УДК 531.38; 531.39

©2018. **А.В. Мазнев, Т.В. Белоконь**

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ Д. ГРИОЛИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО МОДУЛЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Рассмотрено движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, описываемое уравнениями Д. Гриоли. Решена обратная задача об условиях существования трех нелинейных инвариантных соотношений данных уравнений. Исследованы свойства полученных решений в случае постоянного модуля момента количества движения тела.

Ключевые слова: *уравнения Гриоли, инвариантные соотношения, момент количества движения.*

Введение. Уравнения Д. Гриоли [1] задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, являются наиболее общими уравнениями движения тела под действием потенциальных и гироскопических сил, которые допускают три первых интеграла (геометрический интеграл, интеграл площадей, интеграл энергии). Когда отсутствуют гироскопические силы, из этих уравнений следуют уравнения Д.Н. Горячева [2]. Частными видами уравнений Д. Гриоли служат уравнения М.П. Харламова [3] и уравнения Х.М. Яхьи [4]. В статье [5] доказана эквивалентность уравнений Д. Гриоли и Х.М. Яхьи. В ней был использован подход, принятый в монографии [6, с. 69].

В обзорной статье П.В. Харламова [7] было отмечено, что метод инвариантных соотношений (ИС) [8, 9] является наиболее эффективным методом построения новых решений уравнений динамики твердого тела, на его основе построены многочисленные классы решений в замкнутом виде [10, 11]. При задании ИС целесообразно учитывать не только аналитическую структуру ИС, но и механическую интерпретацию соответствующих движений тела.

Статья посвящена изучению решений уравнений Д. Гриоли в случае постоянства модуля момента движения тела [12]. Ранее такие решения изучались в [13] в предположении, что на тело действуют только потенциальные силы. Предлагаемый в данной статье подход [6, с. 69] основан на задании трех нелинейных инвариантных соотношений на основные переменные задачи. Используя метод решения обратных задач механики [14], получено разрешающее уравнение на одну характерную функцию, входящую в исходные ИС. Получены новые решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения Д. Гриоли [1] в скалярной форме, полагая $\mu(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) = 0$:

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_1\omega_2 + \omega_3\frac{\partial L}{\partial \nu_2} - \omega_2\frac{\partial L}{\partial \nu_3} + \nu_3\frac{\partial U}{\partial \nu_2} - \nu_2\frac{\partial U}{\partial \nu_3}, \qquad (1)$$

$$A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \omega_1\frac{\partial L}{\partial \nu_3} - \omega_3\frac{\partial L}{\partial \nu_1} + \nu_1\frac{\partial U}{\partial \nu_3} - \nu_3\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \tag{2}$$

$$A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2\frac{\partial L}{\partial \nu_1} - \omega_1\frac{\partial L}{\partial \nu_2} + \nu_2\frac{\partial U}{\partial \nu_2} - \nu_1\frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \tag{4}$$

Первые интегралы уравнений (1) – (4) таковы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \qquad A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 + L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k, \tag{5}$$

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E. \tag{6}$$

В формулах (1) – (6) введены обозначения: ω_i $(i = \overline{1,3})$ – компоненты вектора угловой скорости; ν_i $(i = \overline{1,3})$ – компоненты единичного вектора оси симметрии силовых полей; A_i $(i = \overline{1,3})$ – главные моменты инерции; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – потенциальная функция; $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – функция, обусловленная гироскопическими силами; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t; k и E – произвольные постоянные.

