УДК 517.946

А. И. Прокопенко, И. В. Скрыпник

ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Получены поточечные оценки производных решения модельной задачи для линейного эллиптического уравнения произвольного порядка в области с цилиндрической полостью.

Изучение сходимости решений задачи Дирихле в последовательности областей с каналами основывается на точных априорных оценках некоторых модельных граничных задач. В работе [1] был развит метод получения поточечных оценок решений модельной граничной задачи для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в цилиндре. В данной работе получены оценки решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения произвольного порядка.

Пусть F — замкнутое множество, ограниченное поверхностью класса C^{2m} и содержащееся в цилиндре

$$Q = \{x \in R^n : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_d(0) \subset R^{n-1}, \ |x_n| < H\},$$

где $B_r(x_0)$ — шар радиуса r с центром в точке x_0, $d < \frac{1}{4}$, $H < \frac{1}{4}$, $d \leqslant H$. Обозначим $Q_1 = \{x \in R^n : |x'| < 1, \ |x_n| < 1\}$, и пусть Ω_0 — область с границей класса C^{2m}, содержащая Q_1.

Рассмотрим граничную задачу

$$Lv \equiv (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta v(x)) = 0, \quad x \in \Omega = \Omega_0 \setminus F, \tag{1}$$

$$D^\alpha (v(x) - 1)|_{S=\partial F} = 0, \ D^\alpha v(x)|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \tag{2}$$

предполагая выполнение условий:

a_1) коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ — вещественные функции класса $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}_0)$, $0 < \lambda < 1$, функции $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$;

a_2) существует положительная постоянная μ, такая, что для всех $x \in \Omega_0$ и любого вещественного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta \geqslant \mu \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^m, \ \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}. \tag{3}$$

Используя теорему Рисса, просто доказывается разрешимость задачи (1), (2) в $W_2^m(\Omega)$. В рассматриваемых условиях решение является классическим. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия a_1), a_2) и $v(x) \in W_2^m(\Omega)$ — решение задачи (1), (2). Существует положительная постоянная A, независящая от d, F, такая, что при $n > 2m+1$, $|x'| \geqslant 4d$ справедливы оценки

$$|D^\alpha v(x)| \leqslant A \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, \quad |\alpha| \leqslant 2m. \tag{4}$$

Для доказательства теоремы понадобится ряд вспомогательных утверждений. Введем необходимые обозначения. Пусть $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая в R' функция, равная единице при $t \leqslant 1$, нулю при $t \geqslant 2$, $\varphi_d(|x'|) = \varphi(|x'|/d)$; $f(t) \in C^\infty(R^1)$, равна единице при $|t| \leqslant 1/2$, нулю при $|t| \geqslant 1$.

Лемма 1. Для решения задачи (1), (2) при $|x'| \geqslant 4d$, $|x_n| < 1$ справедливо интегральное представление

$$v(x) = \int_\Omega v(y) \sum_{|\alpha|=0}^{2m-1} b_\alpha(y) D^\alpha G(x, y) D^{2m-\alpha} f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right) dy -$$
$$- \int_\Omega \sum_{|\gamma|=|\beta|=m} a_{\gamma\beta}(y) D^\beta v(y) D^\gamma \left[G(x, y) \varphi_d(|y'|) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] dy -$$
$$- \int_F L\left[G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] dy, \tag{5}$$

где $b_\alpha(y)$ — непрерывные функции, $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле в области Ω_0 для оператора L.

Доказательство леммы основано на формулах Грина.

$$\int_\Omega VLU\,dy = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(y) D^\beta u D^\alpha V\,dy + \int_{\partial\Omega} \sum_{|\gamma|\leqslant m-1} M^\gamma U D^\gamma V\,dS, \tag{6}$$

$$\int_\Omega (VLU - ULV)\,dy = \int_{\partial\Omega} \sum_{|\gamma|\leqslant m-1} (M^\gamma V D^\gamma U - M^\gamma U D^\gamma V)\,dS, \tag{7}$$

где M^γ — однородные дифференциальные операторы порядков $2m - 1 - |\gamma|$ с гладкими коэффициентами. Полагая в формуле (7) $V = G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)$, $U = v(y)$ — решение задачи (1), (2), получаем, учитывая свойства функции Грина, функций $f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)$, $v(y)$,

$$-v(x) f(0) + \int_\Omega v(y) \sum_{|\alpha|=0}^{2m-1} b_\alpha(y) D^\alpha G(x, y) D^{2m-|\alpha|} f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right) dy =$$
$$= \int_S \sum_{|\gamma|\leqslant m-1} M^\gamma v(y) D^\gamma \left[G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] d_y S -$$
$$- \int_S M^0 \left[G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] d_y S. \tag{8}$$

Пусть в формуле (6) $V = G(x, y) \varphi_d(|y'|) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)$, $U = v(y)$.

