УДК 531.38; 531.39

©2019. **А.В. Мазнев, Ю.С. Горбунова**

НОВЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Рассмотрены два способа исследования прецессий твердого тела, имеющего неподвижную точку. Первый подход посвящен применению модифицированного метода Пуансо кинематического истолкования движения. Второй подход заключается в исследовании движений главных осей эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве для прецессионных движений.

Ключевые слова: *кинематика, прецессии, модифицированный метод, главные оси инерции.*

Введение. Прецессионные движения твердого тела и гиростата относятся к наиболее наглядным, с механической точки зрения, движениям и находят широкое применение в важной для техники теории гироскопических систем. А.Ю. Ишлинский [1] подробно исследовал прецессию гироскопов для построения строгой технической теории гироскопических систем.

В динамике твердого тела прецессию твердого тела, имеющего неподвижную точку, описали Ф. Кляйн и А. Зоммерфельд [2]. Для случая, когда центр масс гиростата не совпадает с неподвижной точкой, классическим примером прецессии служит регулярная прецессия гироскопа Лагранжа, которой посвящена обширная литература. Для более сложных по распределению масс гироскопов (гироскопов, подобных гироскопам Ковалевской и Горячева–Чаплыгина) условия существования прецессий изучал Г.Г. Аппельрот [3, 4]. Он показал, что такие движения могут быть только движениями типа физического маятника (т. е. вращениями относительно горизонтальной в пространстве оси).

В динамике твердого тела Д. Гриоли [5] изучил регулярные и обобщенные прецессии относительно вертикали и получил новый случай интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона, который описывает регулярную прецессию несимметричного тела относительно наклонной оси [5].

Обзор результатов, полученных в изучении прецессий тела в динамике, изложены в [6, 7]. Основными задачами в теории прецессий тела являлись построение новых классов данных движений и изучение свойств углов прецессий и собственного вращения. Кинематическая формула Г.В. Горра [8] позволяет без операции интегрирования и дифференцирования получить явное значение полярного угла, которое в цилиндрической системе координат дает возможность найти уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости П.В. Харламова [9] и тем самым применить теорему Пуансо. В ряде случаев, как показано в работах [8, 10–12], целесообразно применять модифицированный метод Пуансо, поскольку он позволяет значительно упростить кинематическое истолкование движения тела (например, в [8] показано, что движение тела в решении В.А. Стеклова можно представить качением без скольжения конических поверхностей, направляющими линиями которых являются эллипсы). Данный подход применен в этой статье при исследовании прецессий тела с неподвижной точкой.

В статье [13] предложен новый метод исследования движения главных осей эллипсоида инерции тела в случае прецессий тела, что позволило применить его здесь для изучения новых классов прецессионных движений в динамике твердого тела.

1. Постановка задачи. Предположим, что рассматривается задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку O. Пусть ось l_1 с единичным вектором $\boldsymbol{a}$ имеет начало в точке O и неизменно связана с гиростатом, ось l_2 с единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}$ имеет начало также в точке O и фиксирована в неподвижном пространстве. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ угловую скорость гиростата (тела-носителя), через $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор с началом в точке O, характеризующий некоторое направление (например, ось симметрии силового поля). Тогда выполняются соотношения [6, 7]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1, \qquad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}=1, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma}=c_0, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{0}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата, $c_0=\cos\kappa_0$ $(\kappa_0=\angle(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\gamma}))$; точкой над векторами обозначена производная по времени в подвижной системе координат. *Прецессионным* движением называют движение [2, 5–7], для которого постоянен угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Оно может быть охарактеризовано инвариантным соотношением

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}=a_0 \quad (a_0=\cos\theta_0,\ \theta_0=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\gamma})). \tag{3}$$

Производная от левой части равенства (3) в силу первого и второго уравнений из системы (2) приводит к условию $\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma})=0$, которое в случае $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$ дает соотношение

$$\boldsymbol{\omega}=\varphi_1(t)\boldsymbol{a}+\varphi_2(t)\boldsymbol{\gamma}. \tag{4}$$

