УДК 517.946

Е. А. Калита

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КОНИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

Для слабо нелинейных эллиптических систем второго порядка дивергентного и недивергентного вида получены весовые оценки решения в окрестности конической точки границы. Полученные оценки зависят от геометрии области и близости системы к оператору Лапласа.

Для эллиптических систем второго порядка при условиях определенной близости системы к оператору Лапласа вопросы гладкости обобщенного решения внутри области и вблизи гладкой границы изучались в [1, 2]. В данной работе получены некоторые весовые оценки обобщенного решения вблизи конической точки границы при аналогичных условиях на систему.

1. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, рассмотрим эллиптическую систему

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k a_k^i(x, u, \mathcal{D}u) - a_0^i(x, u, \mathcal{D}u) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

коэффициенты которой измеримы и удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_k^i(x, u, \xi)\, \xi_k^i \geqslant \mu |\xi|^2 - c|u|^p - f(x),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} |a_k^i(x, u, \xi)|^2 \leqslant \nu^2 |\xi|^2 + c|u|^p + f(x), \tag{2}$$

$$|a_0^i(x, u, \xi)|^{p'} \leqslant c|\xi|^2 + c|u|^p + f_1(x),$$

$$\mu, \nu > 0, \ p^{-1} + p'^{-1} = 1, \ f, f_1 \in L_1(\Omega), \ p > 2,$$

определим ниже. Через c здесь и далее будем обозначать различные несущественные положительные константы.

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3.

Пусть $0 \in \partial\Omega$. Введем константу K, характеризующую близость главной части системы к оператору Лапласа в окрестности точки 0:

$$K = \inf \Big\{ K_\rho : \exists \rho > 0,\ \varkappa^i \in \mathbb{R}\ \forall x \in \Omega_\rho \equiv \{x \in \Omega : |x| < \rho\} \forall u, \xi$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i - \varkappa^i a_k^i (x, u, \xi)|^2 \leqslant K_\rho |\xi|^2 + c|u|^p + cf(x) \Big\}.$$

Отметим, что $K \leqslant 1 - \mu^2/\nu^2$ [2]. Обозначим $\lambda = \varliminf\limits_{\rho \to 0} \lambda(\rho)$, где $\lambda(\rho)$ — первое собственное число сферической части оператора $-\Delta$ в области $\omega_\rho = \{\frac{x}{\rho} : x \in \Omega,\ |x| = \rho\}$ (если ω_ρ содержит несколько компонент связности, $\lambda(\rho)$ — наименьшее из собственных чисел, соответствующих этим компонентам). При $|a| < a_0 = \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda}$ положим

$$M_\lambda(a) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a^2}{\lambda + \dfrac{(n-2)^2 - a^2}{4}}, & |a| \leqslant n-2, \\ 1 + \dfrac{\lambda a^2}{\left(\lambda + \dfrac{(n-2)^2 - a^2}{4}\right)^2}, & n-2 \leqslant |a| < a_0. \end{cases}$$

Обозначим $W^m_{p,a}$ — пространство с нормой

$$\|u\|_{W^m_{p,a}} = \Big(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u|^p |x|^a dx\Big)^{1/p}.$$

При $m = 0$ будем обозначать его $L_{p,a}$.

Теорема 1. Пусть при некотором $a \in (-a_0; 0]$

$$KM_\lambda(a) < 1, \tag{3}$$

в условиях (2) $f \in L_{1,a}$, $f_1 \in L_{1,\frac{ap'}{2}}$, при $n = 2$ $p < \infty$, при $n \geqslant 3$, $a > -n$ $p = \dfrac{2n}{n-2}$, при $a \leqslant -n$ $p < 2 + \dfrac{8}{(n-2)(2-n-a)}$. Пусть $u \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ — обобщенное решение (1). Тогда $u \in W^1_{2,a}$.

