяся при любых v, τ, s к решению $u(t, x)$ задачи (1), (2) в пространстве $V_T(\Omega(v, \tau, s))$ с нормой

$$\|v\|_{V_T(\Omega(v, \tau, s))} = \|v\|_{L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s)))} + \|v_t\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v, \tau, s)))}. \quad (24)$$

Доказательство. Так как $u^{(j)}$ – решение задачи (16)–(18), а $A_p + B_\lambda$ – нелинейный ограниченный оператор

$$A_p + B_\lambda : L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s))) \rightarrow L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v, \tau, s))),$$

то в силу (23) выполнено

$$\|u_t^{(j)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v, \tau, s)))} \leq C_1(v, \tau, s, T) < \infty \quad \forall T < \infty, \forall \tau < \infty.$$

Благодаря ограниченности $\|u^{(j)}\|_{V_T(\Omega(v, \tau, s))}$ из последовательности $\{u^{(j)}\}_1^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность (назовем ее снова $\{u^{(j)}\}_1^\infty$), которая в силу компактности вложения $V_T(\Omega(v, \tau, s)) \subset L_{p+1}(G_T(v, \tau, s))$ будет фундаментальной в $L_{p+1}(G_T(v, \tau, s))$, т.е.

$$\int_{(0, T) \times \Omega(v, \tau, s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } i, j \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Покажем, что $u^{(j)}$ имеет предел в $L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s)))$. Подставляя в интегральное тождество (8) в качестве пробной функции

$$w(t, x) = (u^{(i)} - u^{(j)})\zeta_{v,1,\tau,1,s,1}^{p+1}(x),$$

после преобразований с использованием оценок (3)–(5) получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_T(v-1, \tau-1, s-1)} |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})|^{p+1} dx dt &\leq c \left(\int_{G_T(v, \tau, s)} (|\nabla_x u^{(i)}| + |\nabla_x u^{(j)}|)^{p+1} dx dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \times \\ &\times \left(\int_{G_T(v, \tau, s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}} + c \left(\int_{G_T(v, \tau, s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |u^{(i)} - u^{(j)}| dx dt + \right. \\ &\left. + \int_{G_T(v, \tau, s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})| dx dt \right), \quad \forall v < j, \tau < j, s < j. \quad (26) \end{aligned}$$

Оценим сверху второе и третье слагаемые в правой части (26). В силу (6), (7) и неравенства Гельдера имеем

$$\int_{G_T(v, \tau, s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |u^{(i)} - u^{(j)}| dx dt \leq$$

$$\leq c(T(v+s)\tau^{n-1})^{\frac{p-\lambda}{p+1}} \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\lambda+1}{p+1}}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \int_{G_T(v,\tau,s)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})| dx dt \leq \\ & \leq c(T(v+s)\tau^{n-1})^{\frac{p-\lambda}{p+1}} \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\lambda}{p+1}} \times \\ & \times \left(\int_{G_T(v,\tau,s)} (|\nabla_x u^{(i)}| + |\nabla_x u^{(j)}|)^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (26) в силу (27), (28) следует

$$\|u^{(j)} - u^{(i)}\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1(\Omega(v,\tau,s)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Отсюда в силу ограниченности и непрерывности оператора

$$A_p + B_\lambda: L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(v, \tau, s))) \rightarrow L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v, \tau, s)))$$

вытекает

$$\|u_t^{(j)} - u_t^{(i)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(v,\tau,s)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty, \quad \forall v < \infty, \forall \tau < \infty, \forall s < \infty. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) следует фундаментальность $\{u^{(j)}\}$ в пространстве $V_T(\Omega(v, \tau, s))$. Зафиксируем произвольно последовательности $v_i \rightarrow \infty$, $\tau_i \rightarrow \infty$, $s_i \rightarrow \infty$. По ним при помощи диагонального процесса выберем подпоследовательность $u^{(j_i)}$, фундаментальную в $V_T(\Omega(v_i, \tau_i, s_i))$ при любых $i \in \mathbb{N}$. Эта подпоследовательность сходится к $u(t, x) \in V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – обобщенному решению уравнения (1), причем в силу непрерывности вложения $V_T(\Omega(v, \tau, s)) \subset C(0, T; L_2(\Omega(v, \tau, s)))$ функция $u(t, x)$ удовлетворяет также начальному условию (2). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Из неравенства (15) при $a = b = p + 1$, $d = 2$ вытекает

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 dx \right)^{(1-\theta)\frac{p+1}{2}}, \quad (31)$$

θ – из (11). Проинтегрируем теперь (31) по t , применим неравенство Гельдера и положим в полученном выражении $v = u^{(j)} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1}(x)$. В результате после простых преобразований приходим к следующему соотношению:

$$I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) \leq cT^{1-\theta} (\Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) +$$

$$+ \Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) \Big)^\theta \Phi_T^{(j)}(v, \tau, s)^{(1-\theta) \frac{p+1}{2}}, \quad (32)$$

при $\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$. Используя для оценки слагаемых в правой части неравенства (32) оценку (19), после замены аргументов в полученных выражениях приходим к соотношению

$$\begin{aligned} I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) &\leq c T^{1-\theta} (\Delta s^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(0, \tau, s)^{1+\alpha} + \\ &+ \Delta v^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{1+\alpha} + (h_0^{(j)}(v, \tau, s) + T^{\frac{2}{1-\lambda}} \tau v^{n-1} \Delta v^{-\frac{2}{1-\lambda}})^{1+\alpha}), \end{aligned} \quad (33)$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$.

Зафиксируем теперь параметры $\Delta s, \Delta \tau, \Delta v$ следующим образом:

$$\Delta s \equiv \Delta s(T, \tau, s) = \Delta \tau \equiv \Delta \tau(T, v, \tau, s) = (8c T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}},$$

$$\Delta v = \Delta v(T, v, \tau, s) = (8T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}} + \left(\frac{T^{\frac{2}{1-\lambda}} \tau v^{n-1} v}{h(v, \tau, s)} \right)^{\frac{1-\lambda}{2}}.$$

Подставив эти значения параметров в правую часть (33), приходим к функциональному соотношению

$$I_T^{(j)}(\tilde{v}(v, \tau, s), \tilde{\tau}(v, \tau, s), \tilde{s}(v, \tau, s)) \leq \frac{1}{2} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + c T^{1-\theta} h_0^{(j)}(v, \tau, s), \quad (34)$$

$$\tilde{v} = v - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} - \left(\frac{T^{\frac{2}{1-\lambda}} \tau v^{n-1} v}{h(v, \tau, s)} \right)^{\frac{1-\lambda}{2}},$$

$$\tilde{\tau} = \tau - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}, \quad \tilde{s} = s - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}.$$

Возводя неравенство (34) в степень $\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}$ и умножая на $T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}}$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} M_T^{(j)}(v^*(v, \tau, s), \tau^*(v, \tau, s), s^*(v, \tau, s)) &\equiv T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v^*, \tau^*, s^*)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} \leq \\ &\leq \varepsilon M_T^{(j)}(v, \tau, s) + c T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{p+1}}, \quad \varepsilon = 2^{-\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$v^*(v, \tau, s) = v - c M_T^{(j)}(v, \tau, s) - c \left(\frac{T^{\frac{2}{1-\lambda}} \tau v^{n-1} v}{h(v, \tau, s)} \right)^{\frac{1-\lambda}{2}},$$

$$\tau^*(v, \tau, s) = \tau - c M_T^{(j)}(v, \tau, s), \quad s^*(v, \tau, s) = s - c M_T^{(j)}(v, \tau, s).$$

Из ограниченности функции $M_T^{(j)}(v, \tau, s)$ при любых $j < \infty$ следует, что существуют $v_0^{(j)} < \infty, \tau_0^{(j)} < \infty, s_0^{(j)} < \infty, \forall j < \infty$ такие, что

$$M_T^{(j)}(v, \tau, s) \leq c L T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall v > v_0^{(j)}, \forall \tau > \tau_0^{(j)}, \forall s > s_0^{(j)}, L > 1. \quad (36)$$

Из неравенств (35), (36) в силу леммы 3 из дополнения следует

$$M_T^{(j)}((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) \leq cLT^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall \tau > \tau^{(1)}(T). \quad (37)$$

Условия и оценки (9)–(11) вытекают из соотношения (37), лемм 1 и 2, а также регулярной монотонности функций $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$, $h_1(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$. Теорема доказана.

5. Дополнение.

Лемма 3. Пусть неотрицательная непрерывная неубывающая по своим аргументам функция $f(s_1, s_2, s_3)$, неотрицательная $g(s_1, s_2, s_3)$ и неотрицательные непрерывные строго возрастающие $g_i(s_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} f(s_1 - f(s_1, s_2, s_3), s_2 - f(s_1, s_2, s_3), s_3 - f(s_1, s_2, s_3) - ag(s_1, s_2, s_3)) \leq \\ \leq \varepsilon f(s_1, s_2, s_3) + g_1(s_1)^{\kappa_1} g_2(s_2)^{1-\kappa_1} + g_1(s_1)^{\kappa_2} g_3(s_3)^{1-\kappa_2}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $a \geq 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \kappa_i < 1$, $i \in \{1, 2\}$.

Предположим также, что выполнены следующие требования:

1) существуют $\tilde{s}_1 < +\infty$ и $L > 2(1 - \varepsilon)^{-1}$ такие, что

$$f(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq Lg_1(s_1) \quad \forall s_1 > \tilde{s}_1 > 0, \quad (39)$$

2) для $g(s_1, s_2, s_3)$ и $g_i(s_i)$ выполнено:

$$g(s_1, s_2, s_3) \leq a_1(g_1(s_1)^{\kappa_1} g_2(s_2)^{1-\kappa_1} + g_1(s_1)^{\kappa_2} g_3(s_3)^{1-\kappa_2}), \quad a_1 > 0, \quad (40)$$

$$g_1(s_1) \leq b_1 s_1 \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad \hat{s}_1 \leq \tilde{s}_1, \quad g_2(s_2) \leq b_2 s_2 \quad \forall s_2 > (g_2^{-1} \circ g_1)(\hat{s}_1), \quad (41)$$

$$g_3(s_3) \leq b_3 s_3 \quad \forall s_3 > (g_3^{-1} \circ g_1)(\hat{s}_1), \quad Lb_1 < 1, \quad Lb_2 < 1, \quad Lb_3 < 1. \quad (42)$$

3) функции $(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $g_1(s_1)$ удовлетворяют условию правильной монотонности: для любых $0 < \delta_i = \delta_i(\delta) < 1$, $i = \overline{1, 3}$, существует $0 < \delta < 1$ такое, что выполнено

$$g_1(s_1(1 - \delta)) \geq \delta_1 g_1(s_1), \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad 0 < \delta_1 \leq 1 - Lb_1, \quad (43)$$

$$(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_2 (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad 0 < \delta_2 \leq 1 - Lb_2, \quad (44)$$

$$(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_3 (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1), \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad 0 < \delta_3 \leq 1 - Lb_3 - 2aa_1Lb_3. \quad (45)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$f(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq Lg_1(s_1) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1 > 0, \quad (46)$$

если выполнено $(L\varepsilon + 2)\delta_1^{-1} < L$.