Внесем выражение (4) во второе и третье уравнения системы (2):

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\varphi_1(t)(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}}=\varphi_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})+\varphi_2(t)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\gamma}). \tag{5}$$

Подвижную систему координат выбираем так, чтобы $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$. Тогда соотношению (3), третьему условию из (1) и первому уравнению из (5) удовлетворим, положив

$$\begin{gathered}\gamma_1=a_0'\sin\varphi, \qquad \gamma_2=a_0'\cos\varphi, \qquad \gamma_3=a_0,\\ a_0'=\sqrt{1-a_0^2}=\sin\theta_0, \qquad \varphi_1(t)=\dot{\varphi}.\end{gathered} \tag{6}$$

Принимая во внимание равенства (1), второе уравнение из (5), выражения (6), определим вектор $\boldsymbol{\nu}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma}$ и функцию $\varphi_2(t)$:

$$\boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0 b_0' \sin\psi)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\boldsymbol{a}\sin\psi - b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos\psi, \quad \varphi_2(t) = \dot{\psi}, \tag{7}$$

где $b_0' = b_0/a_0',\ \ b_0 = \sin\kappa_0$.

В формулах (3), (6), (7) величины θ_0, φ, ψ являются углами Эйлера. В силу (6), (7) выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из (4) примет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\gamma}. \tag{8}$$

Таким образом, кинематическими условиями прецессии гиростата относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$ служат инвариантные соотношения (3), (6) – (8).

Замечание. Для прецессий относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$, т. е. в случае $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nu}$, получим следующие соотношения:

$$\boldsymbol{a} = (0,0,1), \qquad \boldsymbol{\nu} = (a_0'\sin\varphi,\ a_0'\cos\varphi,\ a_0), \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{9}$$

где $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ – скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Прецессию гиростата называют *регулярной*, если $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$, где n и m – постоянные. Когда $\dot{\psi} = m$, $\dot{\varphi} \neq n$, то прецессионное движение называют *полурегулярной прецессией первого типа.* Когда $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} \neq m$, то прецессионное движение называют *полурегулярной прецессией второго типа.* В случае, когда ни одна из величин $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ не является постоянной, прецессионное движение называют *прецессией общего вида.*

Прецессионно-изоконические движения гиростата, имеющего неподвижную точку. Положим, что движение гиростата, кроме свойств прецессионности, обладает свойством изоконичности движения. Движение гиростата, имеющего неподвижную точку, называют изоконическим [10], если подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости. Изоконические движения можно охарактеризовать инвариантным соотношением [10]

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{c}) = 0, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, неизменный в пространстве; $\boldsymbol{c}$ – единичный вектор, неизменный в гиростате. То есть для векторов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{c}$ выполняются уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}. \tag{11}$$

Будем предполагать, что прецессия гиростата происходит относительно наклонной оси $\boldsymbol{\gamma}$ с фиксированным в гиростате положением вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. выполняются условия (6) – (8). Кроме этого, считаем, что движение гиростата является изоконическим, т. е. имеет место инвариантное соотношение (10).

Такое движение гиростата называют *прецессионно-изоконическим* [10]. Внесем выражение (8) в левую часть равенства (10):

$$\dot{\varphi}(a_0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + \dot{\psi}(1 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{c}) = 0. \tag{12}$$

В [6, 7] изучены прецессионно-изоконические движения различных классов. Здесь рассмотрим инвариантное соотношение (12) в случае прецессии общего вида, т. е. когда вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид (8). Тогда в силу того, что $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, 0, c_3)$, а $\boldsymbol{\gamma}$ имеет компоненты из (6), получим два варианта:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}, \qquad \dot{\psi} = \dot{\varphi}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{c}, \qquad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin\varphi} \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2). \tag{14}$$

Полагаем, что в случае (14) параметры b_0 и c_0 принимают положительные значения, и тогда из (14) найдем явную зависимость $\psi = \psi(\varphi)$:

$$\psi = 2\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{\mathrm{tg}(\varphi/2)}{b_0 + c_0\,\mathrm{tg}(\varphi/2)}\Big). \tag{15}$$

Здесь получаем, что если $\varphi = 0$, то и $\psi = 0$.

