

УДК 539.3

©2011. Е.В. Алтухов, Е.В. Симбратович

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМИ ОТ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛОСКИМИ ГРАНЯМИ

В трехмерной постановке рассмотрена задача о гармонических колебаниях двухслойных изотропных пластин. Полуобратным методом получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Исследованы дисперсионные уравнения вихревого и потенциального состояний.

Ключевые слова: двухслойная пластина, гармонические колебания, однородные решения, дисперсионные уравнения, частоты запираания дисперсионных кривых, фазовые и групповые скорости.

1. Введение. С помощью метода однородных решений может быть осуществлен переход от уравнений трехмерной теории упругости к двумерным уравнениям без гипотез и предположений. Основы метода заложены в статье [1], где символическим способом получено решение задачи о равновесии изотропного слоя со свободными от усилий плоскими гранями. В работах [2, 3] символический метод А.И. Лурье применяется в трехмерной теории динамики однослойных пластин. Некоторые результаты исследований равновесия поперечно-неоднородных пластин на основе однородных решений отражены в монографии [4]. В частности, в работе [5] получены однородные решения в задаче равновесия двухслойной пластины со свободными от усилий торцами.

Ниже дается развитие этих результатов с учетом [6] для случая колебания двухслойной пластины.

2. Постановка и решение задачи. Рассмотрим пластину со свободными от напряжений плоскими гранями, составленную из двух изотропных слоев. Координатную плоскость $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ совместим с плоскостью их спая. Ось $O\tilde{x}_3$ направим перпендикулярно к торцам. В дальнейшем величины, относящиеся к верхнему слою, будем обозначать индексом (1), к нижнему – индексом (2). Физико-механические характеристики материалов обозначим: $\tilde{G}_m$ – модуль сдвига, ν_m – коэффициент Пуассона, ρ_m – плотность материала, m – номер слоя.

Введем следующие безразмерные величины [6]

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \\ \lambda &= h/R, \quad h = h_1 + h_2, \quad \lambda_1 = h_1/h, \quad \lambda_2 = h_2/h, \\ u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_{i(m)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \\ \sigma_{ij(m)}(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{\sigma}_{ij(m)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/(2\tilde{G}_2) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, \quad G_1 = G \quad (m = 1, 2), \end{aligned} \tag{1}$$

где h – толщина пластины, λ – безразмерная толщина пластины, R – характерный линейный размер в срединной плоскости пластины, λ_m – относительная толщина

слоев. За счет такого перехода сокращается число рассматриваемых в дальнейшем геометрических и физических параметров.

Введем обозначения операций дифференцирования, положив

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial_1^2 = \partial_1 \partial_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \partial_2^2 = \partial_2 \partial_2, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2.$$

С учетом введенных обозначений задача об установившихся колебаниях рассматриваемой двухслойной пластины сводится к интегрированию системы уравнений движения в перемещениях

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{1(m)} + (D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2) u_{1(m)} + \nu_{0(m)} \partial_1 \theta_m &= 0, \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{2(m)} + (D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2) u_{2(m)} + \nu_{0(m)} \partial_2 \theta_m &= 0, \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, \lambda_1) &= 0, \quad \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0, \\ u_{i(1)}(x_1, x_2, 0) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, 0), \quad \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_m &= \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{3(m)}, \quad \nu_{0(m)} = 1/(1 - 2\nu_m), \\ \Omega_m &= \omega h / c_{S(m)}, \quad c_{S(m)} = \sqrt{\tilde{G}_m / \rho_m}, \end{aligned}$$

ω – круговая частота колебаний.

С использованием метода И.И. Воровича однородные решения краевой задачи (2), (3) будем искать в виде суммы вихревого и потенциального состояний

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}, m = 1, 2).$$

3. Вихревое решение. Перемещения вихревого состояния имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= p_{(m)}(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2), \\ u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= -p_{(m)}(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2), \\ u_{3(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим выражения (4) в соотношения (2), (3). В результате получим уравнения для определения функций $B(x_1, x_2)$

$$D^2 B(x_1, x_2) - (\delta / \lambda)^2 B(x_1, x_2) = 0 \quad (5)$$

и спектральную задачу для нахождения собственных функций $p_{(m)}(x_3)$ и параметра δ :

$$\begin{aligned} \partial_3^2 p_{(m)}(x_3) + l_{(m)}^2 p_{(m)}(x_3) &= 0, \\ p_{(1)}(0) &= p_{(2)}(0), \quad G p'_{(1)}(0) = p'_{(2)}(0), \\ p'_{(1)}(\lambda_1) &= 0, \quad p'_{(2)}(-\lambda_2) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $l_{(m)}^2 = \Omega_{(m)}^2 + \delta^2$, а штрих здесь и далее означает производную по x_3 .

