УДК 517.956.4

И. Т. Мамедов

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается первая краевая задача для одного класса эллиптико-параболических уравнений в недивергентной форме, вырождающихся на границе области, относительно коэффициентов предполагается выполнение условия типа Кордеса. Доказана обобщенная однозначная разрешимость этой задачи в соответствующем весовом пространстве С. Л. Соболева.

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1990. Вып. 2.

Пусть Ω — ограниченная область n-мерного евклидова пространства E_n с дважды гладкой границей $\partial\Omega$: Q_T — цилинд $\Omega \times (0, T)$, расположенный в $(n+1)$-мерном пространстве R_{n+1} точек $(x_1, \dots, x_n, t)$. $\Gamma(Q_T) = \Omega \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ — его параболическая граница.

Рассмотрим в Q_T первую краевую задачу

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, u_{x_i x_k} + w(x, t)\, u_{tt} - u_t = f(x, t), \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma(Q_T)} = 0. \tag{2}$$

Здесь $w(x, t) = [\rho(x, \partial\Omega)]^{\gamma} t^{\alpha} (T - t)^{\beta}$; $\rho(x, \partial\Omega) = \inf\limits_{y \in \partial\Omega} |x - y|$ для $x \in \Omega$.

Предположим, что относительно коэффициентов оператора L выполнены условия

$$\lambda |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, \xi_i \xi_k \leqslant \lambda^{-1} |\xi|^2; \quad \xi \in E_n,\ (x, t) \in Q_T,\ \lambda > 0, \tag{3}$$

$$\sup_{Q_T} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2(x, t) / \inf_{Q_T} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, t)\Big]^2 < \frac{1}{n-1}, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \quad 2 < \beta < \infty. \tag{5}$$

Заметим, что условие (4) понимается с точностью до невырожденного линейного преобразования (см. [4]).

Пусть $A(Q_T)$ означает совокупность бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}_T$ функций, обращающихся в нуль на $\Gamma(Q_T)$. Обозначим через $\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$ пространство, являющееся пополнением $A(Q_T)$ по норме

$$\|u\|_{\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)} = \Big[\int_{Q_T} \Big(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 + (w u_{tt})^2\, dx dt\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Цель настоящей статьи заключается в доказательстве однозначной разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$ при условии, что $f \in L_2(Q_T)$. Отметим, что аналогичный результат при $\gamma = \alpha = 0$ и $a_{ik} \in C^1(Q_T)$ получен в [5]. Укажем также, что библиографию работ по уравнениям с неотрицательной характеристической формой можно найти в статье [3] и монографиях [1, 2].

Наряду с оператором L будем рассматривать модельный эллиптико-параболический оператор

$$L_0 = \Delta + w(x, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t},$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Докажем вначале несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (3)—(5). Тогда существуют положительные константы $C_2 = C(L, d)$ и $\mu_1 = \mu(L, d)$ такие, что для любой функции $u \in A(Q_T)$ при $\mu \geqslant \mu_1$ справедлива оценка

$$\sum_{i,k=1}^{n} \|u_{x_i x_k}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_2 (\|Lu - \mu u\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_2(Q_T)}), \tag{6}$$

где $d = \operatorname{diam} \Omega$.

