УДК 531.38

 А.В. Зыза

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА

Изучены условия существования обобщенного класса полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Построено новое частное решение рассматриваемой задачи, которое зависит от трех независимых параметров и описывается функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: *полиномиальные решения, гиростат, эффект Барнетта–Лондона, инвариантное соотношение, интегралы Лежандра.*

Введение. Моделирование движения гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием широкого класса сил приводит к исследованию решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. К таким системам относится и задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Этот эффект изучен в работах [1–6] для нейтральных ферромагнетиков и сверхпроводящих тел.

Уравнения движения в этом случае не допускают интеграл энергии. Это обстоятельство затрудняет решение задачи и объясняет актуальность построения частных решений в замкнутом виде [7–14]. Среди частных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона отдельно выделяют решения полиномиального вида, которые являются обобщением решений полиномиальной структуры классической задачи динамики твердого тела и задачи динамики тяжелого гиростата [8–14].

В данной статье начато изучение нового полиномиального класса решений, который обобщает [15, 16] класс решений полиномиальной структуры А.И. Докшевича. Функции, задающие инвариантные соотношения рассматриваемого класса решений, являются алгебраическими многочленами от первой компоненты вектора угловой скорости гиростата. Получено новое решение указанной выше задачи.

1. Постановка задачи. Структура обобщенного класса полиномиальных решений А.И. Докшевича. Рассмотрим движение гиростата, имеющего неподвижную точку, в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона, суть которого состоит в следующем. Если нейтральный ферромагнетик (первоначально ненамагниченный) поместить в магнитное поле и придать ему вращение, то в силу эффекта Барнетта он становится намагниченным вдоль оси вращения [1]. Подобное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона) [2]. Согласно гипотезе Вейсса, ввиду доменной структуры ферромагнетика, спонтанная намагниченность в различных участках тела направлена по-разному и в отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнетик не намагничен. Однако, при внесении его в даже слабое магнитное поле магнитные силы стремятся повернуть вектор намагниченности в направлении магнитного поля. Взаимодействие вызванной вращением ферромагнетика (сверхпроводника) намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента твердого тела вокруг вектора поля [4].

Исследование и изучение движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона на практике имеет важное значение, например, при определении предельной точности навигационных систем, использующих неконтактный подвес.

При математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, возникающий в результате указанного эффекта. Это обстоятельство приводит к тому, что уравнения движения тела с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона не допускают интеграла энергии, в отличие от уравнений Эйлера–Пуассона и уравнений класса Кирхгофа. Это обусловлено тем, что имеет место диссипация энергии: "перекачка" энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения твердого тела. Поэтому для интегрирования уравнений такого движения недостаточно построить дополнительный первый интеграл [17, 18].

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и момента ньютоновских сил в векторном виде таковы [7]:

$$A\overset{\bullet}{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{s}), \quad \overset{\bullet}{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Первые интегралы уравнений (1):

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} = k_0. \tag{2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением [8]

$$\big[(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})\big]^{\bullet} = 2(B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

В уравнениях (1)–(3) обозначения таковы: $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\ \nu_2, \nu_3)$ – орт, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая магнитный момент гиростата $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$; матрица $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, характеризующая ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром (центральное ньютоновское поле сил); k_0 – постоянная интеграла площадей; точка над переменными обозначает относительную производную.

Если $B = \widetilde{\xi}E$ (E – единичная матрица, $\widetilde{\xi}$ – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнения движения из системы (1). Тогда уравнения (1) по своей структуре будут совпадать с уравнениями задачи о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил [7] и относиться к уравнениям класса Кирхгофа [19]. В этом случае полученные для уравнений (1) результаты следует сопоставлять с результатами [7].

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений вида

$$
\begin{gathered}
q = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \qquad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \\
\nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \qquad \nu_2 = \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \qquad \nu_3 = \frac{\varkappa(p)}{p}\sqrt{R(p)}, \\
\varkappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежашие определению; n, m, l, n_1, m_1 – целые неотрицательные числа.

Указанный класс полиномиальных решений (4) обобщает класс решений полиномиальной структуры Докшевича [16]. При условии $f_0 = 0$ этим классом описывается полиномиальное решение А.И. Докшевича задачи о движении тяжелого гиростата [15].

