

Том 28
Донецк, 2014

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Е.С. Афанасьева, Р.Р. Салимов</i> Об отображениях в евклидовых пространствах с альтернативными метриками	3
<i>В.П. Бурский, А.А. Мирошникова</i> К теории расширений дифференциальных операторов с частными производными в банаховых пространствах	10
<i>И.Г. Васильева, А.Л. Зув</i> Анализ предельного множества траекторий нелинейной системы со случайными воздействиями для почти всех начальных условий	20
<i>В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, И.М. Савостьянова</i> Свойства ядра обобщенного преобразования Минковского на сфере	27
<i>И.Н. Глушко</i> Формальная семантика агрегатных операций в табличных алгебрах	36
<i>М.З. Двейрин, А.С. Левадная</i> Обобщенный порядок и обобщенный тип целой функции в терминах ее наилучших приближений	43
<i>А.С. Ефимушкин, В.И. Рязанов</i> О некоторых аналогах теорем Лузина и Геринга	54
<i>А.Л. Зув, Ю.В. Новикова</i> Стабилизация колебаний пластины Кирхгофа с помощью обратной связи по состоянию	62

<i>Н.С. Иванисенко, П.А. Машиаров</i> Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника	76
<i>Е.А. Игнатова</i> Исследование двух линейных инвариантных соотношений в задаче о движении тела в магнитном поле	84
<i>А.М. Ковалев, Г.В. Горр, Д.А. Данилюк</i> Применение параметров Родрига-Гамильтона для исследования прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой	93
<i>Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин</i> Предельное равновесие изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами	102
<i>Ю.С. Коломойцев, Т.В. Ломако</i> О приближении дробных производных функций тригонометрическими полиномами в L_p , $0 < p < 1$	111
<i>Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц</i> Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электромотора	120
<i>И.В. Махно</i> Исследование конечно-разностной аппроксимации нелинейной модели химического реактора	126
<i>О.А. Очаковская</i> Аппроксимация в L^p линейными комбинациями индикаторов шаров	132
<i>А.С. Сенченко</i> Свойства операции проекции в табличных алгебрах	141
<i>С.М. Чуйко</i> Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием	148

УДК 517.5

©2014. Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ МЕТРИКАМИ

Развивая технику p -модулей применительно к семействам кривых в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ с локально конечной борелевой мерой μ и метрикой d , авторы устанавливают конечную липшицевость и гельдеровость Q -гомеоморфизмов, действующих из $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой и мерой Лебега.

Ключевые слова: евклидовы пространства с мерами, Q -гомеоморфизмы, p -модули.

1. Введение. В последнее время активно развивается теория так называемых Q -гомеоморфизмов. В препринте [1], а затем в статье [2], для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения Q -гомеоморфизмов, введенных О. Мартио. Основной целью теории Q -гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f и свойств функции $Q(x)$ в модульном неравенстве. Развитие этой теории начиналось в работах [13–14]. Высокий уровень абстракции теории Q -отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удастся установить оценку модуля с подходящей функцией $Q(x)$, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе, к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [9] и [12].

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [12], [19]. Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство X с метрикой d и локально конечной борелевской мерой μ . Борелеву функцию $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$, называем *допустимой* для семейства кривых Γ в X , пишем $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho \, ds \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (1)$$

Тогда p -модулем семейства кривых Γ , $p \in (0, \infty)$, в пространстве (X, d, μ) называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^p(x) \, d\mu(x), \quad (2)$$

где D – область в X .

Пространство (X, d, μ) называется α -регулярным по Альфорсу, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_r) \leq Cr^\alpha \quad (3)$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \text{diam } X$. Как известно, α -регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α , см., напр., [7], с. 61. Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α -регулярно для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α -регулярно сверху в точке $x_0 \in X$* , если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq Cr^\alpha \quad (4)$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (4) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Предположим, что при $p \in (n-1, n)$ и

$$M_p(f\Gamma) \leq K M_p(\Gamma) \quad (5)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D . При предположении, что f в (5) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *локально квазиизометричным*, другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq K^{\frac{1}{n-p}}, \quad (6)$$

см., напр., теорему 2 в [3].

Пусть всюду далее D – область в $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$, где $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ – евклидово пространство с локально конечной борелевой мерой μ и метрикой d , $n \geq 2$, D' – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой и мерой Лебега.

Аналогично [12] говорим, что $f : D \rightarrow D'$ – *Q -гомеоморфизм относительно p -модуля* ($n-1 < p < n$), если

$$M_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^p(x) d\mu(x) \quad (7)$$

выполнено для любого семейства кривых Γ в D и любой допустимой функции ρ для Γ .

При $p = n$ проблема локального поведения Q -гомеоморфизмов изучалась в случае $Q \in \text{ВМО}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \text{ФМО}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях, см. монографию [12]. В работе [17] было показано, что Q -гомеоморфизмы в случае $Q \in L^1_{\text{loc}}(D)$ принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{\text{loc}}$ и дифференцируемы почти всюду. Определение Q -гомеоморфизма относительно p -модуля при $p \neq n$ впервые встречается в работе [6]. В работе [5] неравенство вида (7) уставлено для отображений квазиконформных в среднем при $p \neq n$.

2. Определения и предварительные результаты. Следуя работе [15], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество,

содержащееся в A , называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если B – область, дополнение которой $\mathbb{R}^n \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow D'$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D , то (fA, fC) также конденсатор в D' . Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (8)$$

При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dm(x) \quad (9)$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \quad (10)$$

см. [4], [8] и [18].

Известно, что при $1 \leq p < n$

$$\text{cap}_p \mathcal{E} \geq n \nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}, \quad (11)$$

где ν_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., напр., неравенство (8.9) в [16].

При $n-1 < p \leq n$ имеет место оценка

$$(\text{cap}_p \mathcal{E})^{n-1} \geq \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \quad (12)$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C , γ – положительная константа, зависящая только от размерности n и p , см. предложение 6 в [10].

3. Гельдеровость и конечная липшицевость. Пусть $x, y \in D$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ называется *конечно липшицевым*, если

$$\limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} < \infty \quad (13)$$

для всех $x \in D$. Ниже приведена теорема о достаточном условии гельдеровости в точке для Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля.

Теорема 1. Пусть мера μ является α -регулярной сверху и $f : D \rightarrow D'$ – Q -гомеоморфизм относительно p -модуля. Если

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) d\mu(x) < \infty. \quad (14)$$

Тогда при $n - 1 < p < \alpha \leq n$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{[d(x, x_0)]^\gamma} \leq C_{n,p} Q_0^{1/(n-p)}, \quad (15)$$

где $\gamma = \frac{\alpha-p}{n-p} \in (0, 1)$ и $C_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $A = A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < d(x, x_0) < \varepsilon_2\}$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$. Тогда $(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)})$ – кольцевой конденсатор в D' и, согласно (10), имеем равенство

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)} \right) = M_p(\Delta(\partial fB(x_0, \varepsilon_2), \partial fB(x_0, \varepsilon_1); fA), \quad (16)$$

а ввиду гомеоморфности f , равенство

$$\Delta(\partial fB(x_0, \varepsilon_2), \partial fB(x_0, \varepsilon_1); fA) = f(\Delta(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A)). \quad (17)$$

Очевидно, что функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & x \in A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \quad (18)$$

является допустимой для семейства $(\Delta(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A))$.

В силу определения Q -гомеоморфизма относительно p -модуля замечаем, что

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)} \right) \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int_{A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} Q(x) d\mu(x). \quad (19)$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)} \right) \leq \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) d\mu(x). \quad (20)$$

С другой стороны, в силу неравенства (11) вытекает оценка

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)} \right) \geq C_1 [m(fB(x_0, 2\varepsilon))]^{\frac{n-p}{n}}, \quad (21)$$

где C_1 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (20) с (21) и используя α -регулярность меры μ , получаем, что

$$m(fB(x_0, 2\varepsilon)) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{n(\alpha-p)}{n-p}} \left[\frac{1}{\mu(B(x_0, 4\varepsilon))} \int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \right]^{\frac{n}{n-p}}, \quad (22)$$

где C_2 – положительная постоянная, зависящая только от n и p .

Далее, выбирая в (19) $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)} \right) \leq \frac{\mu(B(x_0, 2\varepsilon))}{\varepsilon^p} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x), \quad (23)$$

и учитывая α -регулярность меры,

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)} \right) \leq \frac{C_3 \varepsilon^{\alpha-p}}{\mu(B(x_0, 2\varepsilon))} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x), \quad (24)$$

где C_3 – положительная постоянная, зависящая только от n и p .

С другой стороны, в силу неравенства (12), получаем

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)} \right) \geq \left(C_4 \frac{d^p(fB(x_0, \varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0, 2\varepsilon))} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (25)$$

где C_4 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (24) и (25), получаем, что

$$\frac{d^p(fB(x_0, \varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0, 2\varepsilon))} \leq C_5 \varepsilon^{(\alpha-p)(n-1)} \left(\frac{1}{\mu(B(x_0, 2\varepsilon))} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \right)^{n-1}, \quad (26)$$

где C_5 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Эта оценка вместе с (22) дает неравенство

$$d(fB(x_0, \varepsilon)) \leq C_6 \left(\frac{1}{\mu(B(x_0, 4\varepsilon))} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{n-p}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha-p}{n-p}}, \quad (27)$$

где C_6 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p . Переходя к верхнему пределу при $x \rightarrow x_0$, немедленно вытекает заключение теоремы.

Следствие 1. Пусть мера μ является n -регулярной и $f : D \rightarrow D'$ – Q -гомеоморфизм относительно p -модуля при $p \in (n - 1, n)$. Если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) d\mu(x) < \infty \quad \forall x_0 \in D. \quad (28)$$

Тогда f является конечно липшицевым в D .

ЗАМЕЧАНИЕ. В соответствии с леммой 10.6 в [12] конечно липшицевые отображения обладают N -свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Следствие 2. Пусть мера μ является n -регулярной сверху, $f : D \rightarrow D'$ – Q -гомеоморфизм относительно p -модуля при $p \in (n - 1, n)$, $Q(x) \leq K$ п.в. Тогда f является липшицевым в D .

1. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. – 2000. – no. 256. – 22 p.
2. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – Vol. 22. – P. 1397–1420.
3. Gehring F.W. Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – Vol. 66. – P. 175–193.
4. Gehring F.W. Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
5. Golberg A. Integrally quasiconformal mappings in space, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2010. – Vol. 7, no. 2. – P. 53–64
6. Golberg A. Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218–228.
7. Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer, 2001.
8. Hesse J. A p -extremal length and p -capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – Vol. 13. – P. 131–144.
9. Iwaniec T., Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
10. Кругликов В.И. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – Vol. 130, no. 2. – С. 185–206.
11. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics: – New York: Springer, 2009. – 367 p.
12. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 pp.
13. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – Vol. 30, № 1. – P. 49–69.
14. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Q -homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193–203.
15. Martio O., Rickman S., Vaisala J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – Vol. 448. – P. 1–40.
16. V. Maz'ya Lectures on isoperimetric and isocapacity inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – Vol. 338. – P. 307–340.
17. Салимов Р.Р. Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2008. – Vol. 72, no. 5. – P. 141–148.
18. Shlyk V.A. On the equality between p -capacity and p -modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – Vol. 34, no. 6. – P. 216–221.
19. Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc., Springer-Verlag, 1971. – 144 p.

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

On mappings of Euclidean spaces with alternative metrics.

Developing a p -modules technique applied to a family of curves in Euclidean space $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ with a locally finite Borel measure μ and metric d , the authors establish a finite Lipschitz and Hölder's properties of Q -homeomorphisms acting from $(\mathbb{R}^n, \mu, d)$ the space into Euclidean space $\mathbb{R}^n$ of the standard metric and Lebesgue measure.

Keywords: *Euclidean spaces with measures, Q -homeomorphisms, p -modules.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
es.afanasjeva@yandex.ru
ruslan623@yandex.ru

Получено 01.04.14

УДК 517.95

©2014. В. П. Бурский, А. А. Мирошникова

К ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Известная гильбертова схема построения общей теории граничных задач посредством изучения расширений дифференциального оператора в области переносится на случай банаховых пространств типа $L_p, p > 1$.

Ключевые слова: расширения дифференциальных операторов, банаховы пространства.

1. Введение. Основные положения общей теории граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными были заложены в работах М.И. Вишика [4] и Л. Хёрмандера [5]. Важно заметить, что построения Вишика, Хёрмандера и их последователей проводились в гильбертовых пространствах. В книге [2] была предложена функциональная гильбертова схема дальнейшего построения теории и была намечена структура развития теории для случая банаховых пространств. В работе авторов [1] были сделаны некоторые шаги по осуществлению намеченных построений. Настоящая работа содержит доработанную схему построения основ теории расширений в банаховых пространствах. В работе сформулированы теоремы, которые естественно вытекают из предлагаемой схемы, полные доказательства которых, однако, занимают большой объем и будут опубликованы в соответствующей большой работе.

2. Определения и обозначения. В этой статье речь пойдет об изучении граничных задач для дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}(x, D)u = f, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{L}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \cdot \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}$ – общая дифференциальная операция с гладкими комплекснозначными коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, находящейся с одной стороны от её гладкой $(n-1)$ -мерной границы $\partial\Omega$.

Представляется удобным сформулировать абстрактную схему, в рамках которой будут производиться построения.

Пусть $p > 1$, $q = p/(p-1)$ и нам даны:

I_1) два рефлексивных банаховых пространства B_p и B_q , которые будем называть **центральноными**. При этом $B_p = (B_q)^*$, где $*$ – обычное банаховское сопряжение;

два рефлексивных банаховых пространства $\overset{\circ}{B}_p^l \subset B_p$, $\overset{\circ}{B}_q^l \subset B_q$ (с некоторым $l \in \mathbb{N}$), которые будем называть **финитными**, причем выполнено условие:

вложения $\overset{\circ}{B}_p^l \subset B_p$, $\overset{\circ}{B}_q^l \subset B_q$ – плотны.

$I_2)$ четыре линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}_p : \overset{\circ}{B}_p^l \rightarrow B_p$, $\mathcal{L}_p^+ : \overset{\circ}{B}_p^l \rightarrow B_p$, $\mathcal{L}_q : \overset{\circ}{B}_q^l \rightarrow B_q$, $\mathcal{L}_q^+ : \overset{\circ}{B}_q^l \rightarrow B_q$, связанных соотношениями

$$\langle \mathcal{L}_p u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}_p^+ v \rangle, u \in B_p^l, v \in B_q,$$

$$\langle \mathcal{L}_q u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}_q^+ v \rangle, u \in B_q^l, v \in B_p,$$

где хотя бы один из элементов u или v финитен.

В изложенной схеме мы подразумеваем, что пространства выбираются как указано ниже, но ничто не мешает любому другому выбору, лишь бы выполнялись описанные предположения. Итак, можно считать, что: $B_p = L_p(\Omega)$, $\overset{\circ}{B}_p^l = \overset{\circ}{W}_p^l(\Omega)$, $B_p^l = W_p^l(\Omega)$, $B_p = L_p(\Omega)$, $\overset{\circ}{B}_p^l = \overset{\circ}{W}_p^l(\Omega)$, $B_p^l = W_p^l(\Omega)$. Мы будем понимать пространство $\overset{\circ}{W}_p^l(\Omega)$ как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в соболевской норме, а пространство $W_p^l(\Omega)$, скажем, как замыкание пространства $C^\infty(\bar{\Omega}) = \{u|_\Omega \mid u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ в этой же норме. Аналогично вводятся пространства с индексом $q = p/(p-1)$.

Операция $\mathcal{L}$ порождает формально сопряжённую по Лагранжу операцию $\mathcal{L}^+ \cdot = \sum_{|\alpha| \leq l} D^\alpha(a_\alpha^*(x) \cdot)$, где $a_\alpha^*(x)$ – сопряжённое число. Операция $\mathcal{L}$ порождает операторы $\mathcal{L}_p$ и $\mathcal{L}_q$, а операция $\mathcal{L}^+$ порождает операторы $\mathcal{L}_p^+$ и $\mathcal{L}_q^+$ из пункта I_2). Равенства пункта (I_2) теперь есть формулы Грина, где граничные члены исчезли из-за финитности. Мы видим из этих определений, что предположения пунктов $I_1)$ и $I_2)$ выполнены.

3. Основные положения общей теории граничных задач. Далее будем строить теорию расширений дифференциальных операторов.

Введём две нормы графика:

$$\|u\|_{L_p}^2 = \|u\|_{B_p}^2 + \|\mathcal{L}u\|_{B_p}^2,$$

$$\|u\|_{L_q}^2 = \|u\|_{B_q}^2 + \|\mathcal{L}u\|_{B_q}^2,$$

конечные на элементах из пространств B_p^l и B_q^l . Обозначим пополнение пространства $\overset{\circ}{B}_p^l$ по норме $\|\cdot\|_{L_p}^2$ и пополнение пространства $\overset{\circ}{B}_q^l$ по норме $\|\cdot\|_{L_q}^2$, соответственно, $D(L_{p0})$, $D(L_{q0})$. Оператор $\mathcal{L}$ при этом допускает продолжения $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_q$ по непрерывности, соответственно, на пространства $D(L_{p0})$ и $D(L_{q0})$ в силу оценок $\|\mathcal{L}u\|_{B_p} \leq \|u\|_{L_p}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{B_q} \leq \|u\|_{L_q}$. Так полученные операторы $L_{p0} : D(L_{p0}) \rightarrow B_p$ и $L_{q0} : D(L_{q0}) \rightarrow B_q$ будем называть минимальными расширениями операторов $\mathcal{L}|_{\overset{\circ}{B}_p^l}$ и $\mathcal{L}|_{\overset{\circ}{B}_q^l}$, соответственно, или просто **минимальными операторами** и, соответственно, обозначать L_{p0} и L_{q0} . Так же введём нормы графика:

$$\|u\|_{L_p^+}^2 = \|u\|_{B_p}^2 + \|\mathcal{L}^+u\|_{B_p}^2,$$

$$\|u\|_{L_q^+}^2 = \|u\|_{B_q}^2 + \|\mathcal{L}^+u\|_{B_q}^2,$$

пространства $D(L_{p0}^+)$, $D(L_{q0}^+)$ и операторы L_{p0}^+ , L_{q0}^+ .

Мы вводим максимальные расширения L_p и L_q или просто **максимальные операторы** формулами $L_p = (L_{q0}^+)^*$ и $L_q = (L_{p0}^+)^*$. Аналогично определение максимальных операторов $L_p^+ = L_{q0}^*$ и $L_q^+ = L_{p0}^*$.

Введём теперь **граничные пространства** $C(L_p)$, $C(L_q)$, $C(L_p^+)$, $C(L_q^+)$ операторов L_p , L_q , L_p^+ , L_q^+ как фактор-пространства $C(L_p) = D(L_p)/D(L_{p0})$, $C(L_q) = D(L_q)/D(L_{q0})$, $C(L_p^+) = D(L_p^+)/D(L_{p0}^+)$, $C(L_q^+) = D(L_q^+)/D(L_{q0}^+)$, а также фактор-отображения $\Gamma_p : D(L_p) \rightarrow C(L_p)$, $\Gamma_q : D(L_q) \rightarrow C(L_q)$, $\Gamma_p^+ : D(L_p^+) \rightarrow C(L_p^+)$, $\Gamma_q^+ : D(L_q^+) \rightarrow C(L_q^+)$.

Замечание 3.1. Пусть нам дан замкнутый оператор $T : D(T) \rightarrow B_2$, $D(T) \subset B_1$ с плотной областью определения, действующий в банаховых пространствах. Напомним [7], что оператор T называется **корректно разрешимым**, если выполнена априорная оценка

$$\exists C > 0, \forall u \in D(T), \|u\|_{B_1} \leq C \|Tu\|_{B_2}.$$

Очевидно, это равносильно тому, что ядро $\ker T$ тривиально, а образ $\text{Im } T$ замкнут, и равносильно тому, что оператор $T^- : \text{Im } T \rightarrow D(T)$, заданный как $TT^- = 1_{\text{Im } T}$, является изоморфизмом (в линейном пространстве $\text{Im } T$ вводится индуцированная из B_2 топология). Заметим, что замкнутое подпространство $\text{Im } T \stackrel{i}{\subset} B_2$ не обязано быть прямым слагаемым, но разложение в прямую сумму $B_2 = \text{Im } T \oplus N$ с некоторым замкнутым подпространством N равносильно существованию непрерывной проекции $B_2 \xrightarrow{\pi} \text{Im } T$ такой, что $\pi i = 1_{\text{Im } T}$ (см. ниже утверждение 4.1). Тогда, если еще оператор T корректно разрешим, то можно построить непрерывный левый обратный $T^{-1} : B_2 \rightarrow D(T)$, $T^{-1} = T^- \pi$. Наоборот, если существует непрерывный левый обратный $T^{-1} : B_2 \rightarrow D(T)$ к оператору T , то выполнена оценка $\|u\|_{B_1} \leq C \|Tu\|_{B_2}$ и оператор TT^{-1} расщепляет последовательность $0 \rightarrow \text{Im } T \rightarrow B_2 \rightarrow N = B_2/\text{Im } T \rightarrow 0$, т.е. $\text{Im } T$ является прямым слагаемым в пространстве B_2 .

Ниже мы будем рассматривать следующие условия:

$$\text{оператор } L_{p0} : D(L_{p0}) \rightarrow B_p^+ \text{ корректно разрешим;} \quad (3.1)_p$$

$$\text{оператор } L_{q0} : D(L_{q0}) \rightarrow B_q^+ \text{ корректно разрешим;} \quad (3.1)_q$$

$$\text{оператор } L_{p0}^+ : D(L_{p0}^+) \rightarrow B_p \text{ корректно разрешим;} \quad (3.2)_p$$

$$\text{оператор } L_{q0}^+ : D(L_{q0}^+) \rightarrow B_q \text{ корректно разрешим;} \quad (3.2)_q$$

$$\text{оператор } L_{p0} : D(L_{p0}) \rightarrow B_p^+ \text{ имеет непрерывный левый обратный } L_{p0}^{-1}; \quad (3.3)_p$$

$$\text{оператор } L_{q0} : D(L_{q0}) \rightarrow B_q^+ \text{ имеет непрерывный левый обратный } L_{q0}^{-1}; \quad (3.3)_q$$

$$\text{оператор } L_{p0}^+ : D(L_{p0}^+) \rightarrow B_p \text{ имеет непрерывный левый обратный } (L_{p0}^+)^{-1}; \quad (3.4)_p$$

$$\text{оператор } L_{q0}^+ : D(L_{q0}^+) \rightarrow B_q \text{ имеет непрерывный левый обратный } (L_{q0}^+)^{-1}; \quad (3.4)_q$$

Введем понятие общей граничной задачи. Рассмотрим подходы М.Й. Вишика и Л. Хёрмандера, одновременно вводя необходимые ниже определения.

Следуя М.Й. Вишику [4], будем считать, что задание граничного условия проявляется посредством указания области определения $D(L_{pB})$ некоторого оператора L_{pB} , который является расширением минимального L_{p0} и сужением максимального L_p операторов: $D(L_{p0}) \subset D(L_{pB}) \subset D(L_p)$. Такие операторы принято называть **расширениями** (оператора L_{p0}), при этом расширение $L_{pB} : D(L_{pB}) \rightarrow B_p^+$ называется **разрешимым**, если существует непрерывный двусторонний обратный оператор $L_{pB}^{-1} : B_p^+ \rightarrow D(L_{pB})$, $L_{pB}L_{pB}^{-1} = \text{id}_{B_p^+}$, $L_{pB}^{-1}L_{pB} = \text{id}_{D(L_{pB})}$. Очевидно, что такой оператор разрешает граничную задачу $u \in D(L_{pB})$ для уравнения $L_p u = f$ с любой правой частью $f \in B_p^+$. Оператор $U : D(U) \rightarrow B_p^+$, являющийся сужением оператора L_p , назовём **разрешимым сужением**, если у него имеется непрерывный двусторонний обратный. Этот обратный оператор является непрерывным правым обратным к оператору L_p и наоборот, каждый непрерывный правый обратный M_p к оператору L_p порождает некоторое разрешимое сужение с областью определения $D(U) = \text{Im } M_p$, которое является разрешимым расширением (оператора L_{p0}), если $D(L_{p0}) \subset \text{Im } M_p$. Расширение L_{pB} называется **вполне разрешимым**, если оно разрешимо и композиция обратного оператора L_{pB}^{-1} с вложением $i_{D(L_p)} : D(L_p) \subset B_p$ вполне непрерывна, то есть если вполне непрерывен оператор L_{pB}^{-1} , понимаемый как действующий из B_p^+ в B_p . Мы будем также называть расширение $L_{pB} : D(L_{pB}) \rightarrow B_p^+$ **нормально разрешимым**, если образ $\text{Im } L_{pB}$ – замкнут. Подобным образом вводим определения разрешимого, вполне разрешимого и нормально разрешимого расширения операторов L_{p0}^+ , L_{q0} , L_{q0}^+ .

Следуя Л. Хёрмандеру [5], назовём **однородной граничной задачей** соотношения

$$L_p u = f, \quad \Gamma_p u \in B, \quad (3.5)_p$$

где $B \subset C(L_p)$ – линейное подпространство в граничном пространстве, определяющее граничную задачу. Нетрудно видеть, что граничное условие типа $u \in D(L_{pB})$ порождает условие $\Gamma_p u \in B$, где $B = D(L_{pB})/D(L_{p0})$, и наоборот, подпространство $B \subset C(L_p)$ порождает некоторый оператор L_{pB} с областью определения $D(L_{pB}) = \Gamma_p^{-1}(B)$, являющийся сужением оператора L_p на пространство $D(L_{pB})$ и расширением оператора L_{p0} , и который замкнут, если и только если пространство B замкнуто в $C(L_p)$, или, что то же, если пространство $D(L_{pB})$ замкнуто в $D(L_p)$. Граничная задача $(3.5)_p$ называется **корректно поставленной** или просто **корректной**, если ею порождённый оператор L_{pB} является разрешимым расширением оператора L_{p0} , т.е. если оператор $L_{pB} : D(L_{pB}) \rightarrow B_p$ имеет непрерывный двусторонний обратный. Аналогично с q .

Сформулируем теперь основные утверждения общей теории граничных задач (доказательства утверждений 3.1–3.4 см. в разделе 4).

Теорема 3.1_p. *У оператора L_{p0} существует разрешимое расширение и для оператора L_p существует корректная граничная задача тогда и только тогда, когда выполнены условия $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$.*

Теорема 3.1_q. У оператора L_{q0} существует разрешимое расширение и для оператора L_q существует корректная граничная задача тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.3)_q и (3.4)_p.

Справедливы аналогичные утверждения для операторов с индексом «+».

Строение области определения максимального оператора L_p описывает

Теорема 3.2_p. В условиях (3.3)_p и (3.4)_q имеет место разложение в прямую сумму (здесь и ниже в этом пункте прямая сумма понимается в категории банаховых пространств, т.е. с непрерывными операторами вложения и проекции, с категориями связан и наш выбор обозначения $\oplus$ для прямой суммы банаховых пространств)

$$D(L_p) = D(L_{p0}) \oplus \ker L_p \oplus W_p, \quad (3.6)_p$$

где W_p – некоторое подпространство в $D(L_p)$ такое, что $L_p|_{W_p} : W_p \rightarrow (\ker L_q^+)^*$ – изоморфизм.

Верно следующее аналогичное утверждение для максимального оператора L_q :

Теорема 3.2_q. В условиях (3.3)_q и (3.4)_p имеет место разложение в прямую сумму

$$D(L_q) = D(L_{q0}) \oplus \ker L_q \oplus W_q, \quad (3.6)_q$$

где W_q – некоторое подпространство в $D(L_q)$ такое, что $L_q|_{W_q} : W_q \rightarrow (\ker L_p^+)^*$ – изоморфизм.

Справедливы аналогичные утверждения с оператором с индексом «+».

Следуя М.Й. Вишику, сформулируем теперь критерий разрешимости расширения.

Теорема 3.3_p. Пусть выполнены условия (3.3)_p, (3.4)_q. Для того, чтобы расширение L_{pB} было бы разрешимым (а задача (3.5)_p – корректна в пространстве B_p), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой непрерывный оператор $V_p : \ker L_{p0}^{-1} \rightarrow \ker L_p$, что

$$D(L_{pB}) = D(L_{p0}) \oplus G(V_p L_p|_{W_p}), \quad (3.7)_p$$

где $G(V_p L_p|_{W_p}) = \{w + V_p L_p w | w \in W_p\}$ – график оператора $V_p L_p|_{W_p}$, вложенный в $D(L_p)$. При этом $D(L_p) = D(L_{pB}) \oplus \ker L_p$.

Оператор V_p будем называть **оператором Вишика** граничной задачи (3.5)_p.

Следуя Л. Хёрмандеру, сформулируем теперь критерий корректности граничной задачи.

Теорема 3.4_p. Пусть выполнены условия (3.3)_p, (3.4)_q. Для того, чтобы задача (3.5)_p была корректна, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение в прямую сумму $C(L_p) = C(\ker L_p) \oplus B$, где $C(\ker L_p) = \Gamma_p \ker L_p$ – граничное пространство ядра $\ker L_p$.

Прямое слагаемое B в последнем разложении будем называть **слагаемым Хёрмандера**. Ясно, что в этом случае B – график оператора $\Gamma_p|_{\ker L_p} V_p$, вложенный в $C(L_p)$, где мы обозначили $\Gamma_p|_{\ker L_p} = \Gamma|_{\ker L_p}$.

Теоремы 3.3_p и 3.4_p, очевидно, имеют аналоги с оператором с индексом «+», а также и аналоги с индексом q .

Доказательства утверждений вида 3.1–3.4 будут предоставлены в разделе 4. Наряду с условиями вида (3.1)–(3.4) будут использоваться также следующие условия:

$$\text{оператор } L_p : D(L_p) \rightarrow B_p \text{ сюръективен;} \quad (3.8)_p$$

$$\text{оператор } L_q : D(L_q) \rightarrow B_q \text{ сюръективен;} \quad (3.8)_q$$

$$\text{оператор } L_p^+ : D(L_p^+) \rightarrow B_p \text{ сюръективен;} \quad (3.9)_p$$

$$\text{оператор } L_q^+ : D(L_q^+) \rightarrow B_q \text{ сюръективен;} \quad (3.9)_q$$

$$\text{оператор } L_{p0} \text{ нормально разрешим;} \quad (3.10)_p$$

$$\text{оператор } L_{q0} \text{ нормально разрешим;} \quad (3.10)_q$$

$$\text{оператор } L_{p0}^+ \text{ нормально разрешим;} \quad (3.11)_p$$

$$\text{оператор } L_{q0}^+ \text{ нормально разрешим.} \quad (3.11)_q$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. По определению максимального оператора условие (3.8)_p эквивалентно условию (3.2)_q, а условие (3.8)_q эквивалентно условию (3.2)_p ([7], п.3).

Рассматривая основной пример из п.2, отметим, что, например, условие (3.1)_p означает выполнение неравенства

$$\|\mathcal{L}\varphi\|_{L_p(\Omega)} \geq C\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \quad (3.12)$$

для финитных бесконечно дифференцируемых функций. Хорошо известно неравенство Хёрмандера $\|\mathcal{L}\varphi\|_{L_2(\Omega)} \geq C\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$ для функций из $C_0^\infty(\Omega)$ и скалярных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Однако в пространстве $L_p(\Omega)$ с $p \neq 2$ такое неравенство не доказано для более или менее широких классов операторов. Тем не менее, можно указать некоторые операторы, где неравенство (3.12) имеет место.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для скалярной дифференциальной операции $\square = \partial^2/\partial x_1 \partial x_2$ в плоской ограниченной области Ω неравенство (3.12) выполняется из-за возможности разложения оператора в произведение операторов первого порядка и неравенства такого вида $\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C\|u_{x_k}\|_{L_p(\Omega)}$, $k = 1, 2$, $1 \leq p < \infty$. Действительно, для одномерного x , $p \geq 1$ и финитной гладкой на $(0, 1)$ функции по неравенству Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u(x)|^p dx &= \int_0^1 |u(x) - u(0)|^p dx = \int_0^1 \left| \int_0^x u'(t) dt \right|^p dx \leq \int_0^1 \int_0^x |u'(t)|^p dt dx \leq \\ &\leq \int_0^1 dx \int_0^1 |u'(t)|^p dt = \int_0^1 |u'(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Тот же вывод мы делаем для произвольной операции первого порядка с постоянными вещественными коэффициентами $\mathcal{L} = a_1 \partial/\partial x_1 + a_2 \partial/\partial x_2$, поскольку линейным преобразованием координат мы можем свести ее к $\partial/\partial y_1$.

4. Коммутативная диаграмма. Приступим к доказательству теорем 3.1–3.4, анонсированных в п.3. Напомним, что в предабелевой категории (то есть аддитивной с ядром и коядром у каждого морфизма) последовательность объектов и морфизмов

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{M} C \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

называется точной, если образ предыдущего оператора равен ядру последующего, и говорят, что такая последовательность расщепляется, если $B = A \oplus C$. Общеизвестным ([6]) является следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Для расщепления последовательности (4.1) достаточно существования правого обратного морфизма к M или существования левого обратного морфизма к i .*

Преабелевой является категория $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ линейных пространств и линейных операторов (которая, сверх того, является абелевой), категория $\mathcal{B}$ банаховых пространств и непрерывных линейных операторов и ее подкатегория $\mathcal{B}_{cl\ im}$ банаховых пространств и непрерывных линейных операторов с замкнутыми образами (т.е. нормально разрешимых). Для этих категорий, в частности, точность в члене A означает инъективность оператора i , а точность в члене C означает сюръективность оператора M .

Пусть вначале мы находимся в условиях категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ линейных пространств. Для максимального оператора L_p тогда мы имеем точную последовательность $0 \rightarrow \ker L_p \rightarrow D(L_p) \rightarrow \text{Im } L_p \rightarrow 0$. Имеется похожая последовательность для минимального оператора L_{p0} , а кроме того, точные последовательности факторизации $0 \rightarrow \text{Im } L_{p0} \rightarrow \text{Im}(L_p) \xrightarrow{\Gamma_{\text{Im}}} \text{Im } L_p / \text{Im } L_{p0} \rightarrow 0$, $0 \rightarrow D(L_{p0}) \rightarrow D(L_p) \xrightarrow{\Gamma_p} C(L_p) \rightarrow 0$, где мы использовали определение граничного пространства $C(L_p)$. Введем еще фактор-пространство $C(\ker L_p) := \ker L_p / \ker L_{p0}$ с фактор-отображением $\Gamma_{p\ \ker}$ и будем использовать соответствующую короткую точную последовательность. Собрав это вместе, получим диаграмму, в которой введены обозначения для вложений и для упрощения записи записано $L_0 := L_{p0}$, $L := L_p$, $\Gamma := \Gamma_p$, $\Gamma_{\ker} := \Gamma_{p\ \ker}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & \ker L_0 & \xrightarrow{i_{L_0}} & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \text{Im } L_0 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow i_{\ker} & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\text{Im}} \\ 0 & \rightarrow & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & \text{Im } L \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\text{Im}} \\ 0 & \rightarrow & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & \text{Im } L / \text{Im } L_0 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (4.2)$$

Здесь операторы i_C и L_C определены формулами $i_C(u + \ker L_0) = u + D(L_0)$, $L_C(u + D(L_0)) = Lu + \text{Im}(L_0)$. Коммутативность всех квадратов очевидна. Таким образом, диаграмма (4.2) коммутативна, все столбцы и две верхние строки точны. Из алгебраической 3×3 -леммы (см. [6]) получаем точность нижней строки. Доказано

Утверждение 4.2. *Диаграмма (4.2) коммутативна, её строки и столбцы точны.*

Ниже мы также будем использовать следующий частный случай диаграммы (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Для случая $\ker L_{p0} = 0$, $\operatorname{Im} L_p = B_p =: B$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \operatorname{Im} L_0 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\operatorname{Im}} & \\
 0 & \longrightarrow & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & B \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\operatorname{Im}} & \\
 0 & \longrightarrow & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & B / \operatorname{Im} L_0 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array} \tag{4.3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Напомним, что диаграмма (4.2) записана для случая $L_0 = L_{p0}$, $L = L_p$. Но точно такую же диаграмму мы можем построить для случая $L_0 = L_{q0}$, $L = L_q$. Если к тому же $\ker L_{q0} = 0$, $\operatorname{Im} L_q = B_q = B$, то имеет место диаграмма (4.3) в этих обозначениях.

