УДК 517.97

А. А. Панков

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ ПУАНКАРЕ

Рассматривается уравнение $-\Delta_p u + mu = f(u)$, где Δ_p — инвариантный оператор Лапласа — Бельтрами в шаре Пуанкаре, $f(0) = 0$. Установлены теоремы существования нетривиальных решений с конечным действием.

1. Пусть $\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_n(-1)$ — гиперболическое пространство с кривизной -1. В стандартной реализации это единичный шар в $\mathbf{R}^n$ с метрикой $ds^2 = 4(1-r^2)^{-2}\Sigma dx_i^2$, где $r^2 = |x|^2 = \Sigma x_i^2$; x_i — евклидовы координаты в $\mathbf{R}^n$. В $\mathbf{H}_n$ рассмотрим уравнение

$$-\Delta_p u + mu = f(u), \tag{1}$$

где

$$\Delta_p u = \frac{1}{4}(1-r^2)^n \Sigma \partial_i [(1-r^2)^{2-n} \partial_i u] \tag{2}$$

инвариантный оператор Лапласа — Бельтрами. Изучаются решения, исчезающие на «бесконечности», точнее лежащие в инвариантном пространстве Соболева H^1 (H). Последнее определяется как пополнение C_0^∞ (H_n) по норме

$$\|u\|^2 = \int (1-r^2)^{2-n} |\nabla u|^2 dx + \int (1-r^2)^{-u} u^2 dx. \qquad (3)$$

Оно совпадает с пространством функции из L^2 (H_n) (по инвариантной мере), имеющих конечную норму (3). Этот факт вытекает из общих результатов [1] (кроме того, в данном случае он легко проверяется непосредственно). Отметим, что $H^1(\mathrm{H}_2) = H_0^1(\Omega_2)$, где $\Omega_2 \subset \mathrm{R}^2$ — единичный диск с евклидовой метрикой.

С уравнением (1) связан функционал действия

$$S(u) = 2^{n-3} \int (1-r^2)^{2-n} |\nabla u|^2 dx - 2^n \int (1-r^2)^{-n} \left[F(u) - \frac{m}{2} u^2\right] dx, \qquad (4)$$

где

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

2. Предполагается, что $f \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ нечетна и выполняются следующие условия:

$$m > -\frac{(n-1)^2}{4}, \quad f(0) = f'(0) = 0; \qquad (5)$$

$$|f(s)| \leqslant c(1+|s|^p), \quad c > 0, \quad 1 < p < \frac{n+2}{n-2}; \qquad (6)$$

$$0 \leqslant s^{-1} f(s) \leqslant \theta \cdot f'(s), \quad \theta \in (0, 1) \qquad (7)$$

(при $n = 2$ в (6) подразумевается произвольное $p > 1$). Отметим, что константа $(n-1)^2/4$ является нижней границей спектра оператора $-\Delta_p$ в $L^2(H_n)$.

В сделанных предположениях действие S является функционалом класса C^1 на $H^1(\mathrm{H}_n)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5)—(7). Тогда имеется положительное основное состояние, т. е. такое нетривиальное решение $u \in H^1(\mathrm{H}_n)$ уравнения (1), что $S(u) \leqslant S(v)$ для любого решения $v \in H^1(\mathrm{H}_n)$, $v \neq 0$, этого уравнения. Кроме того, $u \in C^2(\mathrm{H}_n)$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого целого $k \geqslant 0$ существует решение $u_k \in H^1(\mathbf{H}_n)$, $u_k = u_k(r)$ $(0 \leqslant r < 1)$, имеющее ровно k нулей на интервале $(0, 1)$. При этом $u_k \in C^2(\mathrm{H}_n)$ и $S(u_k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пример 1. Все сделанные предположения выполнены для $f(s) = a \cdot |s|^{p-1} \cdot s$, где $a > 0$, $1 < p < (n+2)/(n-2)$.

Замечание. По-видимому, решение u, вытекающее из теоремы 1, является сферически симметричной, монотонно убывающей по r функцией. Этот вопрос тесно связан со следующим. Для функции v на H_n определяется симметризация Шварца v^* как положительная сферически симметричная, монотонно убывающая по r функция, равноизмеримая с v относительно инвариантной меры. Верно ли, что $D(v^*) \leqslant D(v)$, где

$$D(v) = 2^{n-3} \int (1-r^2)^{2-n} |\nabla v|^2 dx$$

— инвариантный интеграл Дирихле?