Доказательство. Покроем область Ω конечным числом областей Ω^j, $j = 1, \ldots, N$, так, чтобы граница $\partial\Omega^j$ состояла из кусков $\partial\Omega$ и частей гиперплоскостей $x_n = C_3^j$, $x_n = C_4^j$, причем $\Omega^j \cap \Omega^{j+1} \neq \varnothing$. Будем считать величину $\sigma = \max|C_4^j - C_3^j|$ достаточно малой. Выберем числа C_5^j и C_6^j таким образом, чтобы области $\Omega_1^j = \Omega^j \cap \{x : x_{n-1} < C_5^j\}$ и $\Omega_2^j = \Omega^j \cap \cap \{x : x_{n-1} > C_6^j\}$ имели непустое пересечение при каждом $j = 1, \ldots, N$. Таким образом, $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} (\Omega_1^j \cup \Omega_2^j)$. Если $n = 1$, т. е. $\Omega = (a, b)$, то в качестве Ω_1 и Ω_2 возьмем соответственно интервалы $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ и $\left(\frac{3a+b}{4}, b\right)$. Зафиксируем произвольное j, $1 \leqslant j \leqslant N$, и рассмотрим область Ω_1^j. Существует невырожденное преобразование $x \leftrightarrow y$ такое, что образ $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1^j$ будет лежать на гиперплоскости $y_n = 0$, причем для $y \in \tilde{\Omega}_1^j$ ($\tilde{\Omega}_1^j$ — образ Ω_1^j) $y_n \geqslant 0$ и $\rho(y, \partial\tilde{\Omega}) = y_n$. Заметим, что при таком преобразовании оператор L перейдет в эллиптико-параболический оператор $\mathscr{L}$ и для коэффициентов последнего будут выполнены условия, аналогичные (3) — (5). Поэтому, не теряя в общности, можно считать, что $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1^j$ записывается уравнением $x_n = 0$ и $\rho(x, \partial\Omega) = x_n$. Пусть $\Pi_i^j = \Omega_i^j \times (0, T)$, $i = 1, 2$. Обозначим через $\Omega_1^j(s)$ совокупность точек $(x, t) \in \Omega_1^j$, для которых расстояние до Γ^j-части границы $\partial\Omega_1^j$, лежащей строго внутри Ω, больше $s > 0$. Выберем s столь малым, что для всех $j = 1, \ldots, N$ $\Omega_1^j(s) \cap \Omega_2^j(s) \neq \varnothing$, кроме того, $\Omega_1^j(s) \cap \Omega_1^{j+1}(s) \neq \varnothing$, $\Omega_2^j(s) \cap \Omega_2^{j+1}(s) \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, N-1$. Пусть $\eta_j(x)$ — бесконечно дифференцируемая в E_n функция, $0 \leqslant \eta_j(x) \leqslant 1$, $\eta_j(x) = 1$ при $x \in \Omega_1^j(s)$, $\eta_j(x) = 0$ при $x \bar{\in} \Omega_1^j\left(\frac{s}{2}\right)$. Рассмотрим произвольную функцию $u \in A(Q_T)$ и обозначим $u(x, t)\eta_j(x)$ через $v(x, t)$. Нетрудно видеть, что функция v обращается в нуль вблизи $\Gamma^j \times [0, T]$, а также при $x_n = 0$ и $t = 0$. Заметим, что при наших предположениях оператор L_0 имеет вид

$$L_0 = \Delta + x_n^{\gamma} t^{\alpha} (T - t)^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Для $i = 1, \ldots, n$

$$\int\limits_{\Pi_1^j} (L_0 v - \mu v) v_{x_i x_i} dxdt = \int\limits_{\Pi_1^j} \Big[v_{x_i x_i} \sum_{k=1}^{n} v_{x_k x_k} + v_{x_i x_i} x_n^{\gamma} t^{\alpha} (T - t)^{\beta} v_{tt} - \\ - v_{x_i x_i} v_t - \mu v_{x_i x_i} v \Big] dxdt. \qquad (7)$$

Далее

$$\int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i} \sum_{k=1}^{n} v_{x_k x_k} dxdt = \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i}^2 dxdt + \sum_{k \neq i} \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i} v_{x_k x_k} dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i}^2 dxdt - \sum_{k \neq i} \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i} v_{x_k x_k x_i} dxdt = \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i}^2 dxdt + \sum_{k \neq i} \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_k}^2 dxdt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_k}^2 dxdt;$$

$$\int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i} v_{tt} w(x, t)\, dxdt = - \int\limits_{\Pi_1^j} w(x, t) v_{tt x_i} v_{x_i} dxdt -$$

$$- \int\limits_{\Pi_1^j} w_{x_i}(x, t) v_{tt} v_{x_i} dxdt = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = \int\limits_{\Pi_1^j} w(x, t) v_{x_i t}^2 \; dxdt + \int\limits_{\Pi_1^j} w_t(x, t) v_{tx_i} v_{x_i} dxdt \geqslant \int\limits_{\Pi_1^j} w_t(x, t) v_{tx_i} v_{x_i} dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} w_{tt}(x, t) v_{x_i}^2 dxdt;$$

$$I_2 = \int\limits_{\Pi_1^j} w_{tx_i}(x, t) v_t v_{x_i} dxdt + \int\limits_{\Pi_1^j} w_{x_i}(x, t) v_t v_{x_i} dxdt = \int\limits_{\Pi_1^j} w_{tx_i}(x, t) v_t v_{x_i t} dxdt -$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} w_{x_i x_i}(x, t) v_t^2 dxdt;$$

$$-\int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i} v_t dxdt = \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i} v_{tx_i} dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i}^2 (T, x) \, dx \geqslant 0;$$

$$-\mu \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i x_i} v dxdt = \mu \int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_i}^2 dxdt.$$