Теперь перейдем в категорию банаховых пространств $\mathcal{B}$. Для определенности будем рассматривать случай $L_0 = L_{p0}$, $L = L_p$. Пространство $D(L)$ является банаховым пространством с нормой графика, $D(L)$ – его замкнутое подпространство. Операторы L и L_0 непрерывны по определению, поэтому их ядра замкнуты в топологии $D(L)$. В их образах введем фактор-норму, поэтому объекты, входящие в диаграмму (4.2), кроме $B / \operatorname{Im} L_0$, являются банаховыми пространствами. Диаграмма (4.2) (как и (4.3)) станет диаграммой категории $\mathcal{B}$, если операторы $\Gamma_{\operatorname{Im}}$ и L_C будут непрерывны, другими словами, если их ядра $\operatorname{Im} L_0$ и $C(\ker L)$ замкнуты.

Непрерывность одного из двух операторов $\Gamma_{\operatorname{Im}}$ и L_C влечёт непрерывность другого. В самом деле, пусть, к примеру, непрерывен оператор $\Gamma_{\operatorname{Im}}$ и пусть последовательность классов v_k сходится к нулю в фактор-пространстве $C(L) = D(L) / D(L_0)$. Оператор Γ^{-1} существует в категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$, но он не обязательно непрерывен, обозначим $\Gamma^{-1}v_k = y_k \in D(L)$. Тогда то, что $v_k = y_k + D(L_0)$ сходится к нулю в $C(L)$, влечет, что $\exists a_k \in D(L_0)$, $y_k + a_k \rightarrow 0$ в $D(L)$, и для оператора $L_C v = \Gamma_{\operatorname{Im}} L \Gamma^{-1}v$ имеем: $L_C v_k = \Gamma_{\operatorname{Im}} L y_k = \Gamma_{\operatorname{Im}} L(y_k + a_k - a_k) = L(y_k + a_k) + \operatorname{Im} L_0 \rightarrow 0$ в $\operatorname{Im} L / \operatorname{Im} L_0$, что и требовалось. Аналогично доказывается непрерывность оператора $\Gamma_{\operatorname{Im}}$ при данной непрерывности оператора L_C .

Здесь и ниже обозначение A^{-1} для какого-нибудь оператора A из диаграммы (4.2) означает какой-нибудь правый или левый обратный к A линейный оператор, расщепляющий соответствующую последовательность диаграммы в смысле категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ комплексных линейных пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Условие $(3.3)_q$ влечет разложения $B_p = \ker L_p^+ \oplus \operatorname{Im}^* L_{q0}$ и $B_q =$

$\ker^* L_p^+ \oplus \text{Im} L_{q0}$. Условие $(3.3)_p$ влечет разложения $B_q = \ker L_q^+ \oplus \text{Im}^* L_{p0}$ и $B_p = \ker^* L_q^+ \oplus \text{Im} L_{p0}$.

В работе [2] были доказаны следующие утверждения:

Теорема 4.1_p. В категории $\mathcal{B}$ существование разрешимого расширения L_{pB} равносильно паре: свойству $(3.10)_p$ и разложению в прямую сумму

$$D(L_p) = D(L_{p0}) \oplus \ker L_p \oplus W_p, \quad (3.6)'_p$$

где $L_p|_{W_p} : W_p \rightarrow B_p / \text{Im} L_{p0}$ – изоморфизм (отметим, что разложение $(3.6)'_p$ – то же, что и $(3.6)_p$, но с другим образом у оператора $L_p|_{W_p}$).

Теорема 4.2_p. В категории $\mathcal{B}$ свойство $(3.3)_p$ и вместе с ним свойство

$$\text{оператор } L_p : D(L_p) \rightarrow B_p \text{ имеет непрерывный правый обратный}; \quad (4.4)_p$$

равносильны паре: свойству $(3.10)_p$ и разложению в прямую сумму $(3.6)_p$, где $L_p|_{W_p} : W_p \rightarrow \ker^* L_q^+$ – изоморфизм.

Аналогичны утверждения с индексом q .

Доказательства теорем вида 3.1–3.3 получим из теорем вида 4.1, 4.2, принимая во внимание, что равенство $L_p M_p = \text{id}_{B_p^+}$ после сопряжения перейдет в $M_p^* L_{p0}^+ = \text{id}_{D(L_{q0}^+)}$, и наоборот. Аналогично с индексом q . Мы здесь пользуемся сопряжением в смысле банаховых пространств для операторов с плотной областью определения [7].

Доказательства теорем вида 3.4 сразу следуют из теорем вида 3.3, причем, не привлекая структуру гильбертова пространства.

5. О проверке корректности граничной задачи. Здесь мы покажем, как может быть использована диаграмма (4.3) при доказательстве корректности граничной задачи (эти теоремы для случая гильбертового пространства получены в [2]).

Теорема 5.1_p. В условиях $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$ каждое разрешимое расширение L_{pB} раскладывается в прямую сумму $L_{pB} = L_{p0} \oplus L_{pB}^\partial$, где $L_{pB}^\partial : B \rightarrow \ker^* L_q^+$ – некоторый изоморфизм.

Доказательство. Из коммутативности диаграммы (4.3) с $\text{Im} L_p = B_p$ следует, что $L_p = L_{p0} \oplus L_C$, но $C(L_p) = \ker L_C \oplus B$, $\ker L_C = C(\ker L_p)$, поэтому оператор $L_{pB}^\partial = L_C|_B$ – изоморфизм. $\square$

Таким же образом доказывается

Теорема 5.1_q. В условиях $(3.3)_q$ и $(3.4)_p$ каждое разрешимое расширение L_{qB} раскладывается в прямую сумму $L_{qB} = L_{q0} \oplus L_{qB}^\partial$, где $L_{qB}^\partial : B \rightarrow \ker^* L_q^+$ – некоторый изоморфизм.

Теорема 5.2_p. В условиях $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$ всякое линейное подпространство $B \subset C(L_p)$ такое, что

- 1) $\Gamma_p^{-1} B \cap \ker L_p = 0$,
- 2) существует оператор $M_p : \ker^* L_q^+ \rightarrow D(L_p)$ со свойствами:
 - а) $L_p M_p = \text{id}|_{\ker L_{p0}^{-1}}$, б) $\text{Im} M_p \subset \Gamma_p^{-1} B$,

порождает корректную граничную задачу $(3.5)_p$.

Доказательство. Отметим сперва, что из свойств 1) и 2а) следует линейность оператора M_p , а также его непрерывность по теореме Банаха. Заметим затем, что сумма $M_p \oplus L_{p0}^{-1} : B_p = \ker L_{p0} \oplus \text{Im } L_{p0} \rightarrow D(L_p)$ – некоторый непрерывный правый обратный к оператору L_p , а оператор $\Gamma_p M_p$ – непрерывный правый обратный к оператору L_C . Из свойств прямой суммы вытекает разложение в прямую сумму

$$C(L_p) = C(\ker L_p) \oplus B_1, \text{ где } B_1 = \text{Im } \Gamma_p M_p.$$

Ясно, что $B \supset B_1$ и $B \cap C(\ker L_p) = 0$. Но это влечёт равенство $B = B_1$, поскольку, если элемент $b \in B$ такой, что $b \notin B_1$, то после факторизации $\Gamma_{p1} : C(L_p) \rightarrow C(\ker L_p)$ вдоль B_1 мы получим элемент $\Gamma_{p1}b \in C(\ker L_p)$, принадлежащий B , приходим к противоречию. $\square$

Справедливо и аналогичное утверждение с индексом q .

1. Бурский В.П., Мирошникова А.А. О расширениях общих дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Нелинейные граничные задачи. – 2009. – 19. – С. 1–11.
2. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 2002. – 315 с.
3. Боярский Б.В. О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве. – Бюлл. Польской АН. сер. мат., астр. и физ. наук. – 1960. – 8, № 1. – С. 19–23.
4. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. – Тр. Моск. мат. о-ва, 1 (1952). – С. 187–246.
5. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: ИЛ, 1959.
6. Маклейн С. Гомология. – М.: Мир, 1966. – 543 с.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971.

V. P. Burskii, A. A. Miroshnikova

To expansions theory of partial differential operators in Banach spaces.

Well-known scheme of the construction for general theory of boundary value problems by means of studying partial differential operators expansions in Hilbert space is transferred to the case of Banach spaces of L_p -type, $p > 1$.

Keywords: *expansions of PDO, Banach spaces.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
v30@dn.farlep.net
nastya.miroshnikova@gmail.com

Получено 19.06.14

УДК 531.36; 519.21

©2014. И. Г. Васильева, А. Л. Зуев

АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ДЛЯ ПОЧТИ ВСЕХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В работе рассмотрен класс нелинейных систем дифференциальных уравнений со случайными воздействиями, которые имеют инвариантные многообразия произвольной размерности. Исследован вопрос об устойчивости таких многообразий для почти всех начальных значений фазового пространства. Доказана теорема о достаточных условиях притяжения к инвариантному множеству в терминах функции плотности меры, которая обладает свойством монотонности на фазовом потоке. Рассмотрен пример нелинейной системы, для которой функция плотности построена в явном виде.

Ключевые слова: притягивающее множество, функция плотности, стохастическое уравнение Ито.

1. Введение. Теория устойчивости систем дифференциальных уравнений со случайными воздействиями получила развитие в 60-х годах XX века в работах И.Я. Каца, Н.Н. Красовского [3], Дж. Кушнера [4], Р.З. Хасьминского [7]. Основным методом исследования задач устойчивости траекторий и инвариантных множеств является прямой метод Ляпунова. Однако для систем со случайными воздействиями, когда состояние системы не может быть предсказано с вероятностью 1, возникает задача о притяжении траекторий для почти всех начальных условий. Для детерминированных систем достаточное условие притяжения траекторий к особой точке получил шведский математик А. Rantzer [10] для всюду плотного множества начальных данных. Стохастический аналог этих условий получен в работе R. Van Handel [9]. В то же время остается открытым вопрос о применимости этого метода для описания притягивающих множеств более общего вида.

В данной работе рассматривается задача об описании притягивающего множества произвольной структуры для системы стохастических дифференциальных уравнений относительно почти всех начальных условий.

2. Основной результат. В данной статье (Ω, F, P) обозначает каноническое винеровское пространство. Будем рассматривать стохастические дифференциальные уравнения Ито в виде

$$dx = X_0(x)dt + \sum_{k=1}^m X_k(x)dW^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $X_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, функции класса C^2 , $k = 0, \dots, m$, $W(t, \omega) = (W^1(t), \dots, W^m(t))$ – m -мерный винеровский процесс. Обозначим через $\xi_{s,t}(p, \omega)$ (или просто $\xi_{s,t}(p)$) решение уравнения (1), определенное при $t \geq s$, которое удовлетворяет начальному условию $\xi_{s,s}(p, \omega) = p$. Пусть $\mathcal{L}^*$ – оператор, который действует на функцию $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

следующим образом:

$$\mathcal{L}^* f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (X_k^i(x) X_k^j(x) f(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (X_0^i(x) f(x)).$$

Напомним [5], что непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным для системы (1), если для всяких $x \in M$, $s \in \mathbb{R}$ выполнено свойство

$$\xi_{s,t}(x) \in M$$

при всех $t \geq s$ P -почти наверное.

Введем расстояние $\rho(p, M)$ от точки $p \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$ стандартным образом:

$$\rho(p, M) = \inf_{x \in M} |x - p|.$$

Для $\varepsilon > 0$ обозначим ε -окрестность множества M через $B_\varepsilon(M)$.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — инвариантное множество для системы (1) и пусть $D \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus M)$ — функция с неотрицательными значениями. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) функции $X_k, k = 0, \dots, m$ удовлетворяют глобальному условию Липшица;
- 2) функция $D \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(M))$ при любом $\varepsilon > 0$;
- 3) $\mathcal{L}^* D < 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$;
- 4) существуют $\delta > 0$ и функция $\alpha \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\alpha(0) = 0$:

$$\rho(\xi_{s,t}(p), M) \leq \alpha(\rho(p, M)),$$

P -почти наверное $\forall p \in B_\delta(M)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [s, s+1]$.

Тогда для произвольного $s \geq 0$ и для μ -почти каждого $p \in \mathbb{R}^n$ выполнено свойство

$$\rho(\xi_{s,t}(p), M) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow +\infty$ P -почти наверное.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть в системе (1) функции X_k удовлетворяют условию

$$|X_k(x)| \leq \tilde{c}_k + c_k \rho(x, M), \forall x \in \mathbb{R}^n, \tilde{c}_k \geq 0, c_k \geq 0, \lambda > 0, k = 0, \dots, m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} |\xi_{s,s+\delta}(x) - x| \geq \lambda\right] &\leq \frac{8\Delta}{\lambda^2} [\tilde{c}_0^2 \Delta + \tilde{c}_k^2 m] + \frac{16\tilde{c}_k c_k \alpha m}{\lambda^2} \Delta \rho(x, M) + \\ &+ \left[\frac{8c_0^2 \alpha^2 \Delta}{\lambda^2} + \frac{8c_k^2 \alpha^2 m}{\lambda^2} \right] \Delta \rho^2(x, M). \end{aligned}$$

Доказательство. Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\xi_{s,t}(x) = x + \int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau + \sum_{k=1}^m \int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k. \quad (2)$$

Тогда

$$P\left[\sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} |\xi_{s,s+\delta}(x) - x| \geq \lambda\right] \leq \frac{E[\sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} |\xi_{s,s+\delta} - x|^2]}{\lambda^2} \leq \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E|\xi_{s,s+\delta}(x) - x|^2.$$

Подставляя $\xi_{s,s+\delta}(x)$ из (2) и выполняя вспомогательные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E|\xi_{s,s+\delta}(x) - x|^2 &= \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E\left[\left|\int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau + \sum_{k=1}^m \int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k\right|^2\right] \leq \\ &\leq \frac{8}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E\left[\int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau\right]^2 + m \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \sum_{k=1}^m \left[\int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k\right]^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства в силу того, что $|X_k(x)| \leq \tilde{c}_k + c_k \rho(x, M)$, следует

$$\begin{aligned} &\frac{8}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E\left[\int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau\right]^2 + m \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \sum_{k=1}^m \left[\int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k\right]^2 \leq \\ &\leq \frac{8}{\lambda^2} \Delta [\tilde{c}_0^2 \Delta + 2\tilde{c}_0 c_0 \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \alpha \int_s^t \rho(x, M)d\tau + c_0^2 \alpha^2 \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \int_s^t \rho^2(x, M)d\tau] + \\ &+ \frac{8m}{\lambda^2} [\tilde{c}_k^2 \Delta + 2\tilde{c}_k c_k \alpha \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \alpha \int_s^t \rho(x, M)d\tau + c_k^2 \alpha^2 \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \int_s^t \rho^2(x, M)d\tau] \leq \\ &\leq \frac{8\Delta}{\lambda^2} [\tilde{c}_0^2 \Delta + \tilde{c}_k^2 m] + \frac{16\tilde{c}_k c_k \alpha m}{\lambda^2} \Delta \rho(x, M) + \left[\frac{8c_0^2 \alpha^2 \Delta}{\lambda^2} + \frac{8c_k^2 \alpha^2 m}{\lambda^2}\right] \Delta \rho^2(x, M). \end{aligned}$$

□

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \varepsilon\}$. Начнем с применения Леммы 5.2 [9]. Определим $S_l = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, M) > l^{-1}\}$, $S = \bigcup_l S_l = \mathbb{R}^n \setminus M$, $\tau_l = \sup\{s < t : \xi_{s,t}^{-1}(x) \notin S_l\}$. Тогда D интегрируема на Z ; зададим

$$D_l = \begin{cases} D, & x \in S_l, \\ 0, & x \notin S_l. \end{cases}$$

При таком определении $D_l \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus M, \mathbb{R}^+)$. Нужно проверить, что $\tau_l \rightarrow -\infty$. Воспользуемся рассуждением от противного. Пусть $\tau_l \not\rightarrow -\infty$, тогда с положительной вероятностью выполняется условие $\xi_{s,t}^{-1}(x) \in M$ для некоторого $x \in S$, $-\infty < s < t$.

Но $\xi_{s,t}^{-1}(x) \in M$ для всех $x \in M$, значит $S \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $\tau_l \rightarrow -\infty$. Все условия Леммы 5.2 [9] выполнены, следовательно,

$$0 \leq \int_Z D(x)dx + \int_s^t E \int_{\xi_{\tau,t}^{-1}(Z)} \mathcal{L}^* D(x)dx d\tau. \quad (3)$$

Выражение (3) не возрастает при убывающем s , так как $\mathcal{L}^* D \leq 0$, и является конечным, так как D интегрируема на Z .

Из монотонной сходимости следует, что существует конечный $\lim_{s \rightarrow -\infty}$. Отсюда

$$\int_{-\infty}^t D(\xi_{\tau,t}^{-1}(Z))d\tau < \infty,$$

$$D(A) = - \int_A \mathcal{L}^* D(x)(P(d\omega) \times \mu(dx)),$$

$$D(\xi_{\tau,t}^{-1}(Z)) = D(\{(x, \omega) \in \Omega \times S : \xi_{\tau,t}^{-1}(x, \omega) \in Z\}).$$

Заметим, что $\mathcal{L}_* D \leq 0$ означает, что D задает меру на $\Omega \times S$, и D является τ -конечной, так как $D(\Omega \times \{x \in S : \frac{1}{l} < \rho(x, M) < l\}) < \infty, \forall l > 1$ и $\bigcup_2^\infty (\Omega \times \{x \in S : \frac{1}{l} < \rho(x, M) < l\}) = \Omega \times S$.

Зафиксируем теперь $m \in N$ и зададим $S_k^m = \{(k-1)2^{-m}, k2^{-m}\}, k \in N$. Из каждого S_k^m выбираем время t_k^m :

$$D(\xi_{t-t_k^m, t}^{-1}(Z)) \leq \inf_{s \in S_k^m} D(\xi_{t-s, t}^{-1}(Z)) + 2^{-k}.$$

Обозначим $T_m = \{t_k^m : k \in N\}$ для фиксированного m . Имеем

$$2^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} D(\xi_{t-t_k^m, t}^{-1}(Z)) \leq 2^{-m} + \int_{-\infty}^t D(\xi_{\tau, t}^{-1}(Z))d\tau < \infty.$$

Так как D – плотность τ -конечной меры, то применим лемму Бореля–Кантелли:

$$D(\limsup_{k \rightarrow \infty} \xi_{s, s+t_k^m}(Z)) = (P \times \mu)(\limsup_{k \rightarrow \infty} \xi_{s, s+t_k^m}(Z)) = 0.$$

Мы показали, что для всех начальных состояний x , кроме множества $N \subset \mathbb{R}^n$ меры 0, P -почти наверное для всех m существует только конечное число моментов времени $t \in T_m : \xi_{s, s+t}(x) \in Z$.

Пусть теперь $x \notin N$. Из доказанного свойства следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [\rho(\xi_{s, s+t}(x), M)] \leq \varepsilon,$$

P -почти наверное.

Пусть $\limsup_{t \rightarrow \infty} [\rho(\xi_{s, s+t}, M)] = \delta > 0$. Из монотонной сходимости имеем $E[\chi \limsup \rho(\xi_{s, t}(x), M) > \varepsilon'] \rightarrow \delta$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$, следовательно, существует $\varepsilon' > \varepsilon : P\{\omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\xi_{s, t}(x), M) > \varepsilon'\} > 0$. Мы уже показали, что почти наверное

$\rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon$ для бесконечного числа $t_n \rightarrow \infty$. Значит из утверждения $P\{\omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\xi_{s,t}(x), M) > \varepsilon'\} > 0$ следует

$$P\{\omega : \xi_{s,t}(x) \text{ пересекает } S_\varepsilon \text{ и } S'_\varepsilon \text{ бесконечно много раз}\} > 0,$$

где $S_\varepsilon = \{x : \rho(x, M) = \varepsilon\}$, $S'_\varepsilon = \{x : \rho(x, M) = \varepsilon'\}$.

Как только докажем последнее утверждение, доказательство теоремы будет завершено.

Для этого введем следующую последовательность моментов остановки. Пусть $\sigma_0 = \inf\{t > s : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon\}$, $\tau_0 = \inf\{t > \sigma_0 : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon'\}$, и для каждого $n > 0$ положим $\sigma_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon\}$, $\tau_n = \inf\{t > \sigma_n : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon'\}$. Определим

$$\Omega_n(\Delta) = \{\omega \in \Omega : \tau_n < \infty, \rho(\xi_{s, \tau_n + \delta}(x), M) > \varepsilon, \forall 0 \leq \delta \leq \Delta\}.$$

Для каждого $\Delta > 0$, множество $\omega \in \Omega$ таких, что $\omega \in \Omega_n(\Delta)$ для бесконечно многих n , должно быть P -меры ноль. Мы можем выбрать m достаточно большое так, что каждый временной интервал длины Δ содержит по меньшей мере одну точку из T_m , и для точек $t \in T_m$ имеем $\rho(\xi_{s,t}(x), M) > \varepsilon$ только конечное число раз P -почти наверное. Таким образом, $\sum_n \chi_{\Omega_n(\Delta)} < \infty$ P -почти наверное. Для продолжения доказательства используем следующее построение [8]. Введем дискретную фильтрацию $B_k = F_s^{\tau_k+1}$ и определим $Z_k = X_k - Y_k$ с

$$X_k = \sum_{n=1}^k \chi_{\Omega_n(\Delta)},$$

$$Y_k = \sum_{n=1}^k E[\chi_{\Omega_n(\Delta)} | B_{n-1}].$$

Так как $\Omega_n(\Delta) \in B_n$ для всех $k \leq n$, то Z_k является B_k -мартингалом. Определим для $a > 0$ момент остановки $\kappa(a) = \inf\{n : Z_n > a\}$. Так как $|Z_k - Z_{k-1}| \leq 1$ почти наверное, то остановленный процесс $Z'_k = Z_{k \wedge \kappa(a)}$ является мартингалом, ограниченным сверху, и по теореме сходимости для мартингалов Z'_k сходится почти наверное при $k \rightarrow \infty$ к конечной случайной переменной Z'_∞ . Но, так как Z'_k и Z_k совпадает на $\{\omega : \sup_n Z_n < a\}$, и a было выбрано случайно, $Z_k \rightarrow Z_\infty < \infty$ на $\{\omega : \sup_n Z_n < \infty\}$.

Заметим, что X_n и Y_n положительные возрастающие процессы и ранее установлено, что $\sup_n X_n < \infty$ P -почти наверное, значит, $\sup_n Z_n < \infty$ P -почти наверное. Но это означает, что Z_k и, следовательно, Y_k , сходятся к конечному значению P -почти наверное. Итак, установлено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\chi_{\Omega_n(\Delta)} | F_s^{\tau_n}] < \infty$$

P -почти наверное $\forall \Delta > 0$.

Заметим, что в силу непрерывности траекторий $\rho(\xi_{s,\tau_n}(x), M) = \varepsilon'$ при $\tau_n < \infty$. По Лемме 1, мы можем выбрать $\bar{\Delta}$ достаточно маленьким, чтобы выполнялось

$$P(y) = P \left[\sup_{0 \leq \delta \leq \bar{\Delta}} |\xi_{s,s+\delta}(y) - y| < \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} \right] \geq \frac{1}{2}$$

для всех $|y| = \varepsilon'$. Используя строгую марковость, можем записать

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} E[\chi \Omega_n(\bar{\Delta}) | F_s^{\tau_n}] \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_{s,\tau_n}) \chi_{\tau_n < \infty} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\tau_n < \infty}$$

P -почти наверное. Но это означает, что $\tau_n < \infty$ конечное число раз P -почти наверное, что противоречит утверждению

$$P\{\omega : \xi_{s,t}(x) \text{ пересекает } S_\varepsilon \text{ и } S'_\varepsilon \text{ бесконечно много раз}\} > 0.$$

Мы показали, что для μ -почти всех $x \in R^n$, P -почти наверное выполнено свойство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \rho(\xi_{s,t}, M) \leq \varepsilon,$$

т.е. для μ -почти всех $x \in R^n$, P -почти наверное $\exists t_e > \varepsilon : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon$ при $t \geq t_e$. Но, так как это выполняется $\forall \varepsilon > 0$, поток $\xi_{s,t}(x)$ должен сходиться к множеству M . $\square$

3. Пример. Рассмотрим уравнение Ито:

$$\begin{cases} dx = (x(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) - 2y(xy - ab))dt + x dW_t, \\ dy = (y(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) - 2x(xy - ab))dt + y dW_t. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что одноточечное множество $M = \{(x, y) : x = 0, y = 0\}$ является инвариантным для системы (4) для любых значений параметров $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. В качестве искомой плотности меры рассмотрим $D(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\beta}$. Вычислим $\mathcal{L}^* D(x, y)$:

$$\mathcal{L}^* D(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\beta} [2(-\beta + 1)(a^2 - b^2) - 2(-\beta + 3)(x^2 - y^2) + (-\beta + 1)(-2\beta + 3)].$$

При $\beta = 3$ и параметрах (a, b) удовлетворяющих условию $a^2 - b^2 > \frac{3}{2}$, выражение для $\mathcal{L}^* D$ примет вид:

$$\mathcal{L}^* D(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3} [-4(a^2 - b^2) + 6] < 0.$$

Тогда, применив следствие 6.2 из статьи [9] и теорему 1, приходим к выводу, что почти все траектории системы (4) притягиваются к началу координат. Т.е. для почти всех начальных условий соответствующее решение системы (4) обладает свойством $(x_t, y_t) \rightarrow (0, 0)$ почти наверное при $t \rightarrow \infty$.

4. Выводы. В работе получены достаточные условия сходимости решений системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений к инвариантному

множеству для почти всех начальных условий из фазового пространства. При исследовании асимптотического поведения решений использована функция плотности меры, обладающая свойством монотонности на потоке. Представляет дальнейший интерес поиск функций плотности для классов механических систем со случайными воздействиями.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. Грушкова В.В., Зуев А.Л. Условия устойчивости нелинейных динамических систем с монотонной мерой на фазовом потоке // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 62–70.
3. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математ. и мех. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 809–823.
4. Кушнер Дж. Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 199 с.
5. Леваков А.А. Стохастические дифференциальные уравнения. – Минск: БГУ, 2009. – 231 с.
6. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 2003. – 408 с.
7. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
8. Loeve M. Probability theory. 3rd ed. – Van Nostrand, 1963. – 405 p.
9. Van Handel R. Almost global stochastic stability // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2006. – Vol. 45. – P. 1297–1313.
10. Rantzer A. A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – P. 161–168.

I. G. Vasylieva, A. L. Zuyev

Analysis of limit set for trajectories of nonlinear system with random actions for almost all initial conditions.

We consider a class of nonlinear differential equations with random actions that admit invariant manifolds of an arbitrary dimension. We study the problem of stability for such manifolds for almost all initial values of the phase space. Sufficient conditions for the attraction to the invariant set in terms of the density function of a measure that has the property of monotonicity on the phase flow are proved. As an illustration, we consider an example of a nonlinear system for which the density function is constructed explicitly.

Keywords: density function, attractive set, Ito stochastic equation.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
al_zv@mail.ru
shurko-irina@mail.ru

Получено 13.06.14

УДК 517.5

©2014. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова

СВОЙСТВА ЯДРА ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИНКОВСКОГО НА СФЕРЕ

Исследуется обобщенное преобразование Минковского, ставящее в соответствие функциям на сфере их интегралы с заданным весом по замкнутым геодезическим. Показано, что нетривиальная часть ядра указанного преобразования содержит непрерывные функции с весьма сложной структурой. В частности, эти функции могут быть не дифференцируемы на всюду плотном множестве области определения.

Ключевые слова: сферические средние, преобразование Минковского, функции Лежандра.

1. Введение. Основным объектом изучения в интегральной геометрии являются преобразования, ставящие в соответствие функциям из заданного класса $\mathcal{F}$ на многообразии X их интегралы по подмногообразиям в X из заданного множества Υ . Для всякого такого преобразования I возникают следующие задачи.

- 1) Выяснить, является ли I инъективным, и если не является, то найти его ядро.
- 2) Если I инъективно, то найти обратное к I преобразование на его области определения.

Первая из этих задач впервые была рассмотрена Г. Минковским в 1904 году [1] для следующего случая: $X = \mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$, $\mathcal{F} = C(\mathbb{S}^2)$, Υ – семейство всех замкнутых геодезических (больших окружностей) на $\mathbb{S}^2$, а

$$(If)(\gamma) = \int_{\gamma} f(\xi) dl(\xi), \quad \gamma \in \Upsilon, \quad (1)$$

где dl – элемент длины дуги. Г. Минковский установил, что ядро преобразования (1) совпадает с классом нечетных непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$ и применил этот результат для решения некоторых проблем в теории выпуклых тел (см., например, [2], [3, часть 3, § 17]). В дальнейшем задачи 1) и 2) для различных случаев исследовались многими авторами (см. [4]–[8] и библиографию к этим работам). Наиболее изученными примерами преобразований I являются преобразование Радона (см. [4]–[6]) и преобразование Помпейю (см. [6]–[8]).

В современных исследованиях особое внимание уделяется различным обобщениям интегрально-геометрических преобразований, в которых рассматривается интегрирование функций с некоторым весом (см. [8]–[11]). Аналоги сформулированных выше задач для таких преобразований имеют важное значение для многочисленных приложений в ряде вопросов анализа (см. [6]–[8]). Как правило, при их исследовании возникают дополнительные трудности, преодоление которых требует новых идей и методов. Например, при изучении преобразования Радона с весом потребовалось, в отличие от классической ситуации, привлечение техники микролокального анализа (см. [9], [10]).

Начиная с середины шестидесятих годов прошлого века, во многих работах изучался вопрос о точных условиях, при выполнении которых функция из ядра преобразования I обязана быть нулевой (см. [4]–[8]). В частности, для преобразования Минковского была получена следующая теорема единственности (см. [5, гл. 3, теорема 1.25], [12], [13]).

Теорема А. Пусть $\delta < \frac{\pi}{2}$ и

$$K_\delta = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : \delta < d(o, \xi) < \pi - \delta\},$$

где $d(\cdot, \cdot)$ – внутренняя метрика на $\mathbb{S}^2$, $o = (0, 0, 1)$. Пусть также f – непрерывная четная функция на K_δ , удовлетворяющая следующим условиям:

(i) f имеет нулевые интегралы по всем замкнутым геодезическим, лежащим в K_δ ;

(ii) $f \in C^\infty$ в некоторой окрестности экватора

$$E_o = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^2 : d(o, \xi) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

и все производные от f равны нулю на E_o .

Тогда $f = 0$.

Отметим, что при $\delta < 0$ множество K_δ совпадает с $\mathbb{S}^2$ и теорема А вытекает из результата Г. Минковского. В этом случае требование на функцию f из пункта (ii) является лишним. В данной работе построены примеры, показывающие что при $\delta < \frac{\pi}{2}$ условие (ii) в теореме А не может быть опущено (см. теорему 1). Более того, мы покажем, что при $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ нетривиальная часть ядра обобщенного преобразования Минковского содержит непрерывные функции с весьма сложной структурой (см. теорему 2 ниже). В частности, эти функции могут быть не дифференцируемы на всюду плотном в K_δ множестве.

2. Формулировки основных результатов. Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{P}_M(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^M$ ($M \in \mathbb{Z}_+$), $O(3)$ – ортогональная группа в $\mathbb{R}^3$. Введем следующий класс функций:

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \left\{ f \in C(K_\delta) : \int_{E_o} f(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) d\ell(\xi) = 0 \quad \forall \tau \in O(3) : \tau E_o \subset K_\delta \right\}.$$

При $\delta < 0$ имеем

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2) = \left\{ f \in C(\mathbb{S}^2) : \int_{E_o} f(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) d\ell(\xi) = 0 \quad \forall \tau \in O(3) \right\}.$$

Кроме того, по теореме Минковского

$$\mathfrak{M}_0(\mathbb{S}^2) = \{f \in C(\mathbb{S}^2) : f(-\xi) = -f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^2\}.$$

Отметим также, что выбор веса $\mathcal{P}_M$ в интегралах мотивирован естественными обобщениями уравнений свертки на $\mathbb{S}^2$ с радиальными распределениями, теория которых активно развивается в последнее время (см. [6]–[8]).

Рассмотрим теперь случай $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$. Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi_3 = \cos \theta, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi).$$

Теорема 1. Пусть $k \geq M + 2$, $k + M$ – четно и $0 \leq j \leq \frac{k-M-2}{2}$. Тогда

$$\frac{(\cos \theta)^{2j}}{(\sin \theta)^k} e^{ik\varphi} \in \mathfrak{M}_M(K_0). \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть $M \in \mathbb{Z}_+$, M – четно, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Пусть также $W \in C[\delta, \pi - \delta]$, $W > 0$ на $[\delta, \pi - \delta]$ и функция $W(\theta - \frac{\pi}{2})$ является четной на $[-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta]$. Тогда существует четная в K_δ функция $f = f(\theta, \varphi) \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$ такая, что для любого рационального числа $\alpha \in [0, 1)$ функция $f(\theta, 2\pi\alpha)$ представима в виде

$$f(\theta, 2\pi\alpha) = W(\theta) + P\left(\frac{1}{\sin \theta}\right), \quad \theta \in [\delta, \pi - \delta], \quad (3)$$

где P – алгебраический многочлен, зависящий от α .

Теорема 3. Пусть $M \in \mathbb{Z}_+$, M – четно, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Тогда существует четная в K_δ функция $f = f(\theta, \varphi) \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$ такая, что для любого рационального числа $\alpha \in [0, 1)$ функция $f(\theta, 2\pi\alpha)$ не дифференцируема по θ ни в одной точке интервала $(\delta, \pi - \delta)$.

3. Вспомогательные утверждения. Будем использовать следующие стандартные обозначения (см., например, [14]): $\binom{m}{n}$ – биномиальные коэффициенты, Γ – гамма-функция, ψ – логарифмическая производная гамма-функции, $(z)_k = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)}$ – символ Похгаммера, $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрическая функция порядка (p, q) .

Лемма 1. Пусть $m, p \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq p + 1$, $a \neq p, p - 1, p - 2, \dots$ и $|\arg(1 - z)| < \pi$. Тогда

$$F(a, m - p; a - p; z) = \frac{1}{(1 - z)^m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j (a - m)_j (-p)_j}{(1 - m)_j (a - p)_j} \binom{m-1}{j} z^j. \quad (4)$$

Доказательство. При $A, B \neq 0, -1, -2, \dots$ и $N \in \mathbb{N}$ имеет место следующая формула для аналитического продолжения гипергеометрического ряда (см. [14, гл. 2, п. 2.10 (11)]):

$$\frac{F(A, B; A + B - N; z)}{\Gamma(A + B - N)} = \frac{\Gamma(N)(1 - z)^{-N}}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(A - N)_n (B - N)_n}{(1 - N)_n n!} (1 - z)^n +$$

$$+ \frac{(-1)^N}{\Gamma(A-N)\Gamma(B-N)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n(B)_n}{(n+N)!n!} (1-z)^n \times \\ \times (\psi(1+n) + \psi(1+n+N) - \psi(A+n) - \psi(B+n) - \ln(1-z)), \\ |\arg(1-z)| < \pi, |1-z| < 1.$$

Полагая здесь $A = a$, $B = m - p$, $N = m$, получаем

$$\frac{F(a, m-p; a-p; z)}{\Gamma(a-p)} = \frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(a-m)_n(-p)_n}{(1-m)_n n!} (1-z)^n = \\ = \frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{n=j}^{m-1} \frac{(a-m)_n(-p)_n}{(1-m)_n n!} \binom{n}{j} \right) (-1)^j z^j. \quad (5)$$

Поскольку $(\zeta)_{n+j} = (\zeta)_j(\zeta+j)_n$, внутренняя сумма в (5) преобразуется к виду

$$\sum_{n=j}^{m-1} \frac{(a-m)_n(-p)_n}{(1-m)_n n!} \binom{n}{j} = \sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m)_{n+j}(-p)_{n+j}}{(1-m)_{n+j} j! n!} = \\ = \frac{(a-m)_j(-p)_j}{(1-m)_j j!} \sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m+j)_n(-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!}. \quad (6)$$

Усеченный гипергеометрический ряд Гаусса выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ по формуле

$$\sum_{n=0}^{N_1} \frac{(A_1)_n(B_1)_n}{(C_1)_n n!} = \frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} A_1, B_1, C_1+N_1+1 \\ C_1, A_1+B_1+N_1+1 \end{matrix}; 1 \right)$$

(см. [14, гл. 4, п. 4.5]).