В доказательстве теорем 1 и 2 используется вариационный принцип, восходящий к Нехари [2] (см. также [3, 4]). Пусть

$$\mathcal{F}(u) = 2^{n-2} \int (1-r^2)^{2-n} |\nabla u|^2 dx - 2^n \int (1-r^2)^{-n} [f(u) \cdot u - mu^2]\, dx$$

и $\mathcal{M} = \{v \in H^1(H_n) \mid \mathcal{F}(v) = 0,\ v \not\equiv 0\}$. Для построения основного состояния используется экстремальная задача

$$\lambda = \inf\{S(u) \mid u \in \mathcal{M}\} \tag{8}$$

(отметим, что для любого решения (1) $\mathcal{F}(u) = 0$). Нижняя грань здесь конечна. Пусть $\{v_j\} \subset \mathcal{M}$ — минимизирующая последовательность. Поскольку S и $\mathcal{F}$ не меняются при переходе от u к $|u|$, то можно считать, что $v_j \geqslant 0$. Нетрудно показать, что последовательность $\{v_j\}$ ограничена в $H^1(H_n)$ и, следовательно, слабо компактна. С использованием подходящего неевклидова варианта принципа концентрированной компактности, предложенного в [4], устанавливается, что $\{v_j\}$ компактна в $H^1(H_n)$ с точностью до движений H_n, т. е. для некоторых движений T_j последовательность $\{v_j \circ T_j\}$ компактна. Ее предельная точка дает решение u задачи (8). Соответствующий множитель Лагранжа оказывается равным нулю, тем самым u будет требуемым решением. Отметим, что если ответ на вопрос, сформулированный в замечании выше, положителен, то функции v_j могут быть выбраны сферически симметричными, монотонно убывающими по r. Тогда таким же способом обладает u.

Аналогично с заменой $\mathcal{M}$ его подмножеством $\mathcal{M}_0$, состоящим из сферически симметричных функций, строится решение u_0 в теореме 2. Для доказательства компактности минимизирующей последовательности в этом случае используются следующие элементарные оценки сферически симметричных функций из $H^1(H_n)$:

$$|u(r)| \leqslant C_{n,r_0}(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}\|u\|, \quad r_0 \leqslant r < 1, \quad n \geqslant 3,$$

$$|u(r)| \leqslant C_{2,r_0}(1-r^2)^{1/2}\|u\|, \quad r_0 \leqslant r < 1, \quad n = 2.$$

Для построения u_k рассматривается экстремальная задача

$$\lambda_k = \inf\{S(u) \mid u \in \mathcal{M}_k\}, \tag{9_k}$$

где $\mathcal{M}_k$ состоит из радиальных функций класса $H^1(H_n)$, лежащих в $\mathcal{M}$ и имеющих ровно k нулей. Фиксируем числа $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_k < r_{k+1} = 1$. Пусть $v_k = v_k(r; r_1, \ldots, r_k) \in H^1(H_n)$ — такая функция, что $v_k|_{\{r_j<r<r_{j+1}\}}$ является решением экстремальной задачи, аналогичной (9_k), в области $\{r_j < r < r_{j+1}\}$ ($\{r < r_1\}$ при $j = 0$) с нулевыми граничными условиями, и v_k меняет знак в точках r_j, $j = 1, \ldots, k$. Соответствующие экстремальные задачи разрешимы и такая функция v_k существует. Функция $\tilde{\lambda}_k(r_1, \ldots, r_k) = S(v_k)$ непрерывна на симплексе $\{(r_1, \ldots, r_k) \mid 0 < r_1 < \ldots < r_k < 1\}$ и $\tilde{\lambda}_k \to \infty$ на его границе. Поэтому $\tilde{\lambda}_k$ достигает минимума в точке $(r_1^0, \ldots, r_k^0)$. Оказывается, что $\tilde{\lambda}_k(r_1^0, \ldots, r_k^0) = \lambda_k$ и $u_k(\cdot) = v_k(\cdot; r_1^0, \ldots, r_k^0)$ — решение уравнения (1) (последнее нуждается в проверке лишь в точках r_j).

3. Заменим теперь условие (7) более слабым: для некоторого $\theta \in (0, 1/2)$

$$F(t) \leqslant \theta t f(t). \tag{10}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5), (6) и (10). Тогда уравнение (1) имеет нетривиальное положительное решение в $H^1(H_n) \cap C^2(H_n)$. Это решение сферически симметрично и является монотонно убывающей функцией от r.

Пример 2. $f(s) = a|s|^{p-1} \cdot s - b|s|^{q-1}s$, где $a > 0$, $b > 0$ и $1 < q < p < (n+2)/(n-2)$, удовлетворяет условиям теоремы.

Замечание. Остается неясным, будет ли решение, построенное в теореме 3, минимизировать действие на множестве всех нетривиальных решений. Неясно также, имеются ли в этих условиях решения со сколь угодно большим действием.

