

УДК 517.5

©2014. А. С. Ефимушкин, В. И. Рязанов

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ЛУЗИНА И ГЕРИНГА

Доказан аналог теоремы Лузина, что любая функция на отрезке, измеримая относительно логарифмической ёмкости, почти всюду совпадает с производной от некоторой непрерывной функции. На этой основе установлен аналог теоремы Геринга о разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в единичном круге с произвольными граничными данными, измеримыми относительно логарифмической ёмкости. Отсюда также следует соответствующая разрешимость задачи Дирихле для аналитических функций.

Ключевые слова: гармонические и аналитические функции, задача Дирихле, теорема Лузина, теорема Геринга, логарифмическая ёмкость.

1. Введение. Краевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), а также известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924), и Пуанкаре (1910), смотри историю вопроса в монографии [1], где также рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

Хорошо известно, что, если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1)$$

и, таким образом, данная функция определяется с точностью до чисто мнимой постоянной ic , $c = \operatorname{Im} f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ на границе единичного круга, см., напр., § 8, Гл. III, часть 3 в [2], с. 346.

Известно также, что любая гармоническая функция $u(z)$ в $\mathbb{D}$ имеет сопряженную функцию $v(z)$ такую, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$. Заметим, что граничные значения сопряженной функции v не могут быть произвольно предписаны одновременно с граничными значениями u , поскольку v единственным образом определяется через u с точностью до аддитивной постоянной, см., например, I.A в [3]. Поэтому задача Дирихле для аналитических функций сводится к задаче для гармонических функций с заданной граничной функцией вещественной части.

Герингом был установлен следующий результат: для любой вещественной с периодом 2π функции, которая измерима (относительно меры Лебега), существует гармоническая в $\mathbb{D}$ функция, такая, что $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей, см. [4]. Здесь мы доказываем аналог результата Геринга в терминах логарифмической ёмкости, см. теорему 2. В свою очередь, эта теорема основана на соответствующем аналоге результата Лузина, см. теорему 1.

Напомним, что Лузину принадлежит следующая теорема: для любой измеримой и п.в. конечной (относительно меры Лебега) функции φ на интервале $[a, b]$, существует непрерывная функция Φ такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$, см., например,

теорему VII(2.3) в [5]. Это утверждение было хорошо известно до Лузина для суммируемой функции φ относительно ее неопределенного интеграла Φ , см., например, теорему IV(6.3) в [5]. Однако, этот результат весьма нетривиален для несуммируемой φ .

2. О логарифмической ёмкости. Наиболее важным для нашего исследования является понятие логарифмической ёмкости, см., например, [6], [7] и [8]. Пусть E – произвольное ограниченное борелевское множество плоскости $\mathbb{C}$. *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν , определенную на борелевских подмножествах множества E , с $\nu(E) = 1$. Функцию

$$U^\nu(z) := \int_E \log \left| \frac{1}{z - \zeta} \right| d\nu(\zeta) \quad (2)$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν . Соответственно, *логарифмической ёмкостью* $C(E)$ борелевского множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \quad V = \inf_\nu V_\nu(E), \quad V_\nu(E) = \sup_z U^\nu(z). \quad (3)$$

Заметим, что здесь супремум достаточно вычислять по множеству E . Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \leq C(E) < \infty$, $C(E_1) \leq C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$, $C(E) = 0$, если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$, см., например, лемму III.4 в [7].

Напомним, что логарифмическая ёмкость совпадает с так называемой абсолютной гармонической мерой, введенной Рольфом Неванлинной, см., например, [8], с. 123. Поэтому множество E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$, см., например, теорему V.6.2 в [8]. Однако, существуют множества нулевой длины, имеющие положительную ёмкость, см., например, теорему IV.5 в [7].