Тогда

$$- \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(y) D^\beta \left[G(x, y) \varphi_d(|y'|) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] D^\alpha v(y)\,dy =$$
$$= \int_S \sum_{|\gamma|\leqslant m-1} M^\gamma v(y) D^\gamma \left[G(x, y) \varphi_d(|y'|) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] d_y S. \tag{9}$$

Применим аналог формулы (6) в области F, внутренней по отношению к S, к функциям $U = G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)$, $V \equiv 1$. Имеем

$$\int_F L\left[G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] dy = \int_S M^0\left[G(x, y) f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] d_y S. \qquad (10)$$

Выражая первое слагаемое в правой части равенства (8) из равенства (9), второе слагаемое из (10), получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия a_1), a_2). Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от μ, n коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x)$ уравнения (1), такая, что для решения задачи (1), (2) выполнена оценка

$$\int_\Omega |D^m v(x)|^2 dx \leqslant CHd^{n-2m-1}, \quad n > 2m+1. \qquad (11)$$

Доказательство. В интегральное тождество, соответствующее задаче (1), (2), справедливое для любой функции $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta v(x) D^\beta \varphi(x)\, dx = 0, \qquad (12)$$

поставим $\varphi(x) = v(x) - \varphi_d(|x'|) f\left(\frac{Xn}{H}\right)$.

Используя условие эллиптичности, ограниченность коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x)$ и неравенство Юнга, получаем оценку (11):

$$\int_\Omega |D^m v(x)|^2 dx \leqslant C \int_\Omega \left| D^m \left(\varphi_d(|x'|) f\left(\frac{x_n}{H}\right)\right)\right|^2 dx \leqslant CHd^{n-2m-1}.$$

Лемма 3. Существует положительная постоянная A, зависящая от n, μ, коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x)$, такая, что при $n > 2m+1$, $|x'| \geqslant 4d$ для решения задачи (1), (2) справедливы оценки

$$|D^\alpha v(x)| \leqslant A\left(\frac{H}{|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, \quad |\alpha| \leqslant 2m. \qquad (13)$$

Доказательство. Из интегрального представления (5) в силу ограниченности коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x)$ по неравенству Коши — Буняковского при достаточно большом h имеем неравенство

$$|D^\alpha v(x)| \leqslant C\left\{\int_\Omega |D^m v(y)|^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_\Omega |D_y^m [D_x^\alpha G(x, y) \varphi_d(|y'|)]|^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (14)$$

Для оценки первого сомножителя в правой части (13) пользуемся леммой 2. Оценивая второй сомножитель, используем свойства функции Грина [3], функции $\varphi_d(|x'|)$.

$$\int_\Omega |D_y^m D_x^\alpha [G(x, y) \varphi_d(|y'|)] dy \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^m \frac{1}{d^{(m-k)2}} \int_{|y'|<2d} dy' \int_{-1}^1 \frac{dy_n}{|x-y|^{2(n-2m+|\alpha|+k)}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^m \frac{1}{d^{2(m-k)}} \int_{|y'|<2d} \frac{|y'|^{n-2} d|y'|}{|x'-y'|^{2(n-2m+|\alpha|+k)-1}}.$$

Очевидно, $|x'-y'| \geqslant |x'| - |y'| \geqslant |x'| - 2d$. Так как по условию $|x'| \geqslant 4d$, то $|x'-y'| \geqslant \frac{|x'|}{2}$. Тогда

$$\int_\Omega |D_y^m D_x^\alpha [G(x, y) \varphi_d(|y'|)]|^2 dy \leqslant C \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{2(n-2m+|\alpha|)-1}}. \qquad (15)$$

Объединяя оценки (14) — (15) и (11), получим неравенство (13). Дальнейшие рассуждения посвящены уточнению оценок (11) и (13).

