УДК 517.98

А. А. Ковалевский

О G-СХОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Предлагается подход к определению понятий G-сходимости и сильной G-сходимости последовательности эллиптических операторов A_s, действующих из соболевских пространств $(\mathbb{W}^{1,m}(\Omega_s))$ в сопряженные с ними пространства $(\mathbb{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$ где Ω_s, $s = 1, 2, \ldots,$— области в $\mathbb{R}^n$. Вводимые понятия являются аналогами известных понятий G-сходимости и сильной G-сходимости эллиптических операторов с единой областью определения. Излагаются результаты, описывающие связь G-сходимости рассматриваемых операторов со сходимостью решений соответствующих операторных уравнений и вариационных неравенств.

В работе предлагается подход к определению понятий G-сходимости и сильной G-сходимости последовательности эллиптических операторов A_s, действующих из соболевских пространств $\mathbb{W}^{1,m}(\Omega_s)$ в сопряженные с ними пространства $(\mathbb{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$, где Ω_s, $s = 1, 2, \ldots,$— области в $\mathbb{R}^n$. Вводимые понятия являются аналогами понятий G-сходимости и сильной G-сходимости эллиптических операторов с единой областью определения [1, 2]. Излагаются результаты, описывающие связь G-сходимости рассматриваемых опеарторов со сходимостью решений соответствующих операторных уравнений и вариационных неравенств. Статья является развитием работ [3, 4], в которых изложены результаты о G-сходимости абстрактных операторов с различными областями определения.

1. **Исходные предположения и обозначения**. $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω. Предполагается, что

$$\text{для любого } s \in \mathbb{N} \text{ множество } \Omega \setminus \Omega_s \text{ замкнуто:} \tag{1}$$

$m > 1$, $m' = \dfrac{m}{m-1}$. Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение $W^{1,m}(\Omega)$ в $W^{1,m}(\Omega_s)$ такое, что для любого $u \in W^{1,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$. Предполагается, что выполняется условие:

$$\text{если } u \in W^{1,m}(\Omega), \quad \varliminf_{s\to\infty} \| q_s u \|^m_{L^m(\Omega_s)} = 0, \text{ то } u = 0 \text{ п. в. на } \Omega; \tag{2}$$

$\mathcal{P}$ — множество всех последовательностей $\{p_s\}$, удовлетворяющих условиям: для любого $s \in \mathbb{N}$ p_s — линейное непрерывное отображение $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $W^{1,m}(\Omega)$; $\sup\limits_s \| p_s \| < \infty$; если $s \in \mathbb{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, то $q_s(p_s u) = u$. Предполагается, что

$$\mathcal{P} \neq \varnothing. \tag{3}$$

Если $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, то $\varkappa_p = \sup\limits_s \| p_s \|$. $\varkappa = \inf \{\varkappa_p : \{p_s\} \in \mathcal{P}\}$.

2. **Вспомогательные предложения и необходимые определения.**

Предложение 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, причем

$$\sup_s \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty, \quad \lim_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{L^m(\Omega_s)} = 0. \tag{4}$$

Тогда для любой последовательности $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$. Предположим, что последовательность $\{p_s u_s\}$ не сходится слабо к u в $W^{1,m}(\Omega)$. Тогда существуют $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall t \in \mathbb{N} \ | \langle f, p_{s_t} u_{s_t} - u \rangle | \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

В силу первого из соотношений (4) и того, что $\varkappa_p < \infty$, последовательность $\{p_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,m}(\Omega)$. Поэтому существуют возрастающая последовательность $\{t_i\} \subset \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s_{t_i}} u_{s_{t_i}} \to v$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Отсюда и из второго соотношения в (4) получаем, что $\lim\limits_{s\to\infty} \| q_s (u - v) \|_{L^m(\Omega_s)} = 0$. Тогда в силу условия (2) $u = v$ почти всюду на Ω и, следовательно, $p_{s_{t_i}} u_{s_{t_i}} \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$, что противоречит (5). Полученное противоречие доказывает, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$.

Определение 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, если суще ствует последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ такая, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$.