Следуя [13], зададим для уравнений (1) – (4) три ИС

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3), \qquad \omega_2 = \nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3), \qquad \omega_3 = h(\nu_3), \tag{7}$$

где β_1, β_2 – постоянные параметры; $\varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), h(\nu_3)$ – дифференцируемые функции. Уравнения Пуассона (4) на ИС (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2\big(h(\nu_3) - \nu_3\varepsilon(\nu_3)\big) - \beta_2\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= -\nu_1\big(h(\nu_3) - \nu_3\varepsilon(\nu_3)\big) + \beta_1\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) \end{aligned} \tag{8}$$

и интегрируются при соответствующей конкретизации функций $\varepsilon(\nu_3), g(\nu_3)$, $h(\nu_3)$ в квадратурах. Действительно, из системы (8) следует интегральное соотношение

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = c_0 + F(\nu_3). \tag{9}$$

Здесь c_0 – произвольная постоянная, а функция $F(\nu_3)$ такова

$$F(\nu_3) = \int \frac{\nu_3\varepsilon(\nu_3) - h(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3. \tag{10}$$

Полагаем, что $F(\nu_3)$ вычисляется в конечном виде в классе определенных функций $\varepsilon(\nu_3), g(\nu_3)$, $h(\nu_3)$. Это позволяет проинтегрировать систему (8). Структура геометрического интеграла из (5) позволяет ввести замену переменных

$$\nu_1 = \sqrt{1 - \nu_3^2}\sin\varphi, \qquad \nu_2 = \sqrt{1 - \nu_3^2}\cos\varphi, \tag{11}$$

где φ – вспомогательная переменная. Обозначим

$$\beta_1 = \varkappa_0 \cos\gamma_0, \quad \beta_2 = \varkappa_0 \sin\gamma_0 \qquad \big(\varkappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2, \ \ \mathrm{tg}\,\gamma_0 = \frac{\beta_2}{\beta_1}\big). \tag{12}$$

Тогда в силу (11), (12) равенство (9) и третье уравнение из (8) принимают вид

$$\sin(\varphi + \gamma_0) = \frac{c_0 + F(\nu_3)}{\varkappa_0\sqrt{1-\nu_3^2}}, \tag{13}$$

$$\dot{\nu}_3 = -g(\nu_3)\varkappa_0\sqrt{1-\nu_3^2}\cos(\varphi+\gamma_0). \tag{14}$$

Из (13), (14) следует, что $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{\varkappa_0^2(1-\nu_3^2) - (c_0 + F(\nu_3))^2}} = -(t - t_0). \tag{15}$$

В (12), (14) $\varkappa_0$, γ_0 – постоянные параметры. Подстановка функции $\nu_3(t)$ из (15) в (7), (11), (13) дает возможность определить все переменные задачи в зависимости от t.

2. Условия существования ИС (7) **уравнений** (1) – (4). Согласно методу решения обратных задач динамики твердого тела [14] и подходу исследования ИС для уравнений (1) – (4), принятому в [6], функции $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ определим из интегралов (5), (6) с учетом ИС (7):

$$\begin{gathered} L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k - A_1\nu_1\big(\nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3)\big) - A_2\nu_2\big(\nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3)\big) - \\ - A_3\nu_3 h(\nu_3), \\ 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = A_1\big(\nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3)\big)^2 + A_2\big(\nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3)\big)^2 + \\ + A_3 h^2(\nu_3) - 2E. \end{gathered} \tag{16}$$

В [6] показано, что ИС, в которых ν_1, ν_2, ν_3 удовлетворяют уравнениям Пуассона (4), при использовании функций $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из интегральных соотношений (5), (6) являются решениями уравнений (1) – (3) при выполнении условия

$$A_1(\omega_1)'_{\nu_1} + A_2(\omega_2)'_{\nu_2} + A_3(\omega_3)'_{\nu_3} = 0. \tag{17}$$

Подставим ω_i $(i = \overline{1,3})$ из (7) в равенство (17)

$$\varepsilon(\nu_3) = -\frac{A_3}{A_1 + A_2} h'(\nu_3). \tag{18}$$

Учтем в ИС (7) выражение для $\varepsilon(\nu_3)$ из (18):

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = -\frac{A_3}{A_1+A_2}h'(\nu_3)\nu_1 + \beta_1 g(\nu_3),\\
&\omega_2 = -\frac{A_3}{A_1+A_2}h'(\nu_3)\nu_2 + \beta_2 g(\nu_3),\\
&\omega_3 = h(\nu_3).
\end{aligned} \tag{19}$$

Запишем функцию (10) в силу (18)

$$F(\nu_3) = -\frac{1}{A_1+A_2}\int \frac{A_3\nu_3 h'(\nu_3) + (A_1+A_2)h(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3. \tag{20}$$

Таким образом, условием существования ИС (7) у уравнений (1)–(3) является уравнение (18). Для сведения задачи интегрирования уравнений (1)–(4) к квадратурам необходимо обратиться к формулам (15), (20).