Лемма 4. Пусть выполнены условия a_1), a_2), $n > 2m+1$, функция $v(x)$ — решение задачи (1), (2) и существуют такие постоянные K_1, K_2, K_3, что для некоторого h выполнены неравенства

$$I(h) = \int\limits_{\substack{|x'|<K_3h \\ |x_n|<h}} |D^m v(x)|^2 dx \leqslant K_1 h d^{n-2m-1}, \tag{16}$$

$$|D^\alpha v(x)| \leqslant \begin{cases} K_2\left(\dfrac{h}{|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, & 4d \leqslant |x'| \leqslant K_3 h, \\ K_2\left(\dfrac{2}{K_3}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, & K_3 h < |x'| \leqslant 1. \end{cases} \tag{17}$$

Тогда справедлива оценка

$$I\left(\frac{h}{2}\right) \leqslant K_1 \frac{h}{2} d^{n-2m-1}. \tag{18}$$

Доказательство. В интегральное тождество (12) подставим функцию $\varphi(x) = [v(x)\varphi_r^{2m}(|x'|) - \varphi_d^{2m}(|x'|)] f\left(\frac{x_n-\tau}{h}\right)$, $|\tau| \leqslant 1$, $\varphi_r(|x'|)$ — бесконечно дифференцируемая функция в R^{n-1}, равная единице при $|x'| \leqslant \frac{r}{2}$, нулю при $|x'| \geqslant r$, $|D^\alpha \varphi_r(|x'|)| \leqslant c r^{-|\alpha|}$. Используя условия a_1), a_2), свойства срезывающих функций $\varphi_d(|x'|)$, $\varphi_r(|x'|)$, $f\left(\frac{x_n-\tau}{h}\right)$, неравенство Юнга, получаем

$$\int\limits_\Omega |D^m v(x)|^2 \varphi_r^{2m}(|x'|) f^{2m}\left(\frac{x_n-\tau}{h}\right) dx \leqslant C_0 h d^{n-2m-1} +$$
$$+ C_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=1}^m |D^{m-\alpha} v(x)|^2 |D^{\alpha'}\varphi_r(|x'|)|^2 \left| D^{\alpha_n} f\left(\frac{x_n-\tau}{h}\right)\right|^2 dx. \tag{19}$$

При изучении второго слагаемого в правой части неравенства (19) нужно иметь интегральные оценки для производных $D^\alpha v(x)$ порядка $|\alpha| \leqslant m-1$. С помощью формулы Ньютона — Лейбшица, нетрудно получить неравенство [2]:

$$\int\limits_{\substack{|x'|<4d \\ |x_n|<h}} |D^\alpha v(x)|^2 dx \leqslant C \left\{ \sum_{k=0}^{m-|\alpha|-1} h d^{n-1-2k} \max_{\substack{|x'|=4d \\ |x_n|<h}} \left| \frac{\partial^k D^\alpha v(x)}{\partial x_1^k} \right|^2 + \right.$$
$$\left. + d^{2(m-k)} \int\limits_{\substack{|x'|<4d \\ |x_n|<h}} |D^m v(x)|^2 dx \right\}. \tag{20}$$

При дальнейшей оценке производных порядка $|\alpha| \leqslant m-1$ в первом слагаемом пользуемся неравенством (17), во втором — неравенством (16).

$$\int\limits_{\substack{|x'|<4d \\ |x_n|<h}} |D^\alpha v(x)|^2 dx \leqslant C\left(K_2^2 + K_1 \frac{d}{h}\right) h^2 d^{n-2m-2}. \tag{21}$$

Вернемся к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (19).

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=1}^m |D^{m-\alpha} v(x)|^2 |D^{\alpha'}\varphi_r(|x'|)|^2 \left| D^{\alpha_n} f\left(\frac{x_n-\tau}{h}\right)\right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant C \left\{ \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha_n=0}}^m r^{-2|\alpha|} \int\limits_{\substack{r/2<|x'|<r \\ |x_n|<h}} |D^{m-\alpha} v(x)|^2 dx + \right.$$
$$+ \sum_{|\alpha|=1}^m r^{-2|\alpha'|} h^{-2\alpha_n} \int\limits_{\substack{r/2<|x'|<r \\ h/2<|x_n|<h}} |D^{m-\alpha} v(x)|^2 dx +$$

$$+\sum_{|\alpha|=\alpha_n=1}^{m} h^{-2|\alpha|} \int\limits_{\substack{|x'|<r\\|x_n|<h}} |D^{m-\alpha} v(x)|^2\, dx\Big\} = J_1 + J_2 + J_3. \tag{22}$$