Собственные функции спектральной задачи (6) получаются такими

$$\begin{aligned} p_{(1)k}(x_3) &= \cos(\lambda_1 - x_3)l_{(1)}, \\ p_{(2)k}(x_3) &= \cos(l_{(1)}\lambda_1) \cos(l_{(2)}x_3) + \frac{Gl_{(1)}}{l_{(2)}} \sin(l_{(1)}\lambda_1) \sin(l_{(2)}x_3), \end{aligned} \quad (7)$$

а собственные значения δ находим из трансцендентного уравнения

$$G l_{(1)} \sin l_{(1)} \lambda_1 \cos l_{(2)} \lambda_2 + l_{(2)} \sin l_{(2)} \lambda_2 \cos l_{(1)} \lambda_1 = 0. \quad (8)$$

Окончательно для вихревого решения имеем

$$u_{1(m)B} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k} \partial_2 B_k, \quad u_{2(m)B} = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k} \partial_1 B_k, \quad u_{3(m)B} = 0. \quad (9)$$

В случае, когда $\omega = 0$, уравнение (8) преобразуется к виду

$$(G + 1) \sin \delta = (1 - G) \sin(2\lambda_1 - 1)$$

и совпадает с известным [5].

Когда $\lambda_1 \rightarrow 0$, $G \rightarrow 0$, вид уравнения (8) будет таким

$$\sin l_{(2)} = 0.$$

В случае $\omega = 0$, $\lambda_1 \rightarrow 0$, $G \rightarrow 0$ уравнение (8) представимо таким образом:

$$\sin \delta = 0.$$

При $\lambda_2 \rightarrow 0$, $G \rightarrow \infty$ имеем из уравнения (8)

$$\sin l_{(1)} = 0.$$

4. Потенциальное решение. Для построения потенциального решения полагаем следующее:

$$\begin{aligned} u_{1(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2), \\ u_{2(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2), \\ u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Из выражений (2), (3), (10) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$D^2(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0, \quad (11)$$

а для определения функций $n_{(m)}(x_1, x_2)$, $q_{(m)}(x_1, x_2)$ и параметра γ получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} n_{(m)}''(x_3) + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)}(x_3) + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}'(x_3) &= 0, \\ q_{(m)}''(x_3) + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)}(x_3) + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda(1 + \nu_{0(m)})} n_{(m)}'(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}
 q_{(1)}(\lambda_1) + \lambda^{-1} n'_{(1)}(\lambda_1) &= 0, \quad q_{(2)}(-\lambda_2) + \lambda^{-1} n'_{(2)}(-\lambda_2) = 0, \quad n_{(1)}(0) = n_{(2)}(0), \\
 q_{(1)}(0) &= q_{(2)}(0), \quad G \left(q_{(1)}(0) + \lambda^{-1} n'_{(1)}(0) \right) = q_{(2)}(0) + \lambda^{-1} n'_{(2)}(0), \\
 G \left((\nu_{0(1)} - 1) \gamma^2 \lambda^{-1} n_{(1)}(0) + (1 + \nu_{0(1)}) q'_{(1)}(0) \right) &= \\
 &= (\nu_{0(2)} - 1) \gamma^2 \lambda^{-1} n_{(2)}(0) + (1 + \nu_{0(2)}) q'_{(2)}(0), \\
 \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_1) + (\nu_{0(1)} + 1) q'_{(1)}(\lambda_1) &= 0, \\
 \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(-\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q'_{(2)}(-\lambda_2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Общее решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned}
 n_{(m)}(x_3) &= H_{1(m)} \cos \gamma_{1(m)} x_3 + H_{2(m)} \sin \gamma_{1(m)} x_3 + \\
 &+ H_{3(m)} \cos \gamma_{2(m)} x_3 + H_{4(m)} \sin \gamma_{2(m)} x_3, \\
 q_{(m)}(x_3) &= Q_{1(m)} \sin \gamma_{1(m)} x_3 + Q_{2(m)} \cos \gamma_{1(m)} x_3 + \\
 &+ Q_{3(m)} \sin \gamma_{2(m)} x_3 + Q_{4(m)} \cos \gamma_{2(m)} x_3
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1(m)} &= \Omega_m^2 / (1 + \nu_{0(m)}) + \gamma^2, \quad \gamma_{2(m)} = \Omega_m^2 + \gamma^2. \\
 Q_{1(m)} &= -\frac{\gamma_{1(m)}}{\lambda} H_{1(m)}, \quad Q_{2(m)} = \frac{\gamma_{1(m)}}{\lambda} H_{2(m)}, \\
 Q_{3(m)} &= -\frac{\gamma^2}{\lambda \gamma_{2(m)}} H_{3(m)}, \quad Q_{4(m)} = \frac{\gamma^2}{\lambda \gamma_{2(m)}} H_{4(m)}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя выражения (14) в граничные условия (13) с учетом (15), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $H_{i(m)}$ ($i = \overline{1, 3}$). Из условия равенства нулю определителя этой системы получаем дисперсионное уравнение