Учитывая эти оценки в (7), получаем

$$\int\limits_{\Pi_1^j} \Big[\sum_{i,k=1}^n v_{x_i x_k}^2 + \mu \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 - \frac{1}{2} w_{tt}(x, t) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + v_t \sum_{i=1}^n w_{tx_i}(x, t) v_{x_i} -$$

$$-\frac{1}{2} v_t^2 \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i}(x, t) \Big] dxdt \leqslant \int\limits_{\Pi_1^j} (L_0 v - \mu v) \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i} dxdt. \qquad (8)$$

Заметим, что

$$w_{tt}(x, t) = x_n^\gamma [\alpha(\alpha - 1) t^{\alpha-2} (T - t)^\beta - 2\alpha\beta t^{\alpha-1} (T - t)^{\beta-1} +$$

$$+ \beta(\beta - 1) t^\alpha (T - t)^{\beta-2}].$$

Поэтому с учетом условия $\beta > 2$ имеем

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} w_{tt}(x, t) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dxdt \leqslant C_7(L, d) \int\limits_{\Pi_1^j} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dxdt +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} x_n^\gamma t^{\alpha-2} (T - t)^\beta \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dxdt. \qquad (9)$$

Далее $w_{tx_i}(x, t) = 0$, если $i \neq n$ и

$$w_{tx_n}(x, t) = \gamma x_n^{\gamma-1} [\alpha t^{\alpha-1} (T - t)^\beta - \beta t^\alpha (T - t)^{\beta-1}] =$$

$$= [\sqrt{\gamma(1 - \gamma) x_n^{\gamma-2} t^\alpha (T - t)^\beta}] \times \left[x_n \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \gamma} x_n^{\gamma-2} t^\alpha (T - t)^\beta} \left(\frac{\alpha}{t} - \frac{\beta}{T - t} \right) \right] =$$

$$= B_1 \times B_2.$$

Отсюда следует, что

$$-\int\limits_{\Pi_1^j} v_t v_{x_n} w_{tx_n}(x, t) \, dxdt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} B_1^2 v_t^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Pi_1^j} B_2^2 v_{x_n}^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\int\limits_{\Pi_1^j} x_n^{\gamma-2}t^{\alpha}(T-t)^{\beta} v_t^2\,dxdt + C_8(L,\ \mathrm{diam}\,Q_T)\times$$

$$\times\int\limits_{\Pi_1^j} v_{x_n}^2 dxdt + \frac{\gamma\alpha^2}{2(1-\gamma)}\int\limits_{\Pi_1^j} x_n^{\gamma}t^{\alpha-2}(T-t)^{\beta} v_{x_n}^2 dxdt. \qquad (10)$$

Наконец, учитывая, что $w_{x_i x_i}(x, t) = 0$ при $i \neq n$ и $w_{x_n x_n}(x, t) = \gamma(\gamma - 1)\,x_n^{\gamma-2}t^{\alpha}(T-t)^{\beta}$, из (10) получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_1^j} v_t^2 w_{x_n x_n}(x, t)\,dxdt - \int\limits_{\Pi_1^j} v_t v_{x_n} w_{t x_n}(x, t)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma\alpha^2}{2(1-\gamma)}\int\limits_{\Pi_1^j} x_n^{\gamma}t^{\alpha-2}(T-t)^{\beta} v_{x_n}^2 dxdt + C_9(L, d)\int\limits_{\Pi_1^j} v^2_{x_n} dxdt.$$

Используя последнюю оценку и подставляя (9) в (8), имеем

$$\int\limits_{\Pi_1^j}\Big[\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 + \mu\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2\Big]dxdt \leqslant C_{10}(L, d)\int\limits_{\Pi_1^j}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 dxdt +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\Big[\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma}+\alpha-1\Big]\int\limits_{\Pi_1^j} x_n^{\gamma}t^{\alpha-2}(T-t)^{\beta}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 dxdt + \int\limits_{\Pi_1^j}(L_0 v - \mu v)\,\Delta v dxdt.$$

Пусть теперь $\mu_1 = C_{10}$ и $\mu \geqslant \mu_1$. Тогда с учетом (5) получаем

$$\int\limits_{\Pi_1^j}\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt \leqslant \int\limits_{\Pi_1^j}(L_0 v - \mu v)\,\Delta v dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_1^j}(L_0 v - \mu v)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_1^j}(\Delta v)^2 dxdt.$$