Доказательство. Положим в (38) $s_2 = s_2(s_1) = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $s_3 = s_3(s_1) = (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)$, зафиксируем произвольно $s_1^{(0)} > \hat{s}_1$ и построим последовательность $\{s_1^{(i)}\}$, $\{s_2^{(i)}\}$, $\{s_3^{(i)}\}$ следующим образом:

$$s_1^{(i)} = (1 - \delta)s_1^{(i-1)}, s_2^{(i)} = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), s_3^{(i)} = (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), i = 1, 2, \dots$$

В силу (39) имеем: $f(s_1^{(0)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)})) \leq Lg_1(s_1^{(0)})$. Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f(s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq Lg_1(s_1^{(i)}). \quad (47)$$

Из предположения (38) и соотношений (39)–(45) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & f(s_1^{(i+1)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)})) \leq \\ & \leq f((1 - \delta)s_1^{(i)}, \delta_2(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), \delta_3(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq \\ & \leq f((1 - Lb_1)s_1^{(i)}, (1 - (Lb_2)s_2^{(i)}), (1 - Lb_3 - 2aa_1Lb_3)s_3^{(i)}) \leq \\ & \leq f(s_1 - Lg_1(s_1^{(i)}), s_2 - Lg_2(s_2^{(i)}), s_3 - Lg_3(s_3^{(i)}) - 2aa_1Lg_3(s_3^{(i)})) \leq \\ & \leq f(s_1^{(i)} - f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}), s_2^{(i)} - f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}), s_3^{(i)} - f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}) - ag(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)})) \leq \\ & \leq (L\varepsilon + 2)g_1(s_1^{(i)}) \leq (L\varepsilon + 2)\delta_1^{-1}g_1(s_1^{(i+1)}) \leq Lg_1(s_1^{(i+1)}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

1. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – **22**, № 8. – С. 667–704.
2. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
3. Diaz J.I., Kersner R. On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium // J. Diff. Equ. – 1987. – **69**. – P. 368–403.
4. Gilding B.H. Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1989. – **16**. – P. 165–224.
5. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. – Paris: Gauthier-Villars, 1969. – 576 с.
6. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – **279**. – P. 373–394.
7. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**. – P. 311–341.
8. Benilan Ph., Wittbold P. On Mild and Weak Solutions of Elliptic-Parabolic Problems // Adv. in Differential Equations. – 1996. – **1**, № 6. – P. 1053–1073.
9. Kalashnikov A.S. Cauchy problem in classes of growing functions for degenerate quasilinear second-order parabolic equations // Differentsialnye Uravnenia. – 1973. – **9**. – P. 682– 691.
10. Di Benedetto E., Herrero M.A. On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equations // Trans. Amer. Soc. – 1989. – **314**. – P. 197–224; Appl. – 1991. – **155**. – P. 378–393.

11. *Шшиков А.Е.* Эволюция носителей решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения высокого порядка // Матем. сб. – 1995. – **186**, № 12. – С. 151–172.
12. *Gladkov A.L.* Unbounbed solutions of the non-linear heat-conduction equation with strong convection at infinity // Comp. Maths. Math Phys. – 1996. – **36**. – P. 1381–1391.
13. *Гладков А.Л.* О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Матем. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 35–56.
14. *Сапронов Д.А.* Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для решений вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии–конвекции с однородными условиями Коши // Труды ИПММ. – 1998. – **4**. – С. 157–165.
15. *Сапронов Д.А.* Существование решений с неограниченной энергией задач Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии–конвекции // Труды ИПММ. – 2017. – **31**. – С. 161–176.
16. *Сапронов Д.А.* О разрешимости задачи Коши для многомерных вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии–конвекции с неограниченной энергией // Труды ИПММ. – 2018. – **32**. – С. 99–117.

D. A. Sapronov

Solvability of the Cauchy problems for a degenerated multidimensional second-order parabolic equations of diffusion–convection type with unbounded energy.

In paper there are established in some sense precise isotropic sufficient conditions on the growth of L_2 -norm of initial datum, which provide solvability of Cauchy problem for second-order parabolic equations of diffusion–convection type.

Keywords: *degenerate parabolic equations, diffusion, convection.*

Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры, г. Макеевка
nerusofhorse@mail.ru

Получено 02.10.19

УДК 004.896

©2019. И. А. Тарасова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТЕРМОВ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данной работе проведена формализация модели нечеткого управления с использованием функций принадлежности нескольких аргументов. Предложены основные типы функций принадлежности, которые могут выступать в качестве функциональной зависимости для аналитического задания многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных.

Ключевые слова: нечеткое управление, многомерная функция принадлежности, терм лингвистической переменной.

Введение. В теории нечетких множеств одной из самых важных проблем является вопрос о построении функций принадлежности. Методы нечеткого управления, применяемые в системах искусственного интеллекта, в основном используют в качестве термов нечеткие переменные с функциями принадлежности одного аргумента. С одной стороны, это позволяет использовать простое и наглядное представление функций принадлежности, обеспечивая применение несложных вычислительных процедур при выполнении этапов нечеткого вывода, с другой стороны, – теряется зависимость между управляющими переменными, которая обусловлена нелинейными ограничениями на управление. Кроме этого, лингвистические переменные могут иметь сложную физическую природу, требующую использования нескольких связанных параметров для определения их значений [1]. Решить данную проблему может использование термов лингвистических переменных с многомерными функциями принадлежности.

В результате проведенного исследования определено, что существующие способы построения функций принадлежности существенно зависят от экспертного мнения, а методы задания и определения вида функций принадлежности нескольких аргументов в настоящее время разработаны недостаточно. Рассмотренные в работах [2–5] представления функций принадлежности нескольких аргументов позволяют их построение из заранее известного класса и не обеспечивают задания областей произвольной формы, в которых определены термы лингвистических переменных. Недостатком метода, изложенного в работе [6], можно считать то, что использование нейронных сетей привело к невозможности выделить как саму функцию принадлежности, так и базу правил, а также функции, описывающие консеквенты каждого конкретного правила.

Целью исследования является повышение эффективности управления плохо формализуемыми объектами за счет разработки новых и совершенствования существующих способов построения функций принадлежности термов лингвистических переменных.

1. Формализация модели нечеткого управления на основе термов с функциями принадлежности нескольких аргументов. Обобщенная схема нечеткого устройства управления (УУ) представлена на рис. 1.

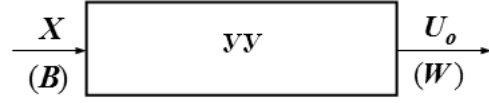


Рис. 1. Обобщенная схема устройства управления

На рис. 1 введены следующие обозначения:

X – множество входных переменных УУ;

B – множество входных лингвистических переменных, соответствующих множеству **X**;

УУ – управляющее устройство (нечеткий регулятор), реализующее алгоритм управления;

U_o – множество выходных переменных УУ;

W – множество выходных лингвистических переменных, соответствующих множеству **U_o**.

В задаче нечеткого управления на основе выделенных входных (**X**) и выходных (**U_o**) переменных устройства управления УУ формируются лингвистические переменные:

B = { $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ } – множество входных лингвистических переменных;

W = { $w_1, w_2, \dots, w_s$ } – множество выходных лингвистических переменных.

Множество входных переменных **X** разбивается на непустые подмножества **X_l**, $l = \overline{1, m}$, так, что выполняются следующие требования:

а) подмножество **X_l** содержит один или несколько элементов множества **X**:

$$\mathbf{X}_l \subset \mathbf{X}, (\mathbf{X}_l \neq \emptyset) \wedge (l = \overline{1, m});$$

б) объединение подмножеств **X_l** дает множество входных переменных **X**:

$$\mathbf{X} = \bigcup_{l=1}^m \mathbf{X}_l,$$

где m – число входных лингвистических переменных;

в) пересечение подмножеств дает пустое множество:

$$\mathbf{X}_l \cap \mathbf{X}_i = \emptyset, \quad l = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l \neq i.$$

Каждому множеству **X_l** сопоставляется входная лингвистическая переменная β_l :

$$\mathbf{X}_l \rightarrow \beta_l.$$

Входная лингвистическая переменная β_l определяется как кортеж

$$\langle \beta_l, T_l, E_l \rangle,$$

где β_l – название l -ой переменной; T_l – терм-множество l -ой лингвистической переменной, которое содержит названия нечетких переменных $\{\beta_{t_{l1}}, \beta_{t_{l2}}, \dots, \beta_{t_{lK}}\}$, каждая из которых представляет собой кортеж

$$\langle \beta_{t_{lk}}, E_l, A_k^l \rangle,$$

где $\beta_{t_{lk}}$ – название k -той нечеткой переменной, входящей в терм-множество лингвистической переменной β_l ; A_k^l – нечеткое множество с функцией принадлежности нескольких аргументов $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$, заданное на универсальном множестве E_l .

Универсальное множество E_l , на котором заданы нечеткие переменные, образующие термы l -ой лингвистической переменной, определяется следующим образом:

$$E_l = \prod_{x_j \in \mathbf{X}_l} D_j,$$

где D_j – область допустимых значений входной переменной $x_j \in \mathbf{X}_l$.

В работе используются функции принадлежности $\mu_l(\mathbf{X}_l)$, которые представляют собой совокупность функций принадлежности термов отдельной входной лингвистической переменной β_l :

$$\mu_l(\mathbf{X}_l) = \begin{bmatrix} \mu_1^l(\mathbf{X}_l) \\ \mu_2^l(\mathbf{X}_l) \\ \dots \\ \mu_K^l(\mathbf{X}_l) \end{bmatrix},$$

где K – количество термов лингвистической переменной β_l .

Аналогично в работе определяется выходная лингвистическая переменная w_z .

Функции принадлежности термов лингвистических переменных $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$ и $\mu_b^z(\mathbf{U}_z^o)$, которые представляют собой функции от входных $\mathbf{X}_l$ и выходных $\mathbf{U}_z^o$ переменных соответственно, могут быть заранее известны и заданы аналитически, либо формироваться в табличном виде на основе ретроспективных данных.

2. Формирование типовых видов аналитического представления функций принадлежности нескольких аргументов. Для представления функций принадлежности термов лингвистических переменных $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$ и $\mu_b^z(\mathbf{U}_z^o)$ в аналитической форме используется некоторая функциональная зависимость с числом аргументов n . В качестве такой зависимости могут выступать функции принадлежности следующих типов:

а) гиперболоидная функция принадлежности для k -го значения входной лингвистической переменной β_l , которая задается следующим образом:

$$\mu_k^l(\mathbf{X}_l) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2}}, & \text{если } \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2}} < 2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где x_j^l – значение j -ой входной переменной, относящейся к l -той входной лингвистической переменной;

x_{kj}^{lo} – j -ое значение центра гиперboloида k -го значения входной лингвистической переменной β_l ;

h_{kj}^l – ненулевые числовые параметры.

Пример гиперboloидной функции принадлежности представлен на рис. 2.

