

УДК 521.1:531

©2018. А.М. Ковалев, С.Н. Судаков

К ВОПРОСАМ ДИНАМИКИ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ ДАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

Изложенная в лекциях С.П. Королева простая математическая модель движения баллистической ракеты использована для исследования полета ракеты “Блю Стрик” на активном участке.

Ключевые слова: баллистическая ракета, траектория полета, активный участок полета.

В 1949 году на Высших инженерных курсах, организованных при МВТУ им. Баумана по подготовке инженеров для работы в ракетостроительной промышленности, С.П. Королевым был прочитан курс лекций [1], в котором для описания движения баллистической ракеты на активном участке полета (т. е. с работающими двигателями) была использована простая математическая модель движения ракеты, на практике вполне себя оправдывающая. По ряду причин эта модель сохраняет свою актуальность и сейчас. Во-первых, ее изучение является хорошим введением в теорию полета ракет и космонавтику. Во-вторых, за прошедшее время появилось много математических методов и вычислительных средств, позволяющих по-новому подойти к ее исследованию и решению.

В настоящей работе эта модель использована для исследования полета ракеты “Блю Стрик” (Blue Streak – Лазурная полоса), конструктивные параметры которой достаточно подробно изложены в литературе [2] и Интернете.

1. Уравнения движения. Задача решается в декартовой системе координат, жестко связанной с Землей. Для постановки и решения задачи делаются следующие предположения.

1. Ось ракеты все время направлена по касательной к траектории ее движения, т. е. угол атаки равен нулю. Векторы реактивной силы и вектор силы лобового сопротивления также направлены по касательной к траектории.
2. Коэффициент силы лобового сопротивления принимается постоянным.
3. Земля считается неподвижной.
4. Движение ракеты считаем происходящим в плоскости, проходящей через центр Земли. Землю считаем сферической.
5. Секундный расход топлива и силу тяги считаем постоянными во все время работы двигателей.

В плоскости движения ракеты вводим прямоугольную декартову систему координат Oxy , начало которой O находится в точке старта, ось Ox направлена по касательной к поверхности Земли, а ось Oy – по радиусу Земли в

сторону от ее центра. Следуя [1], уравнения движения запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta, \\ \frac{dy}{dt} &= v \sin \theta,\end{aligned}\tag{1}$$

где v – скорость ракеты, P – тяга двигателей, X – сила лобового сопротивления, g – ускорение свободного падения, m – масса ракеты, x, y – координаты ракеты в системе координат Oxy , θ – угол между касательной к траектории и осью Ox , t – время.

Сила тяги P определяется формулой [1]

$$P = P_0 + S_\alpha(p_0 - p),\tag{2}$$

где P_0 – сила тяги, замеренная на стенде; p_0 – атмосферное давление у поверхности Земли; p – атмосферное давление на высоте полета ракеты; S_α – коэффициент, определяемый по формуле

$$S_\alpha = \frac{P_1 - P_0}{p_0},\tag{3}$$

где P_1 – тяга двигателя в пустоте.

Сила лобового сопротивления X задается выражением

$$X = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,\tag{4}$$

где S – площадь миделя ракеты, C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления, который считается постоянным.

Масса ракеты m определяется формулой

$$m = m_0 - \dot{m}t,\tag{5}$$

где m_0 – начальная масса ракеты, $\dot{m}$ – секундный расход топлива, считающийся постоянным.

Плотность атмосферы ρ и атмосферное давление p задаем интерполяционными полиномами, которые строятся по данным ГОСТ 4401-81 “Атмосфера стандартная. Параметры” [3]. Так, плотность атмосферы ρ для высот от 0 до 20000 м интерполируется полиномом

$$\begin{aligned}\rho &= -5.20123 \cdot 10^{-22} y^5 + 2.85855 \cdot 10^{-17} y^4 - 5.90010 \cdot 10^{-13} y^3 + \\ &+ 7.96192 \cdot 10^{-9} y^2 - 0.125504 \cdot 10^{-3} y + 1.2254,\end{aligned}$$

который принимает значения плотности стандартной атмосферы на высотах $y = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ м над уровнем моря, равные $\rho = 1.225; 0.8194; 0.4671; 0.2279; 0.1665; 0.0889$ кг/м³ соответственно. Коэффициенты интерполяционного многочлена вычислялись с помощью пакета Maple-12.