$$F(\gamma, \Omega) = \det\{A_{ij}\} = 0. \tag{16}$$

Ненулевые элементы определителя $\det\{A_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 8}$) этой системы имеют вид

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -2\gamma_{1(1)} \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1, \quad A_{12} = 2\gamma_{1(1)} \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1, \quad A_{13} = -\frac{(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2)}{\gamma_{2(1)}} \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1, \\
A_{14} &= \frac{(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2)}{\gamma_{2(1)}} \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1, \quad A_{21} = \left(\gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) - \gamma_{1(1)}^2 (\nu_{0(1)} + 1) \right) \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1, \\
A_{22} &= \left(\gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) - \gamma_{1(1)}^2 (\nu_{0(1)} + 1) \right) \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1, \quad A_{23} = -2\gamma^2 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1, \\
A_{24} &= -2\gamma^2 \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1, \quad A_{31} = 1, \quad A_{33} = 1, \quad A_{35} = -1, \quad A_{37} = -1, \quad A_{42} = \gamma_{1(1)}, \\
A_{44} &= \frac{\gamma^2}{\gamma_{2(1)}}, \quad A_{46} = -\gamma_{1(2)}, \quad A_{48} = -\frac{\gamma^2}{\gamma_{2(2)}}, \quad A_{52} = 2G\gamma_{1(1)}, \quad A_{54} = \frac{G(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2)}{\gamma_{2(1)}}, \\
A_{56} &= -2\gamma_{1(2)}, \quad A_{58} = -\frac{\gamma^2 + \gamma_{2(2)}^2}{\gamma_{2(2)}}, \quad A_{61} = G \left(\gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) - \gamma_{1(1)}^2 (\nu_{0(1)} + 1) \right), \\
A_{63} &= -2G\gamma^2, \quad A_{65} = -\gamma^2 (\nu_{0(2)} - 1) + \gamma_{1(2)}^2 (\nu_{0(2)} + 1), \quad A_{67} = 2\gamma^2, \\
A_{75} &= 2\gamma_{1(2)} \sin \gamma_{1(2)} \lambda_2, \quad A_{76} = 2\gamma_{1(2)} \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2, \quad A_{77} = \frac{(\gamma^2 + \gamma_{2(2)}^2)}{\gamma_{2(2)}} \sin \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\
A_{78} &= \frac{(\gamma^2 + \gamma_{2(2)}^2)}{\gamma_{2(2)}} \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \quad A_{85} = \left((\nu_{0(2)} - 1)\gamma^2 - (\nu_{0(2)} + 1)\gamma_{1(2)}^2 \right) \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2, \\
A_{86} &= - \left((\nu_{0(2)} - 1)\gamma^2 - (\nu_{0(2)} + 1)\gamma_{1(2)}^2 \right) \sin \gamma_{1(2)} \lambda_2, \\
A_{87} &= -2\gamma^2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \quad A_{88} = 2\gamma^2 \sin \gamma_{2(2)} \lambda_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, потенциальное решение примет вид