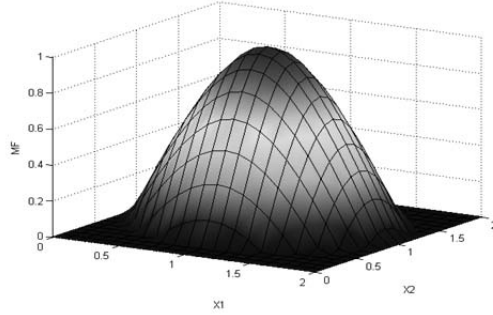


Рис. 2. График гиперboloидной функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$

б) конусообразная функция принадлежности для k -го значения входной лингвистической переменной β_l , которая задается следующим образом:

$$\mu_k^l(\mathbf{X}_l) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2}}, & \text{если } \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2}} < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где x_j^l – значение j -ой входной переменной, относящейся к l -той входной лингвистической переменной;

x_{kj}^{lo} – j -ое значение центра конуса k -го значения входной лингвистической переменной β_l ;

h_{kj}^l – ненулевые числовые параметры.

Пример конусообразной функции принадлежности представлен на рис. 3.

в) колоколообразная функция принадлежности для k -го значения входной лингвистической переменной β_l , которая задается следующим образом:

$$\mu_k^l(\mathbf{X}_l) = e^{-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2}},$$

где x_j^l – значение j -ой входной переменной, относящейся к l -той входной лингвистической переменной;

x_{kj}^{lo} – j -ое значение центра колокола k -го значения входной лингвистической переменной β_l ;

h_{kj}^l – ненулевые числовые параметры.

Пример колоколообразной функции принадлежности представлен на рис. 4.

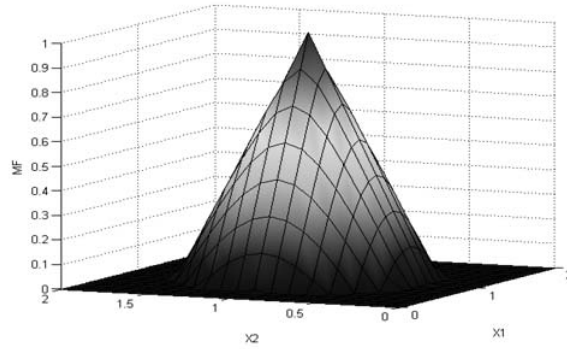


Рис. 3. График конусообразной функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$

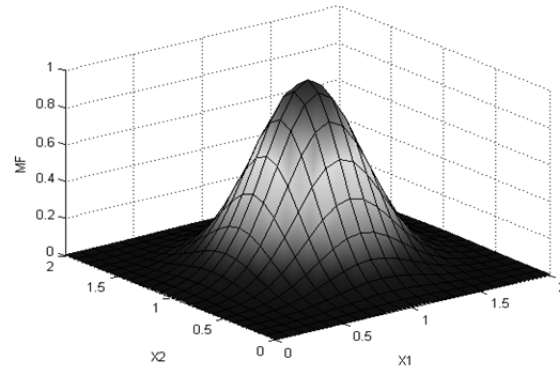


Рис. 4. График колоколообразной функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$

г) эллипсоидная функция принадлежности для k -го значения входной лингвистической переменной β_l , которая задается следующим образом:

$$\mu_k^l(\mathbf{X}_l) = \begin{cases} \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2}}, & \text{если } \sum_{j=1}^n \frac{(x_j^l - x_{kj}^{lo})^2}{(h_{kj}^l)^2} < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где x_j^l – значение j -ой входной переменной, относящейся к l -той входной лингвистической переменной;

x_{kj}^{lo} – j -ое значение центра эллипсоида k -го значения входной лингвистической переменной β_l ;

h_{kj}^l – ненулевые числовые параметры.

Пример эллипсоидной функции принадлежности представлен на рис. 5.

д) пирамидальная функция принадлежности для k -го значения входной линг-

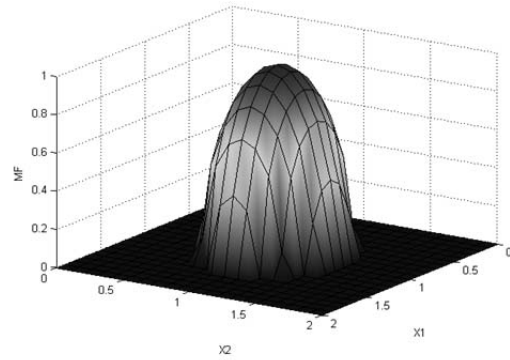


Рис. 5. График эллипсоидной функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$

вистической переменной β_l , которая задается следующим образом:

$$\mu_k^l(\mathbf{X}_l) = \max \left\{ \left(1 - \sum_{j=1}^n (h_{kj}^l |x_j^l - x_{kj}^{lo}|); 0 \right) \right\},$$

где x_j^l – значение j -ой входной переменной, относящейся к l -той входной лингвистической переменной;

x_{kj}^{lo} – j -ое значение центра пирамиды k -го значения входной лингвистической переменной β_l ;

h_{kj}^l – ненулевые числовые параметры.

Пример пирамидальной функции принадлежности представлен на рис. 6.

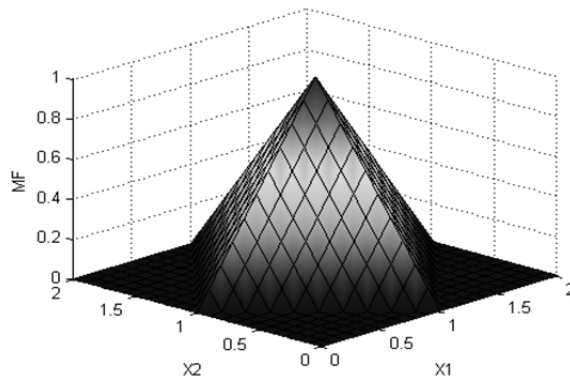


Рис. 6. График пирамидальной функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$

е) трапецевидная функция принадлежности для k -го значения входной линг-

вистической переменной β_l , которая задается следующим образом:

$$\mu_k^l(\mathbf{X}_l) = \begin{cases} h_{k0}^l - \sum_{j=1}^n (h_{kj}^l |x_j^l - x_{kj}^{lo}|), & \text{если } 0 \leq (h_{k0}^l - \sum_{j=1}^n (h_{kj}^l |x_j^l - x_{kj}^{lo}|)) \leq 1, \\ 1, & \text{если } (h_{k0}^l - \sum_{j=1}^n (h_{kj}^l |x_j^l - x_{kj}^{lo}|)) > 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где x_j^l – значение j -ой входной переменной, относящейся к l -той входной лингвистической переменной;

x_{kj}^{lo} – j -ое значение центра трапеции k -го значения входной лингвистической переменной β_l ;

h_{kj}^l – ненулевые числовые параметры, $h_{k0}^l > 1$.

Пример трапециевидной функции принадлежности представлен на рис. 7.

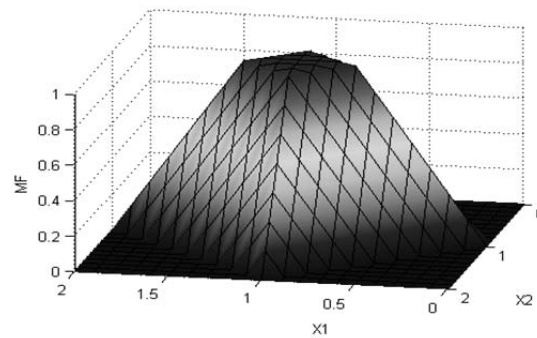


Рис. 7. График трапециевидной функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$

Однако в некоторых случаях задание функций принадлежности аналитически является невозможным, особенно при количестве переменных, большем трех. Такие функции принадлежности $\mu_k^l(\mathbf{X}_l)$ возможно построить в табличном виде на основе ретроспективных данных. В работах [7–9] описан метод формирования функций принадлежности нескольких аргументов в табличном виде.

Выводы. Проведена формализация модели нечеткого управления с использованием функций принадлежности нескольких аргументов, которая привела к необходимости формирования методов задания таких функций принадлежности. Для использования в задачах нечеткого моделирования и управления предложены основные типы функций принадлежности, которые могут выступать в качестве функциональной зависимости для аналитического задания многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных.

1. Тарасова И.А. Нечеткое управление на основе переменных с многомерными функциями принадлежности в диагностике и лечении гипертензивных осложнений беременности // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2012. – № 4. – С. 169–173.

2. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия. – Телеком, 2007. – 288 с.
3. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: УНІВЕРСУМ, 1999. – 320 с.
4. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. – Тюмень: Из-во Тюменского гос. ун-та, 2000. – 352 с.
5. Борисов В.В., Круглов В.В., Федюлов А.С. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия. – Телеком, 2007. – 284 с.
6. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И.Д. Рудинского. – М.: Горячая линия. – Телеком, 2006. – 452 с.
7. Тарасова И.А., Шушура А.Н. Способ задания многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных // Междунар. научно-техн. ж. «Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія». – 2013. – № 1 (26). – С. 39–44.
8. Тарасова И.А. Разработка алгоритма задания многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных на основе статистических данных // Проблемы искусственного интеллекта. – 2018. – № 2 (9). – С. 60–70.
9. Тарасова И.А. Задание функций принадлежности термов лингвистических переменных в задаче определения дозировок медикаментов при лечении преэклампсии беременных женщин // Изв. ЮФУ. Техн. науки. – 2019. – № 3. – С. 110–121.

I. A. Tarasova

Analytical definition of multidimensional membership functions of linguistic variables terms.

The article is devoted to formalization of the fuzzy control model with the usage of multidimensional membership functions. Analytical representation of the main types of membership functions of several arguments has been proposed. The basic types of membership functions that can act as a functional dependence for the analytical definition of multidimensional membership functions of linguistic variables terms are proposed.

Keywords: *fuzzy control, multidimensional membership function, term of the linguistic variable.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
i_a_tarasova@mail.ru

Получено 24.10.19

УДК 539.3

©2019. С. Н. Царенко, Г. М. Улитин, С. А. Фоменко

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ О МАССИВНУЮ ПРЕГРАДУ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается задача об ударе упругого стержня с произвольной степенной неоднородностью продольной жесткости и линейной плотностью о массивную плиту на упругом основании. Математическая модель продольных деформаций стержня представлена в соответствии с волновой теорией плоского удара в виде дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в частных производных. Решение уравнения получено методом Фурье в функциях Бесселя. Проведен анализ влияния жесткости ограничителя на значение первой собственной частоты колебаний. Выполнены исследования параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) для двух схем удара стержня о преграду торцом с меньшей и большей площадью. Проанализирован характер распределения механической энергии между элементами ударной системы.