Заметим, что, если для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, то для любой последовательности $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Этот вывод можно сделать на основании предложения 1, учитывая, что слабая сходимость последовательности $\{u_s\}$ к u влечет выполнение соотношений (4).

П р и м е р 1. Пусть $\{u_s\} \subset W^{1,m}(\Omega)$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, причем $u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Тогда последовательность $\{q_s u_s\}$ слабо сходится к u.

Далее, покажем, что, если $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, то $\varkappa_p \geqslant 1$. Действительно, пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, и пусть $s \in \mathbb{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \neq 0$. Тогда $\| u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = \| q_s \times \times (p_s u) \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leqslant \| p_s u \|_{W^{1,m}(\Omega)} \leqslant \| p_s \| \| u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$. Следовательно, $\| p_s \| \geqslant 1$. А поскольку здесь s произвольно, то $\varkappa_p \geqslant 1$. Теперь ясно, что и $\varkappa \geqslant 1$.

Предложение 2. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u. Тогда

$$\varliminf_{s\to\infty} \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \geqslant \varkappa^{-1} \| u \|_{W^{1,m}(\Omega)}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$, и пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, причем $\varkappa_p \leqslant \varkappa + t^{-1}$. Так как последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, то $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$ и, следовательно, $\varliminf_{s\to\infty} \| p_s u_s \|_{W^{1,m}(\Omega)} \geqslant \geqslant \| u \|_{W^{1,m}(\Omega)}$. Тогда при $s \geqslant s_t$.

$$\| p_s u_s \|_{W^{1,m}(\Omega)} \geqslant \| u \|_{W^{1,m}(\Omega)} - t^{-1}. \tag{7}$$

Теперь, учитывая (7), для любого $s \geqslant s_t$ получаем $\| u \|_{W^{1,m}(\Omega)} - t^{-1} \leqslant \leqslant \| p_s u_s \|_{W^{1,m}(\Omega)} \leqslant (\varkappa + t^{-1}) \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$. Следовательно,

$$\varliminf_{s\to\infty} \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \geqslant (\varkappa + t^{-1})^{-1} (\| u \|_{W^{1,m}(\Omega)} - t^{-1}).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по $t \to \infty$, получаем (6).

Предложение 3. Пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. Тогда

$$\varliminf_{s\to\infty} \| f \circ p_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \geqslant \| f \|_{(W^{1,m}(\Omega))^*}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$, и пусть $u_t \in \in W^{1,m}(\Omega)$, причем $\| u_t \|_{W^{1,m}(\Omega)} \leqslant 1$ и

$$\| f \|_{(W^{1,m}(\Omega))^*} \leqslant | \langle f, u_t \rangle | + t^{-1}. \tag{9}$$

Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$| \langle f \circ p_s, q_s u_t \rangle | \leqslant \| f \circ p_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}. \tag{10}$$

А так как последовательность $\{q_s u_t\}$ слабо сходится к u_t, то

$$\lim_{s\to\infty} | \langle f \circ p_s, q_s u_t \rangle | = | \langle f, u_t \rangle |.$$

Отсюда, а также из неравенств (9) и (10) выводим, что

$$\varliminf_{s\to\infty} \| f \circ p_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \geqslant \| f \|_{(W^{1,m}(\Omega))^*} - t^{-1}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $t \to \infty$, получаем (8).

Предложение 4. Пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $\{\bar{p}_s\} \in \mathcal{P}$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \| f \circ p_s - f \circ \bar{p}_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что равенство (11) не имеет место. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset$

$\subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall t \in \mathbb{N} \quad \| f \circ p_{s_t} - f \circ \bar{p}_{s_t} \|_{(W^{1,m}(\Omega_{s_t}))^*} \geqslant \varepsilon. \tag{12}$$

Зафиксируем для любого $t \in \mathbb{N}$ элемент $v_t \in W^{1,m}(\Omega_{s_t})$ такой, что

$$\| v_t \|_{W^{1,m}(\Omega_{s_t})} \leqslant 1, \tag{13}$$

$$\| f \circ p_{s_t} - f \circ \bar{p}_{s_t} \|_{(W^{1,m}(\Omega_{s_t}))^*} \leqslant | \langle f \circ p_{s_t} - f \circ \bar{p}_{s_t}, v_t \rangle | + t^{-1}. \tag{14}$$