Заметив, что

$$\int\limits_{\Pi_1^j}(\Delta v)^2 dxdt \leqslant \int\limits_{\Pi_1^j}\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt,$$

получим

$$\int\limits_{\Pi_1^j}\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt \leqslant \int\limits_{\Pi_1^j}(L_0 v - \mu v)^2 dxdt. \qquad (11)$$

Предположим вначале, что

$$\sup_{Q_T}\Big[2\sum_{i<k} a_{ik}^2(x, t) + \sum_{i=1}^{n}[a_{ii}(x, t) - 1]^2\Big] = \delta_0 < 1. \qquad (12)$$

Тогда

$$\int\limits_{\Pi_1^j}(L_0 v - Lv)^2 dxdt = \int\limits_{\Pi_1^j}\Big(\sum_{i,k=1}^{n}[a_{ik}(x, t) - \delta_{ik}]\,v_{x_i x_k}\Big)^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \delta_0\int\limits_{\Pi_1^j}\sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt.$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Из (11) и (12) имеем

$$\int_{\Pi_1^j} \sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt \leqslant (1+\varepsilon) \int_{\Pi_1^j} (L_0 v - Lv)^2 dxdt +$$

$$+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Pi_1^j} (Lv - \mu v)^2 dxdt \leqslant \delta_0 (1+\varepsilon) \int_{\Pi_1^j} \sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt +$$

$$+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Pi_1^j} (Lv - \mu v)^2 dxdt.$$

Выбрав теперь ε столь малым, чтобы $\delta_0 (1+\varepsilon) < 1$, получим

$$\int_{\Pi_1^j} \sum_{i,k=1}^{n} v_{x_i x_k}^2 dxdt < C_{11}(L, d) \int_{\Pi_1^j} (Lv - \mu v)^2 \, dxdt. \tag{13}$$

Поскольку (12) с точностью до невырожденного линейного преобразования следует из (4) (см. [4]), для простоты будем предполагать, что условие типа Кордеса выполнено в виде (12).

Пусть $\Pi_1^j(s) = \Omega_1^j(s) \times (0, T)$. Тогда из (13) вытекает

$$\int_{\Pi_1^j} \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 dxdt \leqslant C_{12}(L, d) \left[\int_{\Pi_1^j} (Lu - \mu u)^2 \, dxdt + \int_{\Pi_1^j} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dxdt + \int_{\Pi_1^j} u^2 dxdt \right].$$

Согласно интерполяционному неравенству для любого $\nu > 0$

$$\int_{\Pi_1^j} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dxdt \leqslant \nu \int_{\Pi_1^j} \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 dxdt + C_{13}(\nu) \int_{\Pi_1^j} u^2 dxdt.$$

Поэтому

$$\int_{\Pi_1^j(s)} \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 dxdt \leqslant C_{12} \nu \int_{\Pi_1^j} \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 dxdt +$$

$$+ C_{12} \int_{\Pi_1^j} (Lu - \mu u)^2 dxdt + C_{14}(\nu) \int_{\Pi_1^j} u^2 dxdt. \tag{14}$$

Заметим, что оценка, аналогичная (14), справедлива для областей $\Pi_2^j(s)$ и Π_2^j. Кроме того, в силу выбора s системы $(\Pi_1^j(s) \cup \Pi_2^j(s))$ и $(\Pi_1^j \cup \Pi_2^j)$ покрывают Q_T. Отсюда заключаем, что

$$\int_{Q_T} \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 \, dxdt \leqslant C_{15} \nu \int_{Q_T} \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 dxdt + C_{15} \int_{Q_T} (Lu - \mu u)^2 \, dxdt +$$

$$+ C_{16}(\nu) \int_{Q_T} u^2 dxdt.$$

Выбрав теперь $\nu = \frac{1}{2C_{15}}$, приходим к требуемой оценке (6).

Лемма 2. Если выполнены условия предыдущей леммы, то существует положительная константа $C_{17} = C(L, d)$ такая, что для любой функции $u \in A(Q_T)$ при $\mu \geqslant \mu_1$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_{17} (\| Lu - \mu u \|_{L_2(Q_T)} + \| u \|_{L_2(Q_T)}).$$

Это утверждение следует из (6) и интерполяционного неравенства.