Ключевые слова: *продольный удар, неоднородный стержень, метод Фурье, функции Бесселя, механическая энергия.*

Введение. Продольное соударение стержней составляет основу технологического процесса работы силовых импульсных систем. Различные аспекты моделирования продольного удара стержней рассмотрены в монографиях [1–3] и статьях [4–7]. Исследования удара упругих однородных стержней о жесткий ограничитель, выполненные на основе волновой теории [3] показали, что ударное взаимодействие стержня с ограничителем полностью согласуется с положениями классической теории об ударе абсолютно-упругого тела. Т.е. в процессе удара происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию деформации тела и последующее полное восстановление кинетической энергии ($\nu_1 = \nu_0$). Однако, при ударе ступенчато-неоднородного стержня [3, 4], а так же конического [5] или гиперболического [5] восстановление скорости происходит не в полной мере, часть энергии уходит на собственные колебания стержня после удара. Следует отметить, что в представленных работах [3–6] принята модель идеализированной преграды без учета ее инерционных или упругопластических свойств. В монографии [1] рассмотрены разные модели взаимодействия стержня с технологической средой с учетом ее упругих и инертных свойств, известные в литературе. Тем не менее, представленные модели рассматривают взаимодействие со средой только однородных стержней, а также не дают никакого представления о характере распределения механической энергии после удара.

Целью данной работы является установить характер распределения механической энергии при ударе неоднородного стержня о преграду с учетом её инертных и упругих свойств, что позволит оценить эффективность использования неоднородных стержней в качестве бойков и волноводов в установках ударного действия.

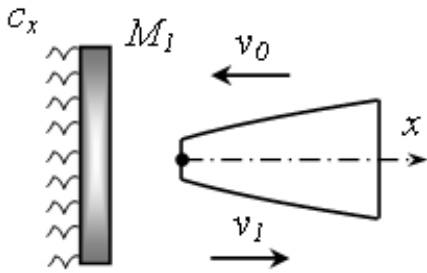
1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассматривается удар упругого неоднородного стержня о жесткую плиту массой M_1 , которая находится на упругом основании с коэффициентом жесткости c_x (рис. 1). Линейная плотность m и площадь сечения F стержня изменяется по степенному закону от продольной координаты x

$$m = \gamma F; \quad F = F_2 z^\alpha;$$

$$z = (1 - k)\frac{x}{l} + k, \quad k = \sqrt[\alpha]{\frac{F_1}{F_2}} \quad (0 < k < 1), \quad (1)$$

где γ – плотность материала, F_1, F_2 – площади торцевых сечений стержня, показатель степени α зависит от конфигурации стержня, например: для плоского клина или стержня параболического очертания – $\alpha = 1$, для конического стержня сплошного сечения – $\alpha = 2$, для стержня гиперболического очертания – $\alpha = -2$ (в этом случае рассматривается удар о преграду торцом с большей площадью ($F_1 > F_2$)).

Уравнение продольных перемещений $u(x, t)$, с учетом принятых обозначений, будет иметь вид [7]



$$z^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha z^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= \frac{\gamma l^2}{E(1-k)^2} z^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{l^2}{EF_2(1-k)^2} p(z, t), \quad (2)$$

где E – модуль упругости, $p(z, t)$ – внешняя нагрузка.

Решение уравнения (2) методом Фурье для случая свободных колебаний $p(z, t) \equiv (0)$ имеет

вид [7]

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_n(t) =$$

$$= z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} k^{-\nu} A(\lambda_n z) + \frac{N_{0n} l}{EF_2(1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (3)$$

а выражение для продольных усилий представлено зависимостью

$$N(z, t) = \frac{(1-k)}{l} EF_2 z^{1-2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} Z'_n(z) T_n(t) =$$

$$= z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} \frac{EF_2(1-k)}{l} k^{-\nu} \lambda_n C(\lambda_n z) + N_{0n} k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (4)$$

где u_{0n}, N_{0n} – продольное перемещение и усилие в нулевом сечении n -й формы колебаний, ω_n, μ_n – частота и фаза n -й формы колебаний, $\nu = (1 - \alpha)/2$;

$\lambda_n = (\omega_n l) / ((1 - k)c)$ – собственные значения, $c = \sqrt{E/\gamma}$ – скорость продольных волн деформаций, также введены следующие обозначения функций:

$$A(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_\nu(\zeta) Y_{\nu-1}(\zeta_0) - Y_\nu(\zeta) J_{\nu-1}(\zeta_0));$$

$$B(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_\nu(\zeta) J_\nu(\zeta_0) - J_\nu(\zeta) Y_\nu(\zeta_0));$$

$$C(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_{\nu-1}(\zeta) Y_{\nu-1}(\zeta_0) - Y_{\nu-1}(\zeta) J_{\nu-1}(\zeta_0));$$

$$D(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_{\nu-1}(\zeta) J_\nu(\zeta_0) - J_{\nu-1}(\zeta) Y_\nu(\zeta_0)),$$

где $J_\nu(\zeta)$ и $Y_\nu(\zeta)$ – функции Бесселя, ζ_0 – значение аргумента в начальной точке отсчета. При $\zeta = \zeta_0$ представленные функции принимают значения:

$$A(\zeta_0) = D(\zeta_0) = 1; \quad B(\zeta_0) = C(\zeta_0) = 0.$$

Для исследования динамики ударного процесса решим задачу (2) с граничными условиями

$$EF_1 u'_x(0, t) = M_1 \ddot{u}(0, t) + c_x u(0, t); \quad u'_x(l, t) = 0 \quad (5)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\dot{u}(x, 0) = \begin{cases} -\nu_0, & 0 < x \leq l, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где ν_0 – скорость стержня в момент соударения.

Из первого граничного условия (5) определяются соотношения между начальными параметрами

$$N_{0n} = u_{0n} \frac{EF_2}{l} \left(\chi k^{1-2\nu} - \frac{\xi \lambda_n^2 (1 - k^{2-2\nu})(1 - k)}{2(1 - \nu)} \right),$$

здесь введены следующие обозначения: $\chi = (c_x l) / (EF_1)$ – относительный коэффициент жесткости упругого основания, $\xi = M_1 / M_0$ – относительная масса плиты,

$$M_0 = \int_0^l m dx = \frac{\gamma F_2 l}{1 - k} \int_k^1 z^{1-2\nu} dz = \frac{\gamma F_2 l (1 - k^{2-2\nu})}{2(1 - k)(1 - \nu)} - \text{масса стержня.}$$

Из первого начального условия (6) следует, что $\mu_n = 0$.

2. Анализ влияния параметров ограничителя на частотные характеристики стержня. Удовлетворяя второе граничное условие (5), получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$k^{-\nu} C(\lambda_n) + k^{\nu-1} \left(\frac{\chi k^{1-2\nu}}{\lambda_n (1 - k)} - \frac{\xi \lambda_n (1 - k^{2-2\nu})}{2(1 - \nu)} \right) D(\lambda_n) = 0. \quad (8)$$

Введем обозначение $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n(1 - k)$, тогда зависимость для нахождения собственных частот можно привести к виду аналогичному случаю однородных стержней $\omega_n = \tilde{\lambda}_n c/l$.

Если рассматривать стержень и плиту как систему твердых тел, совершающих малые колебания, то уравнение движения такой системы будет

$$(M_0 + M_1)\ddot{x} + c_x x = 0. \quad (9)$$

С использованием ранее принятых обозначений уравнение (8) приводится к виду

$$\ddot{x} + \frac{\tilde{\lambda}^2 c^2}{l^2} x = 0, \quad (10)$$

где

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{2\chi k^{1-2\nu}(1-k)(1-\nu)}{(1+\xi)(1-k^{2-2\nu})}}. \quad (11)$$

На графике рис. 2 представлены зависимости первого собственного числа $\tilde{\lambda}_1$ от относительной жесткости χ для конического стержня ($\nu = -1/2$), с отношением радиусов торцевых сечений $k = 0, 5$, найденные численно из решения уравнения (8) без учета инерционной нагрузки ($\xi = 0$).

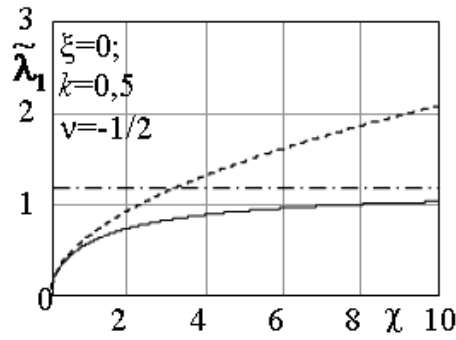


Рис. 2. Зависимость собственного числа $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительной жесткости χ

Пунктиром показаны значения $\tilde{\lambda}$ по зависимости (11), штрихпунктирной линией обозначено значение первого собственного числа для схемы с жестким ограничителем [7] – $\tilde{\lambda}_1 = 1,66$. Из анализа полученных зависимостей следует, что при $\chi < 0,3$ значения $\tilde{\lambda}_1$ для $0,1 \leq k \leq 0,99$ отличаются от $\tilde{\lambda}$ не более чем на 5%, таким образом, в этом случае для описания динамики процесса подойдет одномодовая модель (9). При значениях ($\chi > 15$) упругими свойствами преграды можно пренебречь, считая ее абсолютно жесткой. Наличие инерционной нагрузки ξ приводит к уменьшению расхождения значений первого собственного числа $\tilde{\lambda}_1$ из уравне-

ния (8) и $\tilde{\lambda}$, определенного по формуле (11).

3. Определение параметров НДС стержня при соударении с преградой. Начальные прогибы n -й формы колебаний u_{0n} определяются из начального условия (7) с учетом свойства ортогональности собственных функций с весом [7]

$$\rho(z) = z^{1-2\nu} + \frac{1 - k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} \xi \delta(z - k),$$

где $\delta(\zeta)$ – дельта-функция Дирака. Умножив обе части равенства (7) на $\rho(z)Z_n(z)$ и проинтегрировав по длине стержня, получим зависимость для нахождения па-

раметров u_{0n}

$$u_{0n} = -\frac{\nu_0 l k^{1-2\nu} Z'_n(k)}{(1-k)c\lambda_n^3 \Delta_n^2}, \quad (12)$$

где Δ_n^2 – квадрат нормы собственных функций, который для рассматриваемых граничных условий (5) будет иметь вид [7]

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 = & \frac{1}{2} \left(Z_n^2(1) - k^{2-2\nu} Z_n^2(k) - \frac{k^{2-2\nu}}{\lambda_n^2} (Z'_n(k))^2 + \frac{2\nu k^{1-2\nu}}{\lambda_n^2} Z'_n(k) Z_n(k) \right) + \\ & + \frac{1 - k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} \xi Z_n^2(k). \end{aligned}$$

Подставляя начальный параметр (12) в зависимости (3) и (4), получаем выражения продольных перемещений и усилий, а также скоростей сечений стержня в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(z, \tau) = & \frac{k^{1-2\nu}}{(1-k)} z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\lambda_n^3 \Delta_n^2} \times \\ & \times \left(k^{-\nu} A(\lambda_n z) + k^{\nu-1} \left(\frac{\chi k^{1-2\nu}}{\lambda_n(1-k)} - \frac{\xi \lambda_n(1-k^{2-2\nu})}{2(1-\nu)} \right) B(\lambda_n z) \right) \sin \tilde{\lambda}_n \tau; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}(z, \tau) = & z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\lambda_n^2 \Delta_n^2} \times \\ & \times \left(k^{-\nu} C(\lambda_n z) + k^{\nu-1} \left(\frac{\chi k^{1-2\nu}}{\lambda_n(1-k)} - \frac{\xi \lambda_n(1-k^{2-2\nu})}{2(1-\nu)} \right) D(\lambda_n z) \right) \sin \tilde{\lambda}_n \tau; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(z, \tau) = & k^{1-2\nu} z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\lambda_n^2 \Delta_n^2} \times \\ & \times \left(k^{-\nu} A(\lambda_n z) + k^{\nu-1} \left(\frac{\chi k^{1-2\nu}}{\lambda_n(1-k)} - \frac{\xi \lambda_n(1-k^{2-2\nu})}{2(1-\nu)} \right) B(\lambda_n z) \right) \cos \tilde{\lambda}_n \tau. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения величин: безразмерное перемещение – $\tilde{u} = -(uc)/(l\nu_0)$, безразмерное усилие – $\tilde{N} = (Nc)/(EF_1\nu_0)$, относительная скорость – $\tilde{\nu} = \nu/\nu_0$, безразмерное время – $\tau = tc/l$. Поскольку при соударении стержень и плита образуют неудерживающую связь, то параметры НДС стержня по расчетным зависимостям (13) и (14) можно рассматривать только на промежутке времени t_0 , пока усилие в ударном торце не поменяет знак.