В силу (13) и того, что $\varkappa_p < \infty$, последовательность $\{p_{s_t} v_t\}$ ограничена в $W^{1,m}(\Omega)$ и, следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{t_i\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s_{t_i}} v_{t_i} \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Отсюда и из предложения 1 вытекает, что и $\bar{p}_{s_{t_i}} v_{t_i} \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Теперь, учитывая (14), получаем $\lim\limits_{i \to \infty} \| f \circ p_{s_{t_i}} - f \circ \bar{p}_{s_{t_i}} \|_{(W^{1,m}(\Omega_{s_{t_i}}))^*} = 0$. Но это противоречит (12). Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (11).

Определение 2. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. Будем говорить, что последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f, если существует последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ такая, что

$$\lim_{s \to \infty} \| f_s - f \circ p_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0. \tag{15}$$

Заметим, что, если для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f, то для любой последовательности $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ справедливо равенство (15). Это следует из предложения 4.

Отметим еще, что, если для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in (W^{1,m} \times \times (\Omega))^*$, то следующие два предложения эквивалентны:

последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f; (16)

если для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, то $\lim\limits_{s \to \infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle$. (17)

Пример 2. Пусть $\{f_s\} \subset (W^{1,m}(\Omega))^*$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, причем $\lim\limits_{s \to \infty} \| f_s - f \|_{(W^{1,m}(\Omega))^*} = 0$; $\{p_s\} \in \mathcal{P}$. Тогда последовательность $\{f_s \circ p_s\}$ сильно сходится к f.

Пример 3. Пусть выполняется условие:

существует ограниченная измеримая функция b на Ω такая, что для любого куба $Q \subset \Omega$ $\lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes}(Q \cap \Omega_s) = \int\limits_Q b dx$. (18)

Пусть, далее $F \in L^{m'}(\Omega)$; для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $\langle f_s, u \rangle = \int\limits_{\Omega_s} F u dx \; (u \in W^{1,m}(\Omega_s))$; $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, $\langle f, u \rangle = \int\limits_{\Omega} F b u dx \; (u \in W^{1,m}(\Omega))$. Тогда последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f. Доказательство этого факта основывается на использовании условия (18) и эквивалентности предложений (16) и (17).

3. О G-сходимости эллиптических операторов. Пусть $0 < m_1 \leqslant \min(m, m')$, $m_2 \geqslant \max(m, 2)$, $c \geqslant 1$, и пусть для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ a_i^s — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, причем для любых $s \in \mathbb{N}$,

$x \in \Omega$, ξ, $\xi' \in \mathbb{R}$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} | a_i^s(x, 0, 0) | = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{i=0}^{n} | a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta') |^{m'} \leqslant c(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} \times$$

$$\times (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_1}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta'))(\eta_i - \eta_i') + (a_0^s(x, \xi, \eta) - a_0^s(x, \xi', \eta')) \times$$

$$\times (\xi - \xi') \geqslant c^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_2}. \tag{21}$$

Определим операторы A_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых u, $v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^s(x, u, \nabla u)\, \partial_i v + a_0^s(x, u, \nabla u)\, v \right\} dx.$$

Из соотношений (20) и (21) следует, что для любых $s \in \mathbb{N}$, u, $v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\| A_s u - A_s v \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \lambda (1 + \| u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_1} \times$$

$$\times \| u - v \|^{m_1}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{22}$$

$$\langle A_s u - A_s v, u - v \rangle \geqslant \lambda^{-1} (1 + \| u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_2} \times$$

$$\times \| u - v \|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{23}$$

где $\lambda > 1$ и зависит только от n, m, m_2, c, $\operatorname{mes} \Omega$. Из неравенств (22), (23) и [5, с. 182] вытекает, что операторы A_s обратимы.

Определение 3. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A, если из $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}((Au) \circ p_s)$ следует, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$.

Предложение 5. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Тогда оператор A обратим.