2. Векторные уравнения подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости для прецессионных движений тела. В статье Г.В. Горра [8] указана кинематическая формула, которая позволяет по известным углам Эйлера указать способ получения уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости на основе уравнений П.В. Харламова.

С телом свяжем систему координат $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, а в неподвижном пространстве введем систему координат $O\zeta\eta\varsigma$ с единичными векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Пусть в результате интегрирования уравнений движения гиростата с неподвижной точкой найдено решение

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_1 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3, \qquad \boldsymbol{\nu}(t) = \nu_1(t)\mathbf{i}_1 + \nu_2(t)\mathbf{i}_1 + \nu_3(t)\mathbf{i}_3, \tag{16}$$

где $t \in [0; \infty)$. Тогда первая функция из (16) описывает подвижный годограф вектора угловой скорости тела. Уравнения неподвижного годографа запишем в форме кинематических уравнений П.В. Харламова [9]

$$\boldsymbol{\omega}_H = \omega_\zeta(t)\mathbf{r}_1 + \omega_\eta(t)\mathbf{r}_1 + \omega_\varsigma(t)\mathbf{r}_3, \tag{17}$$

где вектор $\mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\nu}$. Тогда на основании (17) получим [9]

$$\omega_\zeta(t) = \omega_\rho(t)\cos\alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t)\sin\alpha(t), \tag{18}$$

$$\omega_\varsigma(t) = \omega_1(t)\nu_1(t) + \omega_2(t)\nu_2(t) + \omega_3(t)\nu_3(t), \tag{19}$$

$$\omega_\rho^2(t) = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) - \omega_\varsigma^2(t), \tag{20}$$

$$\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_\rho^2(t)} \big[\dot\omega_1(t)\big(\omega_3(t)\nu_2(t) - \omega_2(t)\nu_3(t)\big) + \\ + \dot\omega_2(t)\big(\omega_1(t)\nu_3(t) - \omega_3(t)\nu_1(t)\big) + \dot\omega_3(t)\big(\omega_2(t)\nu_1(t) - \omega_1(t)\nu_2(t)\big)\big]dt. \tag{21}$$

В динамике твердого тела известны соотношения для компонент вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ через углы Эйлера. Запишем их в виде

$$\omega_1(t) = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_2(t) = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \\ \omega_3(t) = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta; \tag{22}$$

$$\nu_1(t) = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2(t) = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3(t) = \cos\theta, \tag{23}$$

из которых можно определить функции $\theta(t), \varphi(t), \psi(t)$. Используя векторную запись, из равенств (22), (23) получим [10]

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\boldsymbol{\nu}(t)\mathbf{i}_1}{\boldsymbol{\nu}(t)\mathbf{i}_2}, \qquad \theta(t) = \arccos\big(\boldsymbol{\nu}(t)\mathbf{i}_3\big), \\ \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)^2} d\tau. \tag{24}$$

Запишем кинематическую формулу, указанную Г.В. Горром [8]:

$$\operatorname{tg}\big(\alpha(t) - \psi(t)\big) = \delta \frac{(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t))\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}_3)}{\mathbf{i}_3\cdot(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t))}, \tag{25}$$

где $\psi(t)$ – из (24). При постоянстве угла между $\boldsymbol{\nu}(t)$ и $\mathbf{i}_3$ параметр $\delta = 0$, т. е. для прецессионных движений $\alpha(t) = \psi(t) + \alpha_0$, где α_0 можно считать равным нулю.