На графиках (рис. 3) показаны зависимости безразмерных величин: перемещения ударного сечения ($z = k$) и свободного конца стержня ($z = 1$), а также усилия в ударном торце от безразмерного времени τ для конического стержня ($\nu = -1/2$) с отношением радиусов торцевых сечений $k = 0, 1$ при его ударе о плиту с массой в пять раз превышающей массу стержня ($\xi = 5$), расположенную на упругом основании с относительной жесткостью $\chi = 10$. На графиках (рис. 4) показаны зависимости безразмерных величин: перемещения ударного сечения ($z = k$) и свободного

конца стержня ($z = 1$), а также усилия в ударном торце от безразмерного времени τ для стержня гиперболического очертания ($\nu = 3/2$) при его ударе торцом с большей площадью в условиях аналогичных коническому стержню ($\xi = 5, \chi = 10$). Из графика (рис. 3) видно, что к моменту окончания удара $\tau = \tau_0$ конический стержень практически полностью восстанавливает свою исходную длину. В отличие от конического для случая гиперболического стержня (рис. 4) удар заканчивается в момент, когда стержень остается еще значительно деформированным.

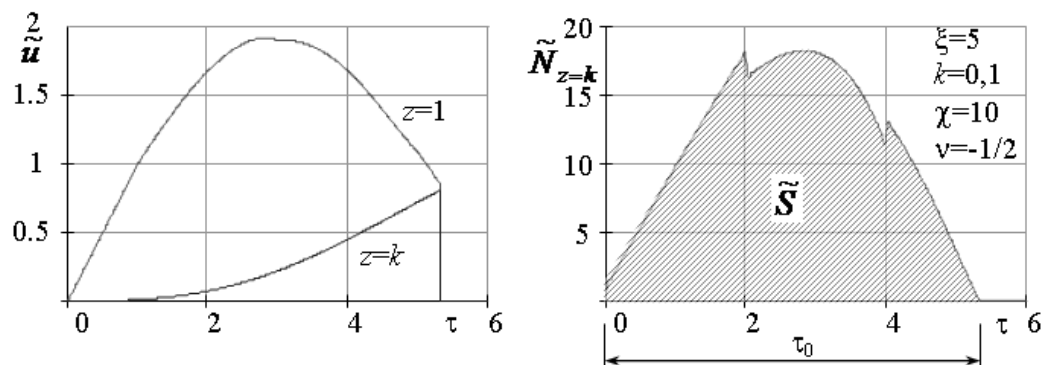


Рис. 3. Перемещения торцевых сечений и усилие в ударном торце конического стержня

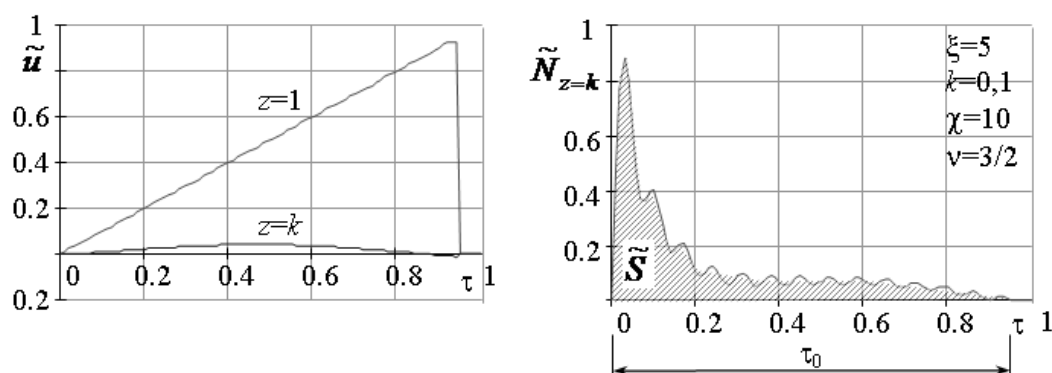


Рис. 4. Перемещения торцевых сечений и усилие в ударном торце стержня гиперболического очертания

4. Учет распределения механической энергии. В момент начала удара всю механическую энергию системы составляет кинетическая энергия стержня $T_{c0} = M_0 \nu_0^2 / 2$. По окончании удара механическую энергию системы составляют: кинетическая энергия движения плиты $T_{\Pi} = M_1 \nu^2(k, t_0) / 2$, потенциальная энергия деформации упругого основания $\Pi_{\Pi} = c_x u^2(k, t_0) / 2$, кинетическая энергия движения центра массы стержня $T_{c1} = M_0 \nu_1^2 / 2$, кинетическая энергия движения

сечений стержня относительно центра массы

$$T_k = \frac{1}{2} \int_l m(x) (\nu(x, t_0) - \nu_1)^2 dx$$

и потенциальная энергия упругой деформации стержня

$$P_k = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2(x, t_0)}{EF(x)} dx.$$

Так как данная механическая система является консервативной, то для нее выполняется условие

$$T_{c0} = T_{\pi} + P_{\pi} + T_{c1} + (T_k + P_k). \quad (16)$$

Механическую энергию ограничителя T_{π} и P_{π} можно непосредственно найти из зависимостей (13) и (15), если предварительно определить время удара с использованием выражения (14). Для определения скорости движения центра массы стержня ν_1 , рассмотрим взаимодействие стержня с преградой с позиции элементарной теории удара [8]

$$M\bar{\nu}_1 - M\bar{\nu}_0 = \bar{S}, \quad (17)$$

где $\bar{S}$ – импульс реакции опоры, $M\bar{\nu}_0, M\bar{\nu}_1$ – количество движения тела до и после соударения. Проецируя обе части векторного равенства (17) на ось x (рис. 1), получим зависимость для определения скорости стержня после соударения

$$\nu_1 = \frac{1}{M} \int_0^{t_0} N(k, t) dt - \nu_0. \quad (18)$$

Из выражения (18) с учетом зависимости (14) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 &= \frac{2(1-\nu)}{1-k^{2-2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 \Delta_n^2} \times \\ &\times \left(\frac{\chi k^{1-2\nu}}{\lambda_n(1-k)} - \frac{\xi \lambda_n (1-k^{2-2\nu})}{2(1-\nu)} \right)^2 \left(1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau_0 \right) - 1, \quad \tilde{\nu}_1 = \nu_1/\nu_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вывести расчетные зависимости для непосредственного определения механической энергии собственных колебаний стержня $(T_k + P_k)$ затруднительно, поэтому данную величину определим из условия (16)

$$(\tilde{T}_k + \tilde{P}_k) = 1 - \tilde{T}_{\pi} + \tilde{P}_{\pi} + \tilde{T}_{c1}, \quad (20)$$

где $(\tilde{T}_k + \tilde{P}_k) = ((T_k + P_k))/T_{c0}$ – относительная механическая энергия собственных колебаний стержня, $\tilde{T}_{\pi} = \xi \tilde{\nu}^2(k, \tau_0)$ – относительная кинетическая энергия

движения плиты, $\tilde{T}_{c1} = \tilde{\nu}_1^2$ – относительная кинетическая энергия движения центра массы стержня, а относительная потенциальная энергия деформации упругого основания

$$\tilde{P}_{\Pi} = \frac{2(1-\nu)(1-k)k^{1-2\nu}}{1-k^{2-2\nu}} \chi \tilde{u}^2(k, \tau_0).$$

В качестве примера приведем распределение энергии для случаев конического и гиперболического стержня при параметрах систем, рассмотренных ранее (рис. 3) и (рис. 4):

– конический стержень:

$$\tau_0 = 5,32; \quad \tilde{T}_{c1} = 0,466; \quad \tilde{P}_{\Pi} = 0,177; \quad \tilde{T}_{\Pi} = 0,348; \quad (\tilde{T}_k + \tilde{P}_k) = 0,009,$$

– гиперболический стержень:

$$\tau_0 = 0,947; \quad \tilde{T}_{c1} = 0,04; \quad \tilde{P}_{\Pi} = 0,018; \quad \tilde{T}_{\Pi} = 0,1; \quad (\tilde{T}_k + \tilde{P}_k) = 0,842.$$

Если рассматривать удар только по упругому основанию ($\xi = 0$, $\tilde{P}_{\Pi} = 0$, $\tilde{T}_{\Pi} = 0$), то распределение энергии будет следующим:

– конический стержень:

$$\tau_0 = 8,31; \quad \tilde{T}_{c1} = 0,98; \quad (\tilde{T}_k + \tilde{P}_k) = 0,02,$$

– гиперболический стержень:

$$\tau_0 = 0,39; \quad \tilde{T}_{c1} = 0,072; \quad (\tilde{T}_k + \tilde{P}_k) = 0,928.$$

Данные результаты согласуются с известным положением, что влияние собственных колебаний не существенно, если время удара превосходит значительно период прохождения упругих волн деформаций через тело [8].

Заключение. По разработанной методике выполнены исследования динамики продольного удара стержней различной формы о массивную плиту на упругом основании. Результаты исследования показали, что в процессе соударения происходит распределение энергии между преградой и стержнем. Характер распределения энергии во многом зависит как от упругих и инерционных параметров преграды, так и от конструктивных параметров стержня и схемы его удара – ударный торец имеет наибольшую или наименьшую площадь. При ударе стержня об упругое основание ($\xi = 0$) в качестве основного критерия, влияющего на распределение энергии удара между кинетической энергией движения стержня и механической энергией собственных колебаний, выступает время удара τ_0 . Так, при значениях $\tau_0 > 3$ кинетическая энергия восстанавливается более чем на 90%. В случае удара стержня по торцу с максимальной площадью, при уменьшении параметра k происходит усиление волновых процессов в стержне, на которые уходит значительная доля энергии, при этом время удара сокращается. Так, стержень гиперболического очертания, близкий к остроконечной форме, можно рассматривать как абсолютно-неупругое тело при ударе его об ограничитель с относительной жесткостью $\chi > 10$.