Хорошо известна также следующая геометрическая характеристика логарифмической ёмкости, см. [8]:

$$C(E) = \tau(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}, \quad (4)$$

где V_n обозначает супремум (на самом деле, максимум) величины

$$V(z_1, \dots, z_n) = \prod_{\substack{l=1, \dots, n \\ k < l}} |z_k - z_l|, \quad (5)$$

когда всевозможные конечные наборы точек $z_1, \dots, z_n$ пробегают множество E . Следуя Фекете [9], величину $\tau(E)$ называют *трансфинитным диаметром* множества E . Из указанной геометрической интерпретации логарифмической ёмкости через трансфинитный диаметр, сразу же видим, что если $C(E) = 0$, то $C(f(E)) = 0$ для любого отображения f , непрерывного по Гёльдеру.

Чтобы ввести множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, определим, следуя [7], *внутреннюю* C_* и *внешнюю ёмкости* C^* :

$$C_*(E) := \sup_{F \subseteq E} C(F), \quad (6)$$

где супремум берётся по всем компактным множествам $F \subset \mathbb{C}$, и

$$C^*(E) := \inf_{E \subseteq O} C(O), \quad (7)$$

где инфимум берётся по всем открытым множествам $O \subseteq \mathbb{C}$. Далее ограниченное множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *измеримым относительно логарифмической ёмкости*, если

$$C^*(E) = C_*(E), \quad (8)$$

и общее значение $C_*(E)$ и $C^*(E)$ по-прежнему обозначается через $C(E)$. Отметим, см. лемму III.5 в [7], что внешняя ёмкость полуаддитивна, т.е.

$$C^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C^*(E_n). \quad (9)$$

Функцию $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$, заданную на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$, будем называть *измеримой относительно логарифмической ёмкости*, если для любых открытых множеств $O \subseteq \mathbb{C}$ измеримы относительно логарифмической ёмкости множества

$$\Omega = \{z \in E : \varphi(z) \in O\}. \quad (10)$$

Ясно, что само множество E измеримо относительно логарифмической ёмкости.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что борелевские множества и, в частности, компактные и открытые множества измеримы относительно логарифмической ёмкости, см. [7], с. 9 и 31. Кроме того, как это следует прямо из определения, любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости, представимо в виде объединения сигма-компакта (объединения счётного числа компактов) и множества логарифмической ёмкости нуль. Известно также, что борелевские множества, например, компакты измеримы относительно всех хаусдорфовых мер и, в частности, относительно меры длины, см., например, теорему II(7.4) в [5]. Поэтому любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости измеримо относительно меры длины. Таким образом, на таком множестве любая функция $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$, измеримая относительно логарифмической ёмкости, будет также измеримой относительно меры длины на E . Однако, существуют функции, измеримые относительно меры длины, которые не являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости, см., например, теорему IV.5 в [7].

Нас особо будут интересовать функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, заданные на единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Однако, ввиду (7), нам достаточно будет изучить соответствующие вопросы на отрезках вещественной оси, поскольку любая замкнутая дуга на $\partial\mathbb{D}$ допускает билипшицево (даже бесконечно гладкое, так называемое стереографическое) отображение g на такой отрезок, а g и g^{-1} по теореме Кирсбрауна допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$ на себя, см., например, теорему 2.10.43 в [10].

В связи с этим, напомним, что отображение $g : X \rightarrow X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называется *липшицевым*, если $d'(g(x_1), g(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной C . Если в дополнение к этому $d(x_1, x_2) \leq c \cdot d'(g(x_1), g(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной c , то отображение g называется *билипшицевым*.

Напомним также, см., например, [5], с. 195, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой плотности* для измеримого (относительно длины, т.е. по Лебегу) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus E|}{2\varepsilon} = 0. \quad (11)$$

Аналогично говорим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является *точкой плотности относительно логарифмической ёмкости* для измеримого (относительно C) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus E)}{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])} = 0. \quad (12)$$

Напомним, наконец, что функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ *аппроксимативно непрерывна (относительно логарифмической ёмкости)* в точке $x_0 \in (a, b)$, если она непрерывна на некотором множестве $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности (относительно логарифмической ёмкости), см., например, [5], с. 199, и [10], с. 176, соответственно.

Для дальнейших рассуждений используем следующий аналог теоремы А. Данжуа, см., например, теорему 2.9.13 в [10], сравни теорему IV(10.6) в [5].