В частности,

$$\sum_{n=0}^{N_1} \frac{(A_1)_n(B_1)_n}{(-N_1)_n n!} = \frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)}$$

и

$$\sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m+j)_n(-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(m-p)}{(m-j-1)!\Gamma(a-p+j)}. \quad (7)$$

Комбинируя (5), (6) и (7), приходим к (4). $\square$

Для $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$ положим

$$\Phi_{\lambda, \alpha, \beta}(\theta) = F \left(\frac{\alpha + \beta + 1 + \lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - \lambda}{2}; \alpha + 1; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (8)$$

При $\beta = \pm\alpha$ функции $\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}(\theta)$ выражаются через функции Лежандра первого рода на $(-1, 1)$, т. е.

$$P_{\lambda}^{-\alpha}(\cos \theta) = \frac{(\sin \theta)^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\Phi_{2\lambda+1,\alpha,\alpha}(\theta) = \frac{(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Phi_{2\lambda+1,\alpha,-\alpha}(\theta) \quad (9)$$

(см. [14, гл. 3, п. 3.4 (6), п. 3.5 (8)]). Из [14, гл. 3, п. 3.4 (11)] нетрудно получить равенство

$$P_{\nu}^{\mu}(x) \cos(\pi(\nu + \mu)) - P_{\nu}^{\mu}(-x) = \frac{2^{\mu+2}\sqrt{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu + \mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \times \\ \times \frac{x F\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{\nu-\mu}{2} + 1; \frac{3}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}} - \frac{2^{\mu+1}\sqrt{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu + \mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\nu-\mu}{2}\right)} \frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}. \quad (10)$$

Еще один частный случай определения (8) приводит к функциям P_{mn}^l , которые были введены и детально изучены И.М. Гельфандом и З.Я. Шапиро в связи с теорией представлений группы вращений трехмерного пространства (см. [15, гл. 3]). Нас будет интересовать случай, когда $l \in \mathbb{Z}_+$, а m и n пробегает значения $-l, -l+1, \dots, l-1, l$. В терминах функций (8) имеем

$$P_{mn}^l(\cos \theta) = \frac{i^{m-n}}{(m-n)!} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-n)!}{(l+n)!(l-m)!}} \times \\ \times \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{m-n} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{m+n} \Phi_{2l+1,m-n,m+n}(\theta), \quad m \geq n, \quad (11)$$

$$P_{mn}^l = P_{nm}^l, \quad m < n.$$

Если $m = n = 0$, то $P_{mn}^l(\cos \theta)$ совпадают с зональными сферическими функциями $P_l(\cos \theta)$ на $\mathbb{S}^2$. Кроме того,

$$P_{m0}^l(x) = \frac{1}{i^m} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x). \quad (12)$$

При фиксированном l матрица с элементами $P_{mn}^l(\cos \theta)$ унитарна. В частности,

$$|P_{mn}^l(\cos \theta)| \leq 1. \quad (13)$$

Имеют место соотношения ортогональности

$$\int_0^{\pi} P_{mn}^l(\cos \theta) \overline{P_{mn}^s(\cos \theta)} \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & l \neq s \\ 2, & l = s. \end{cases} \quad (14)$$

Далее, для функций P_{mn}^l справедлива следующая формула умножения:

$$P_{mk}^l(\cos \theta_1) P_{kn}^l(\cos \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\alpha - m\varphi - n\psi)} P_{mn}^l(\cos \theta) d\alpha, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha, \\ e^{i\varphi} \sin \theta &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha + i \sin \theta_2 \sin \alpha, \\ e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} \cos \frac{\theta}{2} &= \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}} - \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{-i\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Она позволяет вычислять интегралы по окружностям на $\mathbb{S}^2$ от сферических функций и их обобщений. Мы приведем соответствующие формулы для больших окружностей сферы. Положим

$$S_{\lambda,k}(\xi) = P_{\lambda}^{-|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через τ_{α} , $\varkappa_{\beta}$, a_t ортогональные преобразования в $\mathbb{R}^3$, определяемые равенствами:

$$\tau_{\alpha}\xi = (\xi_1 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha, \xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha, \xi_3). \quad (16)$$

$$\varkappa_{\beta}\xi = (\xi_1 \cos \beta + \xi_2 \sin \beta, \xi_1 \sin \beta - \xi_2 \cos \beta, \xi_3), \quad (17)$$

$$a_t\xi = (\xi_1, \xi_2 \cos t + \xi_3 \sin t, -\xi_2 \sin t + \xi_3 \cos t). \quad (18)$$

Лемма 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \geq M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $|t| < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{E_o} S_{\lambda,k}(\tau_{\beta} a_t \tau_{\alpha} \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \frac{2^{1-M} \sqrt{\pi}}{(k-M)!} i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - M)\right) \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda-M}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\lambda+M}{2})} \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{k-M} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{k+M} \Phi_{2\lambda+1, k-M, k+M}(t), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_{E_o} S_{\lambda,k}(\varkappa_{\beta} a_t \tau_{\alpha} \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \frac{2^{1+M} \sqrt{\pi}}{(k+M)!} (-1)^k i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + M)\right) \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda+M}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\lambda-M}{2})} \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{k+M} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{k-M} \Phi_{2\lambda+1, k+M, k-M}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство. При $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \geq k$ из (15), (12) и (11) имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_o} S_{\lambda,k}(\tau_{\beta} a_t \tau_{\alpha} \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \frac{2\pi}{(k-M)!} i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} P_{\lambda}^{-M}(0) \times \\ &\times \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{k-M} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{k+M} \Phi_{2\lambda+1, k-M, k+M}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Обе части в (21) являются целыми функциями переменной λ экспоненциального типа $|t| + \frac{\pi}{2}$ (см. [14, гл. 3, п. 3.7 (27)] и [7, гл. 7, §4, следствие 7.2]). Поскольку $|t| < \frac{\pi}{2}$, то теорема Карлсона о единственности аналитической функции с заданными значениями в целых точках (см., например, [16, гл. 5]) влечет справедливость (21) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Учитывая теперь, что

$$P_{\lambda}^{-M}(0) = \frac{2^{-M}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - M)\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda-M}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda+M}{2}\right)} \quad (22)$$

(см. [14, гл. 3, п. 3.4 (20)]), получаем (19). Равенство (20) доказывается аналогично. $\square$

Лемма 3. Пусть $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Пусть также $U \in C[a, b]$ и $U > 0$ на $[a, b]$. Тогда существует последовательность $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ четных алгебраических многочленов, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\deg P_n(x) \leq n$;
- 2) $P_n \geq 0$ на $[a, b]$;
- 3) имеет место равенство

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x),$$

в котором ряд сходится равномерно на $[a, b]$.

Доказательство этой леммы легко получается с помощью классической аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, примененной к четному продолжению функции U на $[-b, b]$.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. При $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем (см. (10) и лемму 1)

$$\begin{aligned} P_{M+2n+1}^{-k}(\cos \theta) + P_{M+2n+1}^{-k}(-\cos \theta) &= \frac{2^{1-k} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-M-2n}{2}\right)} (\sin \theta)^k \times \\ &\times F\left(\frac{k-M-2n-1}{2}, \frac{k+M+2n+2}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2 \theta\right) = \\ &= \frac{2^{1-k} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-M-2n}{2}\right)} (\sin \theta)^{-k} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \left(-\frac{k+M+2n+1}{2}\right)_j \left(\frac{M+2n-k+2}{2}\right)_j}{(1-k)_j \left(\frac{1}{2}\right)_j} \binom{k-1}{j} (\cos \theta)^{2j}. \end{aligned} \quad (23)$$

По лемме 2 функция $P_{M+2n+1}^{-k}(\cos \theta)e^{ik\varphi}$, а поэтому и левая часть в (23), умноженная на $e^{ik\varphi}$, принадлежат классу $\mathfrak{M}_M(K_0)$. Полагая в (23)

$$n = \frac{k-M-2}{2}, \frac{k-M-2}{2} - 1, \dots, 0,$$

получаем (2). $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $a = 1$, $b = \frac{1}{\sin \delta}$. По лемме 3 имеем равенство

$$W\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{M+2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x), \quad (24)$$

где P_n – неотрицательный четный алгебраический многочлен степени не выше n и ряд (24) сходится равномерно на $[a, b]$. Полагая $x = \frac{1}{\sin \theta}$, из (24) имеем

$$W(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{1}{(\sin \theta)^{M+2}} \quad (25)$$

при всех $\theta \in [\delta, \pi/2]$. Из четности функции $W(\theta - \frac{\pi}{2})$ следует, что ряд в правой части (25) сходится к $W(\theta)$ равномерно на $[\delta, \pi - \delta]$. Теперь положим

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{\exp(i(n+M+2)!\varphi)}{(\sin \theta)^{M+2}}. \quad (26)$$

В силу вышесказанного и неотрицательности P_n ряд в (26) сходится равномерно в $\overline{K_\delta}$ (это следует из критерия Коши). Отсюда и из теоремы 1 получаем, что f является четной функцией из $\mathfrak{M}_M(K_\delta)$. Пусть α – рациональное число на $[0, 1)$. Тогда $\alpha = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $(n+M+2)!/q \in \mathbb{N}$ при $n > q$, из (25) и (26) находим

$$\begin{aligned} f(\theta, 2\pi\alpha) &= f\left(\theta, 2\pi\frac{p}{q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{\exp(i(n+M+2)!2\pi\frac{p}{q})}{(\sin \theta)^{M+2}} = \\ &= \sum_{n=0}^q P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{\exp(i(n+M+2)!2\pi\frac{p}{q})}{(\sin \theta)^{M+2}} + \sum_{n=q+1}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{\exp(i(n+M+2)!2\pi\frac{p}{q})}{(\sin \theta)^{M+2}} = \\ &= \sum_{n=0}^q P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{\exp(i(n+M+2)!2\pi\frac{p}{q})}{(\sin \theta)^{M+2}} + W(\theta) - \sum_{n=0}^q P_n\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) \frac{1}{(\sin \theta)^{M+2}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (3). $\square$

Доказательство теоремы 3. Выберем в качестве W непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 2, не дифференцируемую ни в одной точке интервала $(\delta, \pi - \delta)$. По теореме 2 существует четная функция $f \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$, удовлетворяющая условию (3). Отсюда и из свойств W следует требуемое утверждение. $\square$

1. *Minkowski H.* Über die Körper konstanter Breite // Mat. Sbornik. – 1904. – V. 25. – P. 505–508.
2. *Паламодов В.П.* Интегральная геометрия и компьютерная томография. – М.: Изд-во МК НМУ, 1997. – 68 с.
3. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 343 с.
4. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.

5. Helgason S. Integral geometry and Radon transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.
6. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
7. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
8. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592p.
9. Quinto E. T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Israel J. Math. – 1993. – V. 84. – P. 353–363.
10. Quinto E. T. Radon transforms on curves in the plane // Tomography, Impedance Imaging, and Integral Geometry (South Hadley, MA), Lectures in Appl. Math. – 1994. – V. 30. – P. 231–244.
11. Zhou Y. Two radius support theorem for the sphere transform // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 254. – P. 120–137.
12. Quinto E. T. The invertibility of rotation invariant Radon transforms // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 91. – P. 510–521; erratum, J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 94. – P. 602–603.
13. Kurusa A. Support theorems for the totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 122. – P. 429–435.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
15. Виленькин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
16. Titchmarsh E. C. The Theory of Functions, 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1939. – 460 p.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, I. M. Savostyanova

Properties of the kernel of generalized Minkowski transform on a sphere.

We investigate the generalized Minkowski transform relating functions on a sphere with their weighted integrals over closed geodesics. It is shown that a non-trivial part of the kernel of this transform contains continuous functions with a very intricate structure. In particular, these functions can be non-differentiable on a dense set.

Keywords: spherical means, Minkowski transform, Legendre functions.

Донецкий национальный ун-т
valeriyvolchkov@gmail.com
v.volchkov@mail.donnu.edu.ua
cavost@mail.ru

Получено 15.05.14

УДК 004.655

©2014. И. Н. Глушко

ФОРМАЛЬНАЯ СЕМАНТИКА АГРЕГАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

В работе проводится расширение табличной алгебры (введенной В.Н. Редько и Д.Б. Бум и являющейся обобщением классической реляционной алгебры Кодда), которое предполагает пополнение универсального домена специальным элементом NULL и расширение сигнатуры табличной алгебры конечных таблиц агрегатными операциями нахождения суммы, наибольшего (наименьшего) значений, среднего арифметического, количества строк и количества элементов, отличных от NULL. Задана формальная математическая семантика этих операций, которая проиллюстрирована содержательными примерами. При определении агрегатных операций используется понятие мультимножества. Общая схема задания агрегатных операций: сначала операции задаются на конечных мультимножествах, а затем переносятся на таблицы, в частности, на пустую таблицу.

Ключевые слова: реляционные базы данных, табличная (реляционная) алгебра, расширенная табличная алгебра, агрегатные операции.

1. Введение. Традиционно считается, что классическая реляционная (табличная) алгебра лежит в основе большинства СУБД и языков запросов, которые поддерживают реляционную модель. Реляционная алгебра была разработана в [1] в виде совокупности операторов над таблицами. Было предложено 8 операций реляционной алгебры: традиционные операции над множествами (объединение, пересечение, разность) и специальные операции над таблицами (проекция, декартово соединение, theta-, equi-соединения, деление, селекция). Этот набор операций со временем был расширен в соответствии с потребностями языков запросов. Кроме указанных выше операций к сигнатуре реляционной алгебры сейчас также относят операции переименования и активного дополнения [2, 3]. В ходе развития коммерческих реляционных СУБД возникла потребность в использовании агрегатных функций, которые позволяют находить суммарные, средние, максимальные, минимальные и другие значения элементов в столбце таблицы. В [4] реляционная алгебра и реляционное исчисление расширены такими агрегатными функциями. Доказана эквивалентность полученных при этом двух формальных языков. Даны точные определения агрегатных функций, которые не используют понятие «дубликаты». Реляционная алгебра пополнена новой операцией агрегатного образования (aggregate formation). В [5–7] операции агрегирования рассматриваются как множественно-ориентированные: сначала разбивают таблицу на подмножества в соответствии со значениями атрибута (или множества атрибутов), затем выполняют функциональные вычисления для каждого подмножества и, наконец, строят исходную таблицу, формируя одну строку для каждого подмножества. Такая схема вычислений используется для запросов третьего типа (с группировкой) языка SQL [3]. Отметим, что для семантики таких конструкций надо вводить в рассмотрение совокупности с повторениями, т.е. мультимножества, что и сделано в данной работе.

2. Основные определения. Все неопределенные понятия понимаем также, как и в [3]. Рассмотрим два множества: $\mathbf{A}$ – множество атрибутов и $\mathbf{D}$ – универсальный домен, содержащий специальное значение $NULL$. Под табличной алгеброй конечных таблиц понимаем алгебру $\langle \mathbf{T}', \Omega_{P,\Xi} \rangle$, где $\mathbf{T}'$ – множество всех конечных таблиц, $\Omega_{P,\Xi} = \{\bigcup_R, \bigcap_R, \setminus_R, \sigma_{p,R}, \pi_{X,R}, \otimes_{R_1,R_2}, \div_{R_1,R_2}, Rt_{\xi,R}, \sim_R\}$ – сигнатура, $p \in P, \xi \in \Xi$, а $X, R, R_1, R_2 \subseteq \mathbf{A}$ (P и Ξ – множества параметров).

Под таблицей схемы R понимаем пару $\langle t, R \rangle$, где $t \in T(R)^1$ – конечное множество строк схемы R . Тогда $\mathbf{T}'(R) = \{\langle t, R \rangle \mid t \in T(R)\}$ – множество всех конечных таблиц схемы R , а $\mathbf{T}' = \bigcup_{R \subseteq \mathbf{A}} \mathbf{T}'(R)$ – множество всех конечных таблиц.

В соответствии с [3,8] под мультимножеством α с основой U понимаем функцию вида $\alpha : U \rightarrow \mathbb{N}$. Пусть $\Theta(\alpha)$ – основа мультимножества α , а $2_m^{\mathbf{D}'}$ – семейство всех мультимножеств, основы которых являются конечными подмножествами множества $\mathbf{D}'$ ($\mathbf{D}' \subseteq \mathbf{D}$ – подмножество универсального домена). Мультимножество α с основой $\{d_1, \dots, d_k\}$ будем записывать как $\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}$, где n_i – количество дубликатов (экземпляров) элемента d_i в мультимножестве α , $i = 1, \dots, k$.

3. Основные результаты. Широко используемыми агрегатными операциями являются Sum , Avg , Min , Max , $Count$. Их аргументы – это конечные таблицы, а значения – одноатрибутные таблицы с одной строкой. Так, операция Sum рассчитывает сумму значений в соответствующем столбце заданной таблицы, при этом значения $NULL$ игнорируются. Операция Avg определяет среднее арифметическое значений в соответствующем столбце заданной таблицы, при этом значения $NULL$ игнорируются. Операции Min и Max находят наименьшее и наибольшее значения в соответствующем столбце заданной таблицы, при этом значения $NULL$ также игнорируются. Операция $Count$ определяет количество значений, отличных от $NULL$, в соответствующем столбце заданной таблицы. Операция $Count(*)$ определяет количество строк в заданной таблице.

Пусть Num – числовое подмножество универсального домена $\mathbf{D}$, замкнутое относительно сложения. Зададим агрегатные операции. Общая схема: на конечном мультимножестве определяются функции суммирования, взятие наименьшего и наибольшего значений, определение среднего арифметического и количества элементов, а затем эти функции переносятся на таблицы. Заметим, что функции суммирования и нахождения среднего арифметического определены на конечном числовом мультимножестве.

Рассмотрим таблицу $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$ и пусть $A \in R$. Обозначим через α_A мультимножество, которое содержит все элементы столбца с атрибутом A таблицы $\langle t, R \rangle$. Тогда $\Theta(\alpha_A) = D_{A,t}$, где $D_{A,t} = \{d \mid \exists s (s \in t \wedge \langle A, d \rangle \in s)\}$ – активный домен атрибута A относительно таблицы $\langle t, R \rangle$ [2, 3].

Для определения количества дубликатов элемента d в мультимножестве α_A зададим отображение $\varphi : t \rightarrow D_{A,t}$, где $\varphi(s) = s(A)$ ($s \in t$). Тогда количество дубликатов элемента основы $d \in D_{A,t}$ мультимножества α_A равно $\alpha_A(d) = |\varphi^{-1}(d)|$, где

¹⁾ Множество $T(R)$ понимается в смысле [3].

$\varphi^{-1}(d) = \{s | s \in t \wedge \varphi(s) = d\}$ – прообраз элемента $d \in D_{A,t}$ относительно отображения φ , а $|X|$ – мощность множества X .

Агрегированием $Sum_{A,R}$ по атрибуту A (конечных) таблиц схемы R назовем такую унарную параметрическую операцию $Sum_{A,R} : \mathbf{T}'(R) \rightarrow \mathbf{T}'(\{A\})$, что

$$Sum_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, Sum(\alpha_A) \rangle \} \}, \{A\} \rangle,$$

где $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$, а Sum^2 – функция, возвращающая сумму значений столбца с атрибутом A таблицы $\langle t, R \rangle$ (значения могут повторяться), которые отличаются от значения $NULL$. Кроме того, предполагается, что этот столбец содержит только числовые данные. Таким образом, $Sum : 2_m^{Num} \rightarrow Num$, где

$$Sum(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, & \text{если } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, & \text{если } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \sum_{d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}} d\alpha(d), & \text{если } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Из определения следует, что $Sum(\emptyset_m) = NULL^3$, $Sum(\{NULL^n\}) = NULL$, $Sum(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \sum_{i=1}^k d_i n_i$, в предположении, что все элементы d_i ($i = \overline{1, k}$) отличаются от элемента $NULL$, $Sum_{A,R}(\langle t_\emptyset, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, NULL \rangle \} \}, \{A\} \rangle$, где $\langle t_\emptyset, R \rangle$ – пустая таблица.

Проиллюстрируем применение операции агрегирования $Sum_{A,R}$ на примере.

ПРИМЕР 1. Для таблицы

	A	B	C
$\langle t, R \rangle =$	1	2	3
	2	1	1
	2	3	NULL

получим $Sum_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, 5 \rangle \} \}, \{A\} \rangle$, $Sum_{B,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle B, 6 \rangle \} \}, \{B\} \rangle$ и $Sum_{C,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle C, 4 \rangle \} \}, \{C\} \rangle$.

Агрегированием $Count_{A,R}$ по атрибуту A (конечных) таблиц схемы R назовем такую унарную параметрическую операцию $Count_{A,R} : \mathbf{T}'(R) \rightarrow \mathbf{T}'(\{A\})$, что

$$Count_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, Count(\alpha_A) \rangle \} \}, \{A\} \rangle,$$

где $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$, а $Count$ – функция, возвращающая количество значений, которые отличаются от значения $NULL$ с учетом дубликатов в столбце с атрибутом A таблицы $\langle t, R \rangle$. Таким образом, $Count : 2_m^D \rightarrow \mathbb{Z}_+$, где

$$Count(\alpha_A) = \sum_{d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}} \alpha_A(d).$$

²⁾ Операция $Sum_{A,R}$ определена на конечных таблицах, а функция Sum – на конечных мультимножествах чисел.

³⁾ $\emptyset_m$ – пустое мультимножество.

По определению считаем, что сумма пустого множества слагаемых равна нулю.

Итак, $Count(\emptyset_m) = 0$, $Count(\{NULL^n\}) = 0$ и $Count(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \sum_{i=1}^k n_i$, в предположении, что все элементы d_i ($i = \overline{1, k}$) отличаются от элемента $NULL$. Для случая пустой таблицы $\langle t_\emptyset, R \rangle$ имеем $Count_{A,R}(\langle t_\emptyset, R \rangle) = \langle \{\{\langle A, 0 \rangle\}\}, \{A\} \rangle$.

ПРИМЕР 2. Для таблицы из примера 1 получим

$$Count_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle A, 3 \rangle\}\}, \{A\} \rangle,$$

$$Count_{B,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle B, 3 \rangle\}\}, \{B\} \rangle,$$

$$Count_{C,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle C, 2 \rangle\}\}, \{C\} \rangle.$$

Агрегированием $Count_{A,R}(\ast)$ (конечных) таблиц схемы R назовем такую унарную параметрическую операцию $Count_{A,R}(\ast) : \mathbf{T}'(R) \rightarrow \mathbf{T}'(\{A\})$, что

$$Count_{A,R}(\ast)(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle A, |t| \rangle\}\}, \{A\} \rangle,$$

что $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$. Содержательно говоря, операция $Count_{A,R}(\ast)$ определяет количество строк заданной таблицы. Атрибут-параметр служит только для формирования схемы таблицы-результата. Для случая пустой таблицы $\langle t_\emptyset, R \rangle$ имеем $Count_{A,R}(\ast)(\langle t_\emptyset, R \rangle) = \langle \{\{\langle A, 0 \rangle\}\}, \{A\} \rangle$.

ПРИМЕР 3. Для таблицы из примера 1 получим

$$Count_{A,R}(\ast)(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle A, 3 \rangle\}\}, \{A\} \rangle,$$

$$Count_{B,R}(\ast)(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle B, 3 \rangle\}\}, \{B\} \rangle,$$

$$Count_{C,R}(\ast)(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle C, 3 \rangle\}\}, \{C\} \rangle.$$

Допустим, что числовое подмножество Num универсального домена замкнуто относительно (частичной операции) деления $/ : Num \times Num \rightarrow Num$. Доопределим операцию деления так, что когда первый аргумент равен $NULL$, то функция принимает значение $NULL$. Это связано с тем, что мы будем осуществлять суперпозиции и вместо первого аргумента подставлять значение функции Sum , а вместо второго – значение функции $Count$, учитывая, что функция $Count$ в качестве значения не может выдать значение $NULL$.

Агрегированием $Avg_{A,R}$ по атрибуту A (конечных) таблиц схемы R назовем такую унарную параметрическую операцию $Avg_{A,R} : \mathbf{T}'(R) \rightarrow \mathbf{T}'(\{A\})$, что

$$Avg_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{\{\langle A, Avg(\alpha_A) \rangle\}\}, \{A\} \rangle,$$

где $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$, а Avg – функция, которая возвращает среднее арифметическое значение элементов столбца с атрибутом A таблицы $\langle t, R \rangle$, которые отличаются от значения $NULL$, причем с учетом дубликатов, т.е. $Avg : 2_m^{Num} \rightarrow Num$ и

$$Avg(\alpha_A) = \frac{Sum(\alpha_A)}{Count(\alpha_A)}.$$

Из определения следуют равенства

$$\begin{aligned} Avg(\emptyset_m) &= \frac{Sum(\emptyset_m)}{Count(\emptyset_m)} = \frac{NULL}{0} = NULL, \\ Avg(\{NULL^n\}) &= \frac{Sum(\{NULL^n\})}{Count(\{NULL^n\})} = \frac{NULL}{0} = NULL, \\ Avg(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) &= \frac{Sum(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\})}{Count(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\})} = \frac{1}{(n_1 + \dots + n_k)} \sum_{i=1}^k d_i n_i \end{aligned}$$

в предположении, что все элементы d_i ($i = \overline{1, k}$) отличны от $NULL$.

ПРИМЕР 4. Для таблицы из примера 1 получим

$$\begin{aligned} Avg_{A,R}(\langle t, R \rangle) &= \langle \{ \{ \langle A, 5/3 \rangle \} \}, \{A\} \rangle, \\ Avg_{B,R}(\langle t, R \rangle) &= \langle \{ \{ \langle B, 2 \rangle \} \}, \{B\} \rangle, \\ Avg_{C,R}(\langle t, R \rangle) &= \langle \{ \{ \langle C, 2 \rangle \} \}, \{C\} \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $\leq$ – линейный порядок на универсальном домене $\mathbf{D}$. Агрегированием $Min_{A,R}$ по атрибуту A (конечных) таблиц схемы R , $A \in R$ назовем такую унарную параметрическую операцию $Min_{A,R} : \mathbf{T}'(R) \rightarrow \mathbf{T}'(\{A\})$, что

$$Min_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, Min(\alpha_A) \rangle \} \}, \{A\} \rangle,$$

где $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$, а Min – функция, которая возвращает наименьшее значение среди значений столбца с атрибутом A таблицы $\langle t, R \rangle$, которые отличаются от значения $NULL$. Таким образом $Min : 2_m^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{D}$, где

$$Min(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, & \text{если } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, & \text{если } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \min\{d | d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}\}, & \text{если } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Из определения следует, что $Min(\emptyset_m) = NULL$, $Min(\{NULL^n\}) = NULL$, а $Min(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \min\{d_1, \dots, d_k\}$ в предположении, что все элементы d_i ($i = \overline{1, k}$) отличны от элемента $NULL$. Для случая пустой таблицы $\langle t_\emptyset, R \rangle$ имеем $Min_{A,R}(\langle t_\emptyset, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, NULL \rangle \} \}, \{A\} \rangle$.

ПРИМЕР 5. Для таблицы из примера 1 получим

$$\begin{aligned} Min_{A,R}(\langle t, R \rangle) &= \langle \{ \{ \langle A, 1 \rangle \} \}, \{A\} \rangle, \\ Min_{B,R}(\langle t, R \rangle) &= \langle \{ \{ \langle B, 1 \rangle \} \}, \{B\} \rangle, \\ Min_{C,R}(\langle t, R \rangle) &= \langle \{ \{ \langle C, 1 \rangle \} \}, \{C\} \rangle. \end{aligned}$$

Агрегированием $Max_{A,R}$ по атрибуту A (конечных) таблиц схемы R назовем такую унарную параметрическую операцию $Max_{A,R} : \mathbf{T}'(R) \rightarrow \mathbf{T}'(\{A\})$, что

$$Max_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle A, Max(\alpha_A) \rangle \}, \{A\} \rangle,$$

где $\langle t, R \rangle \in \mathbf{T}'(R)$, а Max – функция, которая возвращает наибольшее значение среди значений столбца с атрибутом A таблицы $\langle t, R \rangle$, которые отличаются от $NULL$. Таким образом $Max : 2_m^D \rightarrow D$, где

$$Max(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, & \text{если } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, & \text{если } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \max\{d | d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}\}, & \text{если } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Из определения следует, что $Max(\emptyset_m) = NULL$, $Max(\{NULL^n\}) = NULL$, $Max(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \max\{d_1, \dots, d_k\}$ в предположении, что все элементы d_i ($i = \overline{1, k}$) отличны от значения $NULL$. Для случая пустой таблицы $\langle t_\emptyset, R \rangle$ имеем $Max_{A,R}(\langle t_\emptyset, R \rangle) = \langle \{ \langle A, NULL \rangle \}, \{A\} \rangle$.

ПРИМЕР 6. Для таблицы из примера 1 получим

$$Max_{A,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle A, 2 \rangle \}, \{A\} \rangle,$$

$$Max_{B,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle B, 3 \rangle \}, \{B\} \rangle,$$

$$Max_{C,R}(\langle t, R \rangle) = \langle \{ \langle C, 3 \rangle \}, \{C\} \rangle.$$

Отметим, что функции Min и Max определяют наименьший или наибольший элементы основы мультимножества, которые отличаются от значения $NULL$, поэтому сопоставимость особого элемента с остальными элементами универсального домена в данном случае несущественна. В конкретных реализациях SQL элемент $NULL$ может быть как наименьшим, так и наибольшим элементом ⁴⁾.

4. Выводы. В статье определена формальная математическая семантика агрегатных операций, которая проиллюстрирована примерами их применения. Результаты работы могут быть использованы в теории обобщенных табличных алгебр. Полученные результаты можно расширить на таблицы, рассматриваемые как мультимножества строк. Кроме того, параметром агрегатной операции может выступать не только отдельный атрибут, но и некоторая функция над строкой.

1. Codd E.F. A Relational model of data for large shared data banks // Comm. of ACM. – 1970. – № 6. – P. 377–387.
2. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – М.: Мир, 1987. – 608 с.
3. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 198 с.
4. Klug A. Equivalence of relational algebra and relational calculus query languages having aggregate functions // J. ACM. – 1982. – № 3. – P. 699–717.

⁴⁾ Сопоставимость особого элемента важна при интерпретации фразы ORDER BY, которая предназначена для «упорядочения» результата запроса (подробности см. в [3]).

5. *Silbeschatz A., Korth H., Sudarshan S.* Database system concepts. – NY: McGraw-Hill, 2011. – 1376 p.
6. *Garcia-Molina H., Ullman J.D., Widom J.* Database systems: the complete book. – NY: Prentice Hall, 2008. – 1119 p.
7. *Де́йт К.Дж.* Введение в системы баз данных. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1328 с.
8. *Петровский А.Б.* Основные понятия теории мультимножеств. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 80 с.

I. M. Glushko

A formal semantics of aggregate operations.

The paper deals with the extension of table algebra (this algebra is introduced by V.N. Redko and D.B. Bui and is a generalization of well-known classic Codd's relational algebra), involving the completion of a special element NULL of the universal domain and expansion of signature finite table algebra with such aggregate operations: finding the sum, the largest (smallest) value, the average value, the number of table rows and number of elements different from NULL. The formal mathematical semantics of these operations illustrated by meaningful examples is given. The concept of multiset is used under defining the aggregate operators. The general scheme of the aggregate operations is following: at first, operations are defined on finite multisets, then they are extended to the tables, in particular, on an empty table.

Keywords: *relation databases, table (relation) algebra, extending table algebra, aggregate operations.*

Нежинский государственный ун-т им. Николая Гоголя
glushkoim@gmail.com

Получено 21.01.14

УДК 517.547

©2014. М. З. Двейрин, А. С. Левадная

ОБОБЩЕННЫЙ ПОРЯДОК И ОБОБЩЕННЫЙ ТИП ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В ТЕРМИНАХ ЕЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В статье выясняется связь между обобщенным порядком и обобщенным типом целой функции бесконечного порядка и скоростью ее наилучшей полиномиальной аппроксимации для большого семейства банаховых пространств функций, аналитических в единичном круге. Найдены соотношения, определяющие обобщенные порядок и тип целой функции через последовательность ее наилучших приближений. Полученные результаты являются обобщением более ранних результатов Редди, Д. Сато, И.И. Ибрагимова и Н.И. Шихалиева, С.Б. Вакарчука, Р. Мамадова.

Ключевые слова: целая функция, наилучшее приближение, обобщенный порядок целой функции, обобщенный тип целой функции.

1. Введение. В данной работе в качестве X рассматривается линейное нормированное пространство, образованное аналитическими в единичном круге D функциями, имеющими конечную норму $\|\cdot\|$. При этом будем предполагать, что $\|\cdot\|$ помимо обычных свойств нормы удовлетворяет также условиям:

$$i) \quad \|f(\cdot e^{it})\| \equiv \|f(\cdot)\| \quad (1)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $f \in X$;

$$ii) \quad \|f(\cdot)\| < \infty \quad (2)$$

для любой целой функции (т.е. пространство X содержит все целые функции);

$$iii) \quad \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{it})g(t) dt \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)| dt \|f(\cdot)\| \quad (3)$$

для любых функций $f \in X$ и $g \in L[0; 2\pi]$ (иначе говоря, для любых $f \in X$ и $g \in L[0; 2\pi]$ $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|_{L[0; 2\pi]}$).

Этим требованиям удовлетворяет норма в целом ряде функциональных пространств, являющихся объектом многочисленных исследований (авторам неизвестны примеры пространств, в которых выполняются условия i), ii) и при этом не выполняется условие iii)). Приведем некоторые из них.

1) Пространство B функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывных на его замыкании $\bar{\mathbb{D}}$ с нормой

$$\|f\| = \max_{z \in \bar{\mathbb{D}}} |f(z)| < \infty.$$

2) Пространства Харди H_p ($p \geq 1$) функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} M_p(f, r), \quad M_p(f, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1; \infty);$$

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|, \quad p = \infty.$$

3) Пространства Бергмана H'_p функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ при $p \in [1; \infty)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int \int_{z \in D} |f(x + iy)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

и обобщенные (весовые) пространства Бергмана $H'_{p, \rho}$ функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ при $p \in [1; \infty)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int \int_{z \in D} |f(x + iy)|^p \rho(|z|) dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

и радиальным весом $\rho(|z|)$.

4) Пространства A_p , $p \in (0; 1)$ функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\| = \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} M_1(f, r) dr,$$

впервые изучавшиеся Харди и Литтлвудом [1] и позднее Ромбергом, Дюреном и Шилдсом [2].

5) Пространства $\mathcal{B}_{p, q, \lambda}$, $0 < p < q \leq \infty$, $\lambda > 0$, функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f, r) dr \right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda < \infty,$$

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} \left\{ (1-r)^{(1/p-1/q)} M_q(f, r) \right\}, \quad \lambda = \infty,$$

введенные Харди и Литтлвудом в работе [1] (см. также [3]). Известно [3], что в случае $\min(q, \lambda) \geq 1$ пространства $\mathcal{B}_{p, q, \lambda}$ являются банаховыми.