Подставим алгебраические инвариантные соотношения (4) в уравнения движения (1) и геометрический интеграл из (2). Получим

$$
\dot{p} = \Phi(p)\sqrt{R(p)}(\psi'(p))^{-1}, \quad \Phi(p) = \varkappa(p) - \varphi(p); \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\psi'(p)\big[p\psi(p) - Q(p)\varkappa(p)\big] = \varphi'(p)\Phi(p)p, \\
&(R(p)\varkappa^2(p)p^{-2})'\Phi(p)p = 2\psi'(p)\varkappa(p)(Q(p)\varphi(p) - p\psi(p)), \\
&A_1\Phi(p)p = \psi'(p)\Big\{\big[(C_3 - C_2)\psi(p) + B_2 Q(p) + s_2\big]\varkappa(p) + \\
&\qquad + (A_2 - A_3)Q(p)p - B_3\psi(p)p + \lambda_2 p\Big\}, \\
&A_2 Q'(p)\Phi(p)p = \psi'(p)\Big\{\big[(C_1 - C_3)\varphi(p) - B_1 p - s_1\big]\varkappa(p) + \\
&\qquad + \big(B_3\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1\big)p\Big\}, \\
&A_3 R'(p)\Phi(p) = 2\psi'(p)\Big\{\big[(C_2 - C_1)\psi(p) - B_2 Q(p) - s_2\big]\varphi(p) + \\
&\qquad + \big(B_1\psi(p) + (A_1 - A_2)Q(p) - \lambda_2\big)p + s_1\psi(p) + \lambda_1 Q(p)\Big\};
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\big[\varphi^2(p) + \psi^2(p) - 1\big]p^2 + R(p)\varkappa^2(p) = 0. \tag{7}
$$

В уравнениях (5), (6) штрихом обозначена производная по переменной p. Если функции $Q(p), R(p), \varphi(p), \psi(p), \varkappa(p)$ определены, то зависимость $p = p(t)$ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (5).

2. Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда полиномы из (4) имеют следующие степени: $\deg Q = 3$, $\deg R = 6$, $\deg\varphi = \deg\psi = 3$, $\deg\varkappa = 1$. Тогда

$$\begin{gathered} q = Q(p) = b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0, \\ r^2 = R(p) = c_6p^6 + c_5p^5 + c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0, \\ \nu_1 = \varphi(p) = a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad \nu_2 = \psi(p) = g_3p^3 + g_2p^2 + g_1p + g_0, \\ \nu_3 = \frac{\varkappa(p)}{p}\sqrt{R(p)}, \qquad \varkappa(p) = f_1p + f_0. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставим выражения для компонет векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (8) в уравнения (6) и геометрический интеграл (7). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p, приводит к системе условий на параметры задачи и решения (8):