Аналогичный эффект получен в работе [9] при рассмотрении поперечных колебаний заостренного стержня гиперболического очертания, и связывается данный эффект с отсутствием отраженных волн со стороны заостренного конца.

1. Манжосов В.К. Модели продольного удара. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.
2. Манжосов В.К., Слепухин В.В. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.
3. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 164 с.
4. Санкин Ю.Н., Юганова Н.А. Продольные колебания упругих стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жестким препятствием // ПММ. – 2001. – **65**, № 3. – С. 444–450.
5. Улитин Г.М., Царенко С.М. Удар коничного стержня об жесткую перешкоду // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 56–63.
6. Улитин Г.М., Царенко С.М. Моделирование динамических процессов в боях гиперболической формы в механизмах ударной дѣи // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 3. – С. 37–42.
7. Stepanov R., Romenskiy D., Tsarenko S. Dynamics of Longitudinal Impact in the Variable Cross-Section Rods // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – **317**. – P. 012029.
8. Кочетков А.В., Федотов П.В. Некоторые вопросы теории удара // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2013. – № 5. – С. 1–15 (110ТВН513).
9. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акустический журнал. – 2017. – **63**, № 1. – С. 3–8.

S. Tsarenko, G. Ulitin, S. Fomenko

Longitudinal impact of an inhomogeneous rod on a massive plate on elastic basis.

The problem of the impact of an elastic rod with an inhomogeneity of longitudinal stiffness and distributed mass on a massive plate on an elastic base is considered. A mathematical model of longitudinal deformations of the rod is presented by a second-order differential equation with variable coefficients in partial derivatives. The solution to the equation is obtained by the Fourier method in Bessel functions. An analysis of the influence of the stiffness of the limiter on the value of the first natural frequency of oscillations is performed. Studies of the parameters of the stress-strain state for two schemes of the impact of the rod on the obstacle with an end face with a smaller and a larger area were carried out. The degree of distribution of mechanical energy between the elements of the impact system is analyzed.

Keywords: *longitudinal impact, inhomogeneous rod, Fourier method, Bessel functions, mechanical energy.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический ун-т»
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры», Макеевка
tzarenko@gmail.com

Получено 05.11.19

УДК 517.95

©2019. О. Н. Швидкий

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА

В статье исследуется задача Коши для обобщенного уравнения теплопроводности с дробным оператором Лапласа. Доказываются существование и единственность решения, а также оценка нормы решения в пространстве $C^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}$.

Ключевые слова: обобщенное уравнение теплопроводности, дробный оператор Лапласа.

Введение. В последнее время наблюдается повышенный интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка. Связано это с одной стороны с мощным развитием аппарата дробного дифференцирования и интегрирования, а с другой – с приложением таких уравнений в ряде различных областей науки.

Если взять, например, механику сплошной среды, то там рассматриваются тела с пространственно однородными свойствами. В случае же неоднородных материалов процессы переноса, протекающие в них, не подчиняются законам классической механики. Процессы диффузии и теплопроводности в этом случае носят аномальный характер и хорошо моделируются уравнениями в частных дробных производных как по пространственным координатам, так и по времени.

Сфера применения дифференциальных уравнений дробного порядка гораздо шире, чем уравнений с обычным дифференцированием, так как последние являются их частным случаем. Стоит упомянуть такие явления, как движение примеси в потоке однородной жидкости, диффузия и теплопроводность в пористых материалах, аморфных полупроводниках, полимерных структурах, перколяционных кластерах и т.д.

Введем некоторые обозначения. Рассмотрим пространства $C^l(R^n)$, где l – произвольная положительная нецелая константа. Норма в таких пространствах определяется следующим образом (см., напр., [1, с. 393]).

$$|u|_{C^l(R^n)} = |u|_{R^n}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \langle u \rangle_{x_i, R^n}^{(l)}, \quad (1)$$

$$|u|_{R^n}^{(0)} = \sup_{x \in R^n} |u(x)|, \quad (2)$$

$$\langle u \rangle_{x_i, R^n}^{(l)} = \sup_{x \in R^n, h > 0} \frac{|D_{x_i}^{[l]} u(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - D_{x_i}^{[l]} u(x)|}{h^{l-[l]}},$$

где $[l]$ – целая часть числа l , $D_{x_i}^{[l]} u$ – производная порядка $[l]$ по переменной x_i функции u .

Отдельно рассмотрим пространства $C_{x,t}^{l,q}(R^n)$, где l и q – произвольные положительные нецелые константы. Норма в таких пространствах определяется аналогично (1),(2):

$$|u|_{C_{x,t}^{l,q}(R^{n+1})} = |u|_{R^{n+1}}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \langle u \rangle_{x_i, R^{n+1}}^{(l)} + \langle u \rangle_{t, R^{n+1}}^{(q)}, \quad (3)$$

$$|u|_{R^{n+1}}^{(0)} = \sup_{(x,t) \in R^{n+1}} |u(x,t)|, \quad (4)$$

$$\langle u \rangle_{x_i, R^{n+1}}^{(l)} = \sup_{(x,t) \in R^{n+1}, h>0} \frac{|D_{x_i}^{[l]} u(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n, t) - D_{x_i}^{[l]} u(x, t)|}{h^{l-[l]}}, \quad (5)$$

$$\langle u \rangle_{t, R^{n+1}}^{(q)} \equiv \sup_{(x,t) \in R^{n+1}, h>0} \frac{|D_t^{[q]} u(x, t+h) - D_t^{[q]} u(x, t)|}{h^{q-[q]}}, \quad (6)$$

где $[l], [q]$ – целые части чисел l и q . $D_{x_i}^{[l]} u, D_t^{[q]} u$ – соответственно производные порядка $[l]$ по переменной x_i и порядка $[q]$ по переменной t функции u .

Если функция $u(x)$ определена в R^n , $n \geq 1$, и принадлежит пространству $C^l(R^n)$, $l > 2s$, $s \in (0, 1)$, то $(-\Delta)^s$ – дробный оператор Лапласа, который определяется следующим образом (см., напр., [2, (1.2)]):

$$(-\Delta)^s u := C(n, s) P.V. \int_{R^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (7)$$

Если $u(x)$ принадлежит основному пространству $S(R^n)$, то дробный оператор Лапласа можно определить так:

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)), \quad (8)$$

где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ обозначают соответственно прямое и обратное преобразование Фурье, т.е.

$$\mathcal{F}v(\xi) = \int_{R^n} v(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}v(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} v(x) e^{ix \cdot \xi} dx.$$

Для функции $u \in S(R^n)$ определения (7) и (8) эквивалентны.

В данной статье продолжается работа, начатая в статье [3]. Там мы перешли от общей постановки к модельной задаче и для нее показали разрешимость, единственность и получили априорную оценку. Теперь же все это мы получаем в общем случае. То есть, показываем, что задача (10) (ниже) имеет единственное решение из класса $C^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}$, причем справедливо неравенство

$$|u|_{R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C_T (|f|_{R^n \times [0, T]}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)}), \quad (9)$$

для любого $T > 0$, константа C_T зависит только от T .

1. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u = f, \\ u(x, 0) = \varphi, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$f(x, t) \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}(R^n \times [0; +\infty)), \quad \varphi(x) \in C^{2s+\alpha}(R^n). \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $0 < s < 1$, $\max(\alpha, \frac{\alpha}{2s}) < 1$. Тогда для любых функций f и φ , удовлетворяющих условию (11), задача (10) имеет единственное решение $u \in C^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}(R^n \times [0, +\infty))$, причем

$$|u|_{R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C_T \left(|f|_{R^n \times [0, T]}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)} \right), \quad (12)$$

с постоянной C_T , не зависящей от f и φ .

2. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Будем искать решение задачи (10), (11) в классе $C^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}(R^n \times [0, +\infty))$. Функции этого класса можно рассматривать как обобщенные функции, удовлетворяющие условию теоремы 1 [3]. На основании этой теоремы для них верно в смысле распределений такое определение дробного оператора Лапласа:

$$(-\Delta)^s u = F^{-1}(|\xi|^{2s} F u(\xi)). \quad (13)$$

Применим к (10) преобразование Фурье по x . При этом задача (10) перейдет в следующую задачу для ОДУ по переменной t :

$$\begin{cases} \tilde{u}'_t + |\xi|^{2s} \tilde{u} = \tilde{f}(\xi, t), \\ \tilde{u}(\xi, 0) = \tilde{\varphi}(\xi). \end{cases} \quad (14)$$

Ее решением будет функция

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^{2s}t} \cdot \left(\tilde{\varphi}(\xi) + \int_0^t e^{|\xi|^{2s}\tau} \tilde{f}(\xi, \tau) d\tau \right). \quad (15)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\xi) e^{ix\xi - |\xi|^{2s}t} d\xi + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \left(\int_0^t e^{|\xi|^{2s}\tau} \tilde{f}(\xi, \tau) d\tau \right) \times e^{ix\xi - |\xi|^{2s}t} d\xi; \\ u(x, t) &= \int_{R^n} p(x - y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{R^n} p(x - y, t - \tau) f(y, \tau) d\tau dy, \end{aligned} \quad (16)$$

или, используя стандартные обозначения для свертки по одной и по обоим переменным:

$$u(x, t) = (p *_1 \varphi) + (p * f). \quad (17)$$

Здесь

$$p(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{ix\xi - t|\xi|^{2s}} d\xi \quad (18)$$

– ядро дробного уравнения теплопроводности.

Оба интеграла в выражении (16) существуют из-за условий (11), и так как справедливо свойство p : $\int_{R^n} p(x, t) dx = 1$ при $t > 0$ (см., напр., [5, (24)]).

Из (16) следует единственность решения задачи (10) в классе $C^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}(R^n \times [0, +\infty))$.

Для того, чтобы оценить норму $|u|^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})}$, сделаем замену

$$u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x). \quad (19)$$

Подставив это выражение в (10), получим задачу с нулевыми начальными данными для нахождения v :

$$\begin{cases} v_t + (-\Delta)^s v = f - (-\Delta)^s \varphi, \\ v(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь правая часть представляет собой функцию из $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}(R^n \times [0, +\infty))$: $f \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}(R^n \times [0, +\infty))$ по условию, $(-\Delta)^s \varphi \in C^\alpha(R^n)$ (см. [6, п. 2.3.8]), а значит, $(-\Delta)^s \varphi \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}(R^n \times [0, +\infty))$.

Пользуясь (17), запишем решение задачи (20) в виде

$$v(x, t) = (p * \Phi) = \int_0^t \int_{R^n} p(x - y, t - \tau) \Phi(y, \tau) d\tau dy, \quad (21)$$

где $\Phi(x, t) = f(x, t) - (-\Delta)^s \varphi(x)$, $p \in C^\infty(R^n \times (0; +\infty))$ ([5, p. 2208]).