Оценим J_1 с помощью неравенств (17). Если $r = K_3 h$, то

$$J_1 \leqslant C_1 \frac{h}{2} d^{n-2m-1} K_2^2 \left(\frac{d}{r}\right)^{n-2m-1} \frac{h}{r} \leqslant \frac{h}{2} d^{n-2m-1} C_1 \frac{d}{h} \frac{K_2^2}{K_3^2}. \tag{23}$$

Здесь $\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2m-2} \leqslant 1$, так как $n-2m-2 \geqslant 0$. Аналогично оценим J_2:

$$J_2 \leqslant \frac{h}{2} d^{n-2m-1} C_2 K_2^2 \left(\frac{d}{r}\right)^{n-2m-1} \frac{r}{h} \leqslant \frac{h}{2} d^{n-2m-1} C_2 K_2^2 \frac{d}{h}. \tag{24}$$

Третье слагаемое разбиваем на сумму $J_3 = J_{3,1} + J_{3,2}$ так, что в $J_{3,1}$ интегрирование проходит по $D_1 = \{x \in \Omega : |x'| < 4d, |x_n| < h\}$, в $J_{3,2}$ интегрируем по области $D_2 = \{x \in \Omega : 4d < |x'| < K_3 h, |x_n| < h\}$. Оценивая $J_{3,1}$, пользуемся неравенством (21):

$$J_{3,1} \leqslant \frac{h}{2} d^{n-2m-1} \frac{d}{h} C_3 \left(K_2^2 + K_1 \frac{d}{h}\right). \tag{25}$$

В силу неравенств (17) получим

$$J_{3,2} \leqslant \frac{h}{2} d^{n-2m-1} C_4 K_2^2 \frac{d}{h}. \tag{26}$$

Пусть $\bar{C} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} C_i$. Выберем K_1, K_2, K_3 так, чтобы выполнялись условия

$$\tilde{K} = 3\bar{C} \frac{d}{h} (K_2^2 K_3^{-2} + K_1) \leqslant K_1, \quad K_1 \geqslant C_0, \quad K_3 < 1. \tag{27}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполняются условия леммы 5. Тогда справедливы неравенства

$$|D^\alpha v(x)| \leqslant \begin{cases} K_2 \left(\dfrac{h}{|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, & 4d \leqslant |x'| \leqslant K_3 \dfrac{h}{2}, \\ K_2 \left(\dfrac{2}{K_3}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, & K_3 \dfrac{h}{2} < |x'| \leqslant 1. \end{cases} \tag{28}$$

При доказательстве будем пользоваться интегральным представлением (5) и равенствами, полученными путем его дифференцирования по x. Область интегрирования в первом слагаемом разбиваем следующим образом:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

где

$$\Omega_1 = \left\{y \in \Omega : |y'| < 4d, \ \frac{1}{2} h < |x_n - y_n| < h\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{y \in \Omega : 4d < |y'| < K_3 h, \ \frac{1}{2} h < |x_n - y_n| < h\right\},$$

$$\Omega_3 = \left\{y \in \Omega : K_3 h < |y'| < 1, \ \frac{1}{2} h < |x_n - y_n| < h\right\}.$$

Обозначим полученные интегралы через $J_{1,1}(x)$, $J_{1,2}(x)$, $J_{1,3}(x)$ соответственно областям интегрирования, интеграл $J_{1,1}(x)$ будем оценивать, учитывая ограниченность коэффициентов $b_\gamma(y)$, свойства функции Грина и неравенство $|x-y| > \frac{1}{2} h$.

$$|J_{1,1}(x)| = \left|\int_{\Omega_1} v(y) \sum_{|\gamma|=0}^{2m-1} b_\gamma(y) D_x^\alpha \left[D_y^\gamma G(x, y) D_y^{2m-\gamma} f\left(\frac{y_n - x_n}{h}\right)\right] dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{|\gamma|=0}^{2m-1} \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \int_{\Omega_1} |v(y)| \frac{dy}{|x-y|^{n-2m+|\gamma|+|\beta|}} \cdot \frac{1}{h^{2m-|\gamma|+|\alpha|-|\beta|}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{h}{2|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}} \left(\frac{|x'|}{h}\right)^{n-\frac{3}{2}+|\alpha|} C_5 (K_2^2+K_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Рассматривая интегралы по Ω_2 и Ω_3, будем пользоваться оценкой [4]:

$$\int_D \frac{dz}{|z-x|^k |z-y|^l} = \begin{cases} O(\ln|x-y|+1), & k+l=n, \\ O(|x-y|^{-(k+l-n)}), & k+l>n, \\ O(1), & k+l<n, \end{cases} \tag{30}$$