Из определения M_λ и $K < 1$ следует, что условие (3) выполнено на некотором интервале $|a| < a_\lambda$, где $a_\lambda \in (0; a_0]$ определяется условием $KM_\lambda(a_\lambda) = 1$ при $K > 0$, $a_\lambda = a_0$ при $K = 0$.

Доказательство. Для $v \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega_\rho)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v\,dx = \int\limits_{\Omega_\rho} \Big(\mathcal{D}u\mathcal{D}v - \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \varkappa^i a_k^i (x, u, \mathcal{D}u)\, \mathcal{D}_k v^i\Big) dx,$$

$\mathcal{D}u\mathcal{D}v = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k u^i \mathcal{D}_k v^i$. По неравенству Гельдера, определению K и условиям (2) получаем

$$\int\limits_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v\,dx \leqslant \Big(K_\rho \int\limits_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}u|^2 r_\tau^a dx \int\limits_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}v|^2 r_\tau^{-a} dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \ldots, \tag{4}$$

где в многоточие включены младшие члены, $r = |x|$, $r_\tau = \begin{cases} r, & r > \tau, \\ \tau, & r \leqslant \tau, \end{cases}$ $\tau > 0$. Положим $v = ur_\tau^a \varphi$, где $\varphi \in C^\infty$ — срезающая функция: $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \rho/2, \\ 0, & |x| > \rho, \end{cases}$ $|\mathcal{D}^j \varphi| \leqslant c_j \rho^{-j}$. Главный член в правой части (4) оценивается по следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $\lambda_\rho = \inf\limits_{0<r<\rho} \lambda(r)$, $a_\rho = \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda_\rho}$, $u \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega_\rho)$, $v =$

$= ur_\tau^a$, $|a| < a_\rho$. Тогда

$$\int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}u|^2 r_\tau^a dx \int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}v|^2 r_\tau^{-a} dx \leqslant M_\lambda(a) \Big(\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx\Big)^2.$$

Доказательство. Неравенство достаточно проверить для $u \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega_\rho)$. Переходя в полярную систему координат, обозначим

$$I = \int_0^\rho \int_{\omega_r} \Big(u'^2 - \frac{u\Delta_\theta u}{r^2}\Big) r_\tau^a r^{n-1} d\theta dr,$$

$$I_u = \int_\tau^\rho \int_{\omega_r} u^2 r^{a+n-3} d\theta dr,$$

$$I_\tau = \tau^{a+n-2} \int_{\omega_\tau} u^2(\tau, \theta)\, d\theta,$$

где штрих обозначает $\partial/\partial r$, $\Delta_\theta = r^2 \Big(\Delta - r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big)$ — сферическая часть оператора Лапласа. Интегрирование по частям дает

$$\int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}u|^2 r_\tau^a dx = I,$$

$$\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx = I - a\frac{a+n-2}{2} I_u - \frac{a}{2} I_\tau, \tag{5}$$

$$\int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}v|^2 r_\tau^{-a} dx = I - a(n-2) I_u - aI_\tau,$$

откуда

$$\int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}u|^2 r_\tau^a dx \int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}v|^2 r_\tau^{-a} dx - \Big(\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx\Big)^2 =$$

$$= a^2 I_u \Big(I - \Big(\frac{a+n-2}{2}\Big)^2 I_u - \frac{a+n-2}{2} I_\tau\Big) - \frac{a^2}{4} I_\tau^2. \tag{6}$$

Нам понадобится следующий легко проверяемый вариант неравенства Харди:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} u'^2 r^{b+1} dr \geqslant c(b-c) \int_{\rho_1}^{\rho_2} u^2 r^{b-1} dr - cu^2(r)\, r^b \Big|_{\rho_1}^{\rho_2},$$

$b, c \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2$, $u \in W_2^1([\rho_1, \rho_2])$ (при $\rho_1 = 0$ предполагаем сходимость интегралов в нуле).