Приведем примеры ИС (19). В первом примере положим

$$g(\nu_3) = g_1\nu_3 + g_0, \quad h(\nu_3) = h_1\nu_3 + h_0. \tag{21}$$

Тогда из условия (18) следует $\varepsilon(\nu_3) = -\dfrac{A_3}{A_1+A_2}h_1 = \varepsilon_0$. В этом случае ИС (19) таковы

$$\omega_1 = \varepsilon_0\nu_1 + \beta_1(g_1\nu_3 + g_0), \quad \omega_2 = \varepsilon_0\nu_2 + \beta_2(g_1\nu_3 + g_0), \quad \omega_3 = h_1\nu_3 + h_0. \tag{22}$$

ИС (22) являются линейными инвариантными соотношениями по переменным ν_i. Функции (16) на ИС (22) являются многочленами второго порядка по ν_1, ν_2, ν_3. В этом случае из уравнений (1)–(4) следуют уравнения движения твердого тела в поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского, магнитного и электрического полей. Обзор результатов в этой задаче приведен в [15].

Отметим, что для сведения решения к квадратурам необходимо рассмотреть формулу (20) с учетом (21). Тогда

$$F(\nu_3) = \int \frac{n_0 + n_1\nu_3}{g_0 + g_1\nu_3}\, d\nu_3, \tag{23}$$

где

$$n_0 = -\frac{h_1(A_1+A_2+A_3)}{A_1+A_2}, \qquad n_1 = -h_0.$$

Проинтегрировав (23), получим следующую зависимость

$$F(\nu_3) = \frac{n_1}{g_1}\nu_3 + \frac{n_0 g_1 - g_0 n_1}{g_1^2}\ln\left|\nu_3 + \frac{g_0}{g_1}\right|. \tag{24}$$

При рассмотрении действительности функции $\nu_3(t)$ необходимо в формуле (15) учесть равенство (24). При выполнении условия

$$\Big(c_0 + \frac{n_0 g_1 - g_0 n_1}{g_1^2} \ln \Big|\frac{g_0}{g_1}\Big|\Big)^2 < \varkappa_0^2, \tag{25}$$

которого можно добиться выбором произвольной постоянной c_0, подкоренное выражение в (15) при $\nu_3 = 0$ положительно.

Рассмотрим второй пример. Пусть

$$g(\nu_3) = g_0, \qquad h(\nu_3) = h_0\nu_3^n + h_{n-1}\nu_3^{n-1} + \ldots + h_1\nu_3 + h_0. \tag{26}$$

Запишем функцию $\varepsilon(\nu_3)$ из (18) с учетом (26)

$$\varepsilon(\nu_3) = -\frac{A_3}{A_1 + A_2}\,(nh_0\nu_3^{n-1} + (n-1)h_{n-1}\nu_3^{n-2} + \ \ldots\ + h_1). \tag{27}$$

Из формулы (20) в силу (26), (27) получим

$$F(\nu_3) = -\frac{1}{g_0\mu_0}(f_{n+1}\nu_3^{n+1} + f_n n_3^n + \ldots + f_1\nu_3 + f_0). \tag{28}$$

где

$$\mu_0 = \frac{A_1 + A_2}{A_3}, \quad f_{n+1} = \frac{h_n(n+\mu_0)}{n+1}, \quad f_n = \frac{h_{n-1} + \mu_0}{n}, \ \ldots, f_1 = \mu_0 h_0. \tag{29}$$

Действительности функции $\nu_3(t)$ из формулы (15) можно добиться выбором параметров c_0 и $\varkappa_0$.