Предложение 1. Функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ измерима относительно логарифмической ёмкости тогда и только тогда, когда она аппроксимативно непрерывна для п.в. $x \in (a, b)$ также относительно логарифмической ёмкости.

Замечание 2. Как известно, $C([a, b]) \simeq 1/(\log \frac{1}{\delta})$ при $\delta = b - a \rightarrow 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$ такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [11], с. 131. Кроме того, $C(E) \geq A/\log(1/|E|)$ при малых длинах $|E|$, см., например, лемму 1 в [12]. Таким образом, если x_0 является точкой плотности для множества E относительно логарифмической ёмкости, то x_0 – также точка плотности для множества E относительно меры длины. Следовательно, любая точка аппроксимативной непрерывности функции $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ относительно логарифмической ёмкости, является также точкой аппроксимативной непрерывности функции φ относительно меры Лебега на вещественной оси.

Отсюда, в частности, получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1. Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ – её неопределенный интеграл Лебега. Тогда $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Действительно, пусть $x_0 \in (a, b)$ – точка аппроксимативной непрерывности для функции φ . Тогда найдется множество $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности, и на котором функция φ непрерывна. Так как $|\varphi(x)| \leq C < \infty$ для всех $x \in [a, b]$, получаем, что при малых h

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| \leq \max_{x \in E \cap [x_0, x_0 + h]} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + 2C \frac{|(x_0, x_0 + h) \setminus E|}{|h|},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Таким образом, заключение леммы следует из предложения 1, см. также замечание 2. $\square$

3. Об одном аналоге теоремы Лузина. При доказательстве аналога теоремы Лузина в терминах логарифмической ёмкости ключевую роль будет играть следующая лемма о сингулярных функциях канторовского типа.

Лемма 2. *Существует непрерывная неубывающая функция $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ и $\Psi'(t) = 0$ п.в. относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Для доказательства этого факта воспользуемся конструкцией множеств канторовского типа логарифмической ёмкости нуль, принадлежащей Рольфу Неванлинне. Именно, рассмотрим произвольную последовательность чисел $p_k > 1$, $k = 1, 2, \dots$, и определим соответствующую последовательность множеств $E(p_1, \dots, p_n)$, $n = 1, 2, \dots$, по индукции следующим образом. Пусть $E(p_1)$ – множество, состоящее из 2-х равных по длине отрезков, которое получается из единичного отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием центрального интервала длины $1 - 1/p_1$; $E(p_1, p_2)$ – множество, состоящее из 2^{-x} равных по длине отрезков, которое получается выбрасыванием из каждого отрезка предыдущего множества $E(p_1)$ центрального интервала, который составляет $1 - 1/p_2$ долю от его длины и так далее. Обозначим через $E(p_1, p_2, \dots)$ пересечение всех множеств $E(p_1, \dots, p_n)$, $n = 1, 2, \dots$. По теореме V.6.3 в [8] множество $E(p_1, p_2, \dots)$ имеет логарифмическую ёмкость нуль тогда и только тогда, когда ряд $\sum 2^{-k} \log p_k$ расходится. Например, это условие выполняется, если $p_k = e^{2^k}$.

Как известно, все множества канторовского типа гомеоморфны. Более того, найдется гомеоморфизм $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, при котором $E(p_1, p_2, \dots)$ перейдёт в классическое канторово множество, см., например, конструкцию 8.23 в [13]. Таким образом, если κ – классическая канторова функция, см., например, конструкцию 8.15 в [13], то $\Psi = \kappa \circ h$ – искомая функция. $\square$

Лемма 3. *Пусть функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $|G(x)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$, $G(a) = G(b) = 0$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Пусть $H(x) = \int_a^x g(t) dt$ – неопределенный интеграл Лебега функции g . Выберем на $[a, b]$ конечный набор точек $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ таких, что колебание H меньше $\varepsilon/2$ на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Применяя линейные преобразования независимой и зависимой переменной в функции $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ из леммы 2, получаем на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, функцию F_k , которая имеет нулевую производную п.в. относительно логарифмической ёмкости и совпадает с функцией H в концах отрезка. Пусть F – функция на $[a, b]$, склеенная из функций F_k . Тогда $G = H - F$ даёт нам искомую функцию по леммам 1 и 2. $\square$