Аналогично, для высот от 20000 до 40000 м плотность атмосферы интерполируется полиномом

$$\rho = -1.38346 \cdot 10^{-23}y^5 + 2.71159 \cdot 10^{-18}y^4 - 2.13711 \cdot 10^{-13}y^3 + \\ + 8.54286 \cdot 10^{-9}y^2 - 0.175197 \cdot 10^{-3}y + 1.49580,$$

который при $y = 20000; 24000; 28000; 32000; 36000; 40000$ принимает значения $\rho = 0.0889; 0.0469; 0.0251; 0.0136; 7.26 \cdot 10^{-3}; 4 \cdot 10^{-3}$.

На высотах от 40000 до 80000 м плотность воздуха интерполируется полиномом

$$\rho = -2.309 \cdot 10^{-16}y^3 + 4.583 \cdot 10^{-11}y^2 - 0.3013 \cdot 10^{-5}y + 0.06596,$$

который при $y = 40000, 50000, 60000, 80000$ принимает значения $\rho = 4 \cdot 10^{-3}; 1.03 \cdot 10^{-3}; 3.0 \cdot 10^{-4}; 1.85 \cdot 10^{-5}$.

На высотах от 80000 до 150000 м плотность воздуха становится достаточно малой и ее будем задавать линейной функцией

$$\rho = -2.64 \cdot 10^{-10}y + 0.396 \cdot 10^{-4},$$

которая при $y = 80000; 150000$ принимает значения $\rho = 1.85 \cdot 10^{-5}; 2.00 \cdot 10^{-9}$ соответственно.

Атмосферное давление p для высот от 0 до 20000 м интерполируется полиномом

$$p = -1.09020 \cdot 10^{-17}y^5 + 6.28719 \cdot 10^{-13}y^4 - 2.08013 \cdot 10^{-8}y^3 + \\ + 0.616684 \cdot 10^{-3}y^2 - 12.0886y + 1.013300 \cdot 10^5,$$

который при $y = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ принимает значения $p = 101330.0; 61661.0; 30801.0; 14170.0; 10353.0; 5529.0$. Здесь и ниже атмосферное давление p имеет размерность Па или, что то же самое, н/м³.

Для высот от 20000 до 40000 м давление p задается полиномом

$$p = -1.23698 \cdot 10^{-18}y^5 + 2.19402 \cdot 10^{-13}y^4 - 1.59036 \cdot 10^{-8}y^3 + \\ + 0.594271 \cdot 10^{-3}y^2 - 11.5809y + 95521.2,$$

который при $y = 20000; 24000; 28000; 32000; 36000; 40000$ принимает значения $p = 5529.0; 2971.0; 1616.0; 889.0499.0; 287.0$.

Для высот от 40000 до 80000 м давление p задается полиномом

$$p = -1.354 \cdot 10^{-11}y^3 + 0.2731 \cdot 10^{-5}y^2 - 0.1830y + 4094,$$

который при $y = 40000; 50000; 60000; 80000$ принимает значения $p = 287.0; 80.0; 22.0; 1.0$.

Для высот от 80000 до 150000 м давление p достаточно задать линейной функцией

$$p = -0.14 \cdot 10^{-4}y + 2.1,$$

принимавшей при $y = 80000; 150000$ значения $p = 1; 4.49 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

Угол θ является заданной функцией времени t и играет роль управления. Функция $\theta = \theta(t)$ может быть задана таблично, графически или аналитически. Если $\theta(t)$ задана таблично или графически, то ее нужно интерполировать подходящей функцией. В данной работе $\theta = \theta(t)$ задается следующим образом:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha \sin \omega(t - t_1)) \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2,$$

где $\alpha = 0.5$, $\omega = 0.005$. То есть, на промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ ракета поднимается вертикально вверх, а при $t_1 < t < t_2$ подъем происходит по наклонной траектории. Здесь t_2 – время работы двигателей, t_1 – время, за которое ракета поднимется по вертикали на высоту 100 м. Время t_1 вычисляется в процессе решения задачи.

Начальные условия для системы уравнений (1)–(4) следующие:

$$v = 0, \quad x = 0, \quad y = 0. \quad (6)$$

Уравнения движения (1) с учетом (2)–(5) и с начальными условиями (6) полностью определяют движение ракеты на активном участке. Для решения уравнений движения использовался численный метод Рунге–Кутты.