Применяя это неравенство на $(\tau; \rho)$ при $c = \frac{a+n-2}{2}$ и на $(0; \tau)$ при $c = \frac{a_\rho + n - 2}{2}$ и учитывая

$$-\int_{\omega_r} u\Delta_\theta u d\theta \geqslant \lambda(r) \int_{\omega_r} u^2 d\theta,$$

находим

$$I \geqslant \Big(\lambda_\rho + \Big(\frac{a+n-2}{2}\Big)^2\Big) I_u + \frac{a+a_\rho}{2} I_\tau.$$

Из (5) находим

$$\Big(\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx\Big)^2 \geqslant \Big[\Big(\lambda_\rho + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4}\Big) I_u + \frac{a_\rho}{2} I_\tau\Big]\Big[I - a\frac{a+n-2}{2} I_u -$$

$$-\frac{a}{2}I_\tau\Big] \geqslant \left(\lambda_\rho + \frac{(n-2)^2-a^2}{4}\right) I_u \left(I - a\frac{a+n-2}{2} I_u + \frac{a_\rho - a}{2} I_\tau\right) +$$

$$+\frac{a_\rho^2}{2} I_\tau^2.$$

При $|a| \leqslant n-2$, сравнивая соответствующие коэффициенты здесь и в (6), получаем нужную оценку. В случае $n-2 < |a| a_\rho$, представляя I в виде

$$I = \left(1 + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4\lambda_\rho}\right) I + \frac{a^2 - (n-2)^2}{4\lambda_\rho} I,$$

находим

$$\left(\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx\right)^2 \geqslant \left[\left(\lambda_\rho + \frac{(n-2)^2-a^2}{4}\right) I_u + \frac{a_\rho}{2} I_\tau\right]\left[I - a\frac{a+n-2}{2} I_u -\right.$$

$$\left.-\frac{a}{2} I_\tau\right] \geqslant \left(\lambda_\rho + \frac{(n-2)^2-a^2}{4}\right) I_u \left[\left(1 + \frac{(n-2)^2-a^2}{4\lambda_\rho}\right)\left(I - \left(\frac{a+n-2}{2}\right)^2 I_u\right) +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a^2-(n-2)^2}{4\lambda_\rho}\frac{a+a_\rho}{2} - \frac{a}{2}\right) I_\tau\right] + \frac{a_\rho}{2} I_\tau \left[\left(\lambda_\rho + \frac{(n-2)^2-a^2}{4}\right) I_u + \frac{a_\rho}{2} I_\tau\right].$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты здесь и в (6), приходим к утверждению леммы.

Оценивая младшие члены в (4) по вложению пространств Соболева с весом Макенхоупта [3] и по неравенству Харди (при $a \leqslant -n$), получаем из (4)

$$\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx \leqslant (K_\rho M_{\lambda_\rho}(a) + \varepsilon_\rho)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx + c_\rho,$$

где $\varepsilon_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Если выполнено (3), при достаточно малых $\rho > 0$ это дает

$$\int_{\Omega_\rho} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx \leqslant c,$$

где c не зависит от $\tau > 0$. Учитывая лемму 1, при $\tau \to 0$ получаем утверждение теоремы.

Пусть $\partial\Omega$ гладкая вне точки 0, причем существует $\gamma > 0$ такое, что $|y|^{-1}\Omega_{\gamma|y|}(y)$ диффеоморфны с достаточной степенью гладкости полушару $B_\gamma^+ \equiv \{x : |x| < \gamma,\ x_n > 0\}$ равномерно по $y \in \partial\Omega$, $y \neq 0$. Здесь $t\Omega = \{tx : x \in \Omega\}$, $t \in \mathbb{R}$, $\Omega_\rho(y) = \Omega \cap B_\rho(y)$, $B_\rho(y) = \{x : |x - y| < \rho\}$.