Запишем $\boldsymbol{\omega}_\Pi, \boldsymbol{\omega}_\text{Н}$ (подвижный и неподвижный годографы) для прецессионных движений относительно вертикали. В силу (9), (16) имеем

$$\boldsymbol{\omega}_\Pi = a_0'\dot\psi(\sin\varphi\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\mathbf{i}_2) + (\dot\varphi + a_0\dot\psi)\mathbf{i}_3, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\text{Н} = |a_0'\dot\varphi|(\cos\psi\mathbf{r}_1 + \sin\psi\mathbf{r}_2) + (a_0\dot\varphi + \dot\psi)\mathbf{r}_3. \tag{27}$$

Запишем равенства (26), (27) в случае (13), (14), т. е. для прецессионно-изоконических движений общего типа. Из (13), (26), (27) получим

$$\boldsymbol{\omega}_\Pi = \dot\varphi\big(a_0'\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + a_0'\cos\varphi\,\mathbf{i}_2 + (1 + a_0)\,\mathbf{i}_3\big), \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\text{Н} = \dot\varphi\big(a_0'\cos\varphi\,\mathbf{r}_1 + a_0'\sin\varphi\,\mathbf{r}_2 + (1 + a_0)\,\mathbf{r}_3\big). \tag{29}$$

Пусть в (16), (17) $\quad \dot\psi = \dfrac{\dot\varphi}{b_0 + c_0 \sin\varphi} \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2)$. Тогда

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{П}} = \frac{\dot\varphi}{b_0 + c_0 \sin\varphi}\big[a_0' \sin\varphi \mathbf{i}_1 + a_0' \cos\varphi \mathbf{i}_2 + \big((a_0 + b_0) + c_0 \sin\varphi\big)\mathbf{i}_3\big], \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Н}} = \frac{\dot\varphi}{b_0 + c_0 \sin\varphi}\big[a_0'(b_0 + c_0 \sin\varphi)(\cos\psi \mathbf{r}_1 + \sin\psi \mathbf{r}_2) + \big((a_0 b_0 + 1) + a_0 c_0 \sin\varphi\big)\mathbf{r}_3\big]. \tag{31}$$

3. Применение модифицированного метода Пуансо в исследовании прецессии А. Брессана. Как показал А. Брессан [14], в решении В. Гесса [10] при нулевом значении постоянной интеграла моментов имеет место прецессия относительно горизонтальной оси:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \qquad \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \tag{32}$$

где $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела. То есть в формулах (6), (7) $\varkappa_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Для записи решения, описывающего данную прецессию, воспользуемся введенной выше системой координат $\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$. Пусть компоненты тензора A_{ij} удовлетворяют условиям [7]

$$A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}). \tag{33}$$

Следуя обозначениям [6, 7], запишем решение В. Гесса в случае А. Брессана:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = (\dot\psi \sin\varphi, \dot\psi \cos\varphi, \dot\varphi), \tag{34}$$

$$A\boldsymbol{\omega} = (A_{11}\dot\psi \sin\varphi + A_{13}\dot\varphi,\ A_{22}\dot\psi \cos\varphi,\ A_{13}\dot\psi \sin\varphi + A_{33}\dot\varphi), \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\nu} = (-\cos\varphi \cos\psi,\ \sin\varphi \cos\psi,\ -\sin\psi), \tag{36}$$

где

$$\dot\varphi = -\frac{A_{13}}{A_{33}}\dot\psi \sin\varphi, \qquad \dot\psi = \sqrt{\frac{2}{A_{22}}(E - s\sin\psi)}, \tag{37}$$

E – постоянная интеграла площадей, s – произведение веса тела на удаление центра масс от неподвижной точки. Отметим, что постоянная интеграла момента количества движения в решении (34) – (37) равна нулю.