где $D \subset R^n$ — ограниченная область, $k<n$, $l<n$. В силу неравенства (17) и (30)

$$|J_{1,2}(x)| \leqslant C_6 \sum_{|\gamma|=0}^{2m-1} \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \int_{\Omega_2} |v(y)| \frac{dy}{(|x'-y'|+h)^{n-2m+|\gamma|+|\beta|}} \times$$

$$\times \frac{1}{h^{2m-|\gamma|+|\alpha|-|\beta|}} \leqslant C_6 \frac{K_2 d^{n-2m-1}}{h^{2m-1+|\alpha|}} \int_{4d<|y'|<K_3 h} \frac{|y'|^{2m-\frac{3}{2}} dy'}{|y'|^{n-2} |x'-y'|^{n-2m-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \frac{K_2 (K_3)^{2m-\frac{3}{2}} d^{n-2m-1}}{h^{|\alpha|+\frac{1}{2}} |x'|^{n-2m-\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}} \left(\frac{h}{2|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|x'|}{h}\right)^{1+|\alpha|} K_3^{2m-\frac{3}{2}} C_6. \tag{31}$$

Третье слагаемое $J_{1,3}(x)$, пользуясь свойствами функции $f\left(\frac{x_n-y_n}{h}\right)$, преобразуем к следующему виду с помощью интегрирования по частям по переменной y_n.

$$J_{1,3}(x) = \sum_{\gamma_n=0}^{2m-1} \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \int_{\Omega_3} v(y)\, b_\gamma(y)\, D_x^{\alpha-\beta} \frac{\partial^{\gamma_n}}{\partial y_n^{\gamma_n}} G(x,y) \frac{\partial^{2m-\gamma_n}}{\partial y_n^{2m-\gamma_n}} D_x^\beta f\left(\frac{x_n-y_n}{h}\right) dy =$$

$$= \sum_{\gamma_n=0}^{2m-1} \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} (-1)^{2m-\gamma_n-1} \int_{\Omega_3} \frac{\partial^{2m-\gamma_n-1}}{\partial y_n^{2m-\gamma_n-1}} \left(v(y)\, b_\gamma(y)\, D_x^{\alpha-\beta} \frac{\partial^{\gamma_n}}{\partial y_n^{\gamma_n}} G(x,y)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial y_n} D_x^\beta f\left(\frac{x_n-y_n}{h}\right)\right) dy. \tag{32}$$

Оцениваем полученный интеграл при $|x'|<K_3 \frac{h}{2}$, $|x_n|<1$ с помощью неравенств (17) и (30).

$$|J_{1,3}(x)| \leqslant C_7 \sum_{\gamma_n=0}^{2m-1} \sum_{k=0}^{2m-\gamma_n-1} \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} K_2 h^{-(|\beta|+1)} \int_{\Omega_3} \left(\frac{2}{K_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|y'|^{n-\gamma_n-k-2}} \times$$

$$\times \frac{dy}{(|x'-y'|+h)^{n-2m+k+|\alpha|+\gamma_n-|\beta|}} \leqslant \sum_{\gamma_n=0}^{2m-1} \sum_{k=0}^{2m-\gamma_n-1} K_2 \left(\frac{h}{2|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{h^{|\alpha|+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \int_{K_3 h<|y'|<1} \frac{dy'}{|y'|^{n-k-\gamma_n-2} |x'-y'|^{n-2m+\gamma_n+k-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \left(\frac{h}{2|x'|}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}} C_7 \left(\frac{|x'|}{h}\right)^{1+|\alpha|}. \tag{33}$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в интегральном представлении (5).

$$J_2(x) = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\gamma|=|\beta|=m} a_{\gamma\beta}(y)\, D^{\beta} v(y)\, D_y^{\gamma}\left[D_x^{\alpha} \left(G(x, y) f\left(\frac{x_n - y_n}{h} \right) \varphi_{\alpha}(|y'|) \right] dy. \tag{34}$$

Здесь $4d \leqslant |x'| \leqslant K_3 \frac{h}{2}$, $|x' - y'| \geqslant \frac{1}{2}|x'|$. Учитывая свойства функции Грина, имеем

$$\int\limits_{\substack{|y'|<2d \\ |y_n - x_n|<h}} \left| D_y^m \left[D_x^{\alpha} \left(G(x, y) f\left(\frac{x_n - y_n}{h} \right) \right) \varphi_{\alpha}(|y'|) \right] \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \sum_{k=0}^{m} \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{s=0}^{|\alpha|} \frac{1}{d^{2(m-k)}} \frac{1}{h^{2(s+k_1)}} \int\limits_{|y'|<2d} \frac{dy'}{|x' - y'|^{2(n-2m+|\alpha|-k_1-s)-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{2(n-2m+|\alpha|)-1}}. \tag{35}$$