Третий пример характеризуется тем, что выполняется условие $F(\nu_3) = 0$, т. е.

$$\nu_3 h'(\nu_3) + \mu_0 h(\nu_3) = 0. \tag{30}$$

Из формулы (9) следует ИС

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = c_0. \tag{31}$$

Соотношение (31) можно записать в векторном виде

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu} = c_0 \quad \big(\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)\big). \tag{32}$$

Оно описывает прецессионное движение тела относительно вертикали [15] – движение, при котором постоянен угол между двумя прямыми, проходящими через неподвижную точку, одна из которых неизменно связана с телом, а вторая неподвижна в пространстве. Определим тип прецессии (32). Из уравнения (30) найдем $h(\nu_3)$:

$$h(\nu_3) = \lambda_0\nu_3^{-\mu_0}. \tag{33}$$

Тогда из (18) следует
$$\varepsilon(\nu_3) = \lambda_0 \nu_3^{-(\mu_0+1)}. \tag{34}$$
В равенствах (33), (34) λ_0 – произвольная постоянная.

Учтем в ИС (19) значение функции $h(\nu_3)$ из (33)
$$\omega_1 = \lambda_0 \nu_1 \nu_3^{-(\mu_0+1)} + \beta_1 g(\nu_3), \ \ \omega_2 = \lambda_0 \nu_2 \nu_3^{-(\mu_0+1)} + \beta_2 g(\nu_3), \ \ \omega_3 = \lambda_0 \nu_3^{-\mu_0}. \tag{35}$$
Отметим, что в соотношениях (35) $g(\nu_3)$ – произвольная дифференцируемая функция от ν_3. Запишем равенства (35) в векторном виде:
$$\boldsymbol{\omega} = \lambda_0 \nu_3^{-(\mu_0+1)} \boldsymbol{\nu} + g(\nu_3)\boldsymbol{\beta}. \tag{36}$$
Из формулы (36) следует, что прецессия тела, описываемая ИС (32), является прецессией общего вида [15]. Запишем силовую функцию $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и функцию $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на ИС (36) в векторном виде
$$\begin{aligned} L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \lambda_0 \nu_3^{-(\mu_0+1)} (A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + g(\nu_3)(\boldsymbol{\beta} \cdot A\boldsymbol{\nu}) - k, \\ U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \frac{1}{2}\Big[\lambda_0^2 \nu_3^{-2(\mu_0+1)} (A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2\lambda_0 g(\nu_3) \nu_3^{-(\mu_0+1)} (A\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \\ &\quad + g^2(\nu_3)(\boldsymbol{\beta} \cdot A\boldsymbol{\beta})\Big] - E. \end{aligned} \tag{37}$$
Из (37) следует, что функции $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ содержат сингулярные члены. Аналогичное свойство ранее отмечалось в монографии [16]. В ней приводятся примеры из квантовой физики, которые характеризуются свойством сингулярности силовой функции.

Для получения зависимостей всех переменных задачи от времени необходимо обратиться к формуле (15). На основании равенства $F(\nu_3) \equiv 0$ из (15) найдем
$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{\varkappa_0^2(1-\nu_3^2) - c_0^2}} = -(t - t_0). \tag{38}$$
Действительности квадратного корня в (38) можно добиться, положив $\varkappa_0^2 > c_0^2$. Построение решения уравнений (1) – (4) основано на использовании формул (11), (35), (38).