Доказательство. Пусть $u \in W^{1,m}(\Omega)$. Зафиксируем $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ и положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}((Au) \circ p_s)$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\langle A_s u_s, u_s \rangle = \langle Au, p_s u_s \rangle$. Отсюда и из (23), учитывая, что в силу (19) $A_s 0 = 0$, получаем неравенство

$$\langle Au, p_s u_s \rangle \geqslant 2^{m-m_2} \lambda^{-1} (\| u_s \|^m_{W^{1,m}(\Omega_s)} - 1). \tag{24}$$

Заметим, что в силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Используя это, из (24) и предложения 2 получаем

$$\langle Au, u \rangle \geqslant 2^{m-m_2} \lambda^{-1} \varkappa^{-m} \| u \|^m_{W^{1,m}(\Omega)} - 1. \tag{25}$$

Тем самым установлена коэрцитивность оператора A. Далее, если $s \in \mathbb{N}$, то из неравенства (22) и равенств $A_s 0 = 0$, $A_s u_s = (Au) \circ p_s$ следует, что $\| (Au) \circ p_s \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \lambda (1 + \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^m$. Используя это неравенство, а также неравенство (24), предложение 3 и слабую сходимость последовательности $\{p_s u_s\}$ к u в $W^{1,m}(\Omega)$, устанавливаем, что $\| Au \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega))^*} \leqslant \lambda (2^{m_2 - m} \lambda \langle Au, u \rangle + 2)$. Отсюда легко получить неравенство

$$\| Au \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega))^*} \leqslant 2^{m_2 m} \lambda^{2m} \| u \|^m_{W^{1,m}(\Omega)} + 2\lambda m. \tag{26}$$

Из этого неравенства следует ограниченность оператора A. Пусть еще $v \in W^{1,m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{N}$ $v_s = A_s^{-1}((Av) \circ p_s)$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ $A_s u_s = (Au) \circ p_s$, $A_s v_s = (Av) \circ p_s$ и потому в силу (22) и (23)

$$\| (Au - Av) \circ p_s \|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \lambda (1 + \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m - m_1} \times$$

$$\times \| u_s - v_s \|^{m_1}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \quad \| u_s - v_s \|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leqslant \lambda (1 + \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} +$$

$$+ \| v_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m_2 - m} \langle Au - Av, p_s u_s - p_s v_s \rangle.$$

Из этих неравенств, а также из неравенства (24) и аналогичного неравенства для v, v_s выводим, что

$$\| (Au - Av) \circ p_s \|^{m' m_3}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \lambda^{1 + m_3} \langle Au - Av, p_s u_s - p_s v_s \rangle \{1 + (2^{m_2 - m} \lambda \times$$

$$\times \langle Au, p_s u_s \rangle + 1)^{\frac{1}{m}} + (2^{m_2 - m} \lambda \langle Av, p_s v_s \rangle + 1)^{\frac{1}{m}} \}^{m(m_3 - 1)},$$

где $m_3 = \frac{m_2}{m_1}$. Отсюда, используя предложение 3 и слабую сходимость в $W^{1,m}(\Omega)$ последовательностей $\{p_s u_s\}$, $\{p_s v_s\}$ соответственно к u и v, получаем

$$\| Au - Av \|^{m' m_3}_{(W^{1,m}(\Omega))^*} \leqslant \lambda^{1 + m_3} \langle Au - Av, u - v \rangle \{1 + (2^{m_2 - m} \lambda \times$$

$$\times \langle Au, u \rangle + 1)^{\frac{1}{m}} + (2^{m_2 - m} \lambda \langle Av, v \rangle + 1)^{\frac{1}{m}} \}^{m(m_3 - 1)}. \tag{27}$$

Из этого неравенства, а также неравенства (26) и аналогичного неравенства для v следует непрерывность оператора A. Кроме того, из (27) следует, что $\langle Au - Av, u - v \rangle \geqslant 0$ и, значит, оператор A монотонен. Наконец, заметим, что, если $Au = Av$, то в силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A $u = v$ п. в. на Ω и, следовательно, оператор A инъективен. Установленные свойства оператора A позволяют заключить, что он обратим, и тем самым предложение 5 доказано.