Пусть коэффициенты системы (1) дифференцируемы и удовлетворяют условиям

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}^{ij}(x, u, \xi)\, \eta_k^i \eta_l^j \geqslant \mu_1 |\eta|^2,$$

$$|a_{kl}^{ij}(x, u, \xi)| \leqslant \nu_1,$$

$$|\partial a_k/\partial u|^q + |\partial a_0/\partial \xi|^q + |\partial a_0/\partial u|^{\frac{q}{2}} \leqslant c|\xi|^2 + c|u|^p + f_0(x), \tag{7}$$

$$|\partial a_k/\partial x|^2 \leqslant c|\xi|^2 + c|u|^p + f(x);$$

$$|\partial a_0/\partial x|^{p'} \leqslant c|\xi|^2 + c|u|^p + f_1(x),$$

$$a_{kl}^{ij} = \partial a_k^i/\partial \xi_l^j, \quad q = \frac{2p}{p-2}, \quad f_0 \in L_1(\Omega),$$

f, f_1 те же, что в (2).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $u \in W^2_{2,a+2}$.

Доказательство. Зафиксируем на единичной сфере S_1 конечный набор точек y^i, $i=\overline{1,M}$, такой, что $S_1 \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_{\frac{\gamma}{8}}(y^i)$. Тогда при некотором $h>1$

$$\{x: h^{-1}<|x|<h\} \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_{\frac{\gamma}{8}}(y^i).$$

Обозначим $\mathcal{U}_\rho=\{i: B_{\frac{\gamma}{4}\rho}(\rho y^i)\subset\Omega\}$, $\mathcal{U}'_\rho=\{i: B_{\frac{\gamma}{4}\rho}(\rho y^i)\cap\partial\Omega\neq\varnothing\}$. Если $i\in\mathcal{U}'_\rho$, выберем точку $y^i_\rho\in B_{\frac{\gamma}{4}\rho}(\rho y^i)\cap\partial\Omega$. Тогда $|y^i_\rho|>\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)\rho>\rho/2$, и множество $\Omega_{\frac{\gamma}{2}\rho}(y^i_\rho)$, содержащее $B_{\frac{\gamma}{4}\rho}(\rho y^i)$, диффеоморфно полушару. При этом

$$\Omega^h_\rho\subset\Big(\bigcup_{i\in U_\rho} B_{\frac{\gamma}{8}\rho}(\rho y^i)\Big)\cup\Big(\bigcup_{i\in U'_\rho}\Omega_{\frac{\gamma}{2}\rho}(y^i_\rho)\Big),$$

где $\Omega^h_\rho=\{x\in\Omega: h^{-1}<|x|/\rho<h\}$. Далее

$$\Omega_\rho\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}\Big[\Big(\bigcup_{i\in U_{\rho_k}} B_{\frac{\gamma}{8}\rho_k}(\rho_k y^i)\Big)\cup\Big(\bigcup_{i\in U'_{\rho_k}}\Omega_{\frac{\gamma}{2}\rho_k}(y^i_{\rho_k})\Big)\Big],\quad \rho_k=h^{-2k}\rho,$$

причем набор множеств $B_{\frac{\gamma}{4}\rho_k}(\rho_k y^i)$, $\Omega_{\gamma\rho_k}(y^i_{\rho_k})$ покрывает каждую точку из Ω не более чем $M\log_h 4$ раза.

Для множеств $\Omega_\rho(y)$, $y\in\partial\Omega$, $\rho\leqslant\gamma|y|$, стандартным путем получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega_{\frac{\rho}{2}}(y)}|\mathcal{D}^2u|^2dx\leqslant c\int\limits_{\Omega_\rho(y)}(\rho^{-2}|\mathcal{D}u|^2+\rho^{-4}|u|^2+f)\,dx+c\Big(\int\limits_{\Omega_\rho(y)}f_1dx\Big)^{2/p'},$$

и такая же оценка справедлива в шарах $B_\rho(y)\subset\Omega$. Учитывая свойства построенного покрытия и теорему 1, получаем $u\in W^2_{2,a+2}$.