Оценивая $J_2(x)$ с помощью неравенства Коши — Буняковского, неравенства (35) и леммы 4, получаем

$$|J_2(x)| \leqslant \left(\frac{h}{2|x'|} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}} C_8 \tilde{K}^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Обозначим $\bar{G}_1 = \max\limits_{5 \leqslant i \leqslant 8} (C_i, 1)$, $\bar{C}_2 = \max(3\bar{C}, 3CC_8, 1)$. Аналогично оценивается последний интеграл в (5).

Пусть $K_3 \geqslant K$, где K — некоторая положительная постоянная, $K < 1$. Выберем K_1, K_2, K_3 так, чтобы выполнялись условия

$$K_2^2 \leqslant K_1 K_3^2 \leqslant 2K_2^2, \quad K_3 \geqslant K, \quad \bar{C}_1 K_3 < \frac{1}{8}, \quad C_0 \leqslant K_1. \tag{37}$$

Кроме того, можем считать, что справедливы неравенства

$$2\bar{C}_2 \frac{d}{h} < 1, \quad 3\bar{C}_2 K^{-1} \left(\frac{d}{h} \right)^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{38}$$

Оценка (28) при $|x'| < K_3 \frac{h}{2}$ доказана. При $|x'| > K_3 \frac{h}{2}$ неравенство (28) очевидно выполняется. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы. Обозначим $R = K_3 H$. Определим конечную последовательность $h_i = 2^{-i+1} H$, $i = 1, 2, \ldots, I$, так, чтобы $2^{-I} R \leqslant 4d \leqslant 2^{-I+1}$. При $i = 1, 2, \ldots, I$ выполняются неравенства

$$|D^{\alpha} v(x)| \leqslant \begin{cases} K_2 \left(\dfrac{h_i}{|x'|} \right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, & 4d \leqslant |x'| \leqslant K_3 h_i, \\ K_2 \left(\dfrac{2}{K_3} \right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d^{n-2m-1}}{|x'|^{n-2m-1+|\alpha|}}, & K_3 h_i < |x'| \leqslant 1, \end{cases} \tag{39}$$

$$\int\limits_{\substack{|x'|<k_3 h_i \\ |x_n|<h_i}} |D^m v(x)|^2 dx \leqslant K_1 h_i d^{n-2m-1}. \tag{40}$$

Действительно, при $i = 1$ неравенство (39) следует из леммы 3, если $K_2 \geqslant A$, неравенство (40) из леммы 2 при $K_1 \geqslant C$. Из справедливости неравенств (39), (40) при $i = i_1 \leqslant I - 1$ следует выполнение этих неравенств при $i = i_1 + 1$ в силу лемм 4 и 5.

Пусть x_0 — произвольная точка области Ω. Если $K_3 h_I < |x_0| < R$, определим номер i_0, зависящий от $|x_0'|$ так, чтобы $K_3 h_{i_0+1} < |x_0| <$

6 1–3694

$< K_3 h_{i_0}$. В этом случае имеем

$$|D^\alpha v(x_0)| \leqslant K_2 \left(\frac{h_{i_0}}{|x_0'|}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x_0'|^{n-2m-1+|\alpha|}} <$$

$$< K_2 \left(\frac{h_{i_0}}{K_3 h_{i_0+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x_0'|^{n-2m-1+|\alpha|}} \leqslant 2 \frac{K_2}{K_3^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x_0'|^{n-2m-1+|\alpha|}}. \quad (41)$$

Если $|x_0'| > R$, то в силу выбора R по лемме 3 получаем

$$|D^\alpha v(x_0)| \leqslant A \frac{H^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d^{n-2m-1}}{|x_0'|^{n-2m-1+|\alpha|}} = \frac{A}{K_3^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{n-2m-1}}{|x_0'|^{n-2m-1+|\alpha|}}. \quad (42)$$

Теорема доказана.

1. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных граничных задач. — М. : Наука, 1990.
2. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.— Киев : Наук. думка, 1974.— 279 с.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
4. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.— М. : Гостехиздат, 1953.

Донецк. гос. ун-т,
Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 10.12.90