Для определения $\psi(t)$ обратимся ко второй формуле из (37). Обозначим

$$\mu = \sqrt{\frac{E + s}{2A_{22}}}, \qquad \varkappa_3 = \sqrt{\frac{2s}{E + s}}, \qquad \psi = u - \frac{\pi}{2}. \tag{38}$$

В силу (38) из (37) получим

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{1 - \varkappa_3^2 \sin^2 u}} = \mu t, \tag{39}$$

где положено: $u = u_0$ при $t = 0$. Следовательно, в силу (38), (39) найдем

$$\psi(t) = 2\mathrm{am}\mu t - \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\psi(t) = \mathrm{sn}^2\mu t - \mathrm{cn}^2\mu t, \tag{40}$$

$$\dot{\psi}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{dn}\,\mu t. \tag{41}$$

В рассматриваемом случае прецессии гироскопа Гесса относительно горизонтальной оси вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на основании (32), (34), (37) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e} + \dot{\psi}\boldsymbol{\gamma}. \tag{42}$$

Если (42) представлять в подвижной системе координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, положив $\boldsymbol{e} = \mathbf{i}_3$, то с учетом равенств $\boldsymbol{\gamma} = (\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ и (37) получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\Pi} = \dot{\psi}\big(\sin\varphi\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\mathbf{i}_2 - \frac{A_{13}}{A_{33}}\sin\varphi\mathbf{i}_3\big). \tag{43}$$

Для записи неподвижного годографа вектора угловой скорости положим $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\gamma}$. Заметим, что в данном подходе углы Эйлера введены так, что неподвижная система координат связана с вектором $\boldsymbol{\gamma}$. В этом случае можно использовать формулы (24), (25), что дает возможность полагать $\alpha = \psi$. То есть для $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}}$ имеем разложение

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}} = \dot{\psi}\big(\mathbf{r}_1 + \frac{A_{13}}{A_{33}}\sin\varphi\cos\psi\,\mathbf{r}_2 + \frac{A_{13}}{A_{33}}\sin\varphi\sin\psi\,\mathbf{r}_3\big). \tag{44}$$

В (44) учтены равенства (37).

Из равенств (43), (44) следует, что в формуле $\boldsymbol{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t)$, которая используется в модифицированном методе Пуансо [8], целесообразно функцию $b(t)$ выбрать так

$$b(t) = \frac{1}{\dot{\psi}(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{dn}\,\mu t}. \tag{45}$$

В силу (45) из равенств (43), (44) получим

$$\boldsymbol{b}_{\Pi}(t) = \sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_2 - \frac{A_{13}}{A_{33}}\sin\varphi\,\mathbf{i}_3, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{b}_{\mathrm{H}}(t) = \mathbf{r}_1 + \frac{A_{13}}{A_{33}}\sin\varphi\cos\psi\,\mathbf{r}_2 + \frac{A_{13}}{A_{33}}\sin\varphi\sin\psi\,\mathbf{r}_3. \tag{47}$$

Подвижный годограф (46) – линия пересечения поверхностей

$$b_1^2 + b_2^2 = 1, \qquad A_{13}b_1 + A_{33}b_3 = 0.$$

На основании этих равенств и условий (33) можно показать, что конец вектора $\boldsymbol{b}_{\Pi}$ лежит на эллипсоиде инерции тела

$$A_{11}b_1^2 + A_{22}b_2^2 + A_{33}b_3^2 + 2A_{13}b_1b_3 = \mathrm{const}. \tag{48}$$

То есть применение модифицированного метода позволяет исследовать и движение эллипсоида инерции (48) в неподвижном пространстве.

Из равенства (47) следует, что неподвижный годограф $\boldsymbol{b}_{\mathrm{H}}(t)$ из (47) является также плоской кривой, так как

$$b_\xi = 1. \tag{49}$$

Движение гироскопа Гесса в случае Брессана представимо посредством качения без скольжения кривой (46) по кривой (47). Другим методом данный результат получил И.Н. Гашененко [15]. Покажем, что при качении без скольжения кривой (46) по (47) эллипсоид инерции касается плоскости $b_\xi = 1$.