$$\begin{aligned}
u_{1(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2), \\
u_{2(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2), \\
u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_{(m)p}(x_3) C_p(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Для длинных волн при $\gamma = 0$ из уравнения (16) имеем

$$F(\Omega) \equiv (G\Omega_1 S_{21} C_{22} + \Omega_2 C_{21} S_{22})(Gk_1^{-1} \Omega_1 S_{11} C_{12} + k_2^{-1} \Omega_2 C_{11} S_{12}) = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
k_m &= \sqrt{(1 - 2\nu_m)/(2 - 2\nu_m)}, \\
S_{1m} &= \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad S_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m), \\
C_{1m} &= \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad C_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m), \quad (m = 1, 2).
\end{aligned}$$

Трансцендентное уравнение (17) определяет две независимые системы критических частот:

$$G\Omega_1 S_{21} C_{22} + \Omega_2 C_{21} S_{22} = 0, \quad (18)$$

$$Gk_1^{-1}\Omega_1 S_{11} C_{12} + k_2^{-1}\Omega_2 C_{11} S_{12} = 0. \quad (19)$$

Частоты, задаваемые уравнением (18) не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 , в отличие от корней уравнения (19), образующих второе семейство критических частот. При некоторых ν_1, ν_2 частоты из соседних семейств могут совпадать.

Для исследования процесса переноса энергии основное значение имеют распространяющиеся моды, соответствующие мнимым участкам дисперсионных ветвей. Важнейшими характеристиками распространяющихся мод являются фазовая и групповая скорости. В каждой точке ветви дисперсионной кривой фазовая скорость представляется следующим образом

$$c_p = \omega/k = ic\Omega/\gamma,$$

где

$$\Omega = \omega h/c, \quad k = -i\gamma/h, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Групповая скорость c_g распространяющихся мод согласно кинематическому определению задается равенством

$$c_g = d\omega/dk = ic \, d\Omega/d\gamma$$

и представляет собой тангенс угла наклона касательной к мнимому участку ветви в данной точке.

5. Результаты численных исследований. Пусть верхний слой пластины изготовлен из алюминия и характеризуется параметрами среды $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu_1 = 0,35$, скорость поперечной волны $c_{S1} = 3110 \text{ м/с}$, а нижний – из вольфрама: $\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu_2 = 0,29$, скорость поперечной волны $c_{S2} = 2860 \text{ м/с}$. Расчеты проводились для следующих трех вариантов:

1. $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3};$
2. $\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{3};$
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}.$

Входящие в приведенное решение безразмерные частоты Ω_1, Ω_2 и нормирующая размерная скорость c выбирались следующими:

$$\Omega_1 = \Omega c_{S2}/c_{S2}, \quad \Omega_2 = \Omega, \quad c = c_{S2}.$$

В табл. 1 приведены первые пятнадцать частот записания ($\delta = 0$ или $\gamma = 0$) дисперсионного уравнения (8) – столбцы 1-3 и дисперсионного уравнения (16) – столбцы 4-6. Столбцы 1,4 соответствуют варианту 1; столбцы 2,5 – варианту 2; столбцы 3,6 – однослойной пластине из алюминия.

Таблица 1

Номер частоты	Значения частот записания					
	1	2	3	4	5	6
1	4,200077	2,953268	3,141593	4,200077	2,953268	3,141593
2	6,004629	7,901464	6,283185	6,004629	6,097164	6,283185
3	9,529994	9,819776	9,424778	7,870329	7,901464	6,539747
4	13,921747	13,936170	12,566371	9,529994	9,819776	9,424778
5	16,649382	18,305117	15,707963	12,030378	13,936170	12,566371
6	19,114382	20,063069	18,849556	13,921747	15,632274	13,079493
7	23,484765	24,929005	21,991149	16,649382	18,305117	15,707963
8	27,230951	28,187748	25,132741	17,736499	19,084559	18,849556
9	28,919236	30,842680	28,274334	19,114382	20,063069	19,619240
10	33,010936	35,836404	31,415927	23,484765	24,929005	21,991149
11	37,288770	37,972677	34,557519	25,825752	28,187748	25,132741
12	39,268586	41,809073	37,699112	27,230951	28,659186	26,158986
13	42,547616	46,392523	40,840704	28,919236	30,842680	28,274334
14	46,949676	48,065974	43,982297	36,396943	34,681033	31,415927
15	49,944723	52,806504	47,123890	37,288770	35,836404	32,698733

В табл.2 приведены значения первых пятнадцати частот записания вихревого и потенциального решений, которые отражают влияние изменения относительных толщин слоев.