Для того, чтобы оценить норму функции $v(x, t)$, нам нужно вычислить ее производные по x и по t . Для этого рассмотрим последовательность функций

$$v_h(x, t) = \int_0^{t-h} \int_{R^n} \Phi(y, \tau) p(x - y, t - \tau) d\tau dy.$$

Дифференцируя по t , получаем

$$\frac{\partial v_h}{\partial t} = \int_0^{t-h} \int_{R^n} \Phi(y, \tau) p_t(x - y, t - \tau) d\tau dy + \int_{R^n} \Phi(y, t - h) p(x - y, h) dy =$$

$$= \int_0^{t-h} \int_{R^n} p_t(x-y, t-\tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau + \int_{R^n} p(x-y, h) \Phi(y, t-h) dy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial v_h}{\partial t} = \int_0^t \int_{R^n} p_t(x-y, t-\tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau + \Phi(x, t), \quad (22)$$

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_i^k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^t d\tau \int_{R^n} p_{x_i}^{(k)}(x-y, t-\tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy, \quad k \geq 1. \quad (23)$$

Здесь были использованы такие свойства ядра дробного уравнения теплопроводности:

$$\int_{R^n} p(x, t) = 1, \quad [5, (24)], \quad (24)$$

$$\int_{R^n} p_t(x, t) = 0, \quad [6, \text{p. 1219}], \quad (25)$$

$$\int_{R^n} p_x^k(x, t) = 0, \quad (26)$$

а также следующее свойство:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{R^n} p(x-y, t) \varphi(y) = \varphi(x). \quad (27)$$

Последнее доказывается при помощи (11), (24) и такого рассуждения:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{R^n} p(x-y, t) \varphi(y) &= \lim_{t \rightarrow +0} \int_{R^n} p(x-y, t) [\varphi(y) - \varphi(x)] dy + \varphi(x) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \int_{R^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^{2s}} [\varphi(y) - \varphi(x)] dy d\xi + \varphi(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{R^n} \int_{R^n} e^{iz\sqrt{t}\xi - t|\xi|^{2s}} [\varphi(x - z\sqrt{t}) - \varphi(x)] dy d\xi + \varphi(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Равенство (26) легко проверить, пользуясь теоремой Остроградского и оценкой (29), ниже.

Оценим $\langle (p * \Phi) \rangle_{x_i, R^n \times (0, T)}^{(2s+\alpha)}$. Обозначим через k целую часть $2s + \alpha$.

$$D_{x_i}^k (p * \Phi)(x + h e_i, t) - D_{x_i}^k (p * \Phi)(x, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_{R^n} p_{x_i}^{(k)}(x + he_i - y, t - \tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x + he_i, \tau)] dy d\tau - \\
&\quad - \int_0^t \int_{R^n} p_{x_i}^{(k)}(x - y, t - \tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau = \\
&= \int_0^t \int_{|x-y| \leq 2h} p_{x_i}^{(k)}(x + he_i - y, t - \tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x + he_i, \tau)] dy d\tau - \\
&\quad - \int_0^t \int_{|x-y| \leq 2h} p_{x_i}^{(k)}(x - y, t - \tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau + \\
&\quad + \int_0^t \int_{|x-y| \geq 2h} [p_{x_i}^{(k)}(x + he_i - y, t - \tau) - p_{x_i}^{(k)}(x - y, t - \tau)] [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau + \\
&\quad + \int_0^t [\Phi(x, \tau) - \Phi(x + he_i, \tau)] \int_{|x-y| \geq 2h} p_{x_i}^{(k)}(x + he_i - y, t - \tau) dy d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить каждый из интегралов, нам понадобятся следующие оценки ядра дробного уравнения теплопроводности и его производных:

$$C_1 \min \left\{ \frac{1}{t^{n/2s}}, \frac{t}{|x|^{n+2s}} \right\} \leq p(x, t) \leq C_2 \min \left\{ \frac{1}{t^{n/2s}}, \frac{t}{|x|^{n+2s}} \right\}, \quad 0 < C_1 < C_2, \quad (28)$$

$$|D_x^\alpha p(x, t)| \leq C_{n,k} \min \left\{ \frac{1}{t^{\frac{n+k}{2s}}}, \frac{t}{|x|^{n+2s+k}} \right\}, \quad k = |\alpha|, \quad (29)$$

$$|p_t(x, t)| \leq C \min \left\{ \frac{1}{t^{\frac{n}{2s}+2}}, \frac{1}{|x|^{n+2s}} \right\}, \quad (30)$$

(см. [5, (25)–(27)]).

Оценим I_3 . Пусть сначала $t^{\frac{1}{2s}} \leq 2h$. Применяя теорему о среднем и пользуясь эквивалентностью $|x - y|$ и $|x + he_i - y|$ при $|x - y| \geq 2h$, получаем

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq ch \int_0^t \int_{|x-y| \geq 2h} p_{x_i}^{k+1}(x + \theta he_i - y, t - \tau) |x - y|^\alpha \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} dy d\tau \leq \\
&\leq ch \int_0^t \int_{|x-y| \geq 2h} \frac{(t - \tau) \cdot |x - y|^\alpha}{|x - y|^{n+2s+k+1}} dy d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ch \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot \int_0^t (t - \tau) d\tau \cdot \frac{1}{(2h)^{2s+k+1-\alpha}} = c \frac{t^2}{h^{2s+k-2}} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \leq \\
 &\leq c \frac{h^{4s}}{h^{2s+k-\alpha}} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} = ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Теперь берем $t^{\frac{1}{2s}} \geq 2h$.

$$\begin{aligned}
 |I_3| &= ch \int_0^{t-(2h)^{2s}} \left(\int_{2h \leq |x-y| \leq (t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} p_{x_i}^{(k+1)}(x + \theta h e_i - y, t - \tau) |x - y|^\alpha \times \right. \\
 &\times \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} dy d\tau + ch \int_{t-(2h)^{2s}}^t \int_{|x-y| \geq 2h} p_{x_i}^{(k+1)}(x + \theta h e_i - y, t - \tau) |x - y| \times \\
 &\times \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} dy \Big) d\tau = (J_1 + J_2 + J_3) \cdot \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}. \\
 J_1 &= ch \int_0^{t-(2h)^{2s}} \int_{2h \leq |x-y| \leq (t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} \frac{|x-y|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n+k+1}{2s}}} dy d\tau = \\
 &= ch \int_0^{t-(2h)^{2s}} \frac{[(t-\tau)^{\frac{n+\alpha}{2s}} - (2h)^{n+\alpha}]}{(t-\alpha)^{\frac{n+k+1}{2s}}} d\tau = \\
 &= ch \int_{(2h)^{2h}}^t \left[\tau^{\frac{\alpha-k-1}{2s}} - \frac{(2h)^{n+\alpha}}{\tau^{\frac{n+k+1}{2s}}} \right] d\tau = ch \left(\frac{\tau^{\frac{2s+\alpha-k-1}{2s}}}{\frac{2s+\alpha-k-1}{2s}} - (2h)^{n+\alpha} \frac{\tau^{\frac{2s-n-k-1}{2s}}}{\frac{2s-n-k-1}{2s}} \right) \Big|_{(2h)^{2h}}^t \leq \\
 &\leq ch \left((2h)^{n+\alpha} \cdot \frac{2s}{n+k+1-2s} (2h)^{2s-n-k-1} + \frac{2s}{k+1-(2s+\alpha)} (2h)^{2s+\alpha-k-1} \right) \leq \\
 &\leq ch \cdot (2h)^{2s+\alpha-k-1} = ch^{2s+\alpha-k-1} = ch^{2s+\alpha-k}. \\
 J_2 &= ch \int_0^{t-(2h)^{2s}} \int_{|x-y| \geq (t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} \frac{(t-\tau) |x-y|^\alpha}{|x-y|^{n+2s+k+1}} dy d\tau = \\
 &= ch \int_0^{t-(2h)^{2s}} (t-\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2s+k-\alpha+1}{2s}}} d\tau = ch \int_0^{t-(2h)^{2s}} (t-\tau)^{\frac{\alpha-k-1}{2s}} d\tau = \\
 &= ch \left(t^{\frac{2s+\alpha-k-1}{2s}} - (2h)^{2s+\alpha-k-1} \right) \leq ch \cdot h^{2s+\alpha-k-1} = ch^{2s+\alpha-k}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &= ch \int_{t-(2h)^{2s}} \int_{|x-y| \geq 2h} \frac{(t-\tau)|x-y|^\alpha}{|x-y|^{n+2s+k+1}} dy d\tau = ch \int_{t-(2h)^{2s}} (t-\tau) \cdot (2h)^{-2s-k-1+\alpha} d\tau = \\
 &= ch^{-2s-k+\alpha} \int_0^{(2h)^{2s}} \tau d\tau = ch^{-2s-k+\alpha} \cdot h^{4s} = ch^{2s+\alpha-k}.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$|I_3| \leq ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.$$

Теперь оценим I_2 . Снова промежуток по t разбиваем на 2 части. Сначала рассмотрим $t^{\frac{1}{2s}} \leq 2h$.

$$\begin{aligned}
 |I_2| &= \left| \int_0^t \int_{|x-y| \leq 2h} p_{x_i}^k(x-y, t-\tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau \right| \leq \\
 &\leq \int_0^t \int_{|x-y| \leq (t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+k}{2s}}} |x-y|^\alpha \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} dy d\tau + \\
 &+ \int_0^t \int_{(t-\tau)^{\frac{1}{2s}} \leq |x-y| \leq 2h} \frac{t-\tau}{|x-y|^{n+2s+k}} |x-y|^\alpha \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} dy d\tau \leq \\
 &\leq c_1 \langle \Phi \rangle_{R^n \times (0, T)}^{(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\frac{k-\alpha}{2s}}} + c_2 \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \int_0^t (t-\tau) \left[\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2s+k-\alpha}{2s}}} - \frac{1}{(2h)^{2s+k-\alpha}} \right] d\tau = \\
 &= c_1 t^{\frac{2s+\alpha-k}{2s}} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + c_2 \left(t^{\frac{2s+\alpha-k}{2s}} - \frac{t^2}{2 \cdot (2h)^{2s+k-\alpha}} \right) \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \leq \\
 &\leq ct^{\frac{2s+\alpha-k}{2s}} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \leq ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Теперь пусть $t^{\frac{1}{2s}} > 2h$.

$$\begin{aligned}
 |I_2| &= \left| \int_0^t \int_{|x-y| \leq 2h} p_{x_i}^k(x-y, t-\tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, \tau)] dy d\tau \right| \leq \\
 &\leq \int_0^{t-(2h)^{2s}} \int_{|x-y| \leq 3h} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+k}{2s}}} |x-y|^\alpha dy d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t-(2h)^{2s}}^t \int_{|x-y| \leq (t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+k}{2s}}} |x-y|^\alpha dy d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \\
 & + \int_{t-(2h)^{2s}}^t \int_{(t-\tau)^{\frac{1}{2s}} \leq |x-y| \leq 2h} \frac{(t-\tau) \cdot |x-y|^\alpha}{|x-y|^{n+2s+k}} dy d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} = \\
 & = (J_1 + J_2 + J_3) \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \leq ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Итак, $|I_2| \leq ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}$, точно так же, как и I_3 .

I_1 оценивается аналогично.