2. Рассмотрим бесконечно удаленную угловую точку. Пусть $\infty\in\partial\Omega$, в условиях (2) $c=0$. Обозначим $\lambda_\infty=\lim\limits_{\rho\to\infty}\lambda(\rho)$, $a_\infty=\sqrt{(n-2)^2+4\lambda_\infty}$,

$$K_\infty=\inf\Big\{K_R:\exists R<\infty,\ \varkappa^i\in\mathbb{R}\ \forall x\in\Omega_R\equiv\{x\in\Omega:|x|>R\}\ \forall u,\xi$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}|\xi^i_k-\varkappa^i a^i_k(x,u,\xi)|^2\leqslant K_R|\xi|^2+cf(x)\Big\}.$$

Обозначим $L^m_{p,a}$ — пространство с нормой

$$\|u\|_{L^m_{p,a}}=\Big(\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}|\mathcal{D}^\alpha u|^p\,|x|^a dx\Big)^{1/p}.$$

Теорема 3. Пусть при некотором $a\in[0;a_\infty)$

$$K_\infty M_{\lambda_\infty}(a)<1,$$

$f\in L_{1,a}$, $f_1\in L_{1,\frac{ap'}{2}}$. Пусть $u\in\overset{0}{L}{}^1_2(\Omega)$ — обобщенное решение (1). Тогда $u\in L^1_{2,a}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и опирается на следующую оценку.

Лемма 2. Пусть $\lambda_R = \inf\limits_{R<r<\infty} \lambda(r)$, $a_R = \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda_R}$, $u \in \overset{0}{L}{}_2^1(\Omega)$, $v = ur_T^a$, $|a| < a_R$, $r_T = \begin{cases} r, & r < T \\ T, & r \geqslant T \end{cases}$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega_R} |\mathcal{D}u|^2 r_T^a dx \int\limits_{\Omega_R} |\mathcal{D}v|^2 r_T^{-a} dx \leqslant M_{\lambda_R}(a) \left(\int\limits_{\Omega_R} \mathcal{D}u\mathcal{D}v dx\right)^2.$$

Пусть теперь выполнены условия (7) с $c = 0$, область Ω в окрестности точки ∞ удовлетворяет приведенному выше условию регулярности.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $u \in L^2_{2,a+2}$.

3. Рассмотрим эллиптическую систему

$$a^i(x, u, Du, D^2u) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{8}$$

коэффициенты которой измеримы и удовлетворяют следующему аналогу условия Кордеса [2]:

$$\sum_{i=1}^N \Big| \sum_{k=1}^n \eta^i_{kk} - \varkappa^i a^i(x, u, \xi, \eta)\Big|^2 \leqslant L|\eta|^2 + c|\xi|^2 + c|u|^2 + f(x), \tag{9}$$

$$L < 1, \quad \varkappa^i > 0, \quad f \in L_1(\Omega).$$

Пусть $0 \in \partial\Omega$, средняя кривизна $\partial\Omega$ в направлении внешней нормали неположительна, область Ω в окрестности точки 0 строго коническая, т. е. при некотором $\rho > 0$ $\Omega_\rho = \left\{x : \frac{x}{|x|} \in \omega, |x| < \rho\right\}$, где ω — область на единичной сфере. Обозначим λ_s — s-е собственное число сферической части оператора $-\Delta$ в области ω, $s_0 = \min\{s : \lambda_s > n - 1\}$, $a^- = 2 - \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda_{s_0}}$,

$$M^1_\lambda(a) = \begin{cases} 1, & 3 - n \leqslant a \leqslant 0, \\ 1 + \max\limits_{s \geqslant s_0} Q(\lambda_s), & 2 - n \leqslant a \leqslant \min\{3 - n; 0\}, \\ 1 + Q(\lambda_{s_0}), & a^- < a \leqslant 2 - n; \end{cases}$$

$$Q(\lambda) = a\,\frac{(n-1)\left(\frac{4-n-a}{2}\right)^2 - \lambda(3-n-a)}{\left(\lambda + \frac{(n-2)^2 - (a-2)^2}{4}\right)^2}.$$

Теорема 5. Пусть при некотором $a \in (a^-; 0]$

$$LM^1_\lambda(a) < 1, \tag{10}$$

$f \in L_{1,a}$. Пусть $u \in W^2_2 \cap \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ — решение (8). Тогда $u \in W^2_{2,a}$.