Лемма 4. *Пусть функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть P – замкнутое подмножество отрезка $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$|G(x+h)| \leq \varepsilon|h|$ для всех $x \in P$ и всех h таких, что $x+h \in [a, b]$, $G(x) = G'(x) = 0$ для всех $x \in P$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a, b] \setminus P$ относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Пусть $I = (a, b)$. Тогда множество $I \setminus P$ является открытым и представимо в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся интервалов $I_k = (a_k, b_k)$. Выберем в каждом интервале I_k возрастающую последовательность чисел $c_k^{(j)}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ такую, что $c_k^{(j)} \rightarrow a_k$ при $j \rightarrow -\infty$ и $c_k^{(j)} \rightarrow b_k$ при $j \rightarrow \infty$. Обозначим через $\varepsilon_k^{(j)}$ меньшее из 2-х чисел $\varepsilon(c_k^{(j)} - a_k)/(k + |j|)$ и $\varepsilon(b_k - c_k^{(j)})/(k + |j|)$. Тогда по лемме 3 в каждом интервале I_k найдется непрерывная функция G_k такая, что $|G(x)| \leq \varepsilon_k^{(j)}$ для всех $x \in [c_k^{(j)}, c_k^{(j+1)}]$, $G(c_k^{(j)}) = 0$ для всех $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $G'(x) = g(x)$ п.в. на I_k относительно логарифмической ёмкости. Таким образом, полагая $G(x) = G_k(x)$ на каждом интервале I_k и $G(x) = 0$ на множестве P , получаем искомую функцию. $\square$

Наконец, докажем следующий аналог теоремы Лузина, сформулированной во введении.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется непрерывная функция $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) также относительно логарифмической ёмкости. Более того, функцию Φ можно выбрать так, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ и $|\Phi(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Определим по индукции последовательность замкнутых множеств $P_n \subseteq [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$ и последовательность непрерывных функций $G_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$, чьи производные существуют п.в. и измеримы относительно логарифмической ёмкости, такие, что при обозначениях $Q_n = \bigcup_{k=0}^n P_k$ и $\Phi_n = \sum_{k=0}^n G_k$ выполняются следующие условия: (a) $\Phi'_n(x) = \varphi(x)$ при $x \in Q_n$, (b) $G_n(x) = 0$ при $x \in Q_{n-1}$, (c) $|G_n(x+h)| \leq |h|/2^n$ для всех $x \in Q_{n-1}$ и всех h таких, что $x+h \in [a, b]$, (d) $C(I \setminus Q_n) < 1/n$, где $I = [a, b]$.

Итак, пусть $G_0 \equiv 0$ и $P_0 = \emptyset$ и пусть G_n и P_n с указанными свойствами уже построены для всех $n = 1, 2, \dots, m$. Тогда найдется компакт $E_m \subset I \setminus Q_m$ такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup E_m)) < 1/(m+1), \quad (13)$$

а функции Φ'_m и φ непрерывны на E_m , см., например, теорему 2.3.5 в [10].

По лемме 4 с множеством $P = Q_m$ и функцией $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, равной $\varphi(x) - \Phi'_m(x)$ на E_m и нулю на $I \setminus E_m$, найдется непрерывная функция $G_{m+1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что (i) $G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x)$ п.в. на $I \setminus Q_m$ относительно логарифмической ёмкости, (ii) $G_{m+1}(x) = G'_{m+1}(x) = 0$ для всех $x \in Q_m$, и (iii) $|G_{m+1}(x+h)| \leq |h|/2^{m+1}$ для всех $x \in Q_m$ и всех h таких, что $x+h \in I$.

По определению логарифмической ёмкости, условиям (i) и (13), найдется компакт $P_{m+1} \subseteq E_m$, такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup P_{m+1})) < 1/(m+1), \quad (14)$$

$$G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x) \quad \forall x \in P_{m+1}. \quad (15)$$

Как видно из (14) и (15), а также (ii) и (iii), условия (a), (b), (c) и (d) сохраняются и для $n = m + 1$.