И, наконец, оценим I_4 . Его можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 I_4 & = - \int_0^t [\Phi(x, t) - \Phi(x + he_i, \tau)] \int_{|x-y|=2h} p_{x_i}^{(k-1)}(x + he_i - y, t - \tau) n_i dS_y. \\
 |I_4| & \leq \int_0^t \int_{|x-y|=2h} \left| p_{x_i}^{(k-1)}(x + he_i - y, t - \tau) \right| dS_y d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot h^\alpha.
 \end{aligned}$$

1. $2h \leq t^{\frac{1}{2s}}$.

$$\begin{aligned}
 |I_4| & \leq c \int_0^{t-(2h)^{2s}} \int_{|x-y|=2h} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+k-1}{2s}}} dS_y d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot h^\alpha + \\
 & + c \int_{t-(2h)^{2s}}^t \int_{|x-y|=2h} \frac{t-\tau}{|x + he_i - y|^{n+2s+k-1}} dS_y d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot h^\alpha \leq \\
 & \leq (J_1 + J_2) \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot h^\alpha. \\
 J_1 & \leq c(2h)^{n-1} \int_{(2h)^{2s}}^t \tau^{-\frac{n+k-1}{2s}} d\tau = c(2h)^{n-1} \left[(2h)^{2s-n-k+1} - t^{\frac{2s-n-k+1}{2s}} \right] \leq ch^{2s-k}. \\
 J_2 & \leq c \int_{t-(2h)^{2s}}^t (t-\tau) \int_{|x-y|=2h} \frac{dS_y}{|x-y|^{n+2s+k-1}} d\tau = c(2h)^{-2s-k} \cdot (2h)^{4s} = ch^{2s-k}.
 \end{aligned}$$

Получаем

$$|I_4| \leq ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.$$

2. $2h > t^{\frac{1}{2s}}$.

$$\begin{aligned}
 |I_4| &\leq \int_0^t \int_{|x-y|=2h} \frac{t-\tau}{|x+he_i-y|^{n+2s+k-1}} dS_y d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot h^\alpha \leq \\
 &\leq c \int_0^t (t-\tau) \int_{|x-y|=2h} \frac{dS_y}{|x-y|^{n+2s+k-1}} d\tau \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \cdot h^\alpha = c(2h)^{-2s-k} \cdot t^2 \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} \leq \\
 &\leq c(2h)^{2s-k} \cdot (2h)^{4s} \cdot h^\alpha \langle \Phi \rangle_{R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} = ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$|I_4| \leq ch^{2s+\alpha-k} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}.$$

Мы получили оценку

$$\langle (p * \Phi) \rangle_{x_i, R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha)} \leq C \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)}. \quad (31)$$

Теперь оценим $\langle (p * \Phi) \rangle_{t, R^n \times (0, T)}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})}$.

$$\begin{aligned}
 |D_t(p * \Phi)(x, t+h) - D_t(p * \Phi)(x, t)| &= \left| \int_0^t \int_{R^n} [p_t(x-y, t+h-\tau) - p_t(x-y, t-\tau)] \times \right. \\
 &\times [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, y)] dy d\tau + \int_t^{t+h} \int_{R^n} [p_t(x-y, t+h-\tau) [\Phi(y, \tau) - \Phi(x, y)] dy d\tau + \\
 &+ \Phi(x, t+h) - \Phi(x, t) \Big| \leq C([t^{\frac{\alpha}{2s}} - (t+h)^{\frac{\alpha}{2s}} + h^{\frac{\alpha}{2s}}] \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + h^{\frac{\alpha}{2s}} \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \\
 &+ h^{\frac{\alpha}{2s}} \langle \Phi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle (p * \Phi) \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} &= \sup_{h>0} \frac{1}{h^{\frac{\alpha}{2s}}} \sup_{R^n \times [0, T]} |D_t(p * \Phi)(x, t+h) - D_t(p * \Phi)(x, t)| \leq \\
 &\leq \sup_{h>0} \frac{1}{h^{\frac{\alpha}{2s}}} \left(\sup_{[0, T]} [t^{\frac{\alpha}{2s}} - (t+h)^{\frac{\alpha}{2s}} + h^{\frac{\alpha}{2s}}] + h^{\frac{\alpha}{2s}} (\langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \Phi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})}) \right).
 \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что

$$\sup_{[0, T]} [t^{\frac{\alpha}{2s}} - (t+h)^{\frac{\alpha}{2s}} + h^{\frac{\alpha}{2s}}] = T^{\frac{\alpha}{2s}} - (T+h)^{\frac{\alpha}{2s}} + h^{\frac{\alpha}{2s}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle (p * \Phi) \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} &\leq \sup_{h>0} \left[\frac{T^{\frac{\alpha}{2s}} - (T+h)^{\frac{\alpha}{2s}}}{h^{\frac{\alpha}{2s}}} + 1 \right] + \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \Phi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} \leq \\ &\leq C \left(\langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \Phi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} \right). \end{aligned}$$

Мы получили оценку

$$\langle (p * \Phi) \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C \left(\langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \Phi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} \right). \quad (32)$$

Теперь перейдем к оценке нормы $|u|^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})}$. Используя (21), (31) и (32), получаем

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{x_i, R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha)} &\leq \langle v \rangle_{x_i, R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha)} + \langle \varphi \rangle_{x_i, R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C \langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \varphi \rangle_{x_i, R^n}^{(2s+\alpha)} \leq \\ &\leq C \langle f - (-\Delta)^s \varphi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \varphi \rangle_{x_i, R^n}^{(2s+\alpha)} \leq C \left(\langle f \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle (-\Delta)^s \varphi \rangle_{x, R^n}^{(\alpha)} \right) + \\ &\quad + \langle \varphi \rangle_{x_i, R^n}^{(2s+\alpha)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|(-\Delta)^s \varphi|_{R^n}^{(\alpha)} \leq |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)}$ ([6, с. 76]), получаем

$$\langle u \rangle_{x_i, R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha)} \leq C \left(\langle f \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)} \right). \quad (33)$$

Далее оцениваем константу Гельдера по t . Используя (32), получаем

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} &\leq \langle v \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} + \langle \varphi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} = \langle v \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} \leq \\ &\leq C \left(\langle \Phi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle \Phi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} \right) \leq \\ &\leq C \left(\langle f \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle (-\Delta)^s \varphi \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle f \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} + \langle (-\Delta)^s \varphi \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} \right) \leq \\ &\leq C \left(\langle f \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle f \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle u \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C \left(\langle f \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle f \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)} \right). \quad (34)$$

Остается оценить $|u|_{R^n \times [0, T]}^{(0)}$.

$$|u| \leq \left| \int_{R^n} p(x-y, t) \varphi(y) dy \right| + \left| \int_0^t \int_{R^n} p(x-y, t-\tau) f(y, \tau) d\tau dy \right| = I_1 + I_2.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \int_{R^n} |p(x-y, t)| \cdot |\varphi(y)| dy \leq C |\varphi|_{R^n}^{(0)} \int_{R^n} \left| \min \left\{ \frac{1}{t^{n/2s}}, \frac{t}{|x-y|^{n+2s}} \right\} \right| dy \leq \\
&\leq C |\varphi|_{R^n}^{(0)} \left\{ \int_{|x-y| \geq t^{1/2s}} \frac{t}{|x-y|^{n+2s}} dy + \int_{|x-y| \leq t^{1/2s}} \frac{1}{t^{n/2s}} dy \right\} \leq C |\varphi|_{R^n}^{(0)}. \\
I_2 &\leq C \int_0^t \int_{R^n} |p(x-y, t-\tau)| \cdot |f(y, \tau)| dy \leq \\
&\leq C |f|_{R^n \times [0, T]}^{(0)} \int_0^t \int_{R^n} \left| \min \left\{ \frac{1}{(t-\tau)^{n/2s}}, \frac{t-\tau}{|x-y|^{n+2s}} \right\} \right| dy \leq \\
&\leq C |\varphi|_{R^n}^{(0)} \left\{ \int_0^t \int_{|x-y| \geq (t-\tau)^{1/2s}} \frac{t-\tau}{|x-y|^{n+2s}} dy + \int_0^t \int_{|x-y| \leq (t-\tau)^{1/2s}} \frac{1}{(t-\tau)^{n/2s}} dy \right\} \leq \\
&\leq C_1 |f|_{R^n \times [0, T]}^{(0)} \cdot C_2 t \leq C_T \cdot |f|_{R^n \times [0, T]}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Получаем

$$|u|_{R^n \times [0, T]}^{(0)} \leq C_T (|\varphi|_{R^n}^{(0)} + |f|_{R^n \times [0, T]}^{(0)}). \quad (35)$$

Принимая во внимание (33)–(35), имеем

$$\begin{aligned}
|u|_{R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} &= |u|_{R^n \times [0, T]}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \langle u \rangle_{x_i, R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha)} + \langle u \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{2s+\alpha}{2s})} \leq \\
&\leq C_T (|\varphi|_{R^n}^{(0)} + |f|_{R^n \times [0, T]}^{(0)}) + C (\langle f \rangle_{x, R^n \times [0, T]}^{(\alpha)} + \langle f \rangle_{t, R^n \times [0, T]}^{(\frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)}) \leq \\
&\leq C_T (|f|_{R^n \times [0, T]}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)}).
\end{aligned}$$

Итак, мы получили оценку нормы решения:

$$|u|_{R^n \times [0, T]}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C_T (|f|_{R^n \times [0, T]}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)}),$$

где C_T – константа, зависящая только от T . $\square$

1. Degtyarev S.P. On Fourier multipliers in function spaces with partial Hölder conditions and their applications to the linearized Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions // Evolution equations and control theory. – December 2015. – 4, № 4. – P. 391–429.
2. Cabre X. and Sire Y. Nonlinear equations for fractional Laplacians I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 2014. – 31, I. 1. – P. 23–53.
3. Дегтярев С.П., Швидкий О.Н. Разрешимость задачи Коши для обобщенного уравнения теплопроводности с дробным оператором Лапласа в Гельдеровских классах функций // Труды ин-та прикл. математики и механики. – 2017. – 31. – С.82–89.

4. Швидкий О.Н. Распространение дробного оператора Лапласа на пространство S' и некоторые приложения // Вестник ДонНУ. Сер.А. Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 16–24.
5. Greco A., Iannizzotto A. Existence and convexity of solutions of the fractional heat equation // Communications on pure and applied analysis. – November 2017. – **16**, № 6. – P. 2201–2226.
6. Vazquez J.L. Asymptotic behaviour for the Fractional Heat Equation in the Euclidean space // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – **63**, I. 7–9. – P. 1216–1231.
7. Трибелъ Х. Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 448 с.

O. N. Shvydkiy

Solvability of the initial problem for the heat equation with a fractional Laplace operator.

The article investigates the Cauchy problem for the generalized heat equation with fractional Laplace operator. The existence and uniqueness of a solution is proved, as well as an estimate of the norm of the solution in the space $C^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}$.

Keywords: *generalized heat equation, fractional Laplace operator.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
oshvid@ukr.net

Получено 29.10.19