Для доказательства теоремы 3 рассматривается шар B^{-1} радиуса $1 - k^{-1}$. С помощью леммы о перевале [5] устанавливается наличие критической точки $v_k > 0$ функционала S в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1_0(B_k)$ с нормой (3). Слабая предельная точка u последовательности $\{v_k\}$ является решением (1). Используя неевклидов вариант метода движущейся плоскости (ср. с плоским случаем [6]), можно показать, что v_k сферически симметричны и монотонно убывают по r. Отсюда выводится, что $u > 0$.

4. Представляет интерес поведение решений уравнения (1) на бесконечности. Его удобнее оценивать в терминах геодезического расстояния $\rho = \ln[(1+r)/(1-r)]$.

Предложение 4. Пусть u — решение, построенное в теоремах 2 или 3 (при $n = 2$ дополнительно предполагается, что $m > 0$). Тогда существуют такие константы $C > 0$ и $\delta > 0$, что

$$|u(\rho)| + |u_\rho(\rho)| + |u_{\rho\rho}(\rho)| \leqslant C e^{-(n-1)\rho} e^{-\delta\rho}.$$

Здесь можно взять $\delta = \frac{1}{2}[(n-1)(n-2)+m]^{1/2} - \varepsilon$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$. В частности, $\delta \geqslant \frac{1}{4}[(n-1)(3n-7)]^{1/2}$ при $n \geqslant 3$. Что касается случая $n = 2$, $-1/4 < m \leqslant 0$, то из включения $u \in H^1(\mathrm{H}_2)$ вытекает, что решение ведет себя на бесконечности как $\exp(-\rho/2)$. Более точные оценки в этом случае не известны.

5. Уравнения рассматриваемого вида (и более общие) в R^n изучались многими авторами (см., например, [3, 4, 7—9]), полученные в этом случае результаты о существовании нетривиальных решений близки к оптимальным (здесь, конечно, $m > 0$). Например, для уравнения $-\Delta u + mu = f(u)$, где f определено в примере 2, имеются положительное радиальное решение, являющееся основным состоянием, а также решения со сколь угодно большим действием. Более того, для нелинейности такого вида аналогичные результаты справедливы (при естественных дополнительных условиях) и при $q > p$ [7]. Подобные результаты в случае H_n автору не известны.

Имеется еще один вопрос, связанный с ролью нижней границы спектра. Известно [10], что уравнение $-\Delta u = u^p$ в R^n при $1 \leqslant p < (n+2)/(n-2)$, $n \geqslant 3$, не имеет решений $u > 0$. Верно ли подобное утверждение для уравнения

$$-\Delta_p u - \frac{(n-1)^2}{4} u = u^p$$

в $\mathbf{H}_n$, остается неясным.

Отметим также работы [11, 12], в которых изучаются полулинейные уравнения в H_n с другими типами нелинейностей, связанные с конформными деформациями римановых метрик и мультимеронными решениями в калибровочных моделях.

1. *Cantor M.* Sobolev inequalities for Riemannian bundles // Proc. Symp. Pure Math.— 1973.— 27, pt 2.— P. 171—184.
2. *Nehari Z.* Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations // Acta Math.— 1961.— 105, N 3/4.— P. 141—175.
3. *Coffman Ch. V.* Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions // Arch. Rat. Mach. Anal.— 1972.— 46, N 2.— P. 81—95.
4. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II // Ann. Inst. H. Poincare, Anal. non lineaire.— 1984.— 1, N 4.— P. 223—283.
5. *Ambrosetti A., Rabinowitz P.* Dual variational methods in critical point theory and applications // J. Funct. Anal.— 1973.— 14, N 4.— P. 349—381.
6. *Gidas B., Ni W.-M., Nirenberg L.* Symmetry and related properties via the maximum principle // Communs Math. Phys.— 1979.— 68.— P. 209—243.
7. *Berestycki H., Lions P.-L.* Nonlinear scalar field equations // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1983.— 82, N 4.— P. 313—375.
8. *Berestycki H., Lions P.-L.* Une methode locale pour l'existence de solutions positives de problemes semi-lineaires elliptiques dans R^N // J. Anal. Math.— 1980.— 38.— P. 144—187.

9. *Ding W.-Y., Ni W.-M.* On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1986.— **91**, N 4.— P. 283—308.
10. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations // Communs Pure and Appl. Math.— 1981.— **34**.— P. 525—598.
11. *Aviles P., Mc Owen R.* Conformal deformations of complete manifolds with negative curvature // J. Different Geom.— 1985.— **21**, N 2.— P. 269—281.
12. *Mamman C., Zirilli F.* On some nonlinear boundary value problem on the Poincare disk with discontinuous data. I // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl.— 1986.— **10**, N 6.— P. 515—524.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 29.09.87