Положим теперь на основе приведённой конструкции последовательностей G_n и P_n :

$$\Phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x), \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k. \quad (16)$$

Заметим, что $\Phi_k \rightarrow \Phi$ равномерно на отрезке I ввиду условия (c) и, следовательно, функция Φ является непрерывной. По построению, для любого $x_0 \in Q$ имеем, что $x_0 \in Q_n$ при всех достаточно больших n и, т.к.

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\Phi_n(x_0 + h) - \Phi_n(x_0)}{h} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k(x_0 + h) - G_k(x_0)}{h},$$

мы получаем из условий (a), (b) и (c), что

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| < \frac{1}{2^n},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Кроме того, по условию (d) видим, что $C(I \setminus Q) = 0$. Таким образом, $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.

Наконец, применяя конструкцию доказательства леммы 3 к найденной нами функции Φ вместо неопределённого интеграла, находим новую функцию Φ_* такую, что $\Phi'_*(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ также относительно логарифмической ёмкости с $\Phi_*(a) = \Phi_*(b) = 0$ и $|\Phi_*(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$. $\square$

4. О задаче Дирихле для гармонических функций в единичном круге.

Центральным результатом работы является следующий аналог теоремы Геринга.

Теорема 2. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция, которая измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция $u(z)$, $z \in \mathbb{D}$ такая, что $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей для всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль.

Доказательство. По теореме 1 найдется непрерывная 2π -периодическая функция $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\Phi'(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости. Пусть

$$U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - t) + r^2} \Phi(t) dt \quad (17)$$

для $r < 1$. Далее, по хорошо известному результату, восходящему к Фату, $\frac{\partial}{\partial \vartheta} U(z) \rightarrow \Phi'(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей всюду, где существует $\Phi'(\vartheta)$,

см., например, 3.441 в [14], с. 53, см. также теорему IX.1.2 в [15]. Следовательно, заключение следует для функции $u(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U(z)$. $\square$

Следствие 1. При условиях теоремы 2, существует аналитическая функция f в $\mathbb{D}$, такая, что $\operatorname{Re} f(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости.

Заметим, что наши результаты можно распространить на случай квазидисков (областей, ограниченных квазиконформными кривыми) и, в частности, на области с гладкими границами. Отметим также, что полученные результаты могут быть использованы для решения другой известной задачи Римана–Гильберта для аналитических функций через редукцию последней задачи к решению соответствующих двух задач Дирихле. Наконец, разработанные нами методы позволяют распространить эти результаты на соответствующие задачи для уравнений Бельтрами.

1. Векун И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Гурвиц А. Курант Р. Теория функций. – Москва: Наука, 1968.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . – М.: Мир, 1984.
4. Gehring F.W. On the Dirichlet problem // Michigan Math. J. – 1955–1956. – 3. – Р. 201.
5. Сакс С. Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
6. Носиро К. Предельные множества. – М.: ИЛ, 1963.
7. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. – М.: Мир, 1971.
8. Неванlinna Р. Однозначные аналитические функции. – ОГИЗ, Москва, 1941.
9. Fékete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – 17. – Р. 228–249.
10. Федерер Г. Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
11. Adams D.R., Hedberg L.I. Function spaces and potential theory. – Springer–Verlag, Berlin, 1996.
12. Twomey J.B. The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – 58. – Р. 81–91.
13. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: НКТП, 1939.
15. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

A. S. Yefimushkin, V. I. Ryazanov

On some analogs of theorems of Lusin and Gehring.

It is proved the analog of Lusin's theorem that each function on a segment which is measurable with respect to logarithmic capacity coincides almost everywhere with the derivative of a continuous function. On this basis, it is established the analog of Gehring's theorem on solvability of the Dirichlet problem for harmonic functions on the unit disk with arbitrary boundary data which are measurable with respect to logarithmic capacity. The latter implies also the corresponding solvability of the Dirichlet problem for analytic functions.

Keywords: harmonic and analytic functions, Dirichlet problem, Lusin's theorem, Gehring's theorem, logarithmic capacity.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
art.89@bk.ru
vl.ryazanov1@gmail.com

Получено 17.06.14