Рассмотрим градиент поверхности (48)

$$\mathrm{grad}\Phi = (A_{11}b_1 + A_{13}b_3,\ A_{22}b_2,\ A_{33}b_3 + A_{13}b_1).$$

На кривой (46) его единичный вектор таков

$$\mathrm{grad}\Phi\big|_{\boldsymbol{b}_\Pi(t)} = (\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0).$$

Используя матрицу перехода от подвижной системы координат к неподвижной системе, вычислим указанный выше градиент в неподвижной системе:

$$\mathrm{grad}\Phi\big|_{\boldsymbol{b}_\Pi(t)} = \mathbf{r}_1. \tag{50}$$

Это доказывает, что эллипсоид инерции гироскопа Гесса катится в неподвижном пространстве по плоскости, которая ортогональна вектору $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\gamma}$.

4. Модифицированный метод Пуансо в исследовании прецессионно-изоконических движений тела, имеющего неподвижную точку. Применим модифицированный метод [8] для случая (28), (29). Будем полагать, что $\dot\varphi(t) > 0$. Для известных вариантов [6, 7] эта зависимость может быть трех видов

$$\dot\varphi = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin\varphi}, \qquad \beta_1 > \beta_2 > 0\,; \tag{51}$$

$$\dot\varphi = d_0 + d_1 \sin\varphi, \qquad d_0 > d_1 > 0\,; \tag{52}$$

$$\dot\varphi^2 = \varepsilon_2 \sin 2\varphi + \varepsilon_2' \cos 2\varphi + \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_1' \cos\varphi + c_0, \tag{53}$$

где параметры $\varepsilon_2, \varepsilon_2', \varepsilon_1, \varepsilon_1', c_0$ удовлетворяют условию действительности функции $\varphi(t)$. Согласно предположению в (28), $\dot\varphi \neq 0$. Выберем вектор $\boldsymbol{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ следующим образом:

$$b(t) = \frac{1}{\dot\varphi(t)}, \tag{54}$$

где $\dot\varphi$ принимает одно из значений (51) – (53). Учитывая равенство (54), из (28), (29) получим

$$\boldsymbol{b}_\Pi(t) = a_0' \sin\varphi(t)\,\mathbf{i}_1 + a_0' \cos\varphi(t)\,\mathbf{i}_2 + (1 + a_0)\,\mathbf{i}_3, \tag{55}$$

$$\boldsymbol{b}_{\text{Н}}(t) = a_0' \cos\varphi(t)\, \mathbf{r}_1 + a_0' \sin\varphi(t)\, \mathbf{r}_2 + (1 + a_0)\, \mathbf{r}_3. \tag{56}$$

На основании (55), (56) для компонент b_1, b_2, b_3 вектора (55) и компонент b_ξ, b_η, b_ζ вектора (56) имеем равенства

$$b_1^2 + b_2^2 = {a_0'}^2, \qquad b_3 = 1 + a_0, \tag{57}$$

$$b_\xi^2 + b_\eta^2 = {a_0'}^2, \qquad b_\zeta = 1 + a_0. \tag{58}$$

Из (57), (58) следует, что подвижный и неподвижный годографы (55), (56) являются плоскими кривыми. Движение тела может быть воспроизведено качением без скольжения годографа (55) по годографу (56). При этом угловая скорость вращения определяется равенством $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\, \boldsymbol{b}(t)$, где $\dot\varphi$ удовлетворяет одному из условий (51) – (53). При этом сохраняется условие изоконичности: круговые конусы (57), (58) симметричны друг другу относительно касательной к соответствующим конусам плоскости.

Рассмотрим случай (30), (31); функцию $b(t)$ выберем согласно равенству (54). Тогда

$$\boldsymbol{b}_{\Pi}(t) = \frac{1}{b_0 + c_0 \sin\varphi}\big[a_0' \sin\varphi(t)\, \mathbf{i}_1 + a_0' \cos\varphi(t) \mathbf{i}_2 + (a_0 + b_0 + c_0 \sin\varphi)\mathbf{i}_3\big], \tag{59}$$

$$\boldsymbol{b}_{\text{Н}}(t) = \frac{1}{b_0 + c_0 \sin\varphi}\big[a_0'(b_0{+}c_0 \sin\varphi)(\cos\psi\, \mathbf{r}_1{+}\cos\psi\, \mathbf{r}_2){+}(1{+}a_0 b_0{+}a_0 c_0 \sin\varphi)\, \mathbf{r}_3\big]. \tag{60}$$