3. Случай постоянства модуля момента количества движения. Пусть наряду с ИС (7) задано дополнительное ИС
$$\mathbf{x}^2 = c^2 \quad (c^2 = \text{const}), \tag{39}$$
где $\mathbf{x} = (A_! \omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3)$ – момент количества движения тела. Запишем уравнения (1) – (3) в векторном виде
$$\overset{\bullet}{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times a\mathbf{x} + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}. \tag{40}$$

Здесь a – гирационный тензор с компонентами в главной системе координат: $\dfrac{1}{A_1}, \dfrac{1}{A_2}, \dfrac{1}{A_3}$. Умножим левую и правую части равенства (40) скалярно на $\mathbf{x}$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}^2)^{\bullet} = \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (a\mathbf{x} \times \mathbf{x}) + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{x}). \tag{41}$$

В силу ИС (39) из уравнения (41) следует равенство

$$\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (a\mathbf{x} \times \mathbf{x}) + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{x}) = 0. \tag{42}$$

Рассмотрим функции $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ из (16), (17) на ИС (19). Принимая условие $A_2 = A_1$ [13], имеем

$$L = \frac{A_1}{\mu_0}(\nu_1^2+\nu_2^2)h'(\nu_3) - A_1 g(\nu_3)(\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2) - A_3\nu_3 h(\nu_3) + k, \tag{43}$$

$$\begin{gathered} U = \frac{1}{2}\Big\{A_1\Big[\frac{1}{\mu_0^2}(h'(\nu_3))^2(\nu_1^2+\nu_2^2) - \frac{2}{\mu_0}h'(\nu_3)g((\nu_3)(\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2)+ \\ +\varkappa_0^2 g^2(\nu_3)\Big] + A_3 h^2(\nu_3)\Big\} - E. \end{gathered} \tag{44}$$

Преобразуем равенство (42) с учетом условия $A_2 = A_1$. Тогда

$$\begin{gathered} \omega_3(A_3 - A_1)\Big(\omega_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} - \omega_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2}\Big)+ \\ +A_1\nu_3\Big(\omega_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} - \omega_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1}\Big)+ \\ +A_3\omega_3\Big(\nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} - \nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2}\Big)+ \\ +A_1(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Как показано в монографии [6], выражение $\nu_1^2+\nu_2^2$ заменять выражением $1-\nu_3^2$ в функции (43) нельзя, а в функции (44) – можно. Поэтому в дальнейшем в (44) полагаем $\nu_1^2+\nu_2^2 = 1-\nu_3^2$. После формулы (42) уже $A_2 = A_1$. Для функции $\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2$ можно использовать равенство (9). При преобразовании (45) заметим, что выражение $\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2$ равно правой части третьего уравнения из системы (4). Кроме этого, для вычислений удобно использовать следующие равенства:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} = -A_1(2\omega_1 - \beta_1 g(\nu_3)), \\ \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} = -A_1(2\omega_2 - \beta_2 g(\nu_3)), \end{gathered} \tag{46}$$

$$\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} = -\frac{A_1}{\mu_0} h'(\nu_3)\omega_1, \qquad \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} = -\frac{A_1}{\mu_0} h'(\nu_3)\omega_2. \tag{47}$$

Учитывая, что $\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2 \neq 0$, подставим значения (46), (47), (19) в уравнение (45):

$$\frac{2A_3 - A_1}{\mu_0} h(\nu_3)h'(\nu_3) + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} = 0. \tag{48}$$

Уравнение (48) на основании (44) преобразуем к виду

$$\begin{gathered} \alpha_0(1+4\alpha_0)h(\nu_3)h'(\nu_3) + \alpha_0^2(1-\nu_3^2)h'(\nu_3)h''(\nu_3) - \\ -\alpha_0(c_0 + F(\nu_3))(h''(\nu_3)g(\nu_3) + h'(\nu_3)g'(\nu_3)) + \varkappa_0^2 g(\nu_3)g'(\nu_3) = 0, \end{gathered} \tag{49}$$

где $\alpha_0 = \dfrac{1}{\mu_0}$. Данное уравнение является производной по времени от инвариантного соотношения (39) на ИС (19).