$$\begin{aligned}
&(\alpha g_3 + B_2b_3)f_1 + (A_2 - A_3)b_3 - B_3g_3 = 0,\\
&(\alpha g_2 + B_2b_2)f_1 + (\alpha g_3 + B_2b_3)f_0 + (A_2 - A_3)b_2 - B_3g_2 = 0,\\
&A_1a_3 + 3g_3d_2 = 0, \quad A_1a_2 + 2g_2d_2 + 3g_3d_1 = 0,\\
&A_1(a_1 - f_1) + g_1d_2 + 2g_2d_1 + 3g_3d_0 = 0,\\
&A_1(a_0 - f_0) + g_1d_1 + 2g_2d_0 = 0, \quad g_1d_0 = 0, \quad A_1(g_3 - b_3f_1) - 3a_3d_2 = 0,\\
&A_1(b_2f_1 + b_3f_0 - g_2) + 2a_2d_2 + 3a_3d_1 = 0, \qquad c_0 = 0, \qquad c_1 = 0,\\
&A_1(b_1f_1 + b_2f_0 - g_1) + a_1d_2 + 2a_2d_1 + 3a_3d_0 = 0,\\
&A_1(b_0f_1 + b_1f_0 - g_0) + a_1d_1 + 2a_2d_0 = 0, \qquad A_1b_0f_0 + a_1d_0 = 0,\\
&\gamma_4d_2 - 2A_1b_3a_3 = 0, \qquad \gamma_4d_1 + \gamma_3d_2 - 2A_1(b_3a_2 + b_2a_3) = 0,\\
&\gamma_4d_0 + \gamma_3d_1 + \gamma_2d_2 - 2A_1(b_3a_1 + b_2a_2 + b_1a_3 - g_3) = 0,\\
&\gamma_3d_0 + \gamma_2d_1 + \gamma_1d_2 - 2A_1(b_3a_0 + b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3 - g_2) = 0,\\
&\gamma_2d_0 + \gamma_1d_1 + \gamma_0d_2 - 2A_1(b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2 - g_1) = 0,\\
&\gamma_1d_0 + \gamma_0d_1 - 2A_1(b_1a_0 + b_0a_1 - g_0) = 0, \qquad \gamma_0d_0 - 2A_1b_0a_0 = 0,\\
&3A_2b_3d_2 - A_1(\beta a_3f_1 + B_3a_3) = 0,\\
&A_2(2b_2d_2 + 3b_3d_1) - A_1\big[(\beta f_1 + B_3)a_2 + \beta a_3f_0\big] = 0,\\
&A_2(b_1d_2 + 2b_2d_1 + 3b_3d_0) - A_1\big[(\beta a_1 - B_1)f_1 + B_3a_1 + \beta a_2f_0 + A_3 - A_1\big] = 0,\\
&A_2(b_1d_1 + 2b_2d_0) - A_1\big[(\beta a_0 - s_1)f_1 + (\beta a_1 - B_1)f_0 + B_3a_0 - \lambda_1\big] = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&A_2 b_1 d_0 - A_1(\beta a_0 - s_1) f_0 = 0, \qquad 3A_3 c_6 d_2 - A_1 \delta_3 a_3 = 0,\\
&A_3(6c_6 d_1 + 5c_5 d_2) - 2A_1(\delta_3 a_2 + \delta_2 a_3) = 0,\\
&A_3(6c_6 d_0 + 5c_5 d_1 + 4c_4 d_2) - 2A_1\big[\delta_3 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_1 a_3 + B_1 g_3 +\\
&\qquad\qquad + (A_1 - A_2) b_3\big] = 0,\\
&A_3(5c_5 d_0 + 4c_4 d_1 + 3c_3 d_2) - 2A_1\big[\delta_3 a_0 + \delta_2 a_1 + \delta_1 a_2 + \delta_0 a_3 + B_1 g_2 +\\
&\qquad\qquad + (A_1 - A_2) b_2 + s_1 g_3 + \lambda_1 b_3\big] = 0,\\
&A_3(4c_4 d_0 + 3c_3 d_1 + 2c_2 d_2) - 2A_1\big[\delta_2 a_0 + \delta_1 a_1 + \delta_0 a_2 + B_1 g_1 +\\
&\qquad\qquad + (A_1 - A_2) b_1 + s_1 g_2 + \lambda_1 b_2\big] = 0,\\
&A_3(3c_3 d_0 + 2c_2 d_1) - 2A_1\big[\delta_1 a_0 + \delta_0 a_1 + B_1 g_0 +\\
&\qquad\qquad + (A_1 - A_2) b_0 - \lambda_2 + s_1 g_1 + \lambda_1 b_1\big] = 0,\\
&c_2 A_3 d_0 - A_1(\delta_0 a_0 + s_1 g_0 + \lambda_1 b_0) = 0, \qquad a_0^2 + g_0^2 + c_2 f_0^2 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\alpha = C_3 - C_2, \qquad \beta = C_1 - C_3,\\
&d_2 = (\alpha g_1 + B_2 b_1) f_1 + (\alpha g_2 + B_2 b_2) f_0 + (A_2 - A_3) b_1 - B_3 g_1,\\
&d_1 = (\alpha g_0 + B_2 b_0 + s_2) f_1 + (\alpha g_1 + B_2 b_1) f_0 + (A_2 - A_3) b_0 - B_3 g_0 + \lambda_2,\\
&d_0 = (\alpha g_0 + B_2 b_0 + s_2) f_0,\\
&\gamma_0 = 2c_2 f_1 + c_3 f_0, \qquad \gamma_1 = 3c_3 f_1 + 2c_4 f_0, \qquad \gamma_2 = 4c_4 f_1 + 3c_5 f_0,\\
&\gamma_3 = 5c_5 f_1 + 4c_6 f_0, \qquad \gamma_4 = 6c_6 f_1,\\
&\delta_0 = -\big[(\alpha+\beta) g_0 + B_2 b_0 + s_2\big], \qquad \delta_1 = -\big[(\alpha+\beta) g_1 + B_2 b_1\big],\\
&\delta_2 = -\big[(\alpha+\beta) g_2 + B_2 b_2\big], \qquad \delta_3 = -\big[(\alpha+\beta) g_3 + B_2 b_3\big].
\end{aligned}
$$