Таблица 2

Номер частоты	Значения частот записания					
	$\lambda_1 = 0, 01$	$\lambda_1 = 0, 1$	$\lambda_1 = 0, 9$	$\lambda_1 = 0, 01$	$\lambda_1 = 0, 1$	$\lambda_1 = 0, 9$
1	3,169413	3,442574	2,694481	3,169413	3,442574	2,694481
2	6,338820	6,876069	6,435849	5,827715	6,330546	5,602460
3	9,508216	10,283495	10,420838	6,338820	6,876069	6,435849
4	12,677595	13,613885	14,458327	9,508216	10,283495	10,420838
5	15,846952	16,648244	18,504271	11,655423	12,648651	13,373940
6	19,016281	18,948751	22,529562	12,677595	13,613885	14,458327
7	22,185576	21,515278	26,464027	15,846952	16,648244	18,504271
8	25,354830	24,708750	29,925703	17,483115	18,934142	21,647896
9	28,524037	28,078323	32,282272	19,016281	18,948751	22,529562
10	31,693191	31,498397	35,480173	22,185576	21,515278	26,464027
11	34,862285	34,936531	39,364182	23,310783	24,708750	29,925703
12	38,031311	38,380034	43,377997	25,354830	25,139722	30,020183
13	41,200260	41,820521	47,422053	28,524037	28,078323	32,282272
14	44,369126	45,247276	51,464132	29,138419	31,115503	35,480173
15	47,537899	48,636105	55,468623	31,693191	31,498397	38,379982

В табл.3 отражено влияние коэффициента Пуассона ν_2 нижнего слоя на первые пятнадцать частот записания для двухслойной пластины. При этом значение

параметров следующие: $G = 1$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$, $\nu_1 = 0,3$.

Таблица 3

Номер частоты	Значения частот запираания					
	$\nu_2 = 0,05$	$\nu_2 = 0,1$	$\nu_2 = 0,2$	$\nu_2 = 0,3$	$\nu_2 = 0,4$	$\nu_2 = 0,45$
1	3,141593	3,141593	3,141593	3,141593	3,141593	3,141593
2	5,060477	5,169437	5,453492	5,877382	6,283185	6,283185
3	6,283185	6,283185	6,283185	6,283185	6,550349	7,025249
4	9,424778	9,424778	9,424778	9,424778	9,424778	9,424778
5	10,424867	10,579571	11,006043	11,754763	12,566371	12,566371
6	12,566371	12,566371	12,566371	12,566371	13,543984	15,683950
7	15,225678	15,535483	15,707963	15,707963	15,707963	15,707963
8	15,707963	15,707963	16,364871	17,632145	18,849556	18,849556
9	18,849556	18,849556	18,849556	18,849556	19,723836	21,991149
10	20,760056	21,103899	21,991149	21,991149	21,991149	22,193244
11	21,991149	21,991149	22,003198	23,509527	25,132741	25,132741
12	25,132741	25,132741	25,132741	25,132741	26,940950	28,274334
13	25,501760	25,972420	27,288709	28,274334	28,274334	29,842236
14	28,274334	28,274334	28,274334	29,386908	31,415927	31,415927
15	30,972899	31,415927	31,415927	31,415927	33,075478	34,557519

На рис.1 изображены соответствующие уравнению (8) спектральные кривые зависимостей Ω от параметра δ . Рис.1а соответствует варианту 1, рис.1б – случаю 2. Уравнение (16) при фиксированной частоте имеет конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней.