Подставим $F(\nu_3)$ из (20) в уравнение (39) и с учетом (12) имеем

$$\begin{gathered} \alpha_0^2(1-\nu_3^2)h'^2(\nu_3) - 2\alpha_0 g(\nu_3)h'(\nu_3)\Big[c_0 - \int \frac{\alpha_0\nu_3 h'(\nu_3) + h(\nu_3)}{g(\nu_3)}\, d\,\nu_3\Big] + \\ +\varkappa_0^2 g^2(\nu_3) + 4\alpha_0^2 h^2(\nu_3) - c_*^2 = 0, \end{gathered} \tag{50}$$

где $c_*^2 = \dfrac{c_0^2}{A_1^2}$.

Рассмотрим случай $\alpha_0\nu_3 h'(\nu_3) + h(\nu_3) = 0$ – третий пример ИС из п. 2. Запишем решение этого уравнения:

$$h(\nu_3) = \sigma_0 \nu_3^{-\frac{1}{\alpha_0}} \quad (\sigma_0 = \mathrm{const}). \tag{51}$$

Подставим (51) в (50):

$$\varkappa_0^2 g^2(\nu_3) + 2\sigma_0\nu_3^{-\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0}} g(\nu_3) + \sigma_0^2\big[1 + (4\alpha_0^2 - 1)\nu_3^2\big]\nu_3^{-\frac{2(1+\alpha_0)}{\alpha_0}} - c_*^2 = 0. \tag{52}$$

Вычислим дискриминант уравнения (52), полагая, что оно является уравнением для определения функции $g(\nu_3)$:

$$D = 4\Big\{\sigma_0^2\nu_3^{-\frac{2(1+\alpha_0)}{\alpha_0}}\big[1 - \varkappa_0^2(1 + (4+\alpha_0^2 - 1)\nu_3^2)\big] + \varkappa_0^2 c_*^2\Big\}. \tag{53}$$

Действительности функции $g(\nu_3)$ из (52) и действительности функции $\nu_3(t)$ из (15) можно добиться выбором независимых параметров $c_*, \varkappa_0, \sigma_0$. Таким образом, ИС (35) в рассматриваемом варианте не изменяются, а решение исходных уравнений строится указанным выше способом (см. п. 2).

Перейдем к исследованию уравнения (50) в общем случае. Преобразуем его с помощью (49) к уравнению, которое не содержит интегрального выражения:

$$\begin{gathered} g(\nu_3)h''(\nu_3)\big[4\alpha_0^2h^2(\nu_3)-\alpha_0^2(1-\nu_3^2){h'}^2(\nu_3)-c_*^2+\varkappa_0^2g^2(\nu_3)\big]+\\ +\alpha_0^2(1-\nu_3^2)g'(\nu_3){h'}^3(\nu_3)-2\alpha_0(1+4\alpha_0)h(\nu_3)g(\nu_3){h'}^2(\nu_3)+\\ +g'(\nu_3)h'(\nu_3)[4\alpha_0^2h^2(\nu_3)-c_*^2-\varkappa_0^2g^2(\nu_3)]=0. \end{gathered} \tag{54}$$

При $g'(\nu_3)=g_0=\mathrm{const}$ уравнение (54) примет вид

$$\begin{gathered} h''(\nu_3)\big[4\alpha_0^2h^2(\nu_3)-\alpha_0^2(1-\nu_3^2){h'}^2(\nu_3)-c_*^2+\varkappa_0^2g^2(\nu_3)\big]-\\ -2\alpha_0(1+4\alpha_0)h(\nu_3){h'}^2(\nu_3)=0. \end{gathered} \tag{55}$$

Для приведения (55) к виду нормальной системы дифференциальных уравнений положим

$$h(\nu_3)=z_1(\nu_3),\qquad h'(\nu_3)=z_2(\nu_3). \tag{56}$$

Тогда в силу (55), (56) получим

$$z_1'(\nu_3)=z_2(\nu_3),\quad z_2'(\nu_3)=\frac{2\alpha_0(1+4\alpha_0)z_1(\nu_3)z_2^2(\nu_3)}{4\alpha_0^2z_1^2(\nu_3)-\alpha_0^2(1-\nu_3^2)z_2^2(\nu_3)+\varkappa_0^2g^2(\nu_3)-c_*^2}. \tag{57}$$