Система алгебраических уравнений (9) совместна относительно ненулевых параметров a_3, g_3, A_3. Считая $f_0 \neq 0,\ d_0 = 0$ и обозначая $h = g_3 a_3^{-1}$, запишем решение системы (9) в виде

$$
\begin{aligned}
&A_2 = A_3, \qquad A_1 = \frac{5}{3} A_3, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \frac{6(1+h^2) A_3 \mu_1^2}{25 f_0^{4/3} a_3^{2/3} h^2},\\
&B_2 = \frac{A_3 \mu_1}{\sqrt[3]{a_3 f_0^2}}, \qquad B_3 = \frac{(1+h^2) A_3 \mu_1}{\sqrt[3]{a_3 f_0^2} h^2},\\
&B_1 = \frac{A_3 \mu_1 \big[81(1+h^2) h \mu_1^3 - 45(1+h^2)\mu_1^2 \mu_2 + 125(8+15h^2) h\big]}{1875 \sqrt[3]{a_3 f_0^2} h^3},
\end{aligned}
$$

$$s_2 = 0, \qquad s_1 = \frac{2(1+h^2)(\mu_2+3h)(\mu_2^2-3\mu_2 h+9h^2)A_3\mu_1^2}{225\sqrt[3]{a_3^2 f_0}h^5},$$

$$\lambda_1 = -\bigl[729(1+h^2)h^3\mu_1^4 - 675(1+h^2)h\mu_1^2\mu_2^2 - 125(2(1+h^2)\mu_2^3+$$
$$+9(1-6h^2)h^3)\mu_1 - 625h^2\mu_2\bigr]A_3 f_0^{1/3}/(16875\sqrt[3]{a_3}h^5),$$

$$\lambda_2 = -\bigl[(9h\mu_1+5\mu_2)(81(1+h^2)h^2\mu_1^3+90(1+h^2)h\mu_1^2\mu_2+25(1+h^2)\mu_1\mu_2^2-$$
$$-125h^2)A_3 f_0^{1/3}\bigr]/(3375a_3^{1/3}h^6),$$

$$a_2 = \frac{\sqrt[3]{a_3^2 f_0}\mu_2}{h}, \quad a_1 = -\frac{(5h^2-\mu_1\mu_2^2)\sqrt[3]{a_3 f_0^2}}{3h^2\mu_1}, \quad a_0 = \Delta_1 f_0,$$

$$g_2 = \sqrt[3]{a_3^2 f_0}\mu_2, \quad g_1 = \frac{\sqrt[3]{a_3 f_0^2}\mu_2^2}{3h}, \quad g_0 = \Delta_2 f_0,$$

$$c_6 = -\frac{9a_3^{4/3}(1+h^2)\mu_1^2}{25f_0^{4/3}}, \qquad c_5 = -\frac{18(1+h^2)(3h\mu_1+5\mu_2)\mu_1^2 a_3}{125hf_0}, \tag{10}$$

$$c_4 = -\bigl[3\bigl(81(1+h^2)h^2\mu_1^3+180(1+h^2)h\mu_1^2\mu_2+125(1+h^2)\mu_1\mu_2^2-$$
$$-250h^2\bigr)\mu_1 a_3^{2/3}\bigr]/(625h^2 f_0^{2/3}),$$

$$c_3 = -\bigl[2\bigl(729(1+h^2)h^3\mu_1^4+2430(1+h^2)h^2\mu_1^3\mu_2+2700(1+h^2)h\mu_1^2\mu_2^2+$$
$$+1125\bigl((1+h^2)\mu_2^3-2h^3\bigr)\mu_1-5000h^2\mu_2\bigr)\mu_1\bigr]/(9375h^3 f_0^{1/3}a_3^{-1/3}),$$

$$c_2 = -\frac{1}{46875h^4}\Bigl\{2187(1+h^2)h^4\mu_1^6+7290(1+h^2)h^3\mu_1^5\mu_2+$$
$$+10125(1+h^2)h^2\mu_1^4\mu_2^2+6750h((1+h^2)\mu_2^3-h^3)\mu_1^3+$$
$$+1875((1+h^2)\mu_2^3-8h^3)\mu_1^2\mu_2-12500h^2\mu_2^2\mu_1+46875h^4\Bigr\}, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0,$$