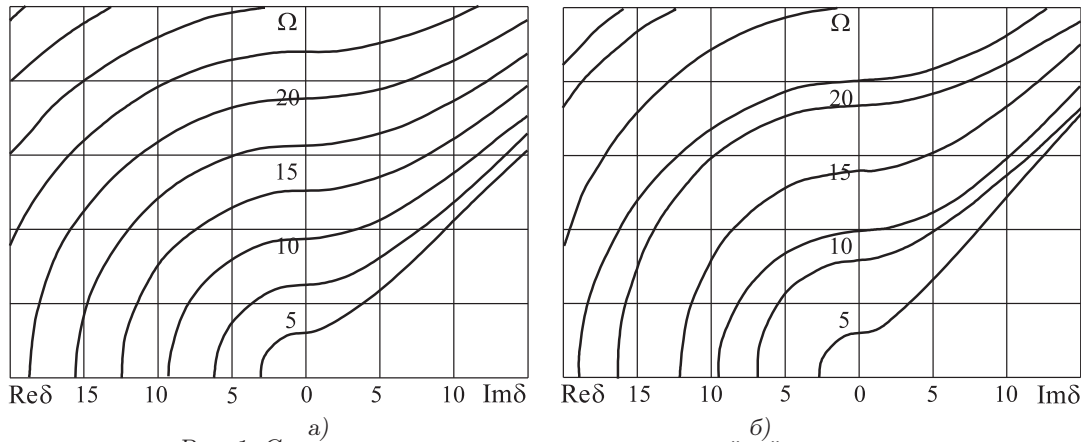


Рис. 1. Спектр частот сдвиговых волн в двухслойной пластине

Аналогично на рис.2а и 2б представлены спектральные кривые, соответствующие уравнению (16). Сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – комплексным корням.

Для потенциального состояния на рис.3 и 4 для вариантов 1 и 2 приведены графики изменения безразмерных фазовых $v_p = c_p/c$ (рис.3а и рис.4а) и групповых $v_g = c_g/c$ (рис.3б и рис.4б) скоростей первых трех распространяющихся мод.