6) Пространства со смешанной нормой $H^{p, q, \alpha}$, $(p, q \geq 1, \alpha > 0)$, образованные функциями, аналитическими в круге $\mathbb{D}$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 (1-r)^{q\alpha-1} M_p^q(f, r) dr \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad q < \infty,$$

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} \left\{ (1-r)^\alpha M_p(f, r) \right\}, \quad q = \infty,$$

введенные Харди и Литтлвудом в работе [1]. Заметим, что пространства $H^{p,q,\alpha}$ и $\mathcal{B}_{p,q,\lambda}$ отличаются лишь способом введения параметров.

7) Пространство $BMOA$ [4], состоящее из функций $f \in H_1$ с нормой

$$\|f\| = \sup_I \int_I |f(\zeta) - f_I| d\sigma(\zeta),$$

где $f(\zeta)$ – граничные значения функции $f(z)$ на единичной окружности, а f_I – среднее арифметическое значение функции $f(\zeta)$ на дуге I .

8) Пространства типа Блоха $\mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in (0, \infty)$, состоящие из функций, аналитических в D с конечной нормой

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)|.$$

Пространства $\mathcal{B}_\alpha$ являются банаховыми [5], при $\alpha = 1$ $\mathcal{B}_\alpha$ совпадает с пространством Блоха $\mathcal{B}$.

9) Введенные Е.М. Дынькиным [6] пространства $\mathcal{A}_{p,q}^s(\mathbb{D})$ функций, являющиеся аналогами классов О.В. Бесова $\mathcal{B}_{p,q}^s[-1; 1]$. Эти пространства образованы функциями $f \in H_p$, $p \in [1; \infty]$ с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\omega_m(f, t)_p}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} + \sup_{0 < r < 1} M_p(f, r).$$

Здесь $q \in [1; \infty]$, $s > 0$, $m > s$ – натуральное число, $\omega_m(f, t)_p$ – m -ый модуль гладкости в пространстве L_p функции $f(e^{i\cdot})$, представляющей собой радиальные предельные значения f . Случай $q = \infty$ трактуется традиционно.

10) Обобщенные пространства Дирихле $\mathcal{D}_p(\alpha)$ функций, аналитических в $\mathbb{D}$, с нормой

$$\|f(z)\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \alpha_k \right)^{1/p},$$

где $c_k = c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора функции f , $p \geq 1$, $\alpha = \{\alpha_k\}$ – фиксированная последовательность положительных чисел с условиями

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k)^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k)^{\frac{1}{k}} \geq 1.$$

Отметим, что приведенные выше примеры функциональных пространств со свойствами i), ii) и iii) не исчерпывают их многообразия.

Напомним общепринятые определения основных характеристик целой функции. В дальнейшем будем использовать функцию $\ln \ln \dots \ln x$, где x логарифмируется q раз. Введем для нее обозначение: $\ln^{(q)} x := \ln \ln \dots \ln x$, $\ln^{(0)} x := x$. Будем также обозначать

$$M(f, r) := \sup_{0 < |z| < r} |f(z)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Порядок роста целой функции равен

$$\rho := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(f, r)}{\ln r}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тип целой функции равен (если $0 < \rho < \infty$)

$$\sigma := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(f, r)}{r^\rho}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенный порядок роста ρ_q индекса q (q -порядок) целой функции равен (в случае, когда $\rho = \infty$)

$$\rho_q := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q)} M(f, r)}{\ln r},$$

где q – натуральное число, удовлетворяющее условиям $\rho_{q-1} = \infty$, $\rho_q < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенный тип σ_q индекса q (q -порядок) целой функции равен (для $0 < \rho_q < \infty$)

$$\sigma_q := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^{(q-1)} M(f, r)}{r^{\rho_q}}.$$

Данные определения обобщенного порядка и обобщенного типа введены Сато Д. в [7] и Редди А.Р. в [8] (в случае $q = 2$ мы будем использовать обозначения ρ вместо ρ_2 и σ вместо σ_2). Введение q -порядка и q -типа позволяет различать скорость роста целой функции в случае, когда $\rho = \infty$.

В частности, в статье Сато Д. [7] были получены формулы, которые связывают величины ρ_q и σ_q с тейлоровскими коэффициентами c_n целой трансцендентной функции f :

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|},$$

если $q = 2, 3, \dots$ и

$$\sigma_q = \begin{cases} \frac{1}{e^{\rho_q}} \limsup_{n \rightarrow \infty} n |c_n|^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 2; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n \cdot |c_n|^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Связи между ростом максимума модуля целых функций или функций, аналитических в круге, и наилучшим приближением изучались в работах Редди А.Р. [8], Ибрагимова И.И. и Шихалиева Н.И. [11], [12], Вакарчука С.Б. [10], Мамадова Р. [13] и Двейрина М.З. [9]. Ими были получены соотношения, выражающие порядок и тип целой функции через последовательность ее наилучших приближений $E_n(f)$ для аппроксимации по различным нормам. Более полное изложение истории исследований по данной теме можно найти в [14].

Напомним, что $E_n(f) \equiv E_n(f, L_n)$ – наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами линейного подпространства L_n определяется следующим образом:

$$E_n(f) := \inf_{p \in L_n} \|f - p\|.$$

В качестве аппроксимирующего подпространства будем использовать $\mathcal{P}_n$ – совокупность алгебраических полиномов комплексной переменной степени не выше $(n - 1)$.

Приведем некоторые нужные для дальнейшего факты из статьи [9]:

Теорема 1. Пусть $f \in X$. Тогда условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(f))^{\frac{1}{n}} = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f была целой.

Лемма 1. Пусть $f \in X$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ при $z \in \mathbb{D}$. Тогда $|c_n| \cdot \|z^n\| \leq E_n(f) \leq \|f\|$.

Лемма 2. Пусть $f \in X$ и $\mu_1 := \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}$, $\mu_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}$. Тогда $\mu_1 \geq 1$, $\mu_2 < \infty$.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho \in (0; +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный положительный предел

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \alpha. \quad (4)$$

При этом справедливо равенство $\alpha = \rho$.

Теорема 3. Пусть существует конечный предел $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}} = \mu > 0$. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho \in (0; +\infty)$ и нормального типа $\sigma \in (0; +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma = \frac{1}{e\rho} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho}{n}}. \quad (5)$$

В настоящей статье будут получены аналоги теорем 1–3, устанавливающие связи между наилучшими полиномиальными приближениями функции и ее обобщенным порядком ρ_q и обобщенным типом σ_q в случае $q > 2$ (случай $q = 2$ соответствует результатам, полученным ранее в [9]).

Всюду в дальнейшем будем обозначать

$$\mu_1 := \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}, \quad \mu_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}}. \quad (6)$$

2. Формулировка результатов.

Теорема 4. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой обобщенного порядка $\rho_q \in (0; +\infty)$ ($q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \alpha \quad (7)$$

был конечным и положительным. При этом $\alpha = \rho_q$.

Теорема 5. Пусть существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|z^n\|)^{\frac{1}{n}} = \mu$. Для того, чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho_q \in (0; +\infty)$ и типа $\sigma_q \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_q = \begin{cases} \frac{1}{e\rho_q} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 2; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n \cdot \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho_q}{n}}, & \text{если } q = 3, 4, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Следствие 1. Условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{1}{n}} \ln^{(q-2)} n = 0 \quad (9)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f была целой некоторого обобщенного порядка ρ_q с $\rho_q \in (0; 1)$.

Чтобы сформулировать следующее следствие, нам понадобится ввести некоторые обозначения. Пусть Ω – ограниченный континуум со связным дополнением в комплексной плоскости, $0 \in \Omega$ – его внутренняя точка, r и R – радиусы кругов D_r и D_R с центром в точке $z = 0$ и таких, что $D_r \subset \Omega \subset D_R$; для целой функции f положим $f_r(z) := f(rz)$ и

$$\|f\|_{\Omega} := \left(\int \int_{\Omega} |f(x + iy)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

($\|f\|_{\Omega}$ – норма функции f в пространстве $E'_p(\Omega)$, которое в случае, когда Ω есть замыкание области, представляет собой хорошо известное пространство В.И. Смирнова), $E_n(f)_{\Omega}$ – наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами комплексной переменной степени не выше $(n-1)$ в пространстве $E'_p(\Omega)$.

Следствие 2. Пусть функция $f \in E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$. Для того, чтобы f была целой обобщенного порядка $\rho_q \in (0; \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln E_n(f)_{\Omega}} = \rho_q. \quad (10)$$

Отметим, что полученные результаты в частных случаях пространств $BMOA$, $\mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{A}_{p,q}^s(\mathbb{D})$, $\mathcal{D}_p(\alpha)$ являются новыми. Утверждение следствия 2 при существенных ограничениях на Ω было получено ранее в [14].

3. Доказательства. Докажем теорему 4:

Доказательство.

Достаточность. Из условия (7) теоремы 4 следует равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{1}{n}} = 0$, т.е. выполнение условия теоремы 1. Следовательно, f – целая функция с $\rho = \infty$. Обозначим ее q -порядок ρ_q и положим $\alpha_q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}}$. Тогда ввиду леммы 1 имеем неравенство:

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \alpha_q. \quad (11)$$

Покажем, что в условиях теоремы $\rho_q > 0$.

Предположим противное, т.е. что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|} = 0$. Тогда для произвольного положительного $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ найдется N_ε такое, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $n \ln^{(q-1)} n < -\varepsilon \ln |c_n|$. Последнее неравенство равносильно следующему: $|c_n| < (\ln^{(q-2)} n)^{-\frac{n}{\varepsilon}}$. Пользуясь им, оценим $E_n(f)$ при $n > N_\varepsilon$. Будем считать N_ε столь большим, чтобы выполнялись неравенства: $\|z^n\| \leq (\mu_2 + \varepsilon)^n$, $\|z^n\| \geq (\mu_1 - \varepsilon)^n$ и $\mu_2 + \varepsilon < (\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ при $n > N_\varepsilon$, где μ_1 и μ_2 определяются соотношениями (6). Тогда

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot \|z^k\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot (\mu_2 + \varepsilon)^k \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right]^k \leq \frac{1}{1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}}} \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right]^n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\|z^n\|}{E_n(f)} &\geq (\mu_1 - \varepsilon)^n \cdot \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right] \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right]^{-n}, \\ \ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)^{\frac{1}{n}} &\geq \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon} \ln^{(q-1)} n, \\ \frac{\ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)}{n \ln^{(q-1)} n} &\geq \frac{1}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n \ln^{(q-1)} n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)}{n \ln^{(q-1)} n} \geq \frac{1}{\varepsilon} \text{ и, следовательно, } \alpha_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \leq \varepsilon,$$

что противоречит условию теоремы, значит $\rho_q > 0$.

Выберем $\varepsilon \in (0, \mu_1) \cap (0, \rho_q)$. Из того, что

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|},$$

следует, что существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|c_n| < (\ln^{(q-2)} n)^{-\frac{n}{\varepsilon + \rho_q}}$. Будем считать N_ε столь большим, чтобы выполнялись неравенства: $\|z^n\| \leq (\mu_2 + \varepsilon)^n$, $\|z^n\| \geq (\mu_1 - \varepsilon)^n$ и $\mu_2 + \varepsilon < (\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}$ при $n > N_\varepsilon$. Тогда при $n > N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot \|z^k\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \cdot (\mu_2 + \varepsilon)^k \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right]^k = \frac{1}{1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}}} \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right]^n. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\|z^n\|}{E_n(f)} &\geq (\mu_1 - \varepsilon)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right) \cdot \left[\frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right]^{-n}, \\ \ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)^{\frac{1}{n}} &\geq \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon + \rho_q} \ln^{(q-1)} n, \\ \frac{\ln \left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \right)}{n \ln^{(q-1)} n} &\geq \frac{1}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{1}{n \ln^{(q-1)} n} \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right] + \frac{1}{\varepsilon + \rho_q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда

$$\rho_q + \varepsilon \geq \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon + \rho_q}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon + \rho_q}{n \ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon + \rho_q}}} \right] \right). \quad (15)$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получим, что $\rho_q + \varepsilon \geq \alpha_q$. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем $\rho_q \geq \alpha_q$. Учитывая это и неравенство (3), имеем, что $\rho_q = \alpha_q$. Таким образом, достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f \in X$ целая функция конечного порядка ρ_q , т.е.

$$\rho_q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{-\ln |c_n|}.$$

Положим

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}}.$$

Из леммы 1 следует, что $\alpha \geq \rho_q$. Рассуждая, как и при доказательстве достаточности, можем утверждать, что для произвольного $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ найдется $N_\varepsilon : |c_n| < (\ln^{(q-2)} n)^{-\frac{n}{\varepsilon+\rho_q}}$, $(\mu_1 - \varepsilon)^n \leq \|z^n\| \leq (\mu_2 + \varepsilon)^n$ и $\mu_2 + \varepsilon < (\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon+\rho_q}}$ при $n > N_\varepsilon$.

Рассуждая, как при доказательстве (13) и (4), получим

$$\begin{aligned} \rho_q + \varepsilon &\geq \frac{n \ln^{(q-1)} n}{\ln \frac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\varepsilon + \rho_q}{\ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \frac{\mu_1 - \varepsilon}{\mu_2 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon + \rho_q}{n \ln^{(q-1)} n} \cdot \ln \left[1 - \frac{\mu_2 + \varepsilon}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\varepsilon+\rho_q}}} \right] \right). \end{aligned}$$

После предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем $\rho_q \geq \alpha$. Учитывая обратное неравенство $\rho_q \leq \alpha$, имеем $\rho_q = \alpha$. Таким образом, необходимость доказана. $\square$

Докажем теорему 5:

Доказательство. В случае $q = 2$ наша теорема совпадает с теоремой 3, доказанной в [9].

Достаточность. Рассмотрим случай $q = 3, 4, \dots$. Пусть $f \in X$ удовлетворяет условию (2) теоремы 5, где ρ_q и σ_q некоторые положительные числа. Тогда из (2) следует справедливость условия (7) теоремы 4, следовательно, f – целая функция порядка ρ_q . Пусть тип f равен α . Докажем, что $\alpha = \sigma_q$. Из формулы для определения типа целой функции через тейлоровские коэффициенты

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln^{(q-2)} n \cdot |c_n|^{\frac{\rho_q}{n}}, \quad q = 3, 4, \dots \quad (16)$$

С учетом леммы 1 имеем $\alpha \leq \sigma_q$. Докажем обратное неравенство.

Из (5) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, для которого выполняются неравенства $|c_n| < \left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} n} \right)^{\frac{n}{\rho_q}}$ и $\left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} n} \right)^{\frac{1}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon) < 1$ при всех $n > N_\varepsilon$.

Оценим наилучшее приближение функции f сверху:

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} k} \right)^{\frac{k}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon)^k \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} n} \right)^{\frac{1}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon) \right)^k \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{C}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\rho_q}}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon + \alpha}{\ln^{(q-2)} n} \right)^{\frac{n}{\rho_q}} \cdot (\mu + \varepsilon)^n, \end{aligned} \quad (17)$$

где $C = (\mu + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha)^{\frac{1}{\rho_q}}$. Из (17) находим

$$\varepsilon + \alpha \geq \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\frac{\rho_q}{n}} \cdot \ln^{(q-2)} n \cdot \left(1 - \frac{C}{(\ln^{(q-2)} n)^{\frac{1}{\rho_q}}} \right)^{\frac{\rho_q}{n}} \cdot \|z^n\|^{\frac{\rho_q}{n}} \cdot (\mu + \varepsilon)^{-\rho_q}.$$

Последовательно устремив $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\varepsilon + \alpha \geq \sigma_q \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon} \right)^{\rho_q}, \quad \alpha \geq \sigma_q,$$

что завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Пусть $f \in X$ – целая функция обобщенного порядка $\rho_q, \rho_q \in (0; \infty)$. Обозначим ее обобщенный тип α . Аналогично доказательству достаточности, используя лемму 1 и теорему 2, можно показать справедливость неравенства $\alpha \geq \sigma_q$. Чтобы доказать обратное неравенство $\alpha \leq \sigma_q$ нужно повторить соответствующие рассуждения из доказательства достаточности. $\square$

Доказательство следствия 1 может быть получено применением соответствующих рассуждений на стр. 1132 работы [15].

Справедливость следствия 2 вытекает из того, что при любом $r > 0$ $\rho_q(f) = \rho_q(f_r)$, $r^{\frac{2}{p}} \|f_r\| \leq \|f\|_{\Omega} \leq R^{\frac{2}{p}} \|f_R\|$, и теоремы 5.

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals II. – Math. Z., 1931. – **34**, № 3. – P. 403–439.
2. Duren P.L., Romberg B.W., Shields A.L. Linear functionals in H_p spaces with $0 < p < 1$ // J. reine und angew. Math. – 1969. – 238. – P. 4–60.
3. Гварадзе М. И. Об одном классе пространств аналитических функций. Мат. заметки // 1977. – **21**, № 2. – С. 141–150.
4. Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ, Москва, ВИНТИ. – 1985. – 23. – С. 3–124.
5. K. Zhu Bloch type spaces of analytic functions // Rocky mountain J. Math. – 1993. – **23**, № 3. – P. 1143–1177.
6. Дынькин Е. М. Конструктивная характеристика классов С.Л. Соболева и О.В. Бесова // Труды мат. ин-та АН СССР. – 1981. – 155. – С. 41–76.
7. Sato D. On the rate of growth of entire functions of fast growth // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1963. – **69**, № 3. – P. 411–414.
8. Reddy A.R. A Contribution to best approximation in the L^2 norm // J. Approxim. Theory. – 1974. – **11**, № 11. – P. 110–117.
9. Двейрин М.З. О скорости полиномиальной аппроксимации целых функций и их свойствах // ArXiv:1402.3218 [math.CV] 13 Feb 2014.
10. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических функций // ДАН УССР, сер. физ.-мат. и техн. науки. – 1990. – № 1. – С. 9–11.
11. Ибрагимов И.И., Шихалиев Н.И. О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // ДАН СССР. – 1976. – **227**, № 2 – С. 280–283.
12. Ибрагимов И.И., Шихалиев Н.И. О наилучшем приближении в среднем аналитических функций в пространстве $A_p(|z| < 1)$ // Спец. вопросы теории функций. – Баку: ЭЛМ, 1977. – № 1. – С. 84–96.

13. Мамадов Р. Некоторые вопросы приближения целыми функциями. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, спец. 01.01.01 – математический анализ. – Душанбе, 2009. – 14 с.
14. Вакарчук С.Б., Жир С.І. Найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій узагальненого порядку зростання в банахових просторах $\mathcal{E}'_p(G)$ та $\mathcal{E}_p(G)$, $p \geq 1$ // Укр. матем. вестник. – 2011. – 8, № 2. – С. 255–291.
15. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 9. – С. 1123–1133.

M. Z. Dveyrin, A. S. Levadnaya

The generalized order and the generalized type of an entire function in terms of the best approximation.

The paper explores connection between the generalized order and the generalized type of an entire function and the speed of the best polynomial approximation in the unit disk. The relations which define the generalized order and the generalized type of an entire function through the sequence of its best approximations, have been found. The results were obtained by generalization previous results of A.R. Reddy, D. Sato, I.I. Ibragimov and N.I. Shyhaliev, S.B. Vakarchyk, R. Mamadov.

Keywords: *entire function, best approximation, generalized order of entire function, generalized type of entire function.*

Донецкий национальный ун-т
matem47@mail.ru
last.dris@mail.ru

Получено 17.06.14

УДК 517.5

©2014. А. С. Ефимушкин, В. И. Рязанов

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ЛУЗИНА И ГЕРИНГА

Доказан аналог теоремы Лузина, что любая функция на отрезке, измеримая относительно логарифмической ёмкости, почти всюду совпадает с производной от некоторой непрерывной функции. На этой основе установлен аналог теоремы Геринга о разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в единичном круге с произвольными граничными данными, измеримыми относительно логарифмической ёмкости. Отсюда также следует соответствующая разрешимость задачи Дирихле для аналитических функций.

Ключевые слова: гармонические и аналитические функции, задача Дирихле, теорема Лузина, теорема Геринга, логарифмическая ёмкость.

1. Введение. Краевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), а также известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924), и Пуанкаре (1910), смотри историю вопроса в монографии [1], где также рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

Хорошо известно, что, если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1)$$

и, таким образом, данная функция определяется с точностью до чисто мнимой постоянной ic , $c = \operatorname{Im} f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ на границе единичного круга, см., напр., § 8, Гл. III, часть 3 в [2], с. 346.

Известно также, что любая гармоническая функция $u(z)$ в $\mathbb{D}$ имеет сопряженную функцию $v(z)$ такую, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$. Заметим, что граничные значения сопряженной функции v не могут быть произвольно предписаны одновременно с граничными значениями u , поскольку v единственным образом определяется через u с точностью до аддитивной постоянной, см., например, I.A в [3]. Поэтому задача Дирихле для аналитических функций сводится к задаче для гармонических функций с заданной граничной функцией вещественной части.

Герингом был установлен следующий результат: для любой вещественной с периодом 2π функции, которая измерима (относительно меры Лебега), существует гармоническая в $\mathbb{D}$ функция, такая, что $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей, см. [4]. Здесь мы доказываем аналог результата Геринга в терминах логарифмической ёмкости, см. теорему 2. В свою очередь, эта теорема основана на соответствующем аналоге результата Лузина, см. теорему 1.

Напомним, что Лузину принадлежит следующая теорема: для любой измеримой и п.в. конечной (относительно меры Лебега) функции φ на интервале $[a, b]$, существует непрерывная функция Φ такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$, см., например,

теорему VII(2.3) в [5]. Это утверждение было хорошо известно до Лузина для суммируемой функции φ относительно ее неопределенного интеграла Φ , см., например, теорему IV(6.3) в [5]. Однако, этот результат весьма нетривиален для несуммируемой φ .

2. О логарифмической ёмкости. Наиболее важным для нашего исследования является понятие логарифмической ёмкости, см., например, [6], [7] и [8]. Пусть E – произвольное ограниченное борелевское множество плоскости $\mathbb{C}$. *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν , определенную на борелевских подмножествах множества E , с $\nu(E) = 1$. Функцию

$$U^\nu(z) := \int_E \log \left| \frac{1}{z - \zeta} \right| d\nu(\zeta) \quad (2)$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν . Соответственно, *логарифмической ёмкостью* $C(E)$ борелевского множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \quad V = \inf_\nu V_\nu(E), \quad V_\nu(E) = \sup_z U^\nu(z). \quad (3)$$

Заметим, что здесь супремум достаточно вычислять по множеству E . Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \leq C(E) < \infty$, $C(E_1) \leq C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$, $C(E) = 0$, если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$, см., например, лемму III.4 в [7].

Напомним, что логарифмическая ёмкость совпадает с так называемой абсолютной гармонической мерой, введенной Рольфом Неванлинной, см., например, [8], с. 123. Поэтому множество E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$, см., например, теорему V.6.2 в [8]. Однако, существуют множества нулевой длины, имеющие положительную ёмкость, см., например, теорему IV.5 в [7].

Хорошо известна также следующая геометрическая характеристика логарифмической ёмкости, см. [8]:

$$C(E) = \tau(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}, \quad (4)$$

где V_n обозначает супремум (на самом деле, максимум) величины

$$V(z_1, \dots, z_n) = \prod_{\substack{l=1, \dots, n \\ k < l}} |z_k - z_l|, \quad (5)$$

когда всевозможные конечные наборы точек $z_1, \dots, z_n$ пробегают множество E . Следуя Фекете [9], величину $\tau(E)$ называют *трансфинитным диаметром* множества E . Из указанной геометрической интерпретации логарифмической ёмкости через трансфинитный диаметр, сразу же видим, что если $C(E) = 0$, то $C(f(E)) = 0$ для любого отображения f , непрерывного по Гёльдеру.

Чтобы ввести множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, определим, следуя [7], *внутреннюю* C_* и *внешнюю ёмкости* C^* :

$$C_*(E) := \sup_{F \subseteq E} C(F), \quad (6)$$

где супремум берётся по всем компактным множествам $F \subset \mathbb{C}$, и

$$C^*(E) := \inf_{E \subseteq O} C(O), \quad (7)$$

где инфимум берётся по всем открытым множествам $O \subseteq \mathbb{C}$. Далее ограниченное множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *измеримым относительно логарифмической ёмкости*, если

$$C^*(E) = C_*(E), \quad (8)$$

и общее значение $C_*(E)$ и $C^*(E)$ по-прежнему обозначается через $C(E)$. Отметим, см. лемму III.5 в [7], что внешняя ёмкость полуаддитивна, т.е.

$$C^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C^*(E_n). \quad (9)$$

Функцию $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$, заданную на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$, будем называть *измеримой относительно логарифмической ёмкости*, если для любых открытых множеств $O \subseteq \mathbb{C}$ измеримы относительно логарифмической ёмкости множества

$$\Omega = \{z \in E : \varphi(z) \in O\}. \quad (10)$$

Ясно, что само множество E измеримо относительно логарифмической ёмкости.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что борелевские множества и, в частности, компактные и открытые множества измеримы относительно логарифмической ёмкости, см. [7], с. 9 и 31. Кроме того, как это следует прямо из определения, любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости, представимо в виде объединения сигма-компакта (объединения счётного числа компактов) и множества логарифмической ёмкости нуль. Известно также, что борелевские множества, например, компакты измеримы относительно всех хаусдорфовых мер и, в частности, относительно меры длины, см., например, теорему II(7.4) в [5]. Поэтому любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости измеримо относительно меры длины. Таким образом, на таком множестве любая функция $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$, измеримая относительно логарифмической ёмкости, будет также измеримой относительно меры длины на E . Однако, существуют функции, измеримые относительно меры длины, которые не являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости, см., например, теорему IV.5 в [7].

Нас особо будут интересовать функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, заданные на единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Однако, ввиду (7), нам достаточно будет изучить соответствующие вопросы на отрезках вещественной оси, поскольку любая замкнутая дуга на $\partial\mathbb{D}$ допускает билипшицево (даже бесконечно гладкое, так называемое стереографическое) отображение g на такой отрезок, а g и g^{-1} по теореме Кирсбрауна допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$ на себя, см., например, теорему 2.10.43 в [10].

В связи с этим, напомним, что отображение $g : X \rightarrow X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называется *липшицевым*, если $d'(g(x_1), g(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной C . Если в дополнение к этому $d(x_1, x_2) \leq c \cdot d'(g(x_1), g(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной c , то отображение g называется *билипшицевым*.

Напомним также, см., например, [5], с. 195, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой плотности* для измеримого (относительно длины, т.е. по Лебегу) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus E|}{2\varepsilon} = 0. \quad (11)$$

Аналогично говорим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является *точкой плотности относительно логарифмической ёмкости* для измеримого (относительно C) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus E)}{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])} = 0. \quad (12)$$

Напомним, наконец, что функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ *аппроксимативно непрерывна (относительно логарифмической ёмкости)* в точке $x_0 \in (a, b)$, если она непрерывна на некотором множестве $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности (относительно логарифмической ёмкости), см., например, [5], с. 199, и [10], с. 176, соответственно.

Для дальнейших рассуждений используем следующий аналог теоремы А. Данжуа, см., например, теорему 2.9.13 в [10], сравни теорему IV(10.6) в [5].

Предложение 1. Функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ измерима относительно логарифмической ёмкости тогда и только тогда, когда она аппроксимативно непрерывна для п.в. $x \in (a, b)$ также относительно логарифмической ёмкости.

Замечание 2. Как известно, $C([a, b]) \simeq 1/(\log \frac{1}{\delta})$ при $\delta = b - a \rightarrow 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$ такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [11], с. 131. Кроме того, $C(E) \geq A/\log(1/|E|)$ при малых длинах $|E|$, см., например, лемму 1 в [12]. Таким образом, если x_0 является точкой плотности для множества E относительно логарифмической ёмкости, то x_0 – также точка плотности для множества E относительно меры длины. Следовательно, любая точка аппроксимативной непрерывности функции $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ относительно логарифмической ёмкости, является также точкой аппроксимативной непрерывности функции φ относительно меры Лебега на вещественной оси.

Отсюда, в частности, получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1. Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ – её неопределенный интеграл Лебега. Тогда $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Действительно, пусть $x_0 \in (a, b)$ – точка аппроксимативной непрерывности для функции φ . Тогда найдется множество $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности, и на котором функция φ непрерывна. Так как $|\varphi(x)| \leq C < \infty$ для всех $x \in [a, b]$, получаем, что при малых h

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| \leq \max_{x \in E \cap [x_0, x_0 + h]} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + 2C \frac{|(x_0, x_0 + h) \setminus E|}{|h|},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Таким образом, заключение леммы следует из предложения 1, см. также замечание 2. $\square$

3. Об одном аналоге теоремы Лузина. При доказательстве аналога теоремы Лузина в терминах логарифмической ёмкости ключевую роль будет играть следующая лемма о сингулярных функциях канторовского типа.

Лемма 2. *Существует непрерывная неубывающая функция $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ и $\Psi'(t) = 0$ п.в. относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Для доказательства этого факта воспользуемся конструкцией множеств канторовского типа логарифмической ёмкости нуль, принадлежащей Рольфу Неванлинне. Именно, рассмотрим произвольную последовательность чисел $p_k > 1$, $k = 1, 2, \dots$, и определим соответствующую последовательность множеств $E(p_1, \dots, p_n)$, $n = 1, 2, \dots$, по индукции следующим образом. Пусть $E(p_1)$ – множество, состоящее из 2-х равных по длине отрезков, которое получается из единичного отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием центрального интервала длины $1 - 1/p_1$; $E(p_1, p_2)$ – множество, состоящее из 2^{-x} равных по длине отрезков, которое получается выбрасыванием из каждого отрезка предыдущего множества $E(p_1)$ центрального интервала, который составляет $1 - 1/p_2$ долю от его длины и так далее. Обозначим через $E(p_1, p_2, \dots)$ пересечение всех множеств $E(p_1, \dots, p_n)$, $n = 1, 2, \dots$. По теореме V.6.3 в [8] множество $E(p_1, p_2, \dots)$ имеет логарифмическую ёмкость нуль тогда и только тогда, когда ряд $\sum 2^{-k} \log p_k$ расходится. Например, это условие выполняется, если $p_k = e^{2^k}$.

Как известно, все множества канторовского типа гомеоморфны. Более того, найдется гомеоморфизм $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, при котором $E(p_1, p_2, \dots)$ перейдёт в классическое канторово множество, см., например, конструкцию 8.23 в [13]. Таким образом, если κ – классическая канторова функция, см., например, конструкцию 8.15 в [13], то $\Psi = \kappa \circ h$ – искомая функция. $\square$

Лемма 3. *Пусть функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $|G(x)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$, $G(a) = G(b) = 0$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Пусть $H(x) = \int_a^x g(t) dt$ – неопределенный интеграл Лебега функции g . Выберем на $[a, b]$ конечный набор точек $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ таких, что колебание H меньше $\varepsilon/2$ на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Применяя линейные преобразования независимой и зависимой переменной в функции $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ из леммы 2, получаем на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, функцию F_k , которая имеет нулевую производную п.в. относительно логарифмической ёмкости и совпадает с функцией H в концах отрезка. Пусть F – функция на $[a, b]$, склеенная из функций F_k . Тогда $G = H - F$ даёт нам искомую функцию по леммам 1 и 2. $\square$

Лемма 4. *Пусть функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть P – замкнутое подмножество отрезка $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$|G(x+h)| \leq \varepsilon|h|$ для всех $x \in P$ и всех h таких, что $x+h \in [a, b]$, $G(x) = G'(x) = 0$ для всех $x \in P$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a, b] \setminus P$ относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Пусть $I = (a, b)$. Тогда множество $I \setminus P$ является открытым и представимо в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся интервалов $I_k = (a_k, b_k)$. Выберем в каждом интервале I_k возрастающую последовательность чисел $c_k^{(j)}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ такую, что $c_k^{(j)} \rightarrow a_k$ при $j \rightarrow -\infty$ и $c_k^{(j)} \rightarrow b_k$ при $j \rightarrow \infty$. Обозначим через $\varepsilon_k^{(j)}$ меньшее из 2-х чисел $\varepsilon(c_k^{(j)} - a_k)/(k + |j|)$ и $\varepsilon(b_k - c_k^{(j)})/(k + |j|)$. Тогда по лемме 3 в каждом интервале I_k найдется непрерывная функция G_k такая, что $|G(x)| \leq \varepsilon_k^{(j)}$ для всех $x \in [c_k^{(j)}, c_k^{(j+1)}]$, $G(c_k^{(j)}) = 0$ для всех $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $G'(x) = g(x)$ п.в. на I_k относительно логарифмической ёмкости. Таким образом, полагая $G(x) = G_k(x)$ на каждом интервале I_k и $G(x) = 0$ на множестве P , получаем искомую функцию. $\square$

Наконец, докажем следующий аналог теоремы Лузина, сформулированной во введении.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется непрерывная функция $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) также относительно логарифмической ёмкости. Более того, функцию Φ можно выбрать так, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ и $|\Phi(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Определим по индукции последовательность замкнутых множеств $P_n \subseteq [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$ и последовательность непрерывных функций $G_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$, чьи производные существуют п.в. и измеримы относительно логарифмической ёмкости, такие, что при обозначениях $Q_n = \bigcup_{k=0}^n P_k$ и $\Phi_n = \sum_{k=0}^n G_k$ выполняются следующие условия: (a) $\Phi'_n(x) = \varphi(x)$ при $x \in Q_n$, (b) $G_n(x) = 0$ при $x \in Q_{n-1}$, (c) $|G_n(x+h)| \leq |h|/2^n$ для всех $x \in Q_{n-1}$ и всех h таких, что $x+h \in [a, b]$, (d) $C(I \setminus Q_n) < 1/n$, где $I = [a, b]$.

Итак, пусть $G_0 \equiv 0$ и $P_0 = \emptyset$ и пусть G_n и P_n с указанными свойствами уже построены для всех $n = 1, 2, \dots, m$. Тогда найдется компакт $E_m \subset I \setminus Q_m$ такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup E_m)) < 1/(m+1), \quad (13)$$

а функции Φ'_m и φ непрерывны на E_m , см., например, теорему 2.3.5 в [10].

По лемме 4 с множеством $P = Q_m$ и функцией $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, равной $\varphi(x) - \Phi'_m(x)$ на E_m и нулю на $I \setminus E_m$, найдется непрерывная функция $G_{m+1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что (i) $G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x)$ п.в. на $I \setminus Q_m$ относительно логарифмической ёмкости, (ii) $G_{m+1}(x) = G'_{m+1}(x) = 0$ для всех $x \in Q_m$, и (iii) $|G_{m+1}(x+h)| \leq |h|/2^{m+1}$ для всех $x \in Q_m$ и всех h таких, что $x+h \in I$.

По определению логарифмической ёмкости, условиям (i) и (13), найдется компакт $P_{m+1} \subseteq E_m$, такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup P_{m+1})) < 1/(m+1), \quad (14)$$

$$G'_{m+1}(x) = \varphi(x) - \Phi'_m(x) \quad \forall x \in P_{m+1}. \quad (15)$$

Как видно из (14) и (15), а также (ii) и (iii), условия (a), (b), (c) и (d) сохраняются и для $n = m + 1$.

Положим теперь на основе приведённой конструкции последовательностей G_n и P_n :

$$\Phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x), \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k. \quad (16)$$

Заметим, что $\Phi_k \rightarrow \Phi$ равномерно на отрезке I ввиду условия (c) и, следовательно, функция Φ является непрерывной. По построению, для любого $x_0 \in Q$ имеем, что $x_0 \in Q_n$ при всех достаточно больших n и, т.к.