$$b_3 = -\frac{3(1+h^2)\mu_1 a_3^{2/3}}{5hf_0^{2/3}}, \quad b_2 = -\frac{3(1+h^2)(3h\mu_1+5\mu_2)\mu_1 a_3^{1/3}}{25h^2 f_0^{1/3}},$$

$$b_1 = -\frac{(1+h^2)(81h^2\mu_1^2+135h\mu_1\mu_2+75\mu_2^2)\mu_1-125h^2}{375h^3}, \qquad b_0 = 0,$$

$$f_1 = -\frac{5(a_3 f_0^2)^{1/3}}{3\mu_1}, \qquad f_0 = (\Delta_1^2+\Delta_2^2+c_2)^{-1/2}.$$

Здесь

$$\mu_1 = \frac{5\big(9(2\xi - 17h^2 - 1)\big)^{1/3}}{9(h^2+1)^{1/3}}, \qquad \xi = \sqrt{73h^4 + 10h^2 + 1},$$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt[3]{9}h\big[35h^2 + 3 - 4\xi + (137h^4 + 2(5-8\xi)h^2 + 1)^{1/2}\big]}{2(1+h^2)^{1/3}(2\xi - 17h^2 - 1)^{2/3}},$$

$$\Delta_1 = \frac{(3h + \mu_2)(\mu_2^2 - 3h\mu_2) + 9h^2)}{27h^3},$$

$$\Delta_2 = -\big[729(h^2+1)h^3\mu_1^4 + 1215(h^2+1)h^2\mu_1^3\mu_2 + 675(h^2+1)h(\mu_1\mu_2)^2 + \\ +125(\mu_1^3 - 9h^3)\mu_1 - 625h^2\mu_2\big](3375h^4\mu_1)^{-1}.$$

Зависимость переменной p от времени в решении (8) устанавливаем из дифференциального уравнения, вытекающего из (5):

$$\dot{p} = -\frac{(3ha^{1/3}p + f_0^{1/3}\mu_2)p}{9h^2a_3^{1/3}}\sqrt{R^*(p)}, \qquad R^*(p) = c_6p^4 + c_5p^3 + c_4p^2 + c_3p + c_2. \quad (11)$$

Укажем, при выполнении условий (10) , (11), численный пример действительного решения (8) уравнений (5), (6). Пусть

$$A_3 = a, \qquad a_3 = f_0 = f, \qquad h = \frac{1}{20} \qquad (a > 0,\ f > 0). \quad (12)$$

Тогда из условий (10) имеем

$$A_1 = \frac{5}{3}a, \qquad A_2 = a, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \frac{2406\widetilde{\mu}_1^2 a}{25f^2},$$

$$B_1 = \frac{(7\xi_0 + 4369)\widetilde{\mu}_1 a}{30f}, \quad B_2 = \frac{\widetilde{\mu}_1 a}{f}, \quad B_3 = \frac{401\widetilde{\mu}_1 a}{f},$$

$$\boldsymbol{s} = \big(802(3 + 20\widetilde{\mu}_2)(400\widetilde{\mu}_2^2 - 60\widetilde{\mu}_2 + 9)\widetilde{\mu}_1^2 a(225f)^{-1};\ 0;\ 0\big),$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\widetilde{\mu}_1 a}{12030}\big(11\xi_0 + 1291; -100(7\xi_0 + 1259); 0\big)$$

$$q = -\frac{p}{1500}\big[18045\widetilde{\mu}_1 p^2 + 3609(3\widetilde{\mu}_1 + 100\widetilde{\mu}_2)\widetilde{\mu}_1 p + 25(2\xi_0 - 799)\big],$$

$$r = p\sqrt{R^*(p)},$$

$$R^*(p) = \frac{1}{2894418 \cdot 10^4}\Big[-10445954562\widetilde{\mu}_1^2 p^4 + 24120150(5\xi_0 - 2847)p^3 - \\ - 21708135(7\xi_0 - 3601)\widetilde{\mu}_1 p^2 - 45(\xi_0 - 409)(4\widetilde{\mu}_2)^{-1}(5151\xi_0 - 1750861)p + \\ + 20050(5596\xi_0 - 3545493)\Big], \qquad (13)$$