Отметим, что используя предложение 5, легко показать, что последовательность $\{A_s\}$ может G-сходиться только к одному оператору A: $W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$.

Далее изложим результаты, показывающие, что G-сходимость операторов A_s сопровождается сходимостью решений некоторых операторных уравнений и вариационных неравенств. Эти результаты вытекают из следующей основной теоремы.

Теорема 1. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ V_s — непустое множество в $W^{1,m}(\Omega_s)$, V — непустое множество в $W^{1,m}(\Omega)$, причем выполняются условия:

если для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $v \in W^{1,m}(\Omega)$, последовательность $\{v_s\}$ слабо сходится к v, N_1 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$, то $v \in V$; (28)

если $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $v \in V$, $\forall s \in \mathbb{N}$ $v_s = A_s^{-1}((Av) \circ p_s)$, то существует последовательность $\{\bar{v}_s\}$ такая, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \ \bar{v}_s \in V_s \text{ и } \lim_{s \to \infty} \| \bar{v}_s - v_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0. \tag{29}$$

Пусть, далее

для любого $s\in\mathbb{N}$ $f_s\in(W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f\in(W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f; (30)

$$\forall s\in\mathbb{N}\quad u_s\in V_s; \tag{31}$$

$$\forall s\in\mathbb{N}\quad \forall v\in V_s\quad \langle A_s u_s-f_s,\ v-u_s\rangle\geqslant 0. \tag{32}$$

Тогда существует функция $u\in V$ такая, что

$$\forall v\in V\quad \langle Au-f,\ v-u\rangle\geqslant 0; \tag{33}$$

последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u; (34)

последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au. (35)

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условий теоремы следует неравенство $\sup\limits_s\|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}<\infty$. Зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{p_s\}\in\mathcal{P}$. Ясно, что $\sup\limits_s\|p_s u_s\|_{W^{1,m}(\Omega)}<\infty$. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_t\}\subset\mathbb{N}$ и функция $u\in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s_t}u_{s_t}\to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$, причем в силу (31) и условия (28) $u\in V$. Положим для любого $s\in\mathbb{N}$ $w_s=A_s^{-1}((Au)\circ p_s)$. В силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A $p_s w_s\to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$, а в силу условия (29) существует последовательность $\{\overline{w}_s\}$ такая, что $\forall s\in\mathbb{N}$ $\overline{w}_s\in V_s$ и

$$\lim_{s\to\infty}\|\overline{w}_s-w_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}=0. \tag{36}$$

Легко видеть, что для любого $s\in\mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\langle A_s u_s-A_s w_s,\ u_s-w_s\rangle=\langle A_s u_s-f_s,\ u_s-\overline{w}_s\rangle+\langle A_s u_s-f_s,\ \overline{w}_s-w_s\rangle+$$
$$+\langle f_s-f\circ p_s,\ u_s-w_s\rangle+\langle f-Au,\ p_s u_s-p_s w_s\rangle. \tag{37}$$

Положим

$$\mu=\sup_s\{\|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}+\|w_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}+\|f_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}+\|A_s u_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}\}.$$

Ясно, что $\mu<\infty$. Зафиксировав произвольное $s\in\mathbb{N}$, из (37), (23), (32) и того, что $\overline{w}_s\in V_s$, получаем

$$\|u_s-w_s\|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)}\leqslant\lambda(1+\mu)^{m_2-m}\{\mu\|\overline{w}_s-w_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}+$$
$$+\mu\|f_s-f\circ p_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}+\langle f-Au,\ p_s u_s-p_s w_s\rangle\}. \tag{38}$$

Из этого неравенства, учитывая (30), (36) и слабую сходимость последовательностей $\{p_{s_t}u_{s_t}\}$ и $\{p_s w_s\}$ к u в $W^{1,m}(\Omega)$ выводим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|u_{s_t}-w_{s_t}\|_{W^{1,m}(\Omega_{s_t})}=0$. Отсюда и из (22) следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\|A_{s_t}u_{s_t}-A_{s_t}w_{s_t}\|_{(W^{1,m}(\Omega_{s_t}))^*}=0. \tag{39}$$