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\Phi_n(x_0 + h) - \Phi_n(x_0)}{h} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k(x_0 + h) - G_k(x_0)}{h},$$

мы получаем из условий (a), (b) и (c), что

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| < \frac{1}{2^n},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Кроме того, по условию (d) видим, что $C(I \setminus Q) = 0$. Таким образом, $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.

Наконец, применяя конструкцию доказательства леммы 3 к найденной нами функции Φ вместо неопределённого интеграла, находим новую функцию Φ_* такую, что $\Phi'_*(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ также относительно логарифмической ёмкости с $\Phi_*(a) = \Phi_*(b) = 0$ и $|\Phi_*(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$. $\square$

4. О задаче Дирихле для гармонических функций в единичном круге.

Центральным результатом работы является следующий аналог теоремы Геринга.

Теорема 2. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция, которая измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция $u(z)$, $z \in \mathbb{D}$ такая, что $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей для всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль.

Доказательство. По теореме 1 найдется непрерывная 2π -периодическая функция $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\Phi'(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости. Пусть

$$U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - t) + r^2} \Phi(t) dt \quad (17)$$

для $r < 1$. Далее, по хорошо известному результату, восходящему к Фату, $\frac{\partial}{\partial \vartheta} U(z) \rightarrow \Phi'(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей всюду, где существует $\Phi'(\vartheta)$,

см., например, 3.441 в [14], с. 53, см. также теорему IX.1.2 в [15]. Следовательно, заключение следует для функции $u(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U(z)$. $\square$

Следствие 1. При условиях теоремы 2, существует аналитическая функция f в $\mathbb{D}$, такая, что $\operatorname{Re} f(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ при $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости.

Заметим, что наши результаты можно распространить на случай квазидисков (областей, ограниченных квазиконформными кривыми) и, в частности, на области с гладкими границами. Отметим также, что полученные результаты могут быть использованы для решения другой известной задачи Римана–Гильберта для аналитических функций через редукцию последней задачи к решению соответствующих двух задач Дирихле. Наконец, разработанные нами методы позволяют распространить эти результаты на соответствующие задачи для уравнений Бельтрами.

1. Векун И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Гурвиц А. Курант Р. Теория функций. – Москва: Наука, 1968.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . – М.: Мир, 1984.
4. Gehring F.W. On the Dirichlet problem // Michigan Math. J. – 1955–1956. – 3. – Р. 201.
5. Сакс С. Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
6. Носиро К. Предельные множества. – М.: ИЛ, 1963.
7. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. – М.: Мир, 1971.
8. Неванlinna Р. Однозначные аналитические функции. – ОГИЗ, Москва, 1941.
9. Fékete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – 17. – Р. 228–249.
10. Федерер Г. Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
11. Adams D.R., Hedberg L.I. Function spaces and potential theory. – Springer-Verlag, Berlin, 1996.
12. Twomey J.B. The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – 58. – Р. 81–91.
13. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: НКТП, 1939.
15. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

A. S. Yefimushkin, V. I. Ryazanov

On some analogs of theorems of Lusin and Gehring.

It is proved the analog of Lusin's theorem that each function on a segment which is measurable with respect to logarithmic capacity coincides almost everywhere with the derivative of a continuous function. On this basis, it is established the analog of Gehring's theorem on solvability of the Dirichlet problem for harmonic functions on the unit disk with arbitrary boundary data which are measurable with respect to logarithmic capacity. The latter implies also the corresponding solvability of the Dirichlet problem for analytic functions.

Keywords: harmonic and analytic functions, Dirichlet problem, Lusin's theorem, Gehring's theorem, logarithmic capacity.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
art.89@bk.ru
vl.ryazanov1@gmail.com

Получено 17.06.14

УДК 531.39, 517.977

©2014. А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ

Рассмотрена бесконечная система дифференциальных уравнений, которая описывает колебания пластины Кирхгофа. Для данной системы построены функционалы управления с обратной связью, зависящие от обобщенных скоростей. Доказана теорема о частичной асимптотической устойчивости положения равновесия системы с обратной связью.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, пластина Кирхгофа, управление с обратной связью.

1. Введение. В современной теории управления системами с распределенными параметрами важное место занимают задачи стабилизации движения упругих механических объектов [1]. Прикладной интерес к этой проблеме вызван необходимостью синтеза законов управления для космических систем с деформируемыми элементами [2, 3] и роботов-манипуляторов с упругими звеньями [4].

Целью данной работы является синтез управления с обратной связью для модели колебаний упругой пластины, а также доказательство асимптотической устойчивости тривиального решения соответствующей линейной системы с использованием построенного управления.

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений, которая описывает колебания упругой пластины Кирхгофа, прикрепленной к вращающемуся твердому телу [5, 6]:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{kj} = \beta_{kj}\eta_{kj}, \\ \dot{\eta}_{kj} = -\beta_{kj}\xi_{kj} + \varphi_{kj}u_1 + g_{kj}u_2, \end{cases} \quad (k, j) \in \mathbb{N}^2, \quad (1)$$

где $\xi_{kj}(t)$ и $\eta_{kj}(t)$ – модальная координата и скорость, соответствующие моде колебаний с индексами (k, j) , $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – управления, соответствующие угловому ускорению тела-носителя. Коэффициенты уравнений (1) связаны с параметрами механической системы посредством соотношений:

$$\beta_{kj} = \alpha \left(\left(\frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2} \right)^2 \right), \quad (2)$$

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{для четного } k, \\ \frac{2l_2\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2kj}, & \text{для нечетного } k, \text{ четного } j, \\ \frac{2\sqrt{l_1l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2kj}, & \text{для нечетного } k, \text{ нечетного } j, \end{cases}$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \frac{-2l_1\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2kj}, & \text{для четного } k, \text{ нечетного } j, \\ 0, & \text{для четного } j, \\ \frac{2\sqrt{l_1l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2kj}, & \text{для нечетного } k, \text{ нечетного } j. \end{cases}$$

Физический смысл фазовых переменных и положительных параметров α , l_1 , l_2 , a_1 , a_2 поясняется в статьях [5, 6]. Предположим, что $2a_1 \neq l_1$ и $2a_2 \neq l_2$.

Пусть задано взаимно-однозначное соответствие $(k, j) \mapsto n(k, j)$ между множествами $\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}$. Всюду в дальнейшем будем отождествлять обозначения величин с двойным индексом (k, j) и соответствующим одинарным индексом n , т.е. $\xi_n = \xi_{kj}$, $\eta_n = \eta_{kj}$, $\beta_n = \beta_{kj}$, $\varphi_n = \varphi_{kj}$, $g_n = g_{kj}$ при $n = n(k, j)$.

Запишем систему (1) в операторном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\beta_n & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_n & g_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В гильбертовом пространстве ℓ^2 для векторов $x = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots)^T$ и $\bar{x} = (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, \dots)^T$ вводится скалярное произведение стандартным образом:

$$\langle x, \bar{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n \bar{\xi}_n + \eta_n \bar{\eta}_n).$$

Построим для системы (3) управление с обратной связью $u = v(x)$, которое обеспечивает частичную асимптотическую устойчивость ее тривиального решения. Для этого рассмотрим функционал $V : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2), \quad (4)$$

где $S = \{n \mid \varphi_n^2 + g_n^2 = 0\}$.

Запишем производную функционала V в силу системы (3):

$$\dot{V} = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (\xi_n \dot{\xi}_n + \eta_n \dot{\eta}_n) = 2u_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \eta_n \varphi_n \right) + 2u_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \eta_n g_n \right).$$

Определим функции управления с обратной связью следующим образом:

$$v_1(x) = -\frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n, \quad v_2(x) = -\frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n, \quad (k_1 \geq 0, k_2 \geq 0). \quad (5)$$

Тогда производная V в силу системы (3) с $u_1 = v_1(x), u_2 = v_2(x)$ запишется в виде

$$\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leq 0.$$

3. Теорема об асимптотической устойчивости. Запишем систему (3) с управлением $u = v(x)$ в виде

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \quad (6)$$

где $F = A + BK$ с $K = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k_1 \varphi_1 & 0 & k_1 \varphi_2 & \dots \\ 0 & k_2 g_1 & 0 & k_2 g_2 & \dots \end{pmatrix}$.

Оператор F является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы линейных ограниченных операторов $\{e^{tF}\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 на основании теоремы Люмера–Филлипса [7].

Рассмотрим непрерывный функционал

$$y(x) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2) \right)^{1/2} \quad (7)$$

в пространстве ℓ^2 .

Приведем определение об асимптотической устойчивости особой точки по отношению к функционалу y из [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение $x = 0$ уравнения (6) называется асимптотически устойчивым по отношению к функционалу y , если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $x(t)$ задачи (6) с $\|x_0\| < \delta$ выполнены свойства:

$$y(x(t)) < \varepsilon \text{ при всех } t \geq 0, \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(x(t)) = 0. \quad (9)$$

Сформулируем теорему 2 из [8] для случая частичной асимптотической устойчивости C_0 -полугруппы линейных операторов следующим образом.

Теорема 1. [8] Пусть F – инфинитезимальный генератор непрерывной C_0 -полугруппы $\{e^{tF}\}_{t \geq 0}$ линейных ограниченных операторов в ℓ^2 и пусть $y : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ – непрерывный функционал. Предположим, что существует дифференцируемый по Фреше функционал $V : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим

условиям:

1) для некоторых функций $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство

$$\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \text{для всех } x \in \ell^2,$$

где класс $\mathcal{K}$ состоит из всех непрерывных строго возрастающих функций

$\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, обладающих свойством $\alpha(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0$ при всех $x \in D(F)$;

3) существует такое $\delta > 0$, что при любом $\|x_0\| < \delta$ соответствующее множество

$$\bigcup_{t \geq 0} \{e^{tF} x_0\}$$

предкомпактно в ℓ^2 ;

4) множество $\text{Ker } y = \{x \in \ell^2 \mid y(x) = 0\}$ инвариантно для (6), т.е. если $y(e^{\tau F} x_0) = 0$, $\tau \geq 0$, то $y(e^{tF} x_0) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$;

5) множество

$$M = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}} \setminus \text{Ker } y$$

не содержит целых полутраекторий системы (6), определенных для $t \in \mathbb{R}^+$.

Тогда особая точка $x = 0$ дифференциального уравнения (6) асимптотически устойчива по отношению к y .

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Тогда управления с обратной связью $u_1 = v_1(x)$ и $u_2 = v_2(x)$, представленные в виде (5), обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (3) по отношению к функционалу y вида (7).

Доказательство. Для доказательства воспользуемся Теоремой 1.

Условие 1) выполнено, поскольку

$$y(x) \leq V(x) = \|x\|^2, \quad \forall x \in \ell^2.$$

Условие 2) следует из того, что $\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leq 0$ при

$k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, для всех $x \in D(A)$, где $D(A) = \{x \in \ell^2 \mid \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \beta_n^2 (\xi_n^2 + \eta_n^2) < \infty\}$.

Для проверки условия 3) Теоремы 1 докажем предкомпактность полутраекторий линейного дифференциального уравнения (6) с помощью теоремы из работы [9]. Для этого докажем компактность оператора $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ при некотором $\lambda > 0$.

Рассмотрим уравнение $Ix + \lambda Ax + \lambda Bu = \bar{x}$ относительно x , где $\lambda = \text{const}$. В покомпонентном виде оно примет вид:

$$(I + \lambda A) \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n \\ \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение методом обратной матрицы, получим

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\beta_n \\ \lambda\beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n \\ \bar{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Подставим выражение (10) в выражение для $u = v(x)$ вида (5):

$$\begin{pmatrix} v_1(\bar{x}) \\ v_2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2) \\ \frac{-k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Преобразуем (11) следующим образом:

$$\begin{cases} v_1 \left(1 - \frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right) - v_2 \left(\frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right) = -\frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda\beta_n)^2}, \\ v_1 \left(-\frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right) + v_2 \left(1 - \frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right) = -\frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda\beta_n)^2}. \end{cases} \quad (12)$$

Из (12) с помощью метода Крамера найдем представление функций $v_1(\bar{x})$ и $v_2(\bar{x})$:

$$v_1(\bar{x}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2(\bar{x}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \\ &\quad + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1 k_2}{4} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right)^2, \\ \Delta_1 &= -\frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \\ &\quad - \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n (\lambda\beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & -\frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} - \\ & - \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2}. \end{aligned}$$

Формулы (13) определяют линейный функционал $v(\bar{x})$ в ℓ^2 . Покажем, что $v(\bar{x})$ ограничен для произвольного $\lambda > 0$, для этого оценим $v_1(\bar{x})$ и $v_2(\bar{x})$. Так как $|v_1(\bar{x})| = \left| \frac{\Delta_1}{\Delta} \right| = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}$, а $|v_2(\bar{x})| = \left| \frac{\Delta_2}{\Delta} \right| = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}$, то оценим отдельно числитель и знаменатель

$$\begin{aligned} |\Delta_1| \leq & \frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\lambda \beta_n \bar{\xi}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\bar{\eta}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\lambda \beta_n \bar{\xi}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \\ & + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\bar{\eta}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda |\varphi_n g_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|g_n| |\lambda \beta_n \bar{\xi}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \\ & + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\lambda |\varphi_n g_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|g_n| |\bar{\eta}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2}. \quad (14) \end{aligned}$$

Для произвольного $\beta_0 > 0$ запишем суммы в (14) отдельно при $\beta_n < \beta_0$ и $\beta_n \geq \beta_0$:

$$\begin{aligned} |\Delta_1| \leq & \frac{\lambda k_1}{2} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n < \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n \geq \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\xi}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{k_1}{2} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{|\varphi_n|^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\eta}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{\lambda^2 k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n < \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n \geq \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\xi}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\eta}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2 k_1 k_2}{4} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 & \times \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n < \beta_0}}^{\infty} \frac{g_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n \geq \beta_0}}^{\infty} \frac{g_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\xi}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\eta}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

В выражении (15) использовано неравенство Гельдера. С учетом неравенств

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\xi}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \|\bar{\xi}\|_{\ell^2} \leq \|\bar{x}\|, \quad \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} |\bar{\eta}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\bar{\eta}\|_{\ell^2} \leq \|\bar{x}\|, \\
 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n < \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S \\ \beta_n \geq \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|\varphi\| \left(\beta_0 + \frac{1}{\lambda^4 \beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

выражение (15) примет вид:

$$\begin{aligned}
 |\Delta_1| &\leq \|\bar{x}\| \left(\|\varphi\| \left(\left(\frac{\lambda k_1}{2} + \frac{\lambda^2 k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{\lambda^4 \beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \right) \right) = \\
 &= M_1(\lambda) \|\bar{x}\|. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Применяя аналогичные рассуждения, получим, что

$$\begin{aligned}
 |\Delta_2| &\leq \|\bar{x}\| \left(\|g\| \left(\left(\frac{\lambda k_2}{2} + \frac{\lambda^2 k_1 k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{\lambda^4 \beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_2}{2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right) \right) = \\
 &= M_2(\lambda) \|\bar{x}\|. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Оценим определитель Δ снизу, для чего воспользуемся представлением

$$\Delta = 1 + \lambda r(\lambda), \quad (18)$$

где

$$r(\lambda) = -\frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right)^2.$$

Пусть $|r(\lambda)| \leq M$ при $M > 0$ для любого $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Выберем $\lambda = \min \left\{ \lambda_0, \frac{1}{M} \right\}$. Тогда из (18) следует, что $\Delta > 0$. Для оценки $|r(\lambda)|$ применим неравенство треугольника и неравенство Гельдера:

$$|r(\lambda)| \leq \frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right)^2 \leq \\ \leq \frac{k_2}{2} \|g\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{\lambda k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \|\varphi\|^2.$$

Выберем $\lambda_0 = 1$, тогда

$$|r(\lambda_0)| \leq \frac{k_2}{2} \|g\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \|\varphi\|^2 = M,$$

$$\text{а } \Delta \geq 1 - \lambda \left(\frac{k_2}{2} \|g\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \|\varphi\|^2 \right) = M_3(\lambda).$$

Таким образом показано, что для всякого $\lambda \in (0, 1)$ найдутся такие числа $M_4(\lambda) > 0$ и $M_5(\lambda) > 0$, что

$$|v_1(\bar{x})| \leq \frac{M_1(\lambda)}{M_3(\lambda)} \|\bar{x}\| = M_4(\lambda) \|\bar{x}\|, \quad |v_2(\bar{x})| \leq \frac{M_2(\lambda)}{M_3(\lambda)} \|\bar{x}\| = M_5(\lambda) \|\bar{x}\|$$

в формуле (13) при всех $\bar{x} \in \ell^2$. Формулы (10) и (13) определяют $x = (\lambda F + I)^{-1} \bar{x}$ при всех $\bar{x} \in \ell^2$ для $\lambda > 0$. Отсюда следует, что

$$\|(\lambda F + I)^{-1} \bar{x}\|^2 \leq 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\bar{\xi}_n^2 + (\bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n v_1(\bar{x}) - \lambda g_n v_2(\bar{x}))^2 \right) \leq \\ \leq 2 \|\bar{x}\|^2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} (1 + \lambda^2 M_4^2 \|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2 \|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5^2 \|\varphi\| \|g\| - \\ - 2\lambda M_4 \|\varphi\| - 2\lambda M_5 \|g\|). \quad (19)$$

Покажем, что ряд $\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2}$ в (19) сходится. Для этого перейдем к суммированию по двум индексам с учетом представления (2):

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \leq \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_{kj})^2} \leq \frac{(l_1 l_2)^4}{\lambda^2 \alpha^2} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{((\pi k l_2)^2 + (\pi j l_1)^2)^2}.$$

Для оценки суммы ряда применим интегральный признак сходимости:

$$\begin{aligned} \frac{(l_1 l_2)^4}{\lambda^2 \alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{((\pi k l_2)^2 + (\pi j l_1)^2)^2} &\leq \frac{(l_1 l_2)^4}{\lambda^2 \alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dj}{((\pi k l_2)^2 + (\pi j l_1)^2)^2} = \\ &= \frac{(l_1 l_2)^4}{\lambda^2 \alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi^3 l_2 k^3 l_1^3} \right) \leq \frac{(l_1 l_2)^4}{\lambda^2 \alpha^2} \left(\frac{1}{4\pi^3 l_2 l_1^3} + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi^3 l_2 k^3 l_1^3} \right) \right) = \frac{3l_1 l_2^3}{8\pi^3 \lambda^2 \alpha^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\|(\lambda F + I)^{-1} \bar{x}\|^2 \leq M_6(\lambda) \|\bar{x}\|^2.$$

Таким образом, определен линейный ограниченный оператор

$$(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$

при каждом $\lambda > 0$. Для доказательства его компактности рассмотрим оператор проектирования $P_N : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, который переводит элементы $x \in \ell^2$ в конечномерное подпространство с $\xi_n = \eta_n = 0$ при $n < N$:

$$P_N : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \\ \xi_N \\ \eta_N \\ \xi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi_N \\ \eta_N \\ \xi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор в ℓ^2 :

$$U_N = (I - P_N)(\lambda F + I)^{-1}.$$

Каждый оператор U_N компактен (вполне непрерывен), поскольку его образ имеет конечную размерность. Покажем, что оператор $(\lambda F + I)^{-1}$ является пределом по норме компактных операторов:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\lambda F + I)^{-1} - U_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N(\lambda F + I)^{-1}\| = 0. \quad (21)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \|P_N(\lambda F + I)^{-1}\bar{x}\| &\leq 2 \sum_{\substack{n=N \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=N \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\bar{\xi}_n^2 + (\bar{\eta}_n - \lambda\varphi_n v_1(\bar{x}) - \lambda g_n v_2(\bar{x}))^2 \right) \leq \\
 &\leq 2\|\bar{x}\|^2 \sum_{\substack{n=N \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} (1 + \lambda^2 M_4^2 \|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2 \|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5 \|\varphi\| \|g\| - \\
 &\quad - 2\lambda M_4 \|\varphi\| - 2\lambda M_5 \|g\|). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Из формулы (20) следует, что

$$\sum_{\substack{n=N \\ n \notin S}}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, из оценки (22) вытекает свойство (21). Следовательно, оператор $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ компактен, поскольку он является пределом конечномерных операторов.

Из компактности линейного оператора $(\lambda F + I)^{-1}$ следует предкомпактность всех положительных полутраекторий линейного дифференциального уравнения (6) в ℓ^2 по теореме из [9].

Проверим условие 4) Теоремы 1. Пусть $x(t)$, $t \geq 0$ – решение системы (3) с управлением $u = v(x(t))$ вида (5), и пусть $y(x(\tau)) = 0$ при некотором $\tau \geq 0$.

Обозначим $\tilde{x}^0 = x(\tau) \in \ell^2$ и определим $\tilde{x}(t) = (\tilde{\xi}_1(t), \tilde{\eta}_1(t), \tilde{\xi}_2(t), \tilde{\eta}_2(t), \dots)^T$ как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_n(t) = \beta_n \tilde{\eta}_n(t), \\ \dot{\tilde{\eta}}_n(t) = -\beta_n \tilde{\xi}_n(t), \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0. \quad (23)$$

Поскольку $y(\tilde{x}^0) = 0$, то $\tilde{\xi}_n(0) = \tilde{\eta}_n(0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N} \setminus S$. Тогда

$$\tilde{\xi}_n(t) = \tilde{\eta}_n(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus S, \quad \forall t \geq 0. \quad (24)$$

Это означает, что

$$y(\tilde{x}(t)) \equiv 0. \quad (25)$$

Покажем, что $\tilde{x}(t)$ является решением системы (3) с обратной связью (5).

Непосредственной подстановкой соотношений (24) в функционал обратной связи (5) приходим к выводу, что $u = v(\tilde{x}(t)) \equiv 0$, т.е. подстановка $\tilde{x}(t)$ обращает дифференциальные уравнения (3) с управлением (5) в тождество на основании системы (23).

Таким образом, $\tilde{x}(t)$ – решение системы (3), (5), и с использованием свойства единственности решений задачи Коши получаем, что

$$x(t) = \tilde{x}(t + \tau), \quad \forall t \geq 0.$$

Отсюда, с учетом тождества (24), следует, что $y(x(t)) \equiv 0$. Следовательно, условие 4) выполнено.

Осталось проверить условие 5). Для этого покажем, что всякая полутраектория $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ системы (3) с управлением (5) на множестве

$$M = \{x \in \ell^2 \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

обладает свойством $y(x(t)) \equiv 0$.

Пусть $x(t) \in M$ при всех $t \geq 0$, т.е.

$$\dot{V}(x(t)) = -k_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n(t) \right)^2 - k_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n(t) \right)^2 \equiv 0.$$

Отсюда с учетом неравенств $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ следует, что

$$v_1(x(t)) = v_2(x(t)) = 0. \quad (26)$$

Подстановка управления $u = v(x(t))$ вида (26) в (3) приводит к системе:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \beta_n \eta_n(t), \\ \dot{\eta}_n(t) = -\beta_n \xi_n(t), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Запишем решение системы дифференциальных уравнений (27):

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \xi_n(0) \cos(\beta_n t) + \eta_n(0) \sin(\beta_n t), \\ \eta_n(t) = -\xi_n(0) \sin(\beta_n t) + \eta_n(0) \cos(\beta_n t), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (26), получим:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (\varphi_n \eta_n(0) \cos(\beta_n t) - \varphi_n \xi_n(0) \sin(\beta_n t)) \equiv 0, \\ \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (g_n \eta_n(0) \cos(\beta_n t) - g_n \xi_n(0) \sin(\beta_n t)) \equiv 0, \end{cases} \quad \forall t \geq 0. \quad (29)$$

Отметим, что если система функций

$$\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N} \setminus S\} \quad (30)$$

линейно-независима на полуоси $t \in [0, \infty)$, то тождества (29) выполнены только при

$$\xi_n(0) = \eta_n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus S. \quad (31)$$

Из соотношений (31) в силу формул (28) следует свойство $y(x(t)) \equiv 0$, что обеспечивает выполнение условия 5) Теоремы 1.

Итак, остается доказать линейную независимость системы (30). Для этого покажем, что система функций

$$\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (32)$$

линейно-независима на полуоси $t \in [0, \infty)$.

Для доказательства линейной независимости функций (32) воспользуемся Теоремой 1.2.17 из [10], которая формулируется следующим образом: если

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim_{z \rightarrow \infty}} \frac{m[a, a+z]}{z} < \frac{\tau}{2\pi}, \quad (33)$$

то система (32) минимальна в $L^2(0; \tau)$. В (33) выражение $m[a, b]$ обозначает мощность множества $[a, b] \cap K$, где

$$K = \{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Для доказательства (33) заметим, что

$$\beta_n = \beta_{kj} = \alpha \pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2} \right) = \frac{\alpha \pi^2}{l_2^2} (j^2 + k^2 \chi), \quad \text{где } \chi = \frac{l_2^2}{l_1^2} > 0.$$

Обозначим $\tilde{\beta}_{kj} = j^2 + k^2 \chi$. Рассмотрим сначала случай $\chi \geq 1$.

Пусть $\Gamma_+ : j^2 + k^2 \chi = b$ и $\Gamma_- : j^2 + k^2 \chi = a$ — границы области Ω , в которую попадают целочисленные точки вида (j, k) , для которых $\beta_{kj} \in [a, b]$. Область Ω определена следующим образом:

$$\Omega = \{(j, k) \mid a \leq j^2 + k^2 \chi < b, \quad k \geq 1, j \geq 1\}.$$

Таким образом, оценка числа $m[a, b]$ сводится к нахождению мощности множества $\Omega \cap \mathbb{N}^2$. Рассмотрим два квадрата, один из которых (B_+) содержит область Ω , а второй (B_-) имеет не более одной общей точки с Ω , как показано на рис. 1.

Найдем количество целочисленных точек в квадратах B_+ и B_- . Определим координаты вершин, которые лежат на границе Ω :

$$b_+ : b_+^2 + \chi 1^2 = b, \quad b_- : b_-^2 + \chi b_-^2 = a. \quad (34)$$

Из равенств (34) следует, что $b_+ = \sqrt{b - \chi}$, а $b_- = \sqrt{\frac{a}{1 + \chi}}$.

Таким образом, оценка количества целочисленных точек в Ω будет иметь вид:

$$m[a; b] \leq |B_+ \cap \mathbb{N}^2| - |B_- \cap \mathbb{N}^2| + 1 = b_+^2 - b_-^2 + 1 = b - \chi - \frac{a}{1 + \chi} + 1. \quad (35)$$

Пусть $b = a + z$, тогда

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim_{z \rightarrow \infty}} \frac{m[a, a+z]}{z} \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim_{z \rightarrow \infty}} \frac{a \left(1 - \frac{1}{1 + \chi} \right) + z - \chi + 1}{z} = 1. \quad (36)$$

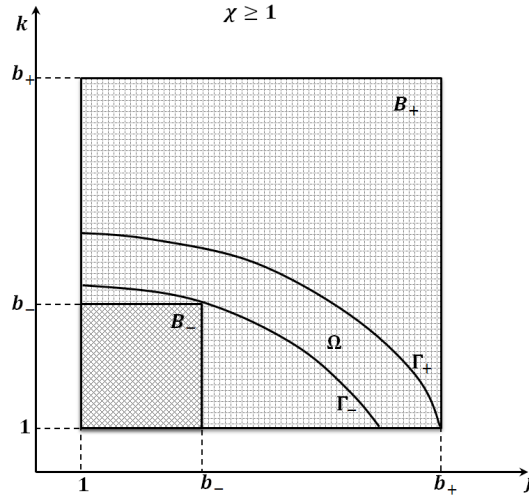


Рис. 1. Множества Ω , B_+ , B_- .

Случай $\chi < 1$ рассматривается аналогично, при этом

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{m[a, a+z]}{z} \leq \overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{a \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{1+\chi} \right) + \frac{z-1}{\chi} + 1}{z} = \frac{1}{\chi}. \quad (37)$$

Из оценок (36), (37) следует, что система функций (32) – линейно-независима на $[0; \tau)$ при $\tau > 2\pi \max \left\{ 1, \frac{1}{\chi} \right\}$.

Таким образом, особая точка $x = 0$ системы (3) с управлением $u = v(x)$ асимптотически устойчива по Теореме 2. $\square$

4. Заключение. В работе рассмотрена бесконечномерная система дифференциальных уравнений, которая описывает колебания упругой пластины Кирхгофа. Для данной системы построено управление с обратной связью $u = v(x)$, а также доказана теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) по отношению к функционалу y вида (5). Представляет дальнейший интерес исследование задачи стабилизации с использованием обратной связи по выходу для системы с неполными измерениями фазового вектора.

1. Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgül O. Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications. – London: Springer-Verlag, 1999. – 403 p.
2. Гуляев В.И. Динамика упругих систем при сложном движении // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 28–51.
3. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами – М.: Машиностроение, 1986. – 214 с.
4. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация – М.: Наука, 1989. – 368 с. – (Научные основы робототехники).
5. Зуев А.Л., Новикова Ю.В. Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 187–198.

6. Зувев А.Л., Новикова Ю.В. Оптимальное управление моделью пластины Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 163–176.
7. Phillips R.S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 90. – P. 193–254.
8. Зувев А.Л. Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений // Украинський математичний журнал. – 2006. – Т. 58, № 5. – С. 629–637.
9. Dafermos C.M., Slemrod M. Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups // Journal of Functional Analysis. – 1973. – Vol. 13. – P. 97–106.
10. Krabs W. On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 173. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 174 p.

A. L. Zuyev, Yu. V. Novikova

Stabilization of vibrations of the Kirchhoff plate by using a state feedback.

An infinite system of differential equations that describes the vibrations of the Kirchhoff plate is considered. Feedback control functionals, depending on the generalized velocities, are constructed for the system considered. A theorem on the partial asymptotic stability of the equilibrium of the closed-loop system is proved.

Keywords: *asymptotic stability, Kirchhoff plate, feedback control.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
al_zv@mail.ru
yuliya.novikova.88@mail.ru

Получено 03.04.14

УДК 517.988.28

©2014. Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Найдены значения наименьшего радиуса круга, в котором данные множества являются множествами Помпейю. В качестве множеств рассматриваются невыпуклые четырехугольники определенного вида.

Ключевые слова: множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю, невыпуклый четырехугольник.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) : \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B . $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ – шар радиуса R .

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если всякая локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ при всех $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A .

Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R$ и равенство $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ выполняется при всех $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$ почти всюду, будем говорить, что A является множеством Помпейю в $\mathbb{B}_R$ и обозначать $A \in \text{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. Для любого $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ это имеет место, если размеры $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с A , см. [1], [2]. В связи с этим в работе [3] поставлена следующая

ПРОБЛЕМА (4.1.1 из [3], локальный вариант проблемы Помпейю). Для данного A найти $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \text{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{R}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A .

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем (см. [1], [2]), а также В.В. Волчковым (см. [3], Глава 4, §1–2). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [3–8].

Рассмотрим некоторые примеры множеств A , для которых известно точное значение $\mathcal{R}(A)$.

1. Пусть A – правильный треугольник со стороной a . Тогда $\mathcal{R}(A) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ([9], В.В. Волчков, 1996).

2. Пусть A – правильный m -угольник со стороной длины l . Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} l \operatorname{ctg}(\pi/2m)/2, & \text{если } m \text{ – нечетно;} \\ l\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2(\pi/m)}/2 & \text{если } m \text{ – четно} \end{cases}$$

([3], В.В. Волчков, 2000–2003).

3. Пусть A – треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}(A) = 1$ ([10], П.А. Машаров, 2001).

4. Пусть A – куб в $\mathbb{R}^n$ с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{n+3}/2$ ([11], В.В. Волчков, 1996).

5. Пусть A – полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{5}/2$ ([3], В.В. Волчков, 1996).

6. Пусть $A(h)$ – сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}/2, & 1 < h \leq 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

([12], П.А. Машаров, 2011).

Известны также значения величины $\mathcal{R}(A)$ для случаев, когда A – круговой сектор ([13], П.А. Машаров, 2000), параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ ([11], В.В. Волчков, 1998–2000), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ ([3], В.В. Волчков, 2001), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ ([14], Л.В. Елец, П.А. Машаров, 2009), другие множества.

1. Основные результаты. Всюду далее будем считать $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ фиксированным числом. Рассмотрим точки $z_1(0; 0)$, $z_2(\sqrt{3}/2; -1/2)$, $z_3(\sqrt{3}/2 - h; 0)$, $z_4(\sqrt{3}/2; 1/2)$. В данной работе рассмотрен невыпуклый четырехугольник $A(h)$ – замыкание внутренности ломаной $z_1z_2z_3z_4z_1$ (см. рис. 1). Для каждого $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ получено точное значение $\mathcal{R}(A(h))$. Кроме того, показаны применения полученного результата в различных областях математики.

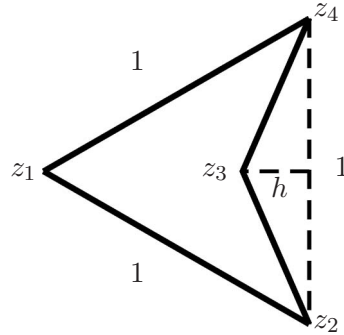


Рис. 1. Множество $A(h)$ – четырехугольник $z_1z_2z_3z_4$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Для каждого $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ верно равенство

$$\mathcal{R}(A(h)) = R(h) \stackrel{onp}{=} \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2). \end{cases}$$

2. Вспомогательные конструкции. Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс функций $f: B \rightarrow \mathbb{C}$, для которых для любого компактного множества $A \subset B$ интеграл $\int_A f(x) dx < +\infty$. Здесь и далее под dx понимается мера Лебега. Для $p \in [1, +\infty)$ обозначение $L^p(B)$ будем использовать для класса функций, для которых $\|f\|_{L^p(B)} = (\int_B |f(x)|^p dx)^{1/p} < +\infty$. Для $m \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^m(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка m которых (включая смешанные) непрерывны, $C(B)$ – класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \cap_{m=1}^\infty C^m(B)$. Под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ верно для всех $\lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^m = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(A, B)$ – класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$.

Из [3, предложение 1.5.6] следует, что дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ оставляют функцию в классе $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$. Поэтому их самих и всевозможные их произведения и линейные комбинации будем называть *допустимыми* дифференциальными операторами.

Обозначим $x_0 = \sqrt{3}/2 - h$, $k = 1/(2h)$. Рассмотрим следующие дифференциальные операторы: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $p_1 = \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $p_2 = \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $q_1 = 2h\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $q_2 = 2h\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $Q_0 = p_1 p_2 q_1$, $Q_1 = 2\sqrt{3}q_1$, $Q_2 = (-2h - \sqrt{3})p_1$, $Q_4 = (-2h + \sqrt{3})p_2$, $P_0 = p_1 p_2 q_1 q_2$, $P_1 = 2\sqrt{3}q_1 q_2$, $P_2 = (\sqrt{3} - 2h)p_1 q_1$, $P_3 = -4h p_1 p_2$, $P_4 = (\sqrt{3} - 2h)p_2 q_2$.

Следующая лемма содержит информацию о том, каким допустимым дифференциальным оператором следует подействовать на достаточно гладкую функцию f , чтобы интеграл по $A(h)$ от результирующей функции выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f в вершинах четырехугольника $A(h)$.