Отметим, что M_λ^1 монотонна и непрерывна, и условие (10) выполнено на некотором интервале $a \in (a_\lambda^-; 0]$, где $a_\lambda^- \in [a^-; \min\{3-n; 0\})$ определяется условием $LM^1_\lambda(a_\lambda^-) = 1$ при $L > 0$, $a_\lambda^- = a^-$ при $L = 0$.

Доказательство. В смысле $L_2(\Omega)$ справедливо равенство

$$\Delta u^i = \Delta u^i - \varkappa^i a^i(x, u, \mathcal{D}u, \mathcal{D}^2u).$$

Возводя его в квадрат, умножая на $r_\tau^a\varphi$ и интегрируя, находим

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |\Delta u|^2 r_\tau^a \varphi dx \leqslant \int\limits_{\Omega_\rho} (L|\mathcal{D}^2 u|^2 + c|\mathcal{D}u|^2 + c|u|^2 + f)\, r_\tau^a \varphi dx. \tag{11}$$

Главный член в правой части оценивается по следующей лемме.

Лемма 3. Пусть $u \in W_2^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_\rho)$, $a \in (a^-; 0]$. Тогда

$$\int_{\Omega_\rho} |\mathcal{D}^2 u|^2 r_\tau^a dx \leqslant M_\lambda^1(a) \int_{\Omega_\rho} |\Delta u|^2 r_\tau^a dx.$$

Доказательство леммы, аналогично доказательству леммы 1, получается при разложении u в ряд по собственным функциям сферической части оператора Лапласа в области ω.

Из неравенства (11) находим

$$(1-(L+\varepsilon_\rho) M_\lambda^1(a)) \int_{\Omega_\rho} |\Delta u|^2 r_\tau^a \varphi dx \leqslant c,$$

где $\varepsilon_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, c не зависит от $\tau > 0$. При $\tau \to 0$ получаем утверждение теоремы.

4. Рассмотрим бесконечно удаленную угловую точку. Пусть $\infty \in \partial\Omega$, область Ω коническая в окрестности ∞. Пусть выполнено условие (9) с $c = 0$. Обозначим $a^+ = 2 + \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda_1}$,

$$M_\lambda^1(a) = 1 + Q(\lambda_1), \quad 0 \leqslant a < a^+.$$

Теорема 6. Пусть при некотором $a \in [0; a^+)$

$$LM_\lambda^1(a) < 1, \tag{12}$$

$f \in L_{1,a}$. Пусть $u \in L_2^2(\Omega)$ — решение (8), удовлетворяющее граничному условию $u|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда $u \in L_{2,a}^2$.

Отметим, что условие (12) выполнено на некотором интервале $a \in [0; a_\lambda^+)$, где $a_\lambda^+ \in (0; a^+]$ определяется условием $LM_\lambda^1(a_\lambda^+) = 1$ при $L > 0$, $a_\lambda^+ = a^+$ при $L = 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

1. *Кошелев А. И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.— М. : Наука, 1986.— 240 с.
2. *Калита Е. А.* Регулярность решений эллиптических систем типа Кордеса.— Донецк, 1989.— 40 с. (Препр. /АН УССР. Ин-т прикл. мат. и мех. № 89.01).
3. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ.— 1983.— 21.— С. 42—129.

Ин-т прикл. математики и
механики АН УССР, Донецк

Получено 25.06.89