Пусть теперь $v\in V$. В силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A и условия (29) существует последовательность $\{v_s\}$ такая, что $\forall s\in\mathbb{N}$ $v_s\in V_s$ и $p_s v_s\to v$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Ясно, что для любого $s\in\mathbb{N}$

$$\langle Au-f,\ v-u\rangle=\langle A_s u_s-f_s,\ v_s-u_s\rangle+\langle A_s w_s-A_s u_s,\ v_s-u_s\rangle+$$
$$+\langle f_s-f\circ p_s,\ v_s-u_s\rangle+\langle Au-f,\ p_s u_s-u\rangle+\langle f-Au,\ p_s v_s-v\rangle. \tag{40}$$

Используя (40), (32), (30), (39) и слабую сходимость в $W^{1,m}(\Omega)$ последовательностей $\{p_{s_t}u_{s_t}\}$ и $\{p_s v_s\}$ соответственно к u и v, получаем $\langle Au-f,$

$v-u\rangle \geqslant 0$ и тем самым (33) доказано. Перейдем к доказательству (34) и (35). Предположим, что последовательнсть $\{p_s u_s\}$ не сходится слабо к u в $W^{1,m}(\Omega)$. Тогда существуют возрастающая последсвательность $\{s'_t\} \subset \mathbb{N}$ и $u' \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s'_t} u_{s'_t} \to u'$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$ и u' не эквивалентна u. В силу (31) и условия (28) $u' \in V$. Ясно, что аналогично доказанному для u будем иметь: $\forall v \in V\ \langle Au' - f, v - u'\rangle \geqslant 0$. Отсюда и из (33) получаем $\langle Au - Au',\ u - u'\rangle \leqslant 0$. Из этого неравенства и неравенства (27) заключаем, что $Au = Au'$ и, следовательно, u' эквивалентна u. Полученное противоречие доказывает, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Значит, последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u. Теперь из (38) находим, что $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - w_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0$. Отсюда и неравенства (22), учитывая, что $A_s w_s = (Au) \circ p_s$, выводим равенство $\lim\limits_{s\to\infty} \| A_s u_s - (Au)\circ p_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0$, которое означает, что последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au. Теорема доказана.

Простым следствием теоремы 1 является следующий результат.

Теорема 2. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$, и пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f. Пусть, наконец, $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$, $u = A^{-1} f$. Тогда последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u.

Рассмотрим ряд предложений, описывающих примеры выполнения условий (28) и (29).

Предложение 6. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\chi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $\chi \in W^{1,m}(\Omega)$, причем $\lim\limits_{s\to\infty} \| \chi_s - q_s \chi \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0$. Пусть

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad V_s = \{u \in W^{1,m}(\Omega_s) : u \geqslant \chi_s \text{ п. в. на } \Omega_s\},$$

$$V = \{u \in W^{1,m}(\Omega) : u \geqslant \chi \text{ п. в. на } \Omega\}.$$

Тогда выполняется условие (28).

Предложение 7. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть V_s, V — множества, определенные в предложении 6. Тогда выполняется условие (29).

Из предложений 6, 7 и теоремы 1 вытекает, что G-сходимость последовательности операторов A_s сопровождается сходимостью решений соответствующих вариационных неравенств с препятствиями.

Введем обозначения: если $s \in \mathbb{N}$, то $W_0^{1,m}(\Omega_s)$ — замыкание в $W^{1,m}(\Omega_s)$ множества всех функций класса $C^\infty(\overline{\Omega}_s)$, носители которых содержатся в Ω; $\overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ — замыкание в $W^{1,m}(\Omega)$ класса функций $C_0^\infty(\Omega)$.

Предложение 8. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $V_s = W_0^{1,m}(\Omega_s)$, $V = \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$. Тогда выполняется условие (28).

Заметим, что при доказательстве этого предложения используется условие (1).

Предложение 9. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $V_s = W_0^{1,m}(\Omega_s)$, $V = \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$. Тогда выполняется условие (29).