Лемма 1. Пусть $A(h) \subset B$ для некоторого открытого выпуклого множества B , $f \in C^4(B)$. Тогда

$$\int_{A(h)} (Q_0 f)(x, y) dx dy = 2 \int_0^h (p_1 p_2 f)(x_0 + t, -kt) dt + \sum_{j \in \{1, 2, 4\}} Q_j f(z_j), \quad (1)$$

$$\int_{A(h)} (P_0 f)(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^4 P_j f(z_j). \quad (2)$$

Доказательство. Четырехугольник $A(h)$ можно представить в виде $z_1 z_2 z_3 z_4 = \triangle z_1 z_2 z_4 \setminus \triangle z_3 z_2 z_4 = \triangle z_1 z_2 z_3 \cup \triangle z_1 z_3 z_4$, причем соответствующие треугольники не

имеют общих внутренних точек. Используя аддитивность интеграла, получаем

$$\begin{aligned} \int_{A(h)} f(x, y) dx dy &= \int_0^{\sqrt{3}/2} dx \int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} f(x, y) dy - \int_{x_0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{-k(x-x_0)}^{k(x-x_0)} f(x, y) dy = \\ &= \int_{-1/2}^0 dy \int_{-\sqrt{3}y}^{-y/k+x_0} f(x, y) dx + \int_0^{1/2} dy \int_{\sqrt{3}y}^{y/k+x_0} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Выбирая тот порядок интегрирования, который позволяет вычислить внутренний интеграл, имеем

$$\begin{aligned} \int_{A(h)} q_1 f dx dy &= 2h \left(\int_{-1/2}^0 dy \int_{-\sqrt{3}y}^{-y/k+x_0} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int_0^{1/2} dy \int_{\sqrt{3}y}^{y/k+x_0} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) + \\ &\quad + \int_0^{\sqrt{3}/2} dx \int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial y} dy - \int_{x_0}^{\sqrt{3}/2} dx \int_{-k(x-x_0)}^{k(x-x_0)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = \\ &= 2h \int_{-1/2}^0 f\left(-\frac{y}{k} + x_0, y\right) dy - 2h \int_{-1/2}^0 f(-\sqrt{3}y, y) dy + 2h \int_0^{1/2} f\left(\frac{y}{k} + x_0, y\right) dy - \\ &\quad - 2h \int_0^{1/2} f(\sqrt{3}y, y) dy + \int_0^{\sqrt{3}/2} f(x, x/\sqrt{3}) dx - \int_0^{\sqrt{3}/2} f(x, -x/\sqrt{3}) dx - \\ &\quad - \int_{x_0}^{\sqrt{3}/2} f(x, k(x-x_0)) dx + \int_{x_0}^{\sqrt{3}/2} f(x, -k(x-x_0)) dx. \end{aligned}$$

Производя в полученных интегралах следующие замены: в первом: $y = -kt$, в восьмом: $x = x_0 + t$, во втором: $y = -t$, в шестом: $x = t\sqrt{3}$, в третьем: $y = kt$, в седьмом: $x = t + x_0$, в четвертом: $y = t$, в пятом: $x = t\sqrt{3}$, и складывая попарно эти интегралы, получаем

$$\begin{aligned} \int_{A(h)} q_1 f dx dy &= 2 \int_0^h f(x_0 + t, -kt) dt + \\ &\quad + (-2h - \sqrt{3}) \int_0^{1/2} f(\sqrt{3}t, -t) dt + (-2h + \sqrt{3}) \int_0^{1/2} f(\sqrt{3}t, t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя в (3) $p_1 p_2 f$ вместо f и учитывая перестановочность операторов с постоянными коэффициентами, получаем

$$\begin{aligned} \int_{A(h)} (q_1 p_1 p_2 f)(x, y) dx dy &= 2 \int_0^h (p_1 p_2 f)(x_0 + t, -kt) dt + \\ &\quad + (-2h - \sqrt{3}) (p_1 f(z_2) - p_1 f(z_1)) + (-2h + \sqrt{3}) (p_2 f(z_4) - p_2 f(z_1)). \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые и используя введенные перед леммой обозначения, получаем (1). Для доказательства равенства (2) подставим $q_2 f$ вместо f в (1)

$$\begin{aligned} \int_{A(h)} (P_0 f)(x, y) dx dy &= 4h (p_1 p_2 f(x_2) - p_1 p_2 f(z_3)) + \\ &\quad + Q_1 q_2 f(z_1) + Q_2 q_2 f(z_2) + Q_4 q_2 f(z_4). \end{aligned}$$

Приводя подобные и учитывая введенные обозначения, получаем (2). $\square$

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим функции, заданные на $(0; \varepsilon)$ формулами $g_{1,\varepsilon}(\rho) = \exp(1/(\rho^2 - \varepsilon\rho))$, $g_{2,\varepsilon}(\rho) = \exp(\rho^2/(\rho - \varepsilon))$ и нулем в остальных случаях. Обозначим $C_j = \int_{\mathbb{B}_\varepsilon} g_{j,\varepsilon}(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, $j = \overline{1, 2}$. Тогда не тождественно равная нулю функция

$$\Phi_\varepsilon(x, y) = C_2 g_{1,\varepsilon}(\sqrt{x^2 + y^2}) - C_1 g_{2,\varepsilon}(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (4)$$

обладает следующими свойствами: она радиальная, бесконечно дифференцируемая, имеет носитель в $\overline{\mathbb{B}_\varepsilon}$, и для нее $\int_{\mathbb{B}_\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x, y) dx dy = 0$.

Для $R > \sqrt{3}/3$ положим $\mathcal{U}(h, R) = \{z = \lambda z_j : \lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R), j = \overline{1, 4}\}$; отрезок, соединяющий точки z_3 и z_2 , обозначим $l_h = \{(x_0 + t; -kt) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq h\}$; $\text{Sh}(A, B) = \{w \in \mathbb{R}^2 : A + w \subset B\}$; $\mathbb{B}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : a < |x| < b\}$ – кольцо с радиусами a и b . Используя теорему 4.3.2 из [3] и равенство (2) леммы 1, получаем

Лемма 2. Пусть $R > \sqrt{3}/3$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h), \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathcal{U}(h, R)$.

Используя равенство (1) леммы 1, лемму 2 и рассуждения из доказательства леммы 4.5.6 из [3], получаем

Лемма 3. Пусть $R > \sqrt{3}/3$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h), \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $\int_{l_h} (q(\Delta)f)(x + u; y + v) ds = 0$ для любого вектора $(u, v) \in \text{Sh}(A(h), \mathbb{B}_R)$.

Используя рассуждения, подобные тем, что применяются при доказательстве леммы 4.1.1 из [3], получаем

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{P}_0^\infty(A, \mathbb{B}_R) = \{0\}$ для некоторого $R > \sqrt{3}/3$. Тогда $\mathcal{R}(A) \leq R$.

Лемма 5. Пусть $0 \leq a < b < d < R$, $f \in L(0; R)$, $f = 0$ в $(a; b) \cup (d; R)$, и при некоторых a_1, a_2 таких, что $a < a_1 < a_2 < b$, $\int_0^{\sqrt{d^2 - x^2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$ для всех $x \in (a_1, a_2)$. Тогда $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}_{a,R}$.

Доказательство. Сделаем в данном интеграле замену $t = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда для всех перечисленных условий на входящие в интеграл параметры получим для всех $x \in (a_1; a_2)$ равенство $\int_x^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt = 0$. Так как функция $f(t) = 0$ при $t \in (a; b)$, то для любого $x \in (a_1; a_2)$ верно $\int_b^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt = 0$.

Разложим в ряд Лорана $\frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}} = (1 - (x/t)^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \cdot (x/t)^{2j}$, $|t| > x$. Подставив разложение в предыдущее равенство, получаем

$$0 = \sum_{j=0}^\infty \left(\int_b^d \frac{f(t)}{t^{2j}} dt \right) \frac{(2j-1)!! x^{2j}}{(2j)!!}, \quad \forall x \in (a_1; a_2).$$

Таким образом, $\int_b^d \frac{f(t)}{t^{2j}} dt = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Сделаем в полученном интеграле замену $z = 1/t^2$. Получим $\int_{1/d^2}^{1/b^2} z^{j-1} \frac{f(1/\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz = 0$.

Так как система многочленов $\{1, z, z^2, \dots\}$ замкнута в пространстве $C(1/d^2; 1/b^2)$, то $f(1/\sqrt{z})/\sqrt{z} = 0$ в $(1/d^2; 1/b^2)$, откуда следует $f(t) = 0$ в $(b; d)$. Учитывая равенство нулю функции f в $(a; b) \cup (d; R)$, получаем требуемое утверждение леммы. $\square$

Учитывая, что $A(h) \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^2)$, используя лемму 4.1.3 из [3], получаем

Лемма 6. Пусть $R > \sqrt{3}/3$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.

3. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 1. Считаем $h \in (0; \sqrt{3}/2)$, $R > R(h)$, $\varepsilon \in (0, R - R(h))$ фиксированными числами. Необходимо доказать, что $\mathfrak{P}(A(h), \mathbb{B}_R) = \{0\}$. Используя стандартный метод сглаживания (см, например, §1.3.3 в [3]), видим, что достаточно доказать, что $\mathfrak{P}^\infty(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon}) = \{0\}$. Учитывая лемму 4, видим, что достаточно доказать равенство $\mathfrak{P}_0^\infty(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon}) = \{0\}$.

Рассмотрим произвольную $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$. Тогда по лемме 2 существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $F \stackrel{\text{онп}}{=} q(\Delta)f = 0$ в $\mathcal{U}(h, R - \varepsilon)$. Отметим, что при различных h множество $\mathcal{U}(h, R - \varepsilon)$ может быть кругом $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$ или объединением круга $\mathbb{B}_{a(h, R-\varepsilon)}$ и кольца $\mathbb{B}_{b(h, R-\varepsilon), R-\varepsilon}$ для некоторых $a(h, R-\varepsilon)$ и $b(h, R-\varepsilon)$. Во втором случае, применяя к функции $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$ леммы 3 и 5, получаем, что существует такой ненулевой многочлен $\tilde{q}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, что $\tilde{F} \stackrel{\text{онп}}{=} \tilde{q}(\Delta)F = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$.

Учитывая, что произведением многочленов является многочлен, применяя к функции f лемму 6, в которой многочленами являются q в первом и $\tilde{q} \cdot q$ – во втором случаях, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь $R < R(h)$. В этом случае найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\forall \lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$ выполняется включение $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \lambda A(h)$. Тогда определенная равенством (4) ненулевая функция $\Phi_\varepsilon(x; y) \in \mathfrak{P}^\infty(A(h), \mathbb{B}_R)$, что завершает доказательство теоремы 1. $\square$

4. Применения. Решение локального варианта проблемы Помпейю имеет применения в различных областях математики. Рассмотрим некоторые из них.

I. Теория приближений.

Теорема 2. Для фиксированных $h \in (0; \sqrt{3}/2)$, $p: 1 \leq p < \infty$, $R > R(h)$ любую функцию $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$ можно аппроксимировать с любой точностью в $L_p(\mathbb{B}_R)$ линейными комбинациями индикаторов множеств $\lambda A(h)$, $\lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$.

Доказательство. Пусть существует функция $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$, которую нельзя аппроксимировать с произвольной точностью линейными комбинациями индикаторов множеств $\lambda A(h)$, $\lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$. Тогда эта функция ортогональна всем таким индикаторам. То есть для любого $\lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$ верно равенство

$$\int_{\mathbb{B}_R} f(x, y) \cdot \chi_{\lambda A(h)}(x, y) dx dy = \int_{\lambda A(h)} f(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда, применяя теорему 1, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$, а такую функцию можно приблизить линейными комбинациями каких угодно функций, то есть предположение не верно, что доказывает теорему. $\square$

II. Комплексный анализ.

Следующий результат является теоремой типа Мореры.

Теорема 3. Пусть $f \in C(\mathbb{B}_R)$ и выполнено условие

$$\int_{\partial(\lambda A(h))} f(z) dz = 0 \text{ при всех } \lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R). \quad (5)$$

Тогда верны следующие утверждения:

- 1) если $R > R(h)$, то f голоморфна в $\mathbb{B}_R$;
- 2) если $\sqrt{3}/3 < R < R(h)$, то существуют неголоморфные, бесконечно дифференцируемые функции в $\mathbb{B}_R$ с условием (5).

Доказательство. Используя стандартный метод сглаживания, достаточно доказать аналитичность функции $f \in \mathfrak{P}^\infty(\partial A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$ для каждого $\varepsilon \in (0; R - R(h))$. Применяя формулу Грина, получаем $\int_{\partial(\lambda A(h))} f(z) dz = 2i \int_{\lambda A(h)} \frac{df}{d\bar{z}} dx dy = 0 \quad \forall \lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$. Это означает, что $\frac{df}{d\bar{z}} \in \mathfrak{P}^\infty(A(h), \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, откуда по теореме 1 следует $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, а значит и в $\mathbb{B}_R$. Тогда из условий Коши–Римана получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения, в качестве примера неголоморфной функции из класса $\mathfrak{P}^\infty(\partial A(h), \mathbb{B}_R)$ можно взять $\Phi_\varepsilon(\rho)$, заданную равенством (4) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. $\square$

Получим теперь одно из уточнений теоремы Дзядыка.

Теорема 4. Пусть $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ фиксировано, $R > R(h)$, действительнзначные функции $u, v \in C(\mathbb{B}_R)$. Тогда для того, чтобы одна из функций $u + iv$ или $u - iv$ была голоморфной в $\mathbb{B}_R$, необходимо и достаточно, чтобы части поверхностей графиков функций u, v и $\sqrt{u^2 + v^2}$, расположенные над каждым множеством $\lambda A(h)$, где $\lambda \in \text{Mot}(A(h); \mathbb{B}_R)$, имели одинаковую площадь.

Доказательство. Необходимость сразу следует из классической теоремы Дзядыка. Действительно, если площади равны над произвольным множеством K , то и над множествами вида λA при $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим функции $f_1(x, y) = (1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2)^{1/2}$, $f_2(x, y) = (1 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2)^{1/2}$ и $f_3(x, y) = (1 + (\frac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial x})^2 + (\frac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial y})^2)^{1/2}$. Тогда для любого $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ из условия теоремы следует $\int_{\lambda A(h)} f_1(x, y) dx dy = \int_{\lambda A(h)} f_2(x, y) dx dy = \int_{\lambda A(h)} f_3(x, y) dx dy$ или $\int_{\lambda A(h)} (f_j(x, y) - f_k(x, y)) dx dy = 0$. Отсюда по теореме 1 получаем $f_j - f_k = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Значит, для любого подмножества $K \subset \mathbb{B}_R$ верно равенство $\int_K f_1(x, y) dx dy = \int_K f_2(x, y) dx dy = \int_K f_3(x, y) dx dy$. Следовательно, выполняется условие классической теоремы Дзядыка, что влечет за собой утверждение теоремы. $\square$

III. Теория отображений, сохраняющих меру.

Здесь под $\text{meas } E$ понимается мера Лебега множества E .

Теорема 5. Пусть $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ фиксировано, $R > R(h)$ и f – C^1 -диффеоморфизм $\mathbb{B}_R$ на область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда, если $\forall \lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$, верно равенство $\text{meas } f(\lambda A(h)) = \text{meas } \lambda A(h)$, то $\text{meas } f(E) = \text{meas } E$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$.

Доказательство. Пусть J_f – якобиан отображения f . По условию $\int_{\lambda A(h)} dx dy = \int_{f(\lambda A(h))} dx dy = \int_{\lambda A(h)} |J_f| dx dy$ для всех $\lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$. Отсюда получаем, что $\int_{\lambda A(h)} (|J_f| - 1) dx = 0 \quad \forall \lambda \in \text{Mot}(A(h), \mathbb{B}_R)$. По теореме 1, $|J_f| = 1$ в $\mathbb{B}_R$, откуда $\int_E dx dy = \int_E |J_f| dx dy = \int_{f(E)} dx dy$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$, что и требовалось. $\square$

1. Berenstein C.A. Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
2. Berenstein C.A. A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer, 2009. – 671 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Birkhäuser, 2013. – 592 p.
6. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Экстремальные задачи интегральной геометрии // Математика сегодня, – № 1, вып. 12. – Киев, 2001. – С. 51–79.
7. Zalzman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185–194.
8. Zalzman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math., 2001. – № 278. – P. 69–74.
9. Волчков В.В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
10. Машаров П.А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело // Вісник Дніпропетровського університету. Математика, вип. 6. – 2001. – С. 72–81.
11. Волчков В.В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.
12. Машаров П.А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полусфер // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т.23. – С. 163–171.
13. Машаров П.А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29
14. Елец Л.В., Машаров П.А. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // УМЖ. – Т. 61. – 2009. – С. 61–72.

N. S. Ivanisenko, P. A. Masharov

A local version of the Pompeiu problem for a nonconvex quadrangle.

The exact values for the smallest radius of the ball in which the given sets are the Pompeiu sets are obtained in the paper. The considered sets are nonconvex quadrangles of certain type

Keywords: Pompeiu set, extremal version of the Pompeiu problem, Pompeiu radius, nonconvex quadrangles.

Донецкий национальный ун-т
pavelmasharov@gmail.com

Получено 10.04.14

УДК 531.38

©2014. Е. А. Игнатова

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе рассмотрен один из случаев интегрируемости уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона, характеризующийся двумя линейными инвариантными соотношениями. Для случая, когда гирационный эллипсоид не является сферой, получены формулы, позволяющие установить зависимость вспомогательной переменной от времени.

Ключевые слова: эффект Барнетта–Лондона, гириостат, метод инвариантных соотношений.

1. Введение. Уравнения движения сверхпроводящего твердого тела и нейтрального ферромагнетика в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [1, 2] имеют шестой порядок и два первых интеграла. Поэтому в отличие от классических задач для интегрирования уравнений движения тела в магнитном поле необходимо найти два дополнительных интеграла. В [3] указаны условия существования линейного первого интеграла, в [4] получен первый интеграл, в [5] рассмотрена связь между уравнениями движения тела в жидкости и уравнениями Кирхгофа–Пуассона. Наиболее эффективным методом построения частных решений уравнений движения тела и гиростата в магнитном поле является метод инвариантных соотношений [6]. С его помощью изучены многие классы решений: в [7] получено обобщение инвариантного соотношения Гесса; в [8] указаны полиномиальные решения; в [9–12] исследованы свойства двух линейных инвариантных соотношений.

Данная работа посвящена интегрированию уравнений движения гиростата в магнитном поле в случае двух инвариантных соотношений при условии, что гирационный эллипсоид не является сферой.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение нейтрального ферромагнетика в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Запишем уравнения движения гиростата с учетом того, что на него действуют и центральные ньютоновские силы

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{x} + \bar{\lambda}) \times a\bar{x} + Ba\bar{x} \times \bar{\nu} + \bar{s} \times \bar{\nu} + \bar{\nu} \times C\bar{\nu}, \quad (1)$$

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times a\bar{x}. \quad (2)$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла:

$$(x_1 + \lambda_1)\nu_1 + (x_2 + \lambda_2)\nu_2 + (x_3 + \lambda_3)\nu_3 = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

В формулах (1)–(3) введены обычные обозначения: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата; $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей и магнитного поля; $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $a = (a_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – гириационный тензор; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Точка над переменными обозначает относительную производную по времени t .

Рассмотрим вопрос об условиях существования у системы (1)–(2) двух линейных инвариантных соотношений:

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \quad x_2 = c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3. \quad (4)$$

Согласно методу инвариантных соотношений [6], продифференцируем левую и правую части соотношений (4) в силу уравнений (1)–(2):

$$\begin{aligned} & a_{23}\dot{x}_3^2 + x_3[b_1(a_{33}\dot{\nu}_2 - a_{23}\dot{\nu}_3) + b_2(a_{13}\dot{\nu}_3 - a_{33}\dot{\nu}_1) + b_3(a_{23}\dot{\nu}_1 - a_{13}\dot{\nu}_2) - a_{33}(c_0 + \lambda_2 + \\ & + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3) + (\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) + a_{23}\lambda_3 - \nu_3 d_{23} + \nu_2 d_{33}] + \\ & + b_1[\nu_2(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) - \nu_3(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3)] + \\ & + b_2[\nu_3(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) - \nu_1(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3)] + \\ & + b_3[\nu_1(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) - \nu_2(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3)] - \\ & - (c_0 + \lambda_2 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) + \lambda_3(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \\ & + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) - \nu_3[d_{21}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{22}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] + \\ & + \nu_2[d_{31}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{32}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] - s_2\nu_3 + s_3\nu_2 - \\ & - \nu_2(C_{13}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3) + \nu_3(C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & -a_{13}\dot{x}_3^2 + x_3[c_1(a_{33}\dot{\nu}_2 - a_{23}\dot{\nu}_3) + c_2(a_{13}\dot{\nu}_3 - a_{33}\dot{\nu}_1) + c_3(a_{23}\dot{\nu}_1 - a_{13}\dot{\nu}_2) - \\ & - (\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) - \lambda_3 a_{13} + a_{33}(b_0 + \lambda_1 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) - d_{33}\nu_1 + \\ & + d_{13}\nu_3] + c_1[\nu_2(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) - \nu_3(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3)] + \\ & + c_2[\nu_3(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) - \nu_1(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3)] + \\ & + c_3[\nu_1(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) - \nu_2(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3)] - \\ & - \lambda_3(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) + (b_0 + \lambda_1 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3)(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \\ & + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) - \nu_1[d_{31}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{32}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] + \\ & + \nu_3[d_{11}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{12}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] - s_3\nu_1 + s_1\nu_3 - \\ & - \nu_3(C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{13}\nu_3) + \nu_1(C_{13}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $(d_{ij}) = Ba$.

Уравнения (5), (6) представляют собой систему двух функциональных равенств $F_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3, x_3) = 0$ ($i = 1, 2$). Их рассмотрение зависит от подхода, который применяется в процессе применения метода инвариантных соотношений.

3. Условия существования инвариантных соотношений (4). Потребуем, чтобы уравнения (5), (6) выполнялись тождественно для любых значений переменной x_3 .

На основе метода инвариантных соотношений [6] условия существования инвариантных соотношений (4) у уравнений (1), (2) с интегралами (3) записаны фор-

мулами (6)*, (9)* (Знак * над номером формулы обозначает нумерацию формул из работы [12]).

Условие (6)* означает, что третья координатная ось подвижной системы координат является главной. Принимая во внимание, что инвариантные соотношения (4) заданы для первой и второй проекций вектора момента количества движения на подвижные оси, а третья ось является главной, без ограничения общности задачи в качестве подвижной системы координат может быть принята главная система координат, в которой $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Поэтому в дальнейшем для простоты записи формул примем обозначение $a_{ii} = a_i$ ($i = \overline{1, 3}$).

Анализ системы уравнений (9)* позволяет установить одно общее свойство. Для того, чтобы система уравнений $a_3 b_2 + c_1(a_3 - a_2) = 0$, $a_3 c_1 + b_2(a_3 - a_1) = 0$ имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы выполнялось равенство $a_1 a_3 + a_2 a_3 - a_1 a_2 = 0$. Введем главные моменты инерции гиростата $A_i = \frac{1}{a_i}$. Тогда из указанного равенства вытекает: $A_1 + A_2 - A_3 = 0$, что невозможно. Поэтому в системе соотношений (4) $b_2 = 0$, $c_1 = 0$. То есть

$$x_1 = b_0 + b_1 \nu_1 + b_3 \nu_3, \quad x_2 = c_0 + c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3. \quad (7)$$

Из системы (9)* вытекает

$$\begin{aligned} b_0 \lambda_3 = 0, \quad c_0 \lambda_3 = 0, \quad b_0 c_3 = 0, \quad c_0 b_3 = 0, \quad a_3 \lambda_2 + c_0(a_3 - a_2) = 0, \\ -a_3 \lambda_1 + b_0(a_1 - a_3) = 0, \quad c_3(a_1 b_1 - a_2 c_2) = 0, \quad b_3(a_1 b_1 - a_2 c_2) = 0, \\ a_1 b_1 - a_2 c_2 + 2a_3(c_2 - b_1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

4. Случай $\lambda_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, $a_3 = 2a_1$. Если в системе (8) положить $b_3 = 0$, $c_3 = 0$, а в (9)* $B_{12} \neq 0$, то из уравнения (1) для x_3 вытекает, что $x_3 = \text{const}$. Поэтому рассмотрим случай $b_3 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. Из (9)* следует

$$b_0 = c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad a_2 = a_1, \quad c_2 = b_1. \quad (9)$$

В силу (9) соотношения (7) упрощаются

$$x_1 = b_1 \nu_1 + b_3 \nu_3, \quad x_2 = c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3. \quad (10)$$

Учтем в системе (9)* условия (9), при этом будем считать, что $a_3 = 2a_1$ (случай сферического гиростата рассмотрен в [12]). Тогда из (9)* имеем

$$\begin{aligned} a_1 = a_2, \quad b_0 = b_2 = c_0 = c_1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad b_1 = -2B_{33}, \quad b_3 = -2B_{13}, \quad c_2 = b_1, \\ c_3 = -2B_{23}, \quad s_1 = -2a_1 \lambda_3 B_{13}, \quad s_2 = -2a_1 \lambda_3 B_{23}, \quad s_3 = 2a_1 \lambda_3 B_{33}, \\ B_{13}(B_{11} - 3B_{33}) + B_{12}B_{23} = 0, \quad B_{23}(B_{22} - 3B_{33}) + B_{13}B_{12} = 0, \\ C_{12} = -2a_1(B_{12}B_{33} + 2B_{13}B_{23}), \quad C_{13} = -2a_1B_{13}B_{33}, \quad C_{23} = -2a_1B_{23}B_{33}, \\ C_{11} = C_{33} + 2a_1 \left[2B_{33}^2 + B_{13}^2 - B_{11}B_{33} + 3B_{23}^2 \right], \\ C_{22} = C_{33} + 2a_1 \left[2B_{33}^2 + B_{23}^2 - B_{22}B_{33} + 3B_{13}^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем уравнения (1)–(2) с учетом условий (10), (11):

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_1 &= a_1(2\nu_2 x_3 - (b_1\nu_2 + c_3\nu_3)\nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= a_1(-2\nu_1 x_3 + (b_1\nu_1 + b_3\nu_3)\nu_3), \\ \dot{\nu}_3 &= a_1\nu_3(c_3\nu_1 - b_3\nu_2), \\ \dot{x}_3 &= a_1(b_3\nu_2 - c_3\nu_1)[-x_3 + (b_3\nu_1 + c_3\nu_2 - b_1\nu_3 + \lambda_3)].\end{aligned}\tag{12}$$

Из интеграла моментов (3) вытекает

$$(x_3 + \lambda_3 + b_3\nu_1 + c_3\nu_2 - b_1\nu_3) \cdot \nu_3 = l_0,\tag{13}$$

где $l_0 = k - b_1$ (произвольная постоянная).

Используя последние два уравнения системы (12) и (13), получим

$$\frac{dx_3}{d\nu_3} = \frac{1}{\nu_3} \left(2x_3 - \frac{l_0}{\nu_3} \right).\tag{14}$$

Выпишем общее решение уравнения (14)

$$x_3 = \frac{l_0}{3\nu_3} + C\nu_3^2,\tag{15}$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, функция (15) зависит от двух произвольных постоянных l_0 и C .

Выполним интегрирование первых трех уравнений (12). Введем вместо ν_1, ν_2, ν_3 новые переменные

$$\nu_1 = \sin \theta \cos \xi, \quad \nu_2 = \sin \theta \sin \xi, \quad \nu_3 = \cos \theta\tag{16}$$

и вместо параметров b_3, c_3 параметры α_0, μ_0 : $b_3 = \mu_0 \cos \alpha_0$, $c_3 = \mu_0 \sin \alpha_0$, $\mu_0 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2}$. Тогда из соотношения (13) получим

$$\cos(\xi - \alpha_0) = \frac{q(\theta)}{\mu_0 \sin \theta \cos \theta},\tag{17}$$

где $q(\theta) = \frac{2l_0}{3} - \lambda_3 \cos \theta + b_1 \cos^2 \theta - C \cos^3 \theta$.

Третье уравнение системы (12) в силу (16) можно преобразовать к виду

$$\dot{\theta} = \mu_0 a_1 \cos \theta \sin(\alpha_0 - \xi).\tag{18}$$

Исключим из уравнений (17), (18) переменную $(\alpha_0 - \xi)$

$$\dot{\theta} = \frac{a_1}{\sin \theta} \left\{ \mu_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - q^2(\theta) \right\}^{\frac{1}{2}}.\tag{19}$$

Из уравнения (19) обращением соответствующего интеграла можно найти $\theta = \theta(t)$. Тогда из (17) определим $\xi(t)$

$$\xi(t) = \alpha_0 + \arccos \frac{q(\theta)}{\mu_0 \sin \theta(t) \cos \theta(t)}.\tag{20}$$

Соотношения (16) дают возможность найти $\nu_i = \nu_i(t)$, а соотношения (10), (15) – функции $x_i = x_i(t)$.

Для нахождения функции $\theta = \theta(t)$ преобразуем формулу (19)

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{\mu_0^2 (1 - \nu_3^2) \nu_3^2 - \varphi^2(\nu_3)}} = -a_1(t - t_0), \quad (21)$$

где

$$\varphi(\nu_3) = L_0 - \lambda_3 \nu_3 + b_1 \nu_3^2 - C \nu_3^3. \quad (22)$$

Здесь $L_0 = \frac{2l_0}{3}$ – новая произвольная постоянная.

Действительности функции $\nu_3(t)$, полученной из (21), можно добиться, используя неравенство $|\nu_3| \leq 1$ и выбрав в выражении (22) параметры L_0 , λ_3 , b_1 , C достаточно малыми. Для параметров L_0 , C это можно сделать в силу их произвольности, а параметры λ_3 , b_1 можно выбрать малыми, приняв на основании выражений из (11) малыми параметры s_3 и B_{33} . После получения $\nu_3(t)$ из (21), из (20) определим

$$\xi(t) = \alpha_0 + \arccos \frac{\varphi(\nu_3(t))}{\mu_0 \nu_3(t) \sqrt{1 - \nu_3^2(t)}}. \quad (23)$$

Из формул (16) найдем

$$\nu_1(t) = \sqrt{1 - \nu_3^2(t)} \cos \xi(t), \quad \nu_2(t) = \sqrt{1 - \nu_3^2(t)} \sin \xi(t), \quad (24)$$

где $\xi(t)$ определяется формулой (23).

Из формулы (15) следует

$$x_3(t) = \frac{1}{\nu_3(t)} [L_0 + C \nu_3^3(t)]. \quad (25)$$

Тогда на основании (10), (24) функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ находятся из равенств

$$x_1(t) = b_1 \sqrt{1 - \nu_3^2(t)} \cos \xi(t) + b_3 \nu_3(t), \quad x_2(t) = c_2 \sqrt{1 - \nu_3^2(t)} \sin \xi(t) + c_3 \nu_3(t). \quad (26)$$

Соотношения (21), (24)–(26) задают решение уравнений (1), (2). Подставим x_3 из (15) в уравнения (12) и интеграл (13)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \frac{a_1}{\nu_3} [2\nu_2 (L_0 + C \nu_3^3) - \nu_3^2 (b_1 \nu_2 + c_3 \nu_3)], \\ \dot{\nu}_2 &= -\frac{a_1}{\nu_3} [2\nu_1 (L_0 + C \nu_3^3) - \nu_3^2 (b_1 \nu_1 + b_3 \nu_3)], \\ \dot{\nu}_3 &= a_1 \nu_3 (c_3 \nu_1 - b_3 \nu_2), \end{aligned} \quad (27)$$

$$(C \nu_3^2 - b_1 \nu_3 + \lambda_3 + b_3 \nu_1 + c_3 \nu_2) \cdot \nu_3 = L_0. \quad (28)$$

Таким образом, система (27) допускает интеграл (28).

5. Случай $L_0 = 0$. Условия существования решения (21), (24)–(26) записаны формулами (11). Рассмотрим случай $L_0 = 0$, то есть

$$k = b_1. \quad (29)$$

Тогда функция (22) такова:

$$\varphi(\nu_3) = -\lambda_3 \nu_3 + b_1 \nu_3^2 - C \nu_3^3. \quad (30)$$

Запишем формулу (21) с учетом выражения (30)

$$\int \frac{d\nu_3}{\sqrt{D_1}} = a_1(t - t_0), \quad (31)$$

где

$$D_1 = \mu_0^2 \nu_3^2 (1 - \nu_3^2) - [-C \nu_3^3 + b_1 \nu_3^2 - \lambda_3 \nu_3]^2. \quad (32)$$

6. Случай $C = \frac{-\lambda_3(b_1^2 + \mu_0^2)}{\mu_0^2}$, $\lambda_3^2 = \frac{\mu_0^4}{b_1^2 + \mu_0^2}$. Пусть

$$C = \frac{-\lambda_3(b_1^2 + \mu_0^2)}{\mu_0^2}, \quad \lambda_3^2 = \frac{\mu_0^4}{b_1^2 + \mu_0^2}, \quad (33)$$

тогда D_1 из (32) примет вид

$$D_1 = (b_1^2 + \mu_0^2) \nu_3^2 \left(\nu_3 + \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + \mu_0^2}} \right)^2 \left(\frac{\mu_0^2}{b_1^2 + \mu_0^2} - \nu_3^2 \right). \quad (34)$$

Для действительности решения, необходимо потребовать, чтобы выражение из (34) было положительным, то есть выполнялось условие:

$$\frac{\mu_0^2}{b_1^2 + \mu_0^2} - \nu_3^2 > 0. \quad (35)$$

Неравенство (35) выполняется, если

$$-a < \nu_3 < a, \quad (36)$$

где $a = \sqrt{1 - \frac{B_{33}^2}{B_{33}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2}}$.

Отметим, что интервал в (36) содержится в интервале $(-1; 1)$.

Интеграл (31) для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$\int \frac{d\nu_3}{\nu_3 \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2 \nu_3^2}} - \int \frac{p_1 d\nu_3}{(b_1 + p_1 \nu_3) \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2 \nu_3^2}} = p_2(t - t_0), \quad (37)$$

где $p_1 = \sqrt{b_1^2 + \mu_0^2}$, $p_2 = a_1 b_1 / p_1$.

В зависимости от параметров задачи, вычисление интеграла (37) разбивается на следующие случаи.

6.1. Случай $\mu_0^2 - b_1^2 > 0$. В данном случае в силу принятых обозначений имеем неравенства

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 > 0, \quad (38)$$

а также условия (11), (33), (29).

Тогда из интеграла (37) получим формулу, которая устанавливает зависимость $\nu_3(t)$

$$\left(\frac{p_1 \nu_3}{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2 \nu_3^2}} \right)^{\frac{1}{\mu_0}} \left(\frac{p_3 + p_4 \nu_3 + p_5 \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2 \nu_3^2}}{b_1 p_1 + p_1^2 \nu_3} \right)^{\frac{2}{p_4}} = e^{p_2(t-t_0)}, \quad (39)$$

где $p_3 = 2\sqrt{\mu_0^4 - b_1^4}$, $p_4 = 2b_1(b_1 + p_1)$, $p_5 = 2\sqrt{\mu_0^2 - b_1^2}$.

Зависимость остальных переменных задачи (1), (2) от времени находится подстановкой функции $\nu_3 = \nu_3(t)$ из (39) в соотношения (24)–(26). Причем $\varphi(\nu_3)$ в соотношении (23) имеет вид (30). Запишем полученный результат

$$\nu_1 = \frac{1}{\mu_0^2} [b_3 R_6(t) - c_3 R_7(t)], \quad \nu_2 = \frac{1}{\mu_0^2} [c_3 R_6(t) + b_3 R_7(t)], \quad (40)$$

$$x_1 = \frac{1}{\mu_0^2} (b_3 R_8(t) - b_1 c_3 R_7(t)), \quad x_2 = \frac{1}{\mu_0^2} (c_3 R_8(t) - b_1 b_3 R_7(t)), \quad x_3 = C \nu_3^2(t), \quad (41)$$

где $R_6(t) = b_1 \nu_3(t) - \lambda_3 - C \nu_3^2(t)$, $R_7(t) = \frac{1}{p_1} (p_1 \nu_3(t) + b_1) \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2 \nu_3^2(t)}$, $R_8(t) = b_1 R_6(t) + \mu_0^2 \nu_3(t)$.

Таким образом, решение (39)–(41) существует при условиях (11), (29), (33), (38). При этом ν_3 удовлетворяет неравенству (36). Отметим, что выполнения условия (38) можно добиться следующим образом: задаем конкретные значения для s_1 и s_2 , затем s_3 выбираем с учетом неравенства (38), а остальные параметры задачи выражаем через них по соотношениям (11). Произвольной постоянной остается только t_0 из (39).