Лемма 3. В условиях леммы 1 существует положительная константа $C_{18} = C(L, d)$ такая, что при $\mu \geqslant \mu_1$ для всякой функции $u \in A(Q_T)$ выполнено неравенство

$$\| u_t \|_{L_2(Q_T)} + \| wu_{tt} \|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_{18} (\| Lu - \mu u \|_{L_2(Q_T)} + \| u \|_{L_2(Q_T)}).$$

Доказательство. Достаточно показать, что для некоторой положительной константы q

$$\int\limits_{Q_T} [(wu_{tt})^2 + qu_t^2]\, dxdt \leqslant \int\limits_{Q_T} (wu_{tt} - u_t)^2\, dxdt. \tag{15}$$

Для простоты будем считать, что $T \leqslant 1$. Имеем

$$\int\limits_{Q_T} (wu_{tt} - u_t)^2\, dxdt = \int\limits_{Q_T} (wu_{tt})^2\, dxdt + \int\limits_{Q_T} u_t^2 dxdt - 2 \int\limits_{Q_T} wu_{tt} u_t dxdt. \tag{16}$$

Далее

$$-2 \int\limits_{Q_T} wu_{tt} u_t dxdt = \int\limits_{Q_T} w_t u_t^2 dxdt \geqslant -\beta \int\limits_{Q_T} t^{\alpha} (T - t)^{\beta - 1} u_t^2 dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{-\beta}{2^{\beta-1}} \int\limits_{Q_T} u_t^2 dxdt.$$

Пусть $q = 1 - \frac{\beta}{2^{\beta-1}}$. Так как $\beta > 2$, то $q > 0$, поэтому из (16) следует (15).

Из лемм 1—3 вытекает

Теорема 1. Если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (3)—(5), то для любой функции $u \in \dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$ справедлива оценка

$$\| u \|_{\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)} \leqslant C_{19}(L, d) (\| Lu \|_{L_2(Q_T)} + \| u \|_{L_2(Q_T)}).$$

Следствие. В условиях теоремы существует положительное $T_0 = T(L, n)$ такое, что если $T \leqslant T_0$, то для всякой функции $u \in \dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$ выполнено неравенство

$$\| u \|_{\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)} \leqslant C_{20}(L, d) \| Lu \|_{L_2(Q_T)}. \tag{17}$$

Достаточно доказать (17) для функций $u \in A(Q_T)$. Имеем

$$u(x, t) = \int\limits_0^t u_t(x, \tau)\, d\tau; \quad \int\limits_{Q_T} u^2 dxdt \leqslant \int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t u_t(x, \tau)\, d\tau \Big)^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant T^2 \int\limits_{Q_T} u_t^2 dxdt.$$

Поэтому из теоремы 1 заключаем

$$\| u \|_{\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)} \leqslant C_{19} (\| Lu \|_{L_2(Q_T)} + T \| u_t \|_{L_2(Q_T)}) \leqslant$$

$$\leqslant C_{19} (\| Lu \|_{L_2(Q_T)} + T_0 \| u \|_{\dot{W}^{2,2}(Q_T)}).$$

Теперь $T_0 = \frac{1}{2C_{19}}$, приходим к требуемой оценке (17).

Теорема 2. Если выполнены условия предыдущей теоремы и $T \leqslant T_0$, то первая краевая задача (1), (2) имеет при всякой $f \in L_2(Q_T)$ единственное решение $u \in \dot{W}^{2,2}(Q_T)$. При этом

$$\|u\|_{\dot{W}^{2,2}(Q_T)} \leqslant C_{20} \|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность решения следует из оценки (17). Его существование можно доказать методом продолжения по параметру, опираясь на следствие из теоремы 1. При этом достаточно показать лишь существование решения $v \in \dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$ модельной задачи

$$L_0 v = f,\ v|_{\Gamma(Q_T)} = 0 \tag{18}$$

при всякой $f \in L_2(Q_T)$. Пусть для $h > 0$

$$E_h(x) = \begin{cases} [\rho(x, \partial\Omega)]^\gamma, & \text{если } \rho \geqslant h, \\ h^\gamma, & \text{если } \rho < h, \end{cases} \quad F_h(t) = \begin{cases} t^\alpha, & \text{если } t \geqslant h, \\ h^\alpha, & \text{если } t < h. \end{cases}$$