$$\nu_1 = \frac{f}{27\widetilde{\mu}_1}\big[27\widetilde{\mu}_1 p^3 + 540\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_2 p^2 + 45(80\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_2^2 - 1)p + (8000\widetilde{\mu}_2^3 + 27)\widetilde{\mu}_1\big],$$

$$\nu_2 = \frac{f}{86832540\widetilde{\mu}_1}\big[4341627\widetilde{\mu}_1 p^3 + 86832540\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_2 p^2 + 578883600\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_2^2 p - \\ - 9(82202\,\xi_0 - 31508599)\widetilde{\mu}_1 + 643204 \cdot 10^4\widetilde{\mu}_2\Big], \nu_3 = \frac{f}{3\widetilde{\mu}_1}(-5p + 3\widetilde{\mu}_1)\sqrt{R^*(p)},$$

где

$$\widetilde{\mu}_1 = 5\Big(\frac{2\xi_0 - 417}{81 \cdot 401}\Big)^{1/3}, \qquad \widetilde{\mu}_2 = -\frac{3^{5/3} \cdot 401^{-1/3}(\xi_0 - 409)}{40(2\xi_0 - 417)^{\frac{2}{3}}},$$

$$f = \frac{3}{16\sqrt{5317}}\sqrt{71083129 - 9 \cdot 19157\xi_0}, \qquad \xi_0 = \sqrt{164073}.$$

Функцию $p = p(t)$ получим обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из уравнения

$$\dot{p} = -\frac{20}{9}(3p + 20\widetilde{\mu}_2)p\sqrt{R^*(p)} \quad \text{при} \quad p \in \Big[-\frac{3}{2};\ -\frac{71}{50}\Big]. \qquad (14)$$

На указанном в (14) отрезке изменения p функция $R^*(p)$ принимает положительные значения. Следовательно, действительность решения (12) – (14) установлена.

Построенное решение (12) – (14) также можно характеризовать как решение с одним линейным инвариантным соотношением вида

$$\frac{g_3}{a_3}\nu_1 - \nu_2 + \frac{a_3 g_1 - a_1 g_3}{a_3}p + \frac{a_3 g_0 - a_0 g_3}{a_3} = 0,$$

производная которого в силу уравнений (1) не обращается тождественно в нуль.

Заключение. Найдено новое частное решение обобщенного полиномиального класса Докшевича дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Это решение зависит от трех свободных параметров задачи и может быть выражено функциями, полученными в результате обращения эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

1. *Barnett S.I.* Gyromagnetic and Electron – Inertia Effects // Rev. Modern. Phys. – 1935. – **7** (2). – P. 129–166.

2. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
4. *Урман Ю.Н.* Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – **276**, № 6. – С. 1402–1404.
5. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
6. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
8. *Зыза А.В.* О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61–70.
9. *Зыза А.В.* Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле // Тр. ИПММ НАНУ. – 2012. – **24**. – С. 116–123.
10. *Зыза А.В., Ткаченко Д.Н.* Условия существования полиномиального решения Докшевича в одной задаче динамики гиростата // Вісн. Донецьк. національного ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013. – Вип. 1. – С. 37–41.
11. *Зыза А.В.* Новое решение уравнений движения гиростата в магнитном поле // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2015. – **29**. – С. 51–59.
12. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – **10**, № 1. – С. 7–25.
13. *Зыза А.В.* Новый случай интегрируемости в задаче о движении твердого тела в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 48. – С. 36–44.
14. *Зыза А.В., Платонова Е.С.* Новое полиномиальное решение одной задачи о движении гиростата // Вестн. Донецк. национального ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 36–41.
15. *Докшевич А.И.* Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 12–15.
16. *Зыза А.В.* Полиномиальные решения двух задач динамики гиростата // XII Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, Россия, 19–24 августа 2019 г.). – Т. 1. Общая и прикладная механика. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 75–77.
17. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
18. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
19. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.

A.V. Zyza

Algebraic invariant relations in the solution of one gyrostat motion problem

We study the existence conditions for one generalized class of polynomial solutions of differential equations related to the gyrostat motion problem in magnetic field considering Barnett–London effect. A new particular solution of the problem under consideration is constructed. This solution depends on three independent parameters and is described with functions obtained by the inversion of the elliptic Legendre integrals of the third kind.

Keywords: *polynomial solutions, gyrostat, Barnett–London effect, invariant relation, Legendre integrals.*

ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т", Донецк
z9125494@mail.ru

Получено 11.10.19