6.2. Случай $\mu_0^2 - b_1^2 < 0$. Из интеграла (37) для рассматриваемого случая получим

$$\frac{1}{\mu_0} \ln \left| \frac{p_1 \nu_3}{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2 \nu_3^2}} \right| + \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - \mu_0^2}} \arcsin \frac{p_7 \nu_3 - \mu_0}{p_1 \nu_3^2 + b_1} = p_2(t - t_0), \quad (42)$$

где $p_7 = -\frac{b_1 p_1}{\mu_0}$.

Находя зависимость $\nu_3 = \nu_3(t)$ из формулы (42), остальные переменные задачи (1), (2) определяем из соотношений (40), (41). При этом должны выполняться условия на параметры (11), (29), (33), а также неравенства (36) и

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 < 0,$$

в котором значения s_1 и s_2 задаем.

6.3. Случай $b_1 = \mu_0$. Для нахождения зависимости $\nu_3 = \nu_3(t)$ вернемся к интегралу (31), в котором значение D_1 для рассматриваемого случая будет таковым:

$$D_1 = 2b_1^2\nu_3^2 \left(\nu_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \nu_3^2 \right). \quad (43)$$

Учитывая соотношение (43), интеграл (31) может быть записан в следующем виде:

$$\int \frac{d\nu_3}{\nu_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \nu_3 \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu_3 \right)^{\frac{1}{2}}} = a_1 b_1 \sqrt{2} (t - t_0).$$

Отсюда получим, что

$$\ln \left| \frac{\sqrt{2}\nu_3}{1 + \sqrt{1 - 2\nu_3^2}} \right| + \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}\nu_3}{1 + \sqrt{2}\nu_3}} = \frac{a_1 b_1}{\sqrt{2}} (t - t_0).$$

Остальные переменные задачи выражаются по формулам:

$$\nu_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}b_1} [b_3 R_9(t) - c_3 R_{10}(t)], \quad \nu_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}b_1} [c_3 R_9(t) + b_3 R_{10}(t)],$$

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_3 R_{11}(t) - c_3 R_{10}(t)], \quad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c_3 R_{11}(t) + b_3 R_{10}(t)], \quad x_3 = -2\lambda_3 \nu_3^2(t),$$

$$\text{где } R_9(t) = 2\nu_3^2(t) + \sqrt{2}\nu_3(t) - 1, \quad R_{10}(t) = 2 \left(\nu_3(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{1}{2} - \nu_3^2(t)},$$

$$R_{11}(t) = R_9(t) + \sqrt{2}\nu_3(t).$$

Полученное решение существует при условиях (11), (29), (33), а также при $b_1 = \mu_0$. Отметим, что равенства (33) при этих условиях на параметры таковы:

$$\lambda_3 = -\sqrt{2}B_{33}, \quad C = 2\sqrt{2}B_{33},$$

$$\text{где } \nu_3 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

1. Егармин И.Е. О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и космические исследования. – М.: Физ.-техн. ин-т, 1983. – С. 95–96.
2. Киттель И. Введение в физику твердого тела. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
3. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
4. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
5. Веселова Л.Е. О двух задачах динамики твердого тела // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. – 1986. – № 5. – С. 90–91.
6. Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 555 с.
7. Горр Г.В. О линейном инвариантном соотношении в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 4. – С. 566–569.

8. Горр Г.В., Суворова Н.Г. Об одном классе полиномиальных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 5. – С. 781–787.
9. Скрыпник С.В. О двух линейных инвариантных соотношениях в задаче о движении тела в магнитном поле // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, вып. 2. – С. 98–104.
10. Ткаченко Н.В. Некоторые классы прецессионных движений твердого тела в магнитном поле // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 26–11.
11. Скрыпник С.В. Один класс двух линейных инвариантных соотношений в задаче о движении тела в магнитном поле // Труды ИПММ НАНУ. – 2002. – Т. 7. – С. 175–180.
12. Игнатова Е.А. Об одном решении уравнений движения сферического гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 215–221.

К. Ignatova

Investigation of two linear invariant relations in the motion problem of the body in magnetic field.

One case of the integrability of the motion equations for a gyrostat with a fixed point in a magnetic field, taking into account the Barnett–London effect, was considered in the paper. These equations are characterized by two linear invariant relations. The formulas establishing a dependence of auxiliary variable on time are obtained in the case when the gyration ellipsoid is not a sphere.

Keywords: *Barnett–London effect, gyrostat, method of invariant relations.*

Донецкий нац. ун-т экономики и торговли
им. М. Туган-Барановского
katerina-ignat@yandex.ru

Получено 19.05.14

УДК 531.38

©2014. А. М. Ковалев, Г. В. Горр, Д. А. Данилюк

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Для прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой определены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона. На основе этих зависимостей найдены инвариантные соотношения, содержащие данные кинематические параметры.

Ключевые слова: прецессионные движения, параметры Родрига–Гамильтона, углы Эйлера.

Введение. Параметры Родрига–Гамильтона широко используются в аналитической механике. Они тесно связаны с углами Эйлера и вектором конечного поворота [1, 2]. Параметры Родрига–Гамильтона применяются не только в гамильтоновой механике [3, 4], но и в изучении колебаний тяжелого твердого тела [5, 6]. В [5, 6] показано, что применение специальной системы координат особенно эффективно в задачах об исследовании колебательных движений тяжелого твердого тела в данных кинематических параметрах.

Прецессионное движение в динамике твердого тела представляет собой один из наиболее наглядных и распространенных классов движений [7, 8]. Они исследованы только при помощи углов Эйлера. Поэтому представляет большой интерес применение параметров Родрига–Гамильтона в задаче об изучении свойств прецессий. В данной статье определены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона для случаев регулярных прецессий, полурегулярных прецессий первого и второго типов и некоторых классов прецессий общего вида.

1. Постановка задачи. Известно [1, 2], что любой поворот твердого тела, имеющего неподвижную точку, из начального положения в конечное осуществляется как плоский поворот на угол $\varkappa$ вокруг вектора конечного поворота $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{a}_* \operatorname{tg} \frac{\varkappa}{2}. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы системы координат, неизменно связанной с телом. Обозначим через α', β', γ' – углы, которые образует вектор $\mathbf{a}_*$ с векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Тогда имеем следующие значения параметров Родрига–Гамильтона [1, 2]:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varkappa}{2}, \quad \lambda_1 = \cos \alpha' \sin \frac{\varkappa}{2}, \quad \lambda_2 = \cos \beta' \sin \frac{\varkappa}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \gamma' \sin \frac{\varkappa}{2}. \quad (2)$$

Параметры (2) применяются в кинематических задачах ориентации различного рода объектов, управления движением, инерциальной навигации и т.п. Эти параметры

можно выразить через углы Эйлера:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор угловой скорости тела с неподвижной точкой, $\boldsymbol{\nu}(t)$ – вектор, указывающий направление силы тяжести. Как правило, уравнения движения тела с неподвижной точкой можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}.\quad (4)$$

В подвижном базисе векторы $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\nu}(t)$ таковы:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\nu} = \nu_1 \mathbf{i}_1 + \nu_2 \mathbf{i}_2 + \nu_3 \mathbf{i}_3,\quad (5)$$

где $\omega_i = \omega_i(t)$, $\nu_i = \nu_i(t)$ выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, & \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \\ \nu_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \nu_2 &= \sin \theta \cos \varphi, & \nu_3 &= \cos \theta.\end{aligned}\quad (6)$$

В дальнейшем будут использоваться формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3}.\quad (7)$$

Очевидно, что параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют условию

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.\quad (8)$$

После подстановки выражений (6) в уравнения (4) получаем уравнения на переменные $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$. Если удастся проинтегрировать полученные уравнения, то есть найти указанные функции, то подставив их в равенства (3), устанавливаем зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени.

Отметим связь величин ν_i, ω_i и параметров $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\nu_1 = 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2,\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \dot{\lambda}_0 + \lambda_3 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_3), \\ \omega_2 &= 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_0 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_1), \\ \omega_3 &= 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_0 + \lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \dot{\lambda}_2).\end{aligned}\quad (10)$$

Формулы (9), (10) используются в том случае, когда известны зависимости параметров Родрига–Гамильтона от времени.

Для получения замкнутой системы уравнений относительно переменных ω_i, λ_j необходимо подставить выражения (9) в уравнения (4). Тогда система уравнений (4) примет вид (первое уравнение представим в векторном виде)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \Lambda_i(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)),\quad (11)$$

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3), & 2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, & 2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (12)$$

В (11) вектор-функция $\mathbf{F}$ зависит от координат ω_i и параметров λ_i . Уравнение (11) в настоящей работе конкретизировать не будем, поскольку целью статьи является исследование кинематических свойств движения тела, имеющего неподвижную точку. С различными динамическими моделями твердого тела или гиростата можно ознакомиться в публикациях [3, 7, 8].

В данной статье рассмотрены прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой – движения, при которых постоянен угол между двумя осями l_1 и l_2 , содержащими неподвижную точку O и неизменными соответственно в теле (ось l_1) и в пространстве (ось l_2). Обозначая этот угол через θ_0 [7], из формул (3) имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношений (13) вытекают два инвариантных соотношения для прецессий:

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2 \frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}. \quad (14)$$

Свойство (14) характерно для всех классов прецессионных движений [7, 9].

2. Маятниковые движения. Эти движения можно отнести к частному типу прецессий и охарактеризовать условиями:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = 0. \quad (15)$$

Из (13) при наличии (15) следует

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (16)$$

На основании соотношений (16) имеем два линейных инвариантных соотношения:

$$\lambda_0 - \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \quad (17)$$

Известно [9], что зависимость $\varphi(t)$ для маятниковых движений определяется уравнением

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin \varphi}, \quad (18)$$

где β_1 и β_2 – постоянные.

Анализ решения уравнения (18) приводит к трем вариантам зависимости $\varphi(t)$. Здесь будем для определенности предполагать

$$\beta_1 > -\beta_2 > 0. \quad (19)$$

Тогда в силу (19) из уравнения (18) получим

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\operatorname{am}\mu_1 t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t), \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t), \quad \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}, \quad k_1 = \sqrt{-\frac{\beta_2}{2\mu_1^2}},\end{aligned}\quad (20)$$

где $\operatorname{am}\mu_1 t, \operatorname{sn}\mu_1 t, \operatorname{cn}\mu_1 t$ – эллиптические функции Якоби, k_1 – их модуль.

В силу соотношений (16), (20) получим

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{2}(\operatorname{cn}\mu_1 t + \operatorname{sn}\mu_1 t), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{cn}\mu_1 t + \operatorname{sn}\mu_1 t), \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t).\end{aligned}\quad (21)$$

Для маятниковых движений в силу (16), (17), (21) только один параметр из λ_i является независимым.

3. Регулярные прецессии. Они характеризуются равенствами [9]:

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = nt, \quad \psi = mt, \quad (22)$$

где t – время. Учитывая в соотношениях (13) равенства (22), получим

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{(n+m)t}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{(n-m)t}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{(m-n)t}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{(n+m)t}{2}.\end{aligned}\quad (23)$$

В случае (22) имеем два инвариантных соотношения (14) и соотношение

$$(m-n) \arccos \frac{\lambda_0}{\cos \frac{\theta_0}{2}} - (m+n) \arccos \frac{\lambda_1}{\sin \frac{\theta_0}{2}} = 0,$$

которое следует из равенств (23) при исключении времени t .

Рассмотрим частный случай регулярных прецессий – прецессионно-изоконические движения. Движение гиростата называется изоконическим, если подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной плоскости к аксоидам. Для регулярных прецессионно-изоконических движений выполняется условие [9]: $m = n$. Тогда из (23) следует

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta_0}{2} \cos nt, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\theta_0}{2} \sin nt. \quad (24)$$

Учитывая формулы (14), (24), запишем все инвариантные соотношения (ИС) для рассматриваемого класса прецессий:

$$\lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2 \frac{\theta_0}{2}. \quad (25)$$

4. Полурегулярные прецессии первого типа. Они определяются условием [9]:

$$\psi = mt. \quad (26)$$

Как показано в [7, 9] имеют место три варианта зависимости $\varphi = \varphi(t)$. В первом варианте $\varphi(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{\varphi} = m(b_0 + c_0 \sin \varphi). \quad (27)$$

Если предполагать $b_0 > c_0 > 0$, то из (27) получим

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \frac{b_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2} - c_0 \operatorname{tg} \tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{m \sqrt{b_0^2 - c_0^2}}{2} t. \quad (28)$$

В силу (26), (28) для параметров Родрига–Гамильтона имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \left(\cos \frac{mt}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{mt}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right), \\ \lambda_1 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \left(\cos \frac{mt}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{mt}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right), \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \left(\sin \frac{mt}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{mt}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right), \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \left(\sin \frac{mt}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{mt}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{b_0^2 - c_0^2} - c_0 \operatorname{tg} \tau}. \quad (30)$$

Наиболее интересным является второй вариант – полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа [9]. Для них выполняется условие [9]

$$b_0^2 = 1 + c_0^2. \quad (31)$$

В случае (31) формула (28) упрощается. Запишем ее в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b_0 \operatorname{tg} \tau}{1 - c_0 \operatorname{tg} \tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{mt}{2}. \quad (32)$$

Для нахождения зависимостей параметров Родрига–Гамильтона от времени можно воспользоваться формулами (29), (30), в которых необходимо учесть соотношения (31), (32). Интерес представляет вид ИС для прецессионно-изоконических движений первого типа. Для его получения воспользуемся формулами (7), (26), (32). Тогда найдем зависимости:

$$\frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3} = \frac{b_0 (\sin mt + c_0 \cos mt - c_0)}{\cos mt - c_0 \sin mt}, \quad \frac{\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sin mt}{\cos mt}. \quad (33)$$

Исключим из соотношений (33) время t

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}b_0c_0(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\sin\theta_0 + (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3) - \\ & - c_0(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) - b_0(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)[(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) + \\ & + c_0(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3)] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, для данного класса прецессии имеют место два ИС второго порядка (14) и одно ИС (34) четвертого порядка.

В третьем случае прецессия (26) характеризуется зависимостью (18), неравенством (19) и соотношениями (20). Тогда параметры Родрига–Гамильтона таковы:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \left[\cos \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) - \sin \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t) \right], \\ \lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} \left[\cos \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) + \sin \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t) \right], \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} \left[\sin \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) - \cos \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t) \right], \\ \lambda_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \left[\sin \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t + \operatorname{cn}\mu_1 t) + \cos \frac{mt}{2} (\operatorname{sn}\mu_1 t - \operatorname{cn}\mu_1 t) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Структуру ИС в рассматриваемом варианте находим, используя формулы (7), (20), (26):

$$\frac{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)}{(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)} = \frac{2\operatorname{sn}^2\mu_1 g(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - 1}{\operatorname{sn}\mu_1 g(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\operatorname{cn}\mu_1 g(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}, \quad (36)$$

где

$$g(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}.$$

Итак, имеем три ИС: (14) и (36).

5. Полурегулярные прецессии второго типа. Эти движения характеризуются равенством $\dot{\varphi} = n$, где n – постоянная. Выбирая начальное значение φ_0 нулевым, имеем

$$\varphi = nt. \quad (37)$$

Рассмотрим первый класс прецессии второго типа – прецессионно-изоконические движения [9]. Для него скорость прецессии определяется уравнением

$$\dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin nt}, \quad \text{где} \quad b_0^2 = 1 + c_0^2. \quad (38)$$

Примем начальное значение $\psi_0 = 0$. Тогда из (38) получим

$$\psi(t) = 2\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{nt}{2}}{b_0 + c_0 \operatorname{tg} \frac{nt}{2}}. \quad (39)$$

Из (39) следуют соотношения:

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sqrt{b_0(b_0 + c_0 \sin nt)}}, \quad \cos \frac{\psi}{2} = \frac{b_0 \cos \frac{nt}{2} + c_0 \sin \frac{nt}{2}}{\sqrt{b_0(b_0 + c_0 \sin nt)}}. \quad (40)$$

Параметры Родрига–Гамильтона в силу (13), (37) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{nt + \psi(t)}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{nt - \psi(t)}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\psi(t) - nt}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\psi(t) + nt}{2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\sin \frac{\psi}{2}, \cos \frac{\psi}{2}$ имеют значения (40). Обращаясь к (7), (37), (39), получим

$$\begin{aligned} &(b_0 c_0 G_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + G_2(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + c_0^2)(\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3) - \\ &-(c_0 + b_0 G_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - c_0 G_2(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))(\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$G_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2(\lambda_0 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3)}{\sin \theta_0}, \quad G_2(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3)}{\sin \theta_0}. \quad (43)$$

Таким образом, в силу (14), (42), (43) данный класс прецессий можно охарактеризовать двумя ИС квадратичного типа и одним ИС, имеющим третий порядок.

Второй класс прецессий данного типа отвечает случаю, когда [9]

$$\psi(t) = \mu t + 2 \operatorname{arctg}(b_0 - c_0) \operatorname{tg} \left(\frac{nt}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (44)$$

Функции $\lambda_i(t)$ ($i = \overline{0, 3}$) получим подстановкой выражений (37), (44) в соотношения (13):

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{(n + \mu)t + \psi^*(t)}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{(n - \mu)t - \psi^*(t)}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{(\mu - n)t + \psi^*(t)}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{(\mu + n)t + \psi^*(t)}{2}. \end{aligned} \quad (45)$$

В формулах (44), (45) μ, b_0, c_0 – постоянные. Функция ψ^* из (45) определена вторым слагаемым формулы (44). Значения параметров b_0, c_0 в частности могут удовлетворять условию $b_0^2 = n^2 + c_0^2$ [8]. Дополнительное к (14) ИС находится путем исключения t из соотношений (45).

Третий класс прецессий второго типа может быть охарактеризован соотношениями [9]:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = nt, \quad \psi(t) = \mu t + 2 \operatorname{arctg} \lambda \cos nt, \quad (46)$$

где n, μ, λ – постоянные. Для нахождения зависимостей параметров Родрига–Гамильтона от времени необходимо в формулы (45) подставить $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, а $\psi^*(t) = 2 \operatorname{arctg} \lambda \cos nt$.

6. Прецессионно-изоконические движения общего вида. Положим, что движение тела обладает свойством прецессионности и свойством изоконичности (подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу). Имеют место два класса таких движений в динамике твердого тела с неподвижной точкой [9]:

$$\psi = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin \varphi}, \quad (47)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin \varphi}, \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2), \quad \dot{\varphi} = \alpha + \beta \sin \varphi. \quad (48)$$

В формулах (47), (48) $\beta_1, \beta_2, b_0, c_0, \alpha, \beta$ – постоянные, которые для каждой конкретной задачи динамики имеют свои значения.

Рассмотрим случай (47). Учитывая в формулах (13) равенства (20), (47), получим

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2 \cos \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sn} \mu_1 t \operatorname{cn} \mu_1 t, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta_0}{2} = \operatorname{const}, \\ \lambda_2 &= 0, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\theta_0}{2} (\operatorname{sn}^2 \mu_1 t - \operatorname{cn}^2 \mu_1 t). \end{aligned} \quad (49)$$

В силу (14), (49) для класса движений (47) имеют место два линейных ИС и одно квадратичное ИС на параметры Родрига–Гамильтона.

Изучим случай (48). Из первого уравнения (48) найдем зависимость $\psi(\varphi)$:

$$\psi(\varphi) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{b_0 + c_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}, \quad (50)$$

а из второго – зависимость $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \arcsin \frac{\alpha(\beta(\cos v - 1) + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin v)}{\alpha^2 - \beta(\cos v - 1) + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin v}, \quad \text{где } v = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} t. \quad (51)$$

Зависимость параметров Родрига–Гамильтона от времени устанавливаем из формул (13) в силу (50), (51). Поскольку окончательные формулы имеют достаточно сложный вид, то укажем только дополнительное к (14) инвариантное соотношение на данные параметры. Используя формулы (7), (50), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3} \right) &= \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3} \right) \cdot \\ &\cdot \left[b_0 + c_0 \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Следовательно, ИС (52) имеет иррациональную структуру.

Заключение. Изучены зависимости от времени параметров Родрига–Гамильтона для прецессионных движений твердого тела: регулярных; полурегулярных прецессий; прецессий общего вида, которые характеризуются дополнительным свойством изоконичности.

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз. – 1961. – 824 с.
2. Кошляков В.Н. Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Изд-во Института математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
3. Ковалев А.М. Получение уравнений Гамильтона движения механических систем со связями на основе принципа максимума Понтрягина // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 67–73.
4. Козлов В.В. Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теорет. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 8. – С. 59–65.
5. Ковалев А.М., Данилюк Д.А. Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.
6. Ковалев А.М., Данилюк Д.А. Нелинейные колебания тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 21–26.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ. – 2012. – 364 с.
8. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 408 с.
9. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

A. M. Kovalev, G. V. Gorr, D. A. Danilyuk

Application of Rodrigues–Hamilton parameters in investigation of precessional motion of a rigid body with a fixed point.

Dependences of Rodrigues–Hamilton parameters on the time are determined for the precessional motions of a rigid body with a fixed point. Using these dependences, invariant relations are constructed. These relations include Rodrigues–Hamilton parameters.

Keywords: *precessional motion, Rodrigues–Hamilton parameters, Euler angles.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 16.04.14

УДК 539.374

©2014. Н. И. Кодак, В. Н. Ложкин

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ

Методом последовательных конформных отображений изучено предельное состояние неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами. Плоскость сжимается равномерными усилиями вдоль и поперек линии центров вырезов. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. На неизвестной границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными. Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей.

Ключевые слова: предельное равновесие, начальный пластический охват, упругая и пластическая области, неизвестная граница раздела, конформное отображение.

1. Введение. Упругопластическое равновесие изотропной среды с круговыми вырезами для плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния при различных условиях пластичности можно описать с помощью аналитических функций. Две из них характеризуют напряженное состояние упругой части плоскости, остальные конформно отображают внешности единичных окружностей на внешности неупругих областей, охватывающих контуры вырезов и несоприкасающихся друг с другом. Напряженные состояния неупругих областей не зависят от внешнего нагружения среды. Последнее определяет только физическое состояние и внешние границы этих областей [1].

Анализ исследований, в которых коэффициенты разложений аналитических функций определялись методом малого параметра из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на неизвестных границах их раздела, сделан в монографии [2].

В данной работе методом последовательных конформных отображений [3–5] изучено возникновение и развитие неупругих областей в изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами от начального неупругого охвата их контуров в случае предельного равновесия [2]. Исходное приближение конформного отображения построено методом малого параметра [1].

Из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на подлежащей определению границе их раздела методом коллокации находятся коэффициенты разложений аналитических функций, характеризующих напряженное состояние упругой части плоскости. Затем этим же методом уточняются коэффициенты отображений для построения следующего приближения к решению задачи.

2. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с двумя одинаковыми круговыми вырезами радиуса R . Их центры расположены на оси Ox_1 на расстояниях lR от центра системы координат Ox_1x_2 . Плоскость сжимается усилиями q_1 вдоль оси Ox_1 и q_2 – вдоль оси Ox_2 . При этом сплошная плоскость

находится в упругом состоянии.

Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. Расстояние между центрами вырезов и интенсивность q_1 и q_2 таковы, что в плоскости возле вырезов возникают пластические области. Они полностью охватывают контуры вырезов, не соприкасаются, и их внешние границы находятся на расстоянии $hR > 0$ друг от друга по оси Ox_1 .

Геометрическая и силовая симметрия равновесия плоскости позволяет исследовать возникновение и развитие пластической области около одного (правого) выреза.

Введем безразмерные координаты:

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta). \quad (1)$$

Напряжения в пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношениям предельного равновесия и условиям на контуре выреза [2, 6]:

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p/\partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p/\partial\theta &= 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p/\partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p/\partial\theta = 0; \\ (\sigma_\theta^p - \sigma_r^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 &= (2k)^2[\cos\chi - (2k)^{-1}(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p)\sin\chi]^2; \\ \sigma_r^p + \sigma_\theta^p &< 2\alpha_m k, \quad \alpha_m = \operatorname{ctg}\chi, \quad 0 \leq \chi < 5\pi/18; \\ |z - l| = r = 1 : \sigma_r^p &= \tau_{r\theta}^p = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь k – постоянная, имеющая размерность напряжений, χ – безразмерный параметр, характеризующий внутреннее трение материала плоскости.

Напряжения в упругой части плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [7]:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e/\partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_2 &= 0, \quad \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_1 + \partial\sigma_{22}^e/\partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) &= 0; \\ |z| \rightarrow \infty : \sigma_{11}^e &= -q_1; \quad \sigma_{22}^e = -q_2, \quad \tau_{12}^e = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными.

3. Аналитическое решение задачи. Для сжимаемой плоскости решение задачи (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= k\alpha_m(1 - r^{2\gamma}) \leq 0, \quad \sigma_\theta^p = k\alpha_m[1 - (1 + 2\gamma)r^{2\gamma}] < 0, \quad \tau_{r\theta}^p = 0; \\ \gamma &= (1 - \sin\chi)^{-1} \sin\chi \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для напряжений (4) условие $\sigma_r^p + \sigma_\theta^p < 2\alpha_m k$ выполняется всегда при рассматриваемом нагружении плоскости.

При $\chi \rightarrow 0$ получим решение для идеальной пластичности.

Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, являющимися решением задачи (3). С учетом геометрической и силовой симметрии задачи их можно представить так [1]:

$$\begin{aligned} \Phi(z), \quad \Psi(z) &= -\alpha/2, \quad \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\psi_n(z), \\ \psi_n(z) &= \zeta^{-(n+1)}(z - l) + (-1)^{n+1}\zeta_1^{-(n+1)}(z + l), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha = (2k)^{-1}(q_1 + q_2), \quad \beta = (2k)^{-1}(q_1 - q_2), \quad |\beta| < \cos \chi + \alpha \sin \chi. \quad (6)$$

Значения $\zeta(z-l)$ и $\zeta_1(z+l)$ находятся из равенств:

$$\begin{aligned} z-l &= r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \sum_{n=-1} c_{n+2}\zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\varphi); \\ z+l &= r_0\omega_1(\zeta_1), \quad \omega_1(\zeta_1) = -\omega(-\zeta_1) = \sum_{n=-1} (-1)^{n+1}c_{n+2}\zeta_1^{-n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функции $z-l = r_0\omega(\zeta)$ и $z+l = r_0\omega_1(\zeta_1)$ конформно отображают внешности единичных окружностей $|\zeta| = 1$ и $|\zeta_1| = 1$ соответственно на внешности правой и левой пластических областей.

В рассматриваемой задаче входящие в равенства (5), (7) коэффициенты a_n, b_n, r_0, c_n будут действительными.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e &= 2k[(\bar{z} - z)\Phi'_z(z) + \Psi(z)], \\ \sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e &= 2k[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

В окрестности правой пластической области функции (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta), \quad \Psi(\zeta) &= -\alpha/2, \quad \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n)\psi_n(\zeta), \\ \psi_n(\zeta) &= \zeta^{-(n+1)} + (-1)^{n+1}\zeta_1^{-(n+1)}(\zeta), \end{aligned} \quad (9)$$

где значения $\zeta_1(\zeta)$ находятся из равенства

$$\zeta_1(\zeta) = 2l/r_0 + \zeta + \sum_{n=0} c_{n+2}[\zeta^{-n} + (-1)^n\zeta_1^{-n}(\zeta)]. \quad (10)$$

Соотношения (8) переписутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\varphi}^e &= k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)], \\ \sigma_\rho^e + \sigma_\varphi^e &= 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Напряжения (4) на внешней границе правой пластической области $z-l = r_0\omega(\sigma)$ принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p - i\tau_{\rho\varphi}^p &= k\alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma} + \gamma r^{2\gamma}\Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \sigma_\rho^p + \sigma_\varphi^p &= 2k\alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma}], \quad r = r_0|\omega(\sigma)|. \end{aligned} \quad (12)$$

В равенствах (11), (12) введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta[\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)]/\bar{\zeta}\omega'(\zeta), \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta\omega'(\zeta)/\bar{\zeta}\omega'(\zeta), \\ \Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}/\bar{\zeta}\omega'(\zeta)\omega(\zeta), \quad \sigma = \exp(i\varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты r_0 , c_n , a_n , b_n разложений (7), (9) находятся из условий непрерывности упругих (11) и пластических (12) напряжений:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\Phi'_\zeta(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\Psi(\sigma) = \\ = \alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma} + \gamma r^{2\gamma}\Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})],\end{aligned}\quad (14)$$

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} = \alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma}]. \quad (15)$$

4. Численное решение задачи. Решение рассматриваемой задачи строится методом последовательных конформных отображений [3–5]. Для фиксированного расстояния l и фиксированных значений параметров β и χ исходное отображение построено методом малого параметра [1]:

$$\begin{aligned}z - l = r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_2 + c_3\zeta^{-1} + c_4\zeta^{-2}; \\ r_0 = \{(1 + \gamma)^{-1}[1 + \alpha_m^{-1}(\alpha - 2\beta\delta^2)]\}^{1/2\gamma}; \quad \delta = r_p/2l, \\ r_p = [(1 + \gamma)^{-1}(1 + \alpha_m^{-1}\alpha)]^{1/2\gamma}; \\ c_2 = c_{23}\delta^3, \quad c_3 = c_{30} + c_{32}\delta^2, \quad c_4 = c_{43}\delta^3; \\ c_{30} = -(\alpha_m + \alpha)^{-1}\beta\gamma^{-1}, \quad c_{32} = (1 + \gamma)^{-1}[1 - (1 + \gamma)c_{30}]^2, \\ c_{23} = -2(1 + c_{30})c_{30}, \quad c_{43} = 2(1 - c_{30})c_{30} - 2c_{32}.\end{aligned}\quad (16)$$

Затем уточняется значение параметра α_n , при котором возможен начальный пластический охват контура правого выреза, когда внешняя граница неупругой области касается этого контура.

Строится упругое решение (9) для полученного отображения. Из преобразованного условия (14) методом коллокации находятся коэффициенты a_n и b_n :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1} \{a_n[2\operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\psi'_n(\sigma)] - b_n\Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\psi_n(\sigma)\} = f(\sigma, \bar{\sigma}); \\ f(\sigma, \bar{\sigma}) = \alpha + \alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma}] + (\beta + \alpha_m\gamma r^{2\gamma})\Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}).\end{aligned}\quad (17)$$

Первое отображение (7) представим в виде

$$\begin{aligned}r_0\omega(\sigma) = \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta), \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{n=-1} t_{n+2}\zeta^{-n}, \\ t_n = r_0c_n, \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2}\zeta^{-n}.\end{aligned}\quad (18)$$

Тогда условие (15) перепишется так [3–5]:

$$\begin{aligned}2 \sum_{n=-1} h_{n+2}[\operatorname{Re} \omega_0(\sigma) \cos n\varphi - \operatorname{Im} \omega_0(\sigma) \sin n\varphi] = s(\varphi); \\ s(\varphi) = (\gamma\mu)^{-1}[|\omega_0(\sigma)|^{2(1-\gamma)}g(\varphi) - |\omega_0(\sigma)|^2]; \\ g(\varphi) = (1 + \gamma)^{-1}\{1 + \alpha_m^{-1}[\alpha - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma)]\},\end{aligned}\quad (19)$$

где μ – произвольная постоянная.

Из него методом коллокации найдем постоянные h_n . Новые коэффициенты r_0 и c_0 определяются равенствами:

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1}(t_n + h_n). \quad (20)$$

Выбор точек коллокации предложен в работах [3–5].

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с приемлемой точностью.

Затем параметр α увеличивается на заданную величину, параметр β остается неизменным, вычисляется коэффициент r_0 :

$$\begin{aligned} r_0 &= \{(1 + \gamma)^{-1}[1 + \alpha_m^{-1}(\alpha - 2\beta\delta^2)]\}^{1/2\gamma}, \quad \delta = r_p/2l, \\ r_p &= [(1 + \gamma)^{-1}(1 + \alpha_m^{-1}\alpha)]^{1/2\gamma}; \end{aligned} \quad (21)$$

постоянные c_n сохраняются от предыдущего шага.

Определяющим критерием решения рассматриваемой задачи является относительная погрешность удовлетворения условия непрерывности напряжений (11), (12) на границе их раздела

$$z - l = r_0\omega(\sigma) : \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \quad \sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p, \quad \tau_{\rho\varphi}^e = \tau_{\rho\varphi}^p. \quad (22)$$

Сходимость приближений обеспечивается выбором постоянной μ .

Таблица

m	1	1.75		2.0			3.0		
	β	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	β	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	β	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$
0		1.29	1.351		1.46	1.509		1.93	2.106
1		1.76	2.235		1.83	2.713		2.21	4.662
2	-0.05	2.25	4.737	-0.15	2.23	6.632	-0.35	2.60	17.138
3		3.03	20.542		3.09	40.193		3.23	294.800
0		1.54	1.755		1.72	2.079		1.75	2.892
1		1.87	2.527		1.94	3.287		1.99	5.458
2	0.30	2.37	5.145	0.35	2.39	7.214	0.35	2.38	17.947
3		3.17	20.976		3.17	40.812		3.19	295.684

С увеличением параметра α при фиксированных значениях β , χ последующая пластическая область полностью охватывает предыдущую.

Результаты вычислений сведены в таблице. В ней для указанных значений $L, \beta, \chi^{(m)} = m\pi/12$ ($m = \overline{0, 3}$) приведены:

- значения параметра $\alpha_n^{(m)}$, при котором происходит начальный пластический охват контура отверстия;
- значения параметра $\alpha_k^{(m)}$, до которого предложенный метод позволил довести вычисления.

Для параметра β взяты предельные значения, для которых была решена аналогичная задача в случае идеальной пластичности [3]. Результаты этих решений приведены в таблице и соответствуют значению $m = 0$.

Относительная погрешность удовлетворения условий непрерывности напряжений (22) доведена до 10^{-3} , а внешние границы пластических областей сближены до расстояния, меньшего одной десятой радиуса выреза $h < 0.1$.

Внешние усилия q_1, q_2 определяются равенствами:

$$q_1 = k(\alpha + \beta), \quad q_2 = k(\alpha - \beta).$$

5. Анализ численных результатов. С учетом внутреннего трения материала сжимаемой плоскости развитие областей неупругих напряжений от начального охвата контуров, ослабляющих ее круговых вырезом, до максимального сближения границ этих областей происходит при более интенсивных внешних воздействиях (на порядок или на два порядка выше в зависимости от расстояния между центрами вырезом) по сравнению с идеальной пластичностью (см. табл.).

При этом компактность этих областей неупругих напряжений позволила построить решение рассматриваемой задачи для меньших расстояний между центрами вырезом.

Для $l = 1.3$ установлено, что развитие пластических областей от начального охвата контуров вырезом до наибольшего их сближения возможно для таких значений параметров $\chi, \beta, \alpha_n, \alpha_k$:

$$\begin{aligned} \chi = \pi/4 : \quad -0.1 \leq \beta \leq 2.5; \\ \beta^{(1)} = -0.1 : \quad \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 3.95; \quad \beta^{(2)} = 2.5 : \quad \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 7.02. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $l = 1.5$ найдено:

$$\begin{aligned} \chi = \pi/12 : \quad 0.02 \leq \beta \leq 0.528; \\ \beta^{(1)} = 0.02 : \quad \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 1.69; \quad \beta^{(2)} = 0.529 : \quad \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 2.23; \\ \chi = \pi/6 : \quad -0.235 \leq \beta; \quad \beta = -0.235 : \quad \alpha_n = \alpha_k = 2.778; \\ \chi = \pi/4 : \quad -1.75 \leq \beta; \quad \beta = -1.75 : \quad \alpha_n = \alpha_k = 7.10. \end{aligned} \quad (24)$$

При $\chi = \pi/6, \pi/4$ правые границы изменения параметра β предложенным методом установить не удалось.