Рассмотрим оператор $L^h = \Delta + (T-t)^\beta E_h(x) F_h(t) \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ и задачу

$$L^h v^h = f,\ v^h|_{\Gamma(Q_T)} = 0. \tag{19}$$

Из работы [5] можно несложным образом вывести существование решения $v^h \in \dot{W}^{2,2}[(T-t)^\beta, Q_T]$ задачи (19). Поэтому будем считать, что $\alpha + \gamma > 0$. Из (17) и того, что $\dot{W}^{2,2}[(T-t)^\beta, Q_T] \subset \dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$, вытекает неравенство

$$\|v^h\|_{\dot{W}^{2,2}(w,Q_T)} \leqslant C_{20} \|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Поскольку семейство $\{v^h\}$ равномерно ограничено в $\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$, то существует последовательность v^{h_k} ($h_k \to 0$ при $k \to \infty$), слабо сходящаяся к некоторой функции $v \in \dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$. Поэтому для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$

$$\lim_{k\to\infty} (L_0 v^{h_k}, \varphi) = (L_0 v, \varphi). \tag{20}$$

С другой стороны,

$$(L_0 v^{h_k}, \varphi) = (L^{h_k} v^{h_k}, \varphi) + ((L_0 - L^{h_k}) v^{h_k}, \varphi) = (f, \varphi) + D_k. \tag{21}$$

Далее

$$|D_k| \leqslant h_k^{\alpha+\gamma} |((T-t)^\beta v_{tt}^{h_k}, \varphi)| \leqslant h_k^{\alpha+\gamma} \Big(\int_{Q_T} [(T-t)^\beta E_{h_k}(x) F_{h_k}(t) \times$$
$$\times v_{tt}^{h_k}]^2 dx dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{Q_T} \frac{\varphi^2 dx dt}{t^{2\alpha} [\rho(x, \partial\Omega)]^{2\gamma}}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant h_k^{\alpha+\gamma} \|v^{h_k}\|_{\dot{W}^{2,2}(w,Q_T)} \mathrm{const}.$$

Заметим, что мы учли финитность функции φ. Итак, $D_k \to D$ при $k \to \infty$, т. е. с учетом (21)

$$\lim_{k\to\infty} (L_0 v^{h_k}, \varphi) = (f, \varphi).$$

Используя теперь это предельное равенство в (20), получаем функцию v, которая является обобщенным решением задачи (18). Пусть $w_1(x, t) = g(t) t^\alpha [\rho(x, \partial\Omega)]^\gamma$, $0 < C_{21} \leqslant g(t) \leqslant C_{22}$, $w_2(x, t) = w_1(x, t)/g(t)$. Пусть далее $B(Q_T)$ — класс бесконечно дифференцируемых в $\tilde{Q}_T$, обращающихся в нуль на $\partial Q_T = \Gamma(Q_T) \cup \{(t, x) : t = T,\ x \in \Omega\}$. Обозначим через $\dot{V}^{2,2}(w, Q_T)$

пополнение функций из $B(Q_T)$ по норме

$$\| u \|_{\dot{V}^{2,2}(w_2, Q_T)} = \Big[\int\limits_{Q_T} \Big(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 + (w_2 u_{tt})^2 \, dxdt \Big]^{1/2}.$$

Теорема 3. Пусть относительно коэффициентов a_{ik} и чисел α и γ выполнены условия (3) — (5). Тогда первая краевая задача

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, u_{x_i x_k} + w_1(x, t)\, u_{tt} - u_t = f, \quad u|_{\partial Q_T} = 0$$

однозначно разрешима в $\dot{W}^{2,2}(w_2, Q_T)$, что доказывается по той же схеме, что и теоремы 1 и 2.

Теперь можем сформулировать основное утверждение работы, вытекающее из теорем 2 и 3.

Теорема 4. Если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (3)—(5), то задача Дирихле (1), (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ пространства $\dot{W}^{2,2}(w, Q_T)$.

1. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.— М. : ВИНИТИ, 1970.— 252 с.
2. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.— М. : Наука, 1985.— 374 с.
3. *Фикрет Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Математика.— 1963.— 7, № 6.— С. 99—121.
4. *Алхутов Ю. А., Мамедов И. Т.* Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Мат. сб.— 1986.— 131, № 4.— С. 477—500.
5. *Franciosi M.* Un teorema di esistenza ed unicita per la soluzione di un'equazione ellittico-parabolica, a coefficienti discontinui, informa nondivergenza // Boll. Unione mat. ital.— 1985.— 4, N 1.— P. 253—263.

Ин-т математики и механики АН АзССР, Баку

Получено 28.10.87