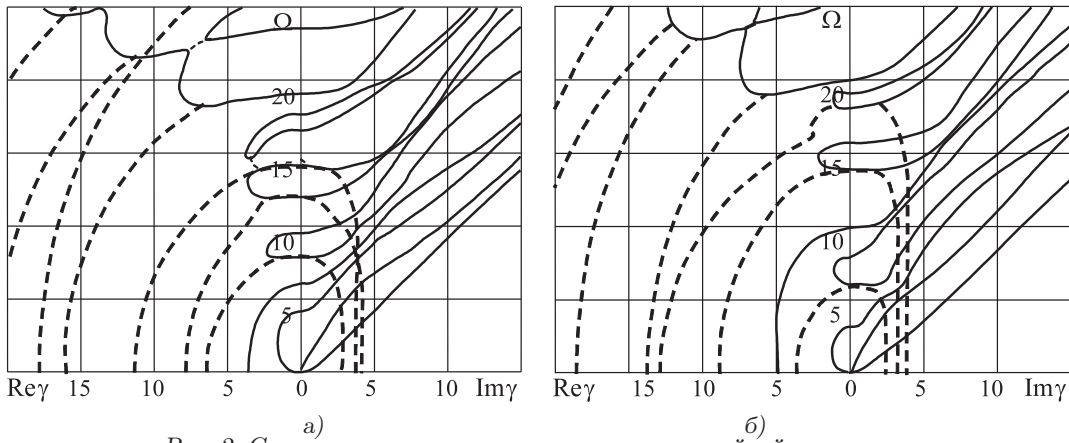


Рис. 2. Спектр частот продольных волн в двухслойной пластине

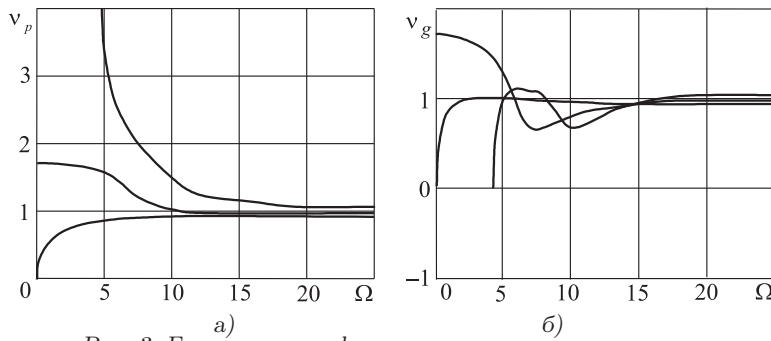


Рис. 3. Безразмерные фазовые и групповые скорости

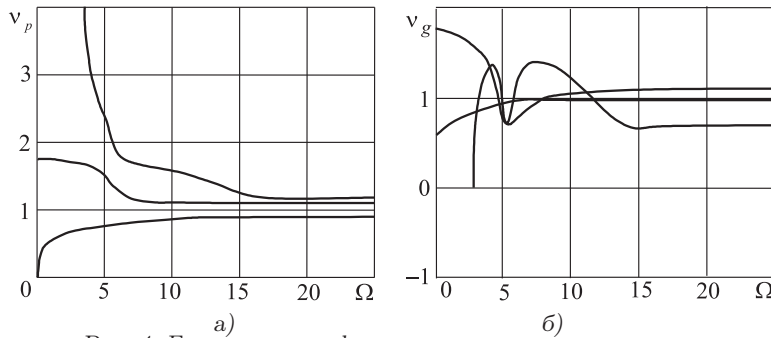


Рис. 4. Безразмерные фазовые и групповые скорости

Из рисунков и таблиц следует, что в двухслойной пластине изменяется характер распространения волн. В области низких частот появляется две действительные моды и происходит сближение мод, изменяются значения и количество частот записания. При фиксированной частоте уравнение (16) имеет конечное число мнимых, счетное число комплексных и действительных корней. В отличие от двухслойных пластин с жестко защемленными плоскими гранями [6] здесь при малых частотах возбуждаются две бегущие нормальные дисперсные моды.

Подтверждаются факты, что комплексные дисперсионные кривые пересекают плоскость $\Omega = 0$ под прямым углом и оканчиваются в точках относительного минимума действительных или мнимых кривых. Фазовая скорость ненулевых частот

запирания стремится к бесконечности, а групповая скорость равна нулю. На графиках групповых скоростей четко выражены максимумы и минимумы. С ростом номера мнимой ветви количество таких экстремумов увеличивается.

1. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1942. – 6, № 2-3. – С. 151-168.
2. Кутсер М., Нигул У. О применении символического метода А.И. Лурье в динамике плит при деформации, симметричной относительно срединной поверхности // Известия АН Эстонской ССР. – 1965. – 14, № 3 – С. 385-395.
3. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит // Известия АН Эстонской ССР. – 1963. – 12, № 2. – С. 146-155.
4. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
5. Ружицкий Б. А. Однородные решения для двухслойной плиты // Теоретическая и прикладная механика. – 1980. – № 11. – С. 10-16.
6. Алтухов Е. В., Куця Е. В., Фоменко М. В. Установившиеся колебания упругих двухслойных пластин с жесткими плоскими гранями // Вісник Донецького національного ун-ту. Сер. А. – 2010. – № 2. – С. 38-46.

E.V. Altukhov, E.V. Simbratovich

Elastic vibration of two-layer plate with planar faces are free from stresses.

In three-dimensional statement the problem of harmonic vibration of elastic two-layer plate is considered. Homogeneous solutions of system of motion equations in displacement are constructed by semi-inverse method. The dispersion equation of vortical and potential states are investigated.

Keywords: *two-layer plate, harmonic vibration, homogeneous solutions, dispersion equations, cut-off frequencies of dispersion curves, phase and group velocities.*

Є.В. Алтухов, О.В. Сімбратович

Пружні коливання двошарової пластини з вільними від напруження плоскими гранями.

У тривимірній постановці розглянуто задачу про гармонічні коливання двошарових ізотропних пластин. Напівоберненим методом отримано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Досліджено дисперсійні рівняння вихрового та потенційного станів.

Ключові слова: *двошарова пластинка, гармонічні коливання, однорідні розв'язки, дисперсійні рівняння, частоти запирання дисперсійних кривих, фазові та групові швидкості.*

Донецкий национальный ун-т
altukhov@matfak.dongu.donetsk.ua

Получено 31.03.11