Обращаясь к равенству (59), можно сделать заключение, что подвижный годограф (59) – линия пересечения плоскости и эллиптического цилиндра:

$$a_0 c_0 b_1 + a_0' b_0 b_3 - a_0'(a_0 + b_0) = 0, \quad (b_1 - a_0' c_0)^2 + b_0^2 b_2^2 = {a_0'}^2 b_0^2. \tag{61}$$

В силу свойства изоконичности движения тела неподвижный годограф (60) симметричен подвижному годографу (59) относительно касательной к ним плоскости и проходящей через неподвижную точку. Далее применим модифицированный метод Пуансо [8] в использовании движения тела в случае (59) – (61) на основании тех классов, которые рассмотрены в [6, 7].

5. О движении главных осей эллипсоида инерции тела в случае прецессионно-изоконических движений. Следуя [13], обозначим через $\text{э}_1, \text{э}_2, \text{э}_3$ единичные векторы главных осей эллипсоида инерции тела и будем полагать, что вектор $\boldsymbol{a}$ прецессионной системы координат (системы, оси которой связаны с вектором $\boldsymbol{a}$) находится в главной плоскости эллипсоида инерции. Сохраним для определения положения прецессионной системы координат углы θ_0, φ, ψ . Тогда в силу формулы (38) для вектора (36) (из [13]) получим

$$R_1(\varphi, \psi) = (a_0 \sin\beta \sin\varphi - a_0' \cos\beta) \sin\psi - \sin\beta \sin\varphi \cos\psi, \tag{62}$$

$$R_2(\varphi, \psi) = -(a_0 \sin\beta \sin\varphi - a_0' \cos\beta) \cos\psi - \sin\beta \cos\varphi \sin\psi, \tag{63}$$

$$R_3(\varphi,\psi) = a_0\cos\beta + a_0'\sin\varphi\sin\beta. \tag{64}$$

Поставим задачу об исследовании движения главных осей инерции тела в случае прецессионно-изоконических движений. Запишем выражение для вектора $\mathbf{э}_3$:

$$\mathbf{э}_3 = R_1(\varphi,\psi)\mathbf{r}_1 + R_2(\varphi,\psi)\mathbf{r}_2 + R_3(\varphi,\psi)\mathbf{r}_3, \tag{65}$$

где $\mathbf{r}_i$ $(i=\overline{1,3})$ – единичные векторы неподвижной системы координат. В (62)–(64) через β обозначен угол между векторами $\mathbf{э}_3$ и $\mathbf{i}_3$ (главной и прецессионной системами координат).

Рассмотрим случай прецессионно-изоконических движений, для которых $\varphi = \psi$. Полагая, что в (62), (63) выполнено это условие, найдем

$$\begin{aligned} &R_1 = (a_0+1)\sin\beta\sin^2\varphi - a_0'\cos\beta\sin\varphi - \sin\beta,\\ &R_2 = a_0'\cos\beta - (a_0+1)\sin\beta\sin\varphi,\\ &R_3 = a_0\cos\beta + a_0'\sin\varphi\sin\beta. \end{aligned} \tag{66}$$

Исключим из первых двух уравнений системы (66) величину $\sin\varphi$:

$$R_1 = \frac{1}{(1-a_0)\sin\beta}\big[R_3^2 - (1+a_0)R_3\cos\beta + (a_0 - \sin^2\beta)\big]. \tag{67}$$

Из системы (66) следует равенство

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \tag{68}$$

Таким образом, из соотношений (67), (68) получим, что годограф вектора $\mathbf{э}_3$ – линия пересечения цилиндрической поверхности (67) с образующими, параллельными вектору $\mathbf{э}_2$, и сферы (68). В обзорной монографии [6] показано, что имеют место несколько случаев прецессионно-изоконических движений рассматриваемого класса. Выделим среди них два случая:

$$\dot\varphi = a + b\sin\varphi, \qquad \dot\varphi = \sqrt{\beta_1 + \beta_2\sin\varphi}, \tag{69}$$