Из предложений 8, 9 и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 3. Пусть A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f. Пусть, наконец, $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W_0^{1,m}(\Omega_s)$;

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall v \in W_0^{1,m}(\Omega_s) \qquad \langle A_s u_s, v\rangle = \langle f_s, v\rangle.$$

Тогда существует функция $u \in \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ такая, что $\forall v \in \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)\ \langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u.

Далее рассмотрим понятие сильной G-сходимости последовательности $\{A_s\}$. Сначала определим функции $\Gamma_{i,s}u$. Если $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $s \in \mathbb{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, то $\Gamma_{i,s}u$ — функция на Ω такая, что

$$\forall x \in \Omega_s\quad (\Gamma_{i,s}u)(x) = a_i^s(x, u(x), \nabla u(x)),\quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_s\,(\Gamma_{i,s}u)(x) = 0.$$

Ясно, что функции $\Gamma_{i,s}u$ принадлежат $L^{m'}(\Omega)$. Введем еще такие обозначения: $\mathcal{M}$ — множество всех каратеодориевских функций a на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что для любых $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$ $a(\cdot, \varphi(\cdot), \psi(\cdot)) \in L^{m'}(\Omega)$; $\mathcal{M}^{n+1}$ — совокупность всех отображений множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ в $\mathcal{M}$; если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, то $a_i = a(i)$; если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, то A — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u)\,\partial_i v + a_0(x, u, \nabla u)\,v\right\} dx.$$

Определение 4. Пусть $a \in \mathcal{M}^{n+1}$. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ сильно G-сходится к оператору A, если из $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}((Au) \circ p_s)$ следует, что

1) $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$;

2) для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\Gamma_{i,s}u_s \to a_i(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$

слабо в $L^{m'}(\Omega)$.

Ясно, что если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$ и последовательность $\{A_s\}$ сильно G-сходится к оператору A, то последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. В связи с этим заметим, что, заменяя в теореме 1 требование G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A на условие: $a \in \mathcal{M}^{n+1}$ и последовательность $\{A_s\}$ сильно G-сходится к оператору A, в заключении теоремы 1 кроме выполнения условий (33)—(35) находим еще, что для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\Gamma_{i,s}u_s \to a_i(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ слабо в $L^{m'}(\Omega)$.

Отметим еще, что при некоторых дополнительных предположениях относительно структуры областей Ω_s (например, при их густоперфорированности) имеет место теорема о выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно G-сходящейся подпоследовательности (к оператору A: $W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ с коэффициентами a_i, удовлетворяющими соотношениям вида (19) — (21)). При этом, если перфорация областей Ω_s носит определенный периодический характер, то имеет место усреднение операторов A_s, т. е. их сильная G-сходимость к оператору A: $W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ с эффективно вычисляемыми коэффициентами.

В заключение заметим, что основные предположения работы (1) — (3) выполняются, если выполняется следующее условие: существуют постоянная $\nu > 0$, конечные множества $J_s\ (s \in \mathbb{N})$, точки $x_s^j \in \Omega$ $(s \in \mathbb{N},\ j \in J_s)$ и числа $r_s^j > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ j \in J_s)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N}\ \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, r_s^j);$$

$$\lim_{s\to\infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0;\qquad \forall s \in \mathbb{N}\quad \forall j \in J_s\quad \nu r_s^j \leqslant \rho_s^j,$$

где $B(x_s^j, r_s^j)$ — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j, ρ_s^j — расстояние от $B(x_s^j, r_s^j)$ до множества $\bigcup_{J_s \ni l \neq j} B(x_s^l, r_s^l) \cup \partial\Omega$.

1. *Панков А. А.* Об усреднении и G-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида // Докл. АН СССР. —1984.— 278, № 1.— С. 37—41.
2. *Панков А. А.* Усреднение нелинейных почти периодических эллиптических операторов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 5.— С. 19—21.
3. *Ковалевский А. А.* G-сходимость абстрактных операторов с различными областями определения // Там же.— 1989.— № 3.— С. 20—23.
4. *Ковалевский А. А.* G-сходимость операторов, определенных на различных банаховых пространствах, и сходимость решений вариационных неравенств // Там же.— 1989.— № 5.— С. 15—17.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 05.08.89