2. Численный пример. В качестве примера рассмотрим движение ракеты Блю-Стрик [2]. Ракета имеет два маршевых двигателя с общей тягой $P = 124280.0 \cdot 9.8$ н или $1.217944 \cdot 10^6$ н. Остальные параметры имеют следующие значения:

- стартовая масса всей ракеты $m_0 = 104700$ кг;
- масса горючего и окислителя 88000 кг;
- время работы двигателей $t_2 = 180$ с;
- секундный расход топлива и окислителя $\dot{m} = 488.8888889$ кг/с.

Принимая радиус миделя ракеты равным 2 м, находим $S = 4\pi$ м².

Система (1)–(5) с начальными условиями (6) решалась для шести значений коэффициента аэродинамического сопротивления:

$$C_x = 0; 0.04225; 0.0845; 0.4225; 2.5350; 4.2250.$$

Результаты расчетов представлены в таблице.

Таблица. Координаты и скорость ракеты при различных C_x

№	C_x	t	x	y	v
1	0	0	0	0	0
		10	0	100.9056	21.1306
		92.6019	4553.5425	20000.0014	656.5777
		117.1146	12132.4932	40000.0299	1116.8822
		146.6695	31632.8998	80000.0931	1964.6142
		180	79396.2854	158030.4392	3763.8615
2	0.04225	0	0	0	0
		10	0	100.9056	21.1306
		92.9818	4569.8638	20000.0262	652.3111
		117.6046	12184.6454	40000.0155	1115.4357
		147.1554	31763.8503	80000.0781	1969.7283
		180	78853.0568	156828.9002	3751.0880
3	0.0845	0	0	0	0
		10	0	100.9056	21.1306
		93.3606	4586.1517	20000.0068	648.1525
		118.0914	12236.6386	40000.0893	1114.0940
		147.6422	31893.8716	80000.0329	1974.9082
		180	78315.7603	155642.6060	3738.4048
4	0.4225	0	0	0	0
		10	0	100.9056	21.1306
		96.3515	4715.7217	20000.0498	618.4312
		121.8693	12645.0515	40000.0064	1106.5303
		151.3121	3292.5383	80000.1007	2018.4270
		180	74211.5091	146653.3798	3639.7706
5	2.5350	0	0	0	0
		10	0	100.9056	21.1306
		113.2111	5478.0672	20000.0081	515.9895
		141.6654	14912.5485	40000.0693	1124.2501
		169.4426	38184.5929	80000.1476	2337.7503
		180	53649.4500	103773.1332	3072.1021
6	4.2250	0	0	0	0
		10	0	100.9056	21.1306
		124.6600	6022.2756	20000.0579	476.8561
		153.1143	15735.0509	38759.5512	1119.5882
		180	41559.7929	79003.1393	2603.9435

Закключение. Рассмотрен полет ракеты Блю Стрик на протяжении всего активного участка длительностью 180 секунд. Было проведено шесть вариантов расчетов для различных значений коэффициента аэродинамического сопротивления при одном и том же управлении. В первые 10 секунд ракета поднималась вертикально вверх. На этом участке полета скорость была относительно малой (не более 22 м/с) и поэтому коэффициент аэродинамического сопротивления полагался равным нулю. Результаты расчетов представлены в таблице. Из таблицы видно, как увеличение коэффициента аэродинамического сопротивления C_x приводит к уменьшению дальности, высоты и скорости полета. Так, если при $C_x = 0$, т. е. при полном отсутствии аэродинамического сопротивления, в конце активного участка полета ракета имеет следующие значения координат и скорости:

$$x = 79396 \text{ м}, \quad y = 158030 \text{ м}, \quad v = 3764 \text{ м/с},$$

то при $C_x = 4.2250$ они существенно уменьшаются и принимают значения

$$x = 41600 \text{ м}, \quad y = 79003 \text{ м}, \quad v = 2604 \text{ м/с}.$$

1. *Королев С.П.* Основы проектирования баллистических ракет дальнего действия / Творческое наследие академика Сергея Павловича Королева. – М.: Наука, 1980. – С. 208–290.
2. *Фертрегт М.* Основы космонавтики. – М.: Просвещение, 1969. – 304 с.
3. Атмосфера стандартная // Большая советская энциклопедия. – В 30-ти т. – Т. 2. – 385 с.

A.M. Kovalev, S.N. Sudakov

To the problems of dynamics of ballistic rockets for long-range action

The motion of the Blue Streak ballistic rocket on the active part of the flight is investigated by use of the simple mathematical model presented in the lectures of S.P. Korolev.

Keywords: *ballistic rocket, trajectory of flight, active part of flight.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
sudakov@iamm.su

Получено 05.07.18