где $a,\ b,\ \beta_1,\ \beta_2$ – параметры. В первом случае из (69) при $a > b > 0$ имеем

$$\varphi(t) = 2\ \mathrm{arctg}\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\,t}{\sqrt{a^2-b^2} - b\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\,t}\right). \tag{70}$$

Если в равенства (66) подставить значение $\varphi(t)$ из (70), то нетрудно убедиться в том, что компоненты R_i из (66) являются периодическими функциями по времени. В частном случае, когда выполняется условие $a^2 = b^2 + 1$, из (70) следует

$$\varphi(t) = 2\ \mathrm{arctg}\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}{1 - b\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\right). \tag{71}$$

То есть функция (71) дает наглядный пример свойства периодичности конца вектора $\mathbf{э}_3$ из (65).

Рассмотрим второй пример из (69). Принимая условие $\beta_1 > \beta_2 > 0$, из уравнения $\dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin\varphi}$ имеем

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = 2\mathrm{am}\mu_0 t + \tfrac{\pi}{2}, \qquad \sin\varphi(t) = (1 - 2\mathrm{sn}^2\mu_0 t), \\ &\cos\varphi(t) = -2\mathrm{sn}\mu_0 t \ \mathrm{cn}\mu_0 t, \end{aligned} \tag{72}$$

где

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \qquad k_* = \frac{2\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \tag{73}$$

$\mathrm{am}\,\mu_0 t$, $\mathrm{sn}\,\mu_0 t$, $\mathrm{cn}\,\mu_0 t$ – эллиптические функции Якоби. Цель приведенных примеров, которые характеризуются формулами (69) – (73), состоит в том, чтобы показать различные свойства движения конца вектора (65) по кривой, определяемой равенствами (67), (68).

Заключение. Изучение прецессионных движений твердого тела, имеющего неподвижную точку, основано на применении углов Эйлера [6, 7]. К настоящему времени в указанной задаче получены значительные результаты не только для уравнений Эйлера–Пуассона, но и для уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Анализ свойств движения тела, как правило, основан на использовании углов Эйлера, которые характеризуют движение прецессионной системы координат. В статье, следуя методам [8, 13], исследуются новые свойства прецессионных движений. Особое внимание уделено рассмотрению прецессионно-изоконических движений тела с неподвижной точкой.

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Uber die Theorie des Kreisels. – New-York e. a.: Johnson reprint corp., 1965. – 966 s.
3. *Аппельрот Г.Г.* Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гиростата С.В. Ковалевской // Матем. сб. Кружка любителей матем. наук. – 1910. – **16**, вып. 3. – С. 262–334.
4. *Аппельрот Г.Г.* Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1938. – № 3. – С. 385–411.
5. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010.– 364 с.
8. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.

9. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 703–707.
10. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 407 с.
11. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Методы истолкования движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 3–13.
12. *Gorr G.V., Tkachenko D.N., Shchetinina E.K.* Research on the Motion of a Body in a Potential Forche Field in the Case of Three Invariant Relations // Russian J. on Nonlinear Dynamics. – 2019. – **15**, № 3. – P. 327–342.
13. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 55–65.
14. *Брессан А.О.* О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса // Механика. Период. сб. переводов. – 1958. – **52**. – С. 153–158.
15. *Гашененко И.Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 12–19.
16. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

A.V. Maznev, Yu.S. Gorbunova

New kinematic properties of precessional movements of a solid body having a fixed point

The article considers two approaches to study the precessions of a rigid body with a fixed point. The first approach is devoted to the application of the modified Poinsot method of kinematic interpretation of motion. The second approach is to study the movements of the main axes of the body inertia ellipsoid in still space for precession movements.

Keywords: *kinematics, precessions, modified method, main axes of inertia.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т", Донецк
aleksandr_maznev@rambler.ru

Получено 27.09.19