Система (57) представляет собой неавтономную систему дифференциальных уравнений первого порядка. Так как правые части в предположении

$$4\alpha_0^2z_1^2\big(\nu_3^{(0)}\big)-\alpha_0^2\big[1-(\nu_3^{(0)})^2\big]z_2^2(\nu_3^{(0)})+\varkappa_0^2g^2\big(\nu_3^{(0)}\big)-c_*^2\neq 0,$$

где $\nu_3^{(0)}\in[-1,\ 1]$, имеют в окрестности точки $\nu_3^{(0)}$ непрерывные производные по переменной ν_3, то система (57) имеет единственное решение [17]

$$z_1=z_1(\nu_3),\quad z_2=z_2(\nu_3)\ \text{ при }\ \nu_3\in\big(\nu_3^{(0)},\ \nu_3^{(0)}+\varepsilon\big),$$

где ε – малое число. При этом для данных значений ν_3 должно выполняться условие

$$\varkappa_0^2(1-\nu_3^2)-\Big[c_0-\alpha_0\nu_3z_1(\nu_3)+(1-\alpha_0)\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3^{(0)}+\varepsilon}z_1(\nu_3)d\nu_3\Big]^2>0, \tag{58}$$

которое обеспечивает существование функции $\nu_3(t)$, определяемой интегральным соотношением (15). Поскольку в систему (57) параметр c_0 не входит, то выбором этого параметра можно добиться выполнения условия (58).

Таким образом, приведены два случая ИС (7), которые характеризуются ИС (39), задающим постоянство модулю момента количества движения тела в потенциальном и гироскопическом полях сил.

Заключение. С помощью метода решения обратных задач механики получены условия существования трех нелинейных инвариантных соотношений уравнений движения твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Структура данных ИС выбрана таким образом, что уравнения Пуассона, кроме геометрического интеграла, допускают интегральное соотношение, зависящее от компоненты вектора оси симметрии силовых полей. Рассмотрены случаи, которые позволяют представить решения исходных уравнений посредством квадратур.

Полученные результаты применены к изучению дополнительного ИС, которое характеризует постоянство модуля момента количества движения твердого тела. Показана разрешимость редуцированного дифференциального уравнения для варианта прецессионных движений твердого тела.

1. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. – 1963. — 35, f. 1–2. – P. 35–39.
2. *Горячев Д.Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. – Варшава. – 1910. – 62 с.
3. *Харламов М.П.* Симметрия в системах с гироскопическими силами // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 86–93.
4. *Yehia H.M.* Equivalent mechanical systems with cyclic coordinates and new integrable problems // Intern. Journal of non-linear Mechanics. – 2001. – **36**. – P. 89–105.
5. *Горр Г.В.* Об одном классе решений уравнений динамики твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил // Прикл. математика и механика. – 2018. – **82**. – Вып. 5. – С. 547–558.
6. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). – М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2017. – 424 с.
7. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
8. *Леви-Чевита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2. ч. 2. – 555 с.
9. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
10. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. – 2012. – 401 с.
11. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка. – 2013. – 407 с.
12. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О решениях уравнений движения твердого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 21–32.
14. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой // Диф. уравнения. – 1972. – **8**, № 8. – С. 1357–1362.
15. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
16. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
17. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Изд-во: М.: Наука, 1974. – 331 с.

A.V. Maznev, T.V. Belokon

On solutions of Grioli's equations in the case of constant modulus of the angular momentum of a body with a fixed point

The motion of a rigid body with a fixed point, described by Grioli's equations, is considered. The inverse problem on the existence conditions for three nonlinear invariant relations of these equations is solved. Properties of the obtained solutions are studied in the case, when the angular momentum of the body is modulo constant.

Keywords: *Grioli's equations, invariant relation, angular momentum.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк Получено 12.09.18

aleksandr_maznev@rambler.ru