Области параметров α, β , в которых существует искомое решение поставленной задачи, изображены на рис. 1 для значений $l = 1.3, \chi = \pi/4$ и на рис. 2 – для значений $l = 1.5, \chi = \pi/12$. На них нижние кривые соответствуют параметру α_n , при котором возникает начальный пластический охват контуров, верхние – параметру α_k , при котором происходит наибольшее сближение пластических областей.

В координатах $o\xi_1\xi_2$ на рис. 3 изображены границы правых пластических областей для значений (23):

$$l = 1.3; \quad \chi = \pi/4; \quad \beta = \beta^{(m)}, \quad \alpha = \alpha_n^{(m)} = \alpha_k^{(m)}, \quad m = 1, 2,$$

а на рис. 4 – для значений (24):

$$l = 1.5; \quad \chi = \pi/12; \quad \beta = \beta^{(m)}, \quad \alpha = \alpha_n^{(m)} = \alpha_k^{(m)}, \quad m = 1, 2.$$

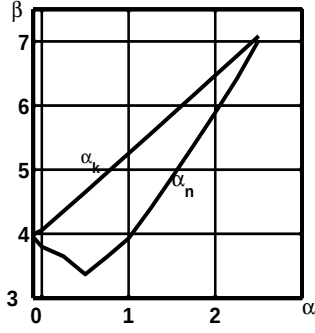


Рис. 1

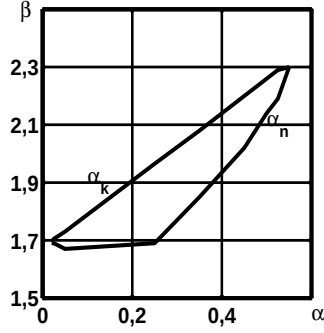


Рис. 2

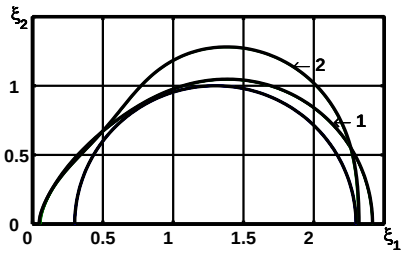


Рис. 3

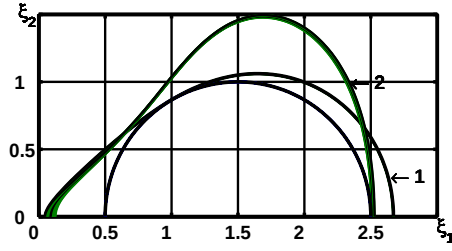


Рис. 4

Для этих значений границы начального охвата и наибольшие пластические границы совпадают.

Отметим, что для значений $l = 1.3, 1.5$ искомое решение рассматриваемой задачи в случае идеальной пластичности отсутствует [3].

Для $l = 1.75$ имеем:

$$\chi = \pi/12 : -0.20 \leq \beta; \beta^{(1)} = -0.20 : \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 1.98;$$

$$\chi = \pi/6 : -0.75 \leq \beta; \beta^{(2)} = -0.75 : \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 3.85;$$

$$\chi = \pi/4 : -4.51 \leq \beta; \beta^{(3)} = -4.51 : \alpha_n^{(3)} = \alpha_k^{(3)} = 15.01.$$

На рис. 5 изображены границы правых пластических областей для значений параметров $\beta^{(m)}, \alpha_n^{(m)}, \chi_m = m\pi/12, m = 1, 2, 3$.

Для $l = 2$ установлено:

$$\chi = \pi/12 : -0.40 \leq \beta; \beta^{(1)} = -0.40 : \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 2.42;$$

$$\chi = \pi/6 : -1.28 \leq \beta; \beta^{(2)} = -1.28 : \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 5.22.$$

На рис. 6 изображены границы правых пластических областей для значений параметров $\beta^{(m)}, \alpha_n^{(m)}, \chi = m\pi/12, m = 1, 2$.

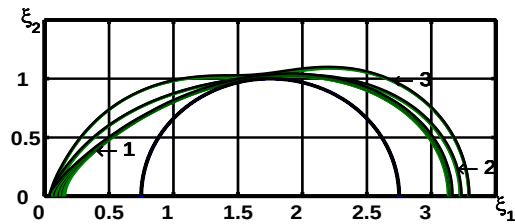


Рис. 5

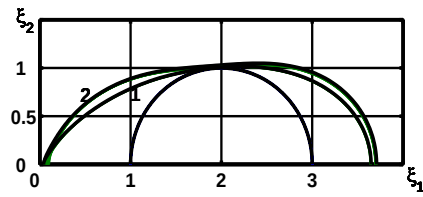


Рис. 6

6. Выводы. Для пластичности, учитывающей внутреннее трение, метод последовательных конформных отображений совместно с методом коллокации позволил исследовать возникновение и развитие неупругих областей в сжимаемой неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами для расстояний между их контурами от шести десятых радиуса и сблизить внешние границы охватывающих эти контуры неупругих областей до расстояний, меньших десятой радиуса выреза.

Относительная погрешность удовлетворения условиям непрерывности пластических и упругих напряжений указанным методом доведена до 10^{-3} . Кроме того, учет внутреннего трения позволил рассмотреть внешние усилия и расстояния между центрами ослабляющих плоскость вырезов, при которых соответствующая задача для идеальной пластичности не имеет искомого решения. В случаях, когда это решение существует, наличие внутреннего трения приводит к более компактному развитию неупругих областей при повышенной интенсивности сжимающих плоскость усилий.

Для различных расстояний между центрами и значений постоянной внутреннего трения установлены области изменений безразмерных параметров внешних сжимающих усилий, при которых искомое решение поставленной задачи можно построить методом последовательных конформных отображений.

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.
2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
3. Кодак Н.И., Ложкин В.Н. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами при двустороннем сжатии // Вісник Донецького національного ун-ту. Сер.А. – 2012. – № 1. – С.73–78.
4. Кодак Н.И., Ложкин В.Н. Изотропная плоскость с двумя круговыми вырезами в случае экспоненциальной пластичности // Вісник Донецького національного ун-ту. Сер.А. – 2013. – № 1. – С. 49–54.
5. Кодак Н.И., Ложкин В.Н. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя эллиптическими вырезами // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Том 24. – С. 147–156.
6. Новик Г.Я., Ржевская С.В. Физико-техническое обеспечение горного производства. – Москва: Наука, 1995. – 255 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва: Наука, 1966. – 707 с.

N. I. Kodak, V. N. Lozhkin

Limiting equilibrium of an isotropic plane with two circular cutouts.

By the method of successive conformal mapping, a limiting state of an infinite isotropic plane with two equal circular cutouts is studied. The plane is compressed by an uniform loads along and across the line of centers of the cutouts. Theirs contours are free from external force. Stresses on unknown interface between elastic and plastic domains are continuous. Conditions under which the initial plastic coverage of cutouts contours takes place and the maximal convergence of plastic domains is possible are determined.

Keywords: *limiting equilibrium, initial plastic enclusien, elastic and plastic domains, unknown border of separating, conformal mapping.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
lozhkin@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.04.14

УДК 517.55

©2014. Ю. С. Коломойцев, Т. В. Ломако

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В L_p , $0 < p < 1$

В настоящей работе получены обобщения на случай дробных производных известных результатов о приближении производных функций целого порядка в пространствах L_p , $0 < p < 1$.

Ключевые слова: дробная производная, тригонометрический полином, пространства L_p , $0 < p < 1$.

1. Введение. Пусть A – вещественная ось $\mathbb{R}$, единичная окружность $\mathbb{T}$, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами, или конечный отрезок. Через $L_p = L_p(A)$, $0 < p < \infty$, обозначим пространство измеримых функций f таких, что

$$\|f\|_{L_p(A)} = \left(\int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$ полагаем $L_\infty(A) = C(A)$ с нормой $\|f\|_{L_\infty(A)} = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

В пространствах L_p при $p \geq 1$ хорошо известен следующий факт: *если последовательность функций $\{\varphi_N\}_{N=1}^\infty \subset L_p$ такова, что $\varphi_N^{(r-1)} \in AC_{loc}$, $N \in \mathbb{N}$, и для двух функций $f, g \in L_p$*

$$\|f - \varphi_N\|_{L_p(A)} + \|g - \varphi_N^{(r)}\|_{L_p(A)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

то (в обобщенном смысле) $g = f^{(r)}$ (см. [1, гл. 4]).

При $0 < p < 1$ данное свойство уже не выполняется. В частности, в [2] было показано, что для функции $f_0(x) = x$ найдется последовательность функций $\varphi_N \in AC[0, 1]$ таких, что φ_N сходятся к f_0 в $L_p[0, 1]$, но $\|\varphi_N'\|_{L_p[0, 1]} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Однако при некоторых дополнительных условиях на скорость сходимости мы можем утверждать, что $g = f'$ (см. [2]).

Теорема А. Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$ и T_N – такая последовательность тригонометрических полиномов порядка не выше N , что

$$\|f - T_N\|_{L_p(\mathbb{T})} = o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{и} \quad \|g - T_N'\|_{L_p(\mathbb{T})} = o(1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\left\| \frac{1}{h} (f(\cdot + h) - f(\cdot)) - g(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{T})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

т.е. g совпадает с L_p -производной функции f .

Аналогичный результат имеет место также для производных любого целого порядка (см. следствие 2.4 в [2]).

Цель настоящей работы – получить аналог теоремы А в случае производных дробного порядка.

2. Основные определения и предварительные замечания. Далее, если f измеримая 2π -периодическая функция, то $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$.

Модулем гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \leq \infty$, порядка $\beta > 0$ и шага $h > 0$ называют величину

$$\omega_\beta(f, h)_p = \sup_{|\delta| < h} \|\Delta_\delta^\beta f\|_p,$$

где

$$\Delta_\delta^\beta f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu f(x + \nu\delta),$$

$$\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-\nu+1)}{\nu!}, \quad \binom{\beta}{0} = 1.$$

Далее $\mathcal{T}_N$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше N . Как обычно, величину наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше N в метрике пространства L_p обозначим через

$$E_N(f)_p = \inf_{T \in \mathcal{T}_N} \|f - T\|_p.$$

Будем говорить, что полином $T_N \in \mathcal{T}_N$ является полиномом наилучшего приближения функции f в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, если $\|f - T_N\|_p = E_N(f)_p$.

Напомним, что для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \leq \infty$, и $r, N \in \mathbb{N}$ имеет место следующая оценка для величины наилучшего приближения функции $f \in L_p(\mathbb{T})$

$$E_N(f)_p \leq C \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p, \quad (1)$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от f и N . Неравенство (1) называют неравенством типа Джексона. При $0 < p < 1$ данное неравенство было получено в [3] (см. также [4] и [5]), а по поводу случая $p \geq 1$ см. [6, гл. 7].

Напомним еще, что если $T_N \in \mathcal{T}_N$ является полиномом наилучшего приближения функции f в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, то

$$\|T_N^{(r)}\|_p \leq C N^r \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p, \quad (2)$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от f и T_N (см., напр., [7]).

Основным объектом настоящей работы является производная дробного порядка в смысле пространства L_p . Будем говорить, что для функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, определена производная порядка $\alpha > 0$ в смысле L_p , если найдется функция $g \in L_p(\mathbb{T})$ такая, что

$$\left\| \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - g \right\|_p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (3)$$

В этом случае мы пишем $g = f^{(\alpha)}$.

Отметим, что если $f \in L_1(\mathbb{T})$, то $f^{(\alpha)}$ по сути совпадает с дробной производной Вейля, которая определяется следующим образом:

$$f^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} \hat{f}_k e^{ikx}, \quad (ik)^{\alpha} = |k| e^{\frac{i\pi\alpha}{2} \text{sign} k},$$

где $\hat{f}_k$ – коэффициенты Фурье функции f (см. [8]).

Далее всюду C – положительные константы, не зависящие от функции f и полинома T_N .

3. Формулировка результатов. Следующая теорема является основным результатом.

Теорема 1. Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ и T_N – такая последовательность тригонометрических полиномов порядка не выше N , что

$$\|f - T_N\|_p = o\left(\frac{1}{N^{\alpha}}\right) \quad \text{и} \quad \|g - T_N^{(\alpha)}\|_p = o(1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Тогда $f^{(\alpha)} = g$, т.е. g удовлетворяет соотношению (3).

В следующем предложении показана точность условий теоремы 1.

Предложение 1. Пусть $0 < p < 1$. Тогда для каждого $\alpha \in \mathbb{N} \cup (1/p - 1, \infty)$ найдутся функция $f_{\alpha} \in L_p(\mathbb{T})$ и последовательность полиномов $T_{N,\alpha} \in \mathcal{T}_N$ такие, что $f_{\alpha}^{(\alpha)}(x) \equiv 1$ на $[0, 2\pi)$,

$$\|f_{\alpha} - T_{N,\alpha}\|_p \asymp \frac{1}{N^{\alpha}}, \quad \text{но} \quad \|T_{N,\alpha}^{(\alpha)}\|_p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Используя теорему 1, мы получаем следующий результат, который является обобщением теоремы 5 работы [4] на случай дробных производных.

Теорема 2. Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $T_N \in \mathcal{T}_N$ – полином наилучшего приближения функции f в L_p и при некотором $\alpha \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p < \infty.$$

Тогда функция f имеет производную $f^{(\alpha)}$ в смысле L_p и для каждого $N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p \leq C \left\{ N^{\alpha} E_N(f)_p + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

где C – некоторая абсолютная константа, не зависящая от f и T_N .

Из теоремы 1 и неравенства типа Джексона (1) стандартным образом вытекают следующие оценки приближения дробных производных функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ через модуль гладкости произвольного порядка.

Следствие 1. Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $T_N \in \mathcal{T}_N$ – полином наилучшего приближения функции f в L_p и при некотором $\alpha \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ и $r \in \mathbb{N}$ выполняется условие

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega_r(f, t)}{t^\alpha} \right)^p \frac{dt}{t} < \infty.$$

Тогда функция f имеет производную $f^{(\alpha)}$ в смысле L_p и для каждого $N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p \leq C \left(\int_0^{1/N} \left(\frac{\omega_r(f, t)}{t^\alpha} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где C – некоторая абсолютная константа, не зависящая от f и T_N .

4. Вспомогательные утверждения. Отметим, что вопросы, связанные с исследованием производных (особенно дробных производных) в пространствах L_p , $0 < p < 1$, по существу отличается от исследования аналогичных вопросов в пространствах L_p , $p \geq 1$. Приведем здесь один из характерных результатов в данном направлении (см. [9]).

Лемма 1. Пусть $0 < p < 1$. Тогда

$$\sup_{\|T_n\|_p \leq 1} \|T_n^{(\beta)}\|_p \asymp \begin{cases} n^\beta, & \beta \in \mathbb{Z}_+ \text{ или } \beta \notin \mathbb{Z}_+ \text{ и } \beta > \frac{1}{p} - 1; \\ n^{\frac{1}{p}-1}, & \beta \notin \mathbb{Z}_+ \text{ и } \beta < \frac{1}{p} - 1; \\ n^{\frac{1}{p}-1} \log^{\frac{1}{p}} n, & \beta = \frac{1}{p} - 1 \notin \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

($\asymp$ – двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими только от p и β).

Для формулировки следующих двух лемм нам понадобится понятие преобразования Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, которое обычно определяют следующим образом:

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Лемма 2. (См. [10, 4.1.1]). Пусть $0 < p \leq 1$, функция $\phi \in C(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель и $\widehat{\phi} \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда

$$\sup_{h>0} h^{1-\frac{1}{p}} \|\Phi_h\|_{L_p(\mathbb{T})} = \sqrt{2\pi} \|\widehat{\phi}\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где

$$\Phi_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(hk) e^{ikx}.$$

Доказательство следующей леммы при $p = 1$ см. в [11], а общий случай в [12].

Лемма 3. Пусть $0 < p < 2$, $1 < q, r \leq \infty$, $s > \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{r}$, $s \in \mathbb{N}$, а функция f непрерывна и такова, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Предположим, что

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} > \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_q(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|f^{(s)}\|_{L_r(\mathbb{R})}^{\theta}.$$

Приведенную ниже вспомогательную лемму можно доказать стандартным образом (см., напр., [13]), а также доказательство теоремы 2.

Лемма 4. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\gamma > \alpha > 0$ и T_N – такая последовательность полиномов, что

$$\|f - T_{2^N}\|_1 = O(2^{-\gamma N}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Тогда $f^{(\alpha)} \in L_1(\mathbb{T})$ и

$$\|f^{(\alpha)} - T_{2^N}^{(\alpha)}\|_1 = O(2^{-(\gamma-\alpha)N}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

5. Доказательство теоремы 1. Для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ выберем $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $n \geq n_0$

$$\|f - T_n\|_p \leq \frac{\varepsilon}{n^\alpha} \quad \text{и} \quad \|g - T_n^{(\alpha)}\|_p \leq \varepsilon \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тогда для h , удовлетворяющего неравенствам $\frac{\varepsilon^\lambda}{n} \leq h \leq \frac{2\varepsilon^\lambda}{n}$, где $0 < \lambda < \frac{1}{\alpha}$, имеем

$$\left\| \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - \frac{\Delta_h^\alpha T_n}{h^\alpha} \right\|_p = \left\| \frac{\Delta_h^\alpha (f - T_n)}{h^\alpha} \right\|_p \leq C \left(\frac{n}{\varepsilon^\lambda} \right)^\alpha \|f - T_n\|_p \leq C \varepsilon^{1-\lambda\alpha}. \quad (5)$$

При выводе данного неравенства мы воспользовались тем фактом, что

$$\binom{\alpha}{k} = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

(см., напр., [14, гл.1, §1]).

Обозначим

$$T_{n,h,\alpha}(t) = \frac{\Delta_h^\alpha T_n(t)}{h^\alpha} - T_n^{(\alpha)}(t). \quad (6)$$

Легко видеть (далее всюду мы используем главную ветвь логарифма), что

$$T_{n,h,\alpha}(t) = \sum_{k=-n}^n (ik)^\alpha \left(\left(\frac{1 - e^{ikh}}{ikh} \right)^\alpha - 1 \right) c_k e^{ikt},$$

где $\{c_k\}$ – коэффициенты полинома T_n .

Заметим также, что

$$T_{n,h,\alpha}(t) = (K_{h,\alpha} * T_n^{(\alpha)})(t),$$

где

$$K_{h,\alpha}(t) = \sum_k g_{\alpha,\varepsilon}(hk) e^{ikt},$$

$$g_{\alpha,\varepsilon}(x) = \left(\left(\frac{1 - e^{ix}}{ix} \right)^\alpha - 1 \right) \varphi \left(\frac{x}{2\varepsilon^\lambda} \right),$$

а функция φ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 2$.

Рассматривая $K_{n,\alpha}(x)T_n^{(\alpha)}(t-x)$ как тригонометрический полином порядка не выше $5n$ от переменной x и применяя неравенство Никольского разных метрик

$$\|T_N\|_1 \leq CN^{\frac{1}{p}-1} \|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N,$$

(см., напр., [6, гл. 4, §2]), находим

$$|T_{n,h,\alpha}(t)|^p \leq Cn^{1-p} \int_{\mathbb{T}} |K_{h,\alpha}(x)T_n^{(\alpha)}(t-x)|^p dx.$$

Интегрируя верхнее неравенство по t и применяя теорему Фубини, имеем

$$\|T_{n,h,\alpha}\|_p \leq Cn^{\frac{1}{p}-1} \|K_{h,\alpha}\|_p \|T_n^{(\alpha)}\|_p.$$

Далее, используя лемму 2, получаем, что

$$n^{\frac{1}{p}-1} \|K_{h,\alpha}\|_p \leq C\varepsilon^{\lambda(\frac{1}{p}-1)} h^{1-\frac{1}{p}} \|K_{h,\alpha}\|_p \leq C\varepsilon^{\lambda(\frac{1}{p}-1)} \|\widehat{g}_{\alpha,\varepsilon}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (7)$$

Выполняя простые вычисления, получаем, что

$$\|g_{\alpha,\varepsilon}\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{\lambda}{q}} \quad \text{и} \quad \|g_{\alpha,\varepsilon}^{(s)}\|_{L_r(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{\lambda}{r}-\lambda s}.$$

Таким образом, используя лемму 3, находим

$$\|\widehat{g}_{\alpha,\varepsilon}\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\lambda((1-\theta)\frac{1}{q} + \theta\frac{1}{r} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{2}))}. \quad (8)$$

Следовательно, из (7) и (8) имеем

$$n^{\frac{1}{p}-1} \|K_{h,\varepsilon}\|_p \leq C\varepsilon^{\lambda((1-\theta)\frac{1}{q} + \theta\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} = C\varepsilon^\gamma, \quad (9)$$

где $\gamma > 0$.

Откуда, в силу (6) и (9) получаем, что

$$\left\| \frac{\Delta_h^\alpha T_n}{h^\alpha} - T_n^{(\alpha)} \right\|_p \leq C\varepsilon^\gamma \|T_n^{(\alpha)}\|_p. \quad (10)$$

Объединяя неравенства (4), (5) и (10) и учитывая, что $\|T_n^{(\alpha)}\|_p \leq 2\|g\|_p$ при достаточно больших n , получаем, что

$$\left\| \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - g \right\|_p \leq C(\varepsilon^{1-\lambda\alpha} + \varepsilon^{\lambda\gamma}\|g\|_p + \varepsilon).$$

Из последнего соотношения сразу следует, что $f^{(\alpha)} = g$ в смысле (3).

6. Доказательство предложения 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Положим $f_r(x) = x^r$ на $[0, 2\pi)$ и $f_r(x + 2\pi) = f_r(x)$ для остальных значений переменной x .

Пусть

$$g_{n,r}(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}x^{r-1}, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n^{r+1}}; \\ \frac{k}{n}x^{r-1} + x^{r-1} \left(x - \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^{r+1}}\right)n, & \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n^{r+1}} \leq x < \frac{k+1}{n}. \end{cases}$$

Положим также $\varphi_{n,r}(x) = g_{n,r}(\frac{x}{2\pi})$ при $x \in [0, 2\pi)$ и $\varphi_{n,r}(x) = \varphi_{n,r}(x + 2\pi)$ для других значений переменной x .

В дальнейшем нам понадобится тот факт, что для любого $0 < p < \infty$

$$\omega_r(\varphi_{n,r}, 1/n)_p \leq Cn^{-r}\|\varphi_{n,r}^{(r)}\|_p \leq Cn^{-r-\frac{1}{p}+1}. \quad (11)$$

По поводу первого неравенства см. работу [15], а второе неравенство можно проверить простыми вычислениями. Заметим также, что

$$\|f_r - \varphi_{n,r}\|_1 = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Обозначим через $T_{n,r}$ полином наилучшего приближения функции $\varphi_{n,r}$ в метрике пространства L_p , $0 < p < 1$.

Используя неравенство Гельдера, (1) и (11), находим

$$\begin{aligned} \|f_r - T_{n,r}\|_p &\leq C\|f_r - T_{n,r}\|_1 \leq C(\|f_r - \varphi_{n,r}\|_1 + \|\varphi_{n,r} - T_{n,r}\|_1) \leq \\ &\leq C(n^{-r} + \omega_r(\varphi_{n,r}, 1/n)_1) \leq Cn^{-r}. \end{aligned} \quad (12)$$

В то же время, учитывая (2) и (11), имеем

$$\|T_{n,r}^{(r)}\|_p \leq Cn^r\omega_r(\varphi_{n,r}, 1/n)_p \leq Cn^{1-\frac{1}{p}}. \quad (13)$$

Таким образом, мы доказали предложение 1 при $\alpha = r \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $\alpha \notin \mathbb{N}$. Выберем $r \in \mathbb{N}$ так, чтобы $r > \alpha$ и положим $f_\alpha = f_r^{(r-\alpha)}$, а $T_{n,\alpha} = T_{n,r}^{(r-\alpha)}$.

Тогда, используя неравенство Гельдера, лемму 4, а также неравенства (12) и (13), мы получаем, что

$$\|f_\alpha - T_{2^k,\alpha}\|_p \leq C\|f_\alpha - T_{2^k,\alpha}\|_1 \leq 2^{-\alpha k} \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и

$$\|T_{2^k,\alpha}^{(\alpha)}\|_p = C\|T_{2^k,r}^{(r)}\|_p \leq C2^{k(1-\frac{1}{p})}.$$

Из последнего неравенства сразу вытекает доказательство предложения 1.

7. Доказательство теоремы 2. Используя лемму 1, получаем, что для произвольного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} \|T_{2^k}^{(\alpha)} - T_{2^{k-1}}^{(\alpha)}\|_p^p &\leq C \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{\alpha p k} \|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\|_p^p \leq \\ &\leq C \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{\alpha p k} E_{2^{k-1}}(f)_p^p \leq C \sum_{k=2^m}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, последовательность $\{T_N^{(\alpha)}\}$ является фундаментальной в L_p . Таким образом, найдется функция $g \in L_p$ такая, что $T_N^{(\alpha)} \rightarrow g$. Учитывая еще, что $E_{2^k}(f)_p = o(2^{-\alpha k})$, а также применяя теорему 1, мы получаем, что $g = f^{(\alpha)}$ в смысле пространства L_p .

Далее, пусть m таково, что $2^{m-1} \leq N < 2^m$. В силу представления в L_p

$$f^{(\alpha)} = T_{2^m}^{(\alpha)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} (T_{2^k}^{(\alpha)} - T_{2^{k-1}}^{(\alpha)}),$$

а также в силу леммы 1 и (14), получаем

$$\begin{aligned} \|f^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p^p &\leq \|T_{2^m}^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p^p + \sum_{k=m+1}^{\infty} \|T_{2^k}^{(\alpha)} - T_{2^{k-1}}^{(\alpha)}\|_p^p \leq \\ &\leq C \left\{ N^{\alpha p} E_N(f)_p^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

1. Никольский С.М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука. – 1969.
2. Ditzian Z., Tikhonov S. Moduli of smoothness of functions and their derivatives // Studia Math. – 2007. – Vol. 180, no. 2. – P. 143–160.
3. Стороженко Э.А., Освальд П. Теорема Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 19, № 4. – С. 888–90.
4. Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, № 5. – С. 641–658.
5. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415.
6. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. – Springer-Verlag. New York. – 1993. – 449 p.
7. Ditzian Z., Hristov V., Ivanov K. Moduli of smoothness and K -functional in L_p , $0 < p < 1$ // Constr. Approx. – 1995. – Vol. 11. – P. 67–83.
8. Butzer P.L., Westphal U. An Access to Fractional Differentiation via Fractional Difference Quotients. – P. 116–145, Lecture Notes in Math 457. – Berlin: Springer. – 1975.
9. Belinsky E., Lifyand E. Approximation properties in L_p , $0 < p < 1$ // Funct. et Approx. – 1993. – Vol. 22. – P. 189–199.

10. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer–Springer. – 2004.
11. *Коломойцев Ю.С.* Мультипликативные достаточные условия для мультипликаторов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – Т. 78, № 2. – С. 145–166.
12. *Коломойцев Ю.С.* О классе функций представимых в виде интеграла Фурье // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 125–132.
13. *Butzer P.L., Dyckhoff H., Gorlich E., Stens R.L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – Vol. 29, no. 4. – P. 781–793.
14. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. – 1987.
15. *Kopotun K.A.* On equivalence of moduli of smoothness of splines in L_p , $0 < p < 1$ // J. Approx. Theory. – 2006. – Vol. 143, no. 1. – P. 36–43.

Yu. S. Kolomoitsev, T. V. Lomako

On approximation of fractional derivatives of functions by trigonometric polynomials in L_p , $0 < p < 1$.

In this paper we obtain a generalization to the case of fractional derivatives of known results on the approximation of the integer order derivatives for functions in the spaces L_p , $0 < p < 1$.

Keywords: *fractional derivative, trigonometric polynomial, spaces L_p , $0 < p < 1$.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kolomusi@mail.ru
tlomako@yandex.ru

Получено 25.05.14

УДК 517.925.4; 531.537

©2014. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

АППРОКСИМАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА ДЕМПФИРОВАНИЯ ДЛЯ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА

При использовании простейшей модели синхронного электромотора его динамика описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно угловой переменной – разности углов поворота магнитных полей статора и ротора. Это уравнение имеет два счетных набора стационарных точек, соответствующих устойчивым и неустойчивым режимам равномерного вращения ротора. Глобальное поведение фазовых траекторий данного уравнения зависит от того, будет ли входящий в него параметр демпфирования больше или меньше некоторого критического значения. Путем расчета на компьютере построен график кривой, изображающей критическое значение параметра демпфирования для синхронного электромотора в зависимости от стационарного значения угловой переменной. Получены линейная и синусоидальная аппроксимации данной кривой, позволяющие вычислять критические значения с высокой точностью.

Ключевые слова: синхронный электромотор, критическое значение, глобальное притяжение.

1. Математическая модель синхронного электромотора. Детальная модель синхронного электромотора описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка относительно токов в обмотках ротора и угловой переменной, определяющей положение ротора (см. [1, 2]). Простейшая модель синхронного электромотора описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно переменной $\theta = \omega t - \varphi$, где $\omega > 0$ – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре электромотора, φ – угол поворота ротора относительно статора. Путем введения безразмерного времени и двух безразмерных параметров $a, c > 0$ это уравнение приводится к виду [3, 4]

$$\ddot{\theta} = -a\dot{\theta} - \sin \theta + c. \quad (1)$$

Равномерным вращениям ротора электромотора с угловой скоростью ω соответствуют стационарные решения этого уравнения, в которых значения угла θ определяются равенством $\sin \theta = c$. При $c > 1$ стационарные решения не существуют. Отбрасывая особый случай, когда $c = 1$, будем предполагать, что $c < 1$. Тогда уравнение электромотора имеет два семейства стационарных решений при значениях угла θ равных

$$\theta_0 + 2\pi n, \quad \theta_1 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Здесь

$$\theta_0 = \arcsin c \in (0, \pi/2), \quad \theta_1 = -\pi - \theta_0 \in (-3\pi/2, -\pi). \quad (2)$$

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно показать, что решениям первого семейства соответствуют асимптотически устойчивые стационарные решения уравнения (1) – устойчивый фокус или устойчивый узел, а ре-

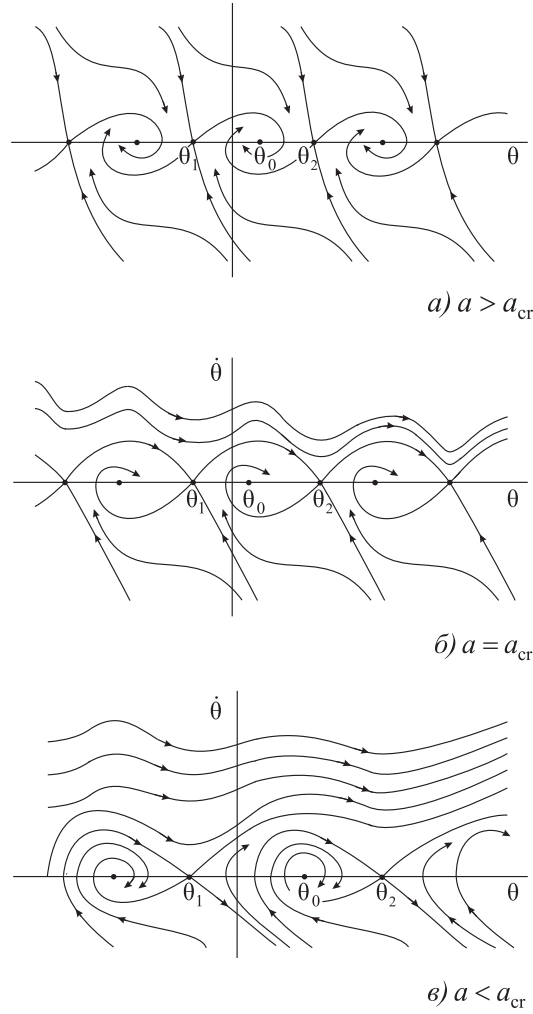


Рис. 1. Фазовые портреты синхронного электромотора.

шениям второго семейства соответствуют неустойчивые стационарные решения – седловые точки.

Нелокальный анализ уравнения электромотора, проведенный Ф. Трикоми [5, 3], показывает, что для этого уравнения возможны три качественно различных типа фазовых портретов, изображенных на рис. 1. А именно, существует *критическое значение* параметра a , которое является монотонной функцией $a_{cr} = a_{cr}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$, обращающейся в нуль при $c = 0$, и обладает следующими свойствами.

- В случае $a > a_{cr}$ сепаратрисы неустойчивых седловых точек разбивают всю фазовую плоскость на области притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек (рис. 1, а). В этом случае множество стационарных точек уравнения электромотора (1) является *глобально притягивающим*, т. е. каждое решение этого уравнения стремится к одной из стационарных точек при $t \rightarrow +\infty$.

• При $a \leq a_{\text{cr}}$ существуют решения, вдоль которых угол θ неограниченно возрастает с течением времени. Поэтому при $a \leq a_{\text{cr}}$ множество стационарных точек уравнения электромотора уже не является глобально притягивающим (рис. 1, б, в). Режимы работы электромотора, на которых угол θ неограниченно возрастает, являются нежелательными.

При $a = a_{\text{cr}}$ существуют сепаратрисы, соединяющие соседние седловые точки (рис. 1, б).

Так как $\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin \theta_0$, и величину $a_{\text{cr}}(c)$ можно рассматривать как функцию $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. Для этой функции не существует явного выражения, но разными авторами найдены ее теоретические оценки сверху и снизу [3]. В настоящей работе с помощью компьютера построен график функции $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(\theta_0)$, и для нее получены две простые аппроксимации.

2. Вычисление критических значений параметра демпфирования. Сепаратриса седловой точки уравнения (1) есть фазовая траектория этого уравнения, вдоль которой его решение стремится к данной седловой точке при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$. На плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ стационарная точка $(\theta_0, 0)$ лежит на оси абсцисс между седловыми точками $(\theta_1, 0)$ и $(\theta_2, 0)$. Здесь $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, θ_0 и θ_1 определены в (2).

Пусть $\dot{\theta} = F_1(\theta, a, \theta_0)$ – уравнение той из четырех сепаратрис седловой точки $(\theta_1, 0)$, которая выходит из этой точки в верхнюю полуплоскость при возрастании θ , а $\dot{\theta} = F_2(\theta, a, \theta_0)$ – уравнение той из сепаратрис седловой точки $(\theta_2, 0)$, которая выходит из этой точки в верхнюю полуплоскость при убывании θ (см. рис. 1). Область определения F_1 всегда содержит отрезок $[\theta_1, \theta_0]$, а область определения F_2 всегда содержит отрезок $[\theta_0, \theta_2]$. При $a = a_{\text{cr}}(\theta_0)$ эти две сепаратрисы совпадают, и поэтому для определения $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ при заданном θ_0 имеем уравнение $D(a, \theta_0) = 0$, где функция $D(a, \theta_0) = F_1(\theta_0, a, \theta_0) - F_2(\theta_0, a, \theta_0)$ определена при всех $a > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$.

Для численного решения этого уравнения при каждом заданном θ_0 достаточно воспользоваться методом половинного деления. При этом значения $F_1, F_2(\theta_0, a, \theta_0)$, входящие в определение функции $D(a, \theta_0)$, определяются путем численного интегрирования уравнения интегральных кривых

$$d\dot{\theta}/d\theta = -a - (\sin \theta - \sin \theta_0)/\dot{\theta} \quad (3)$$

при начальных данных, соответствующих седловым точкам $(\theta_1, 0)$, $(\theta_2, 0)$. В этих точках числитель и знаменатель дроби в (3) обращаются в нуль. С учетом этого при проведении расчетов в малой окрестности седловых точек сепаратрисы F_1, F_2 аппроксимируются касательными к ним в этих точках: $\dot{\theta} = k_1(\theta - \theta_1)$, $\dot{\theta} = k_2(\theta - \theta_2)$. Их угловые коэффициенты равны

$$k_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \cos \theta_1}, \quad k_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \cos \theta_1}.$$

Поскольку $\cos \theta_1 < 0$, имеем $k_1 > 0$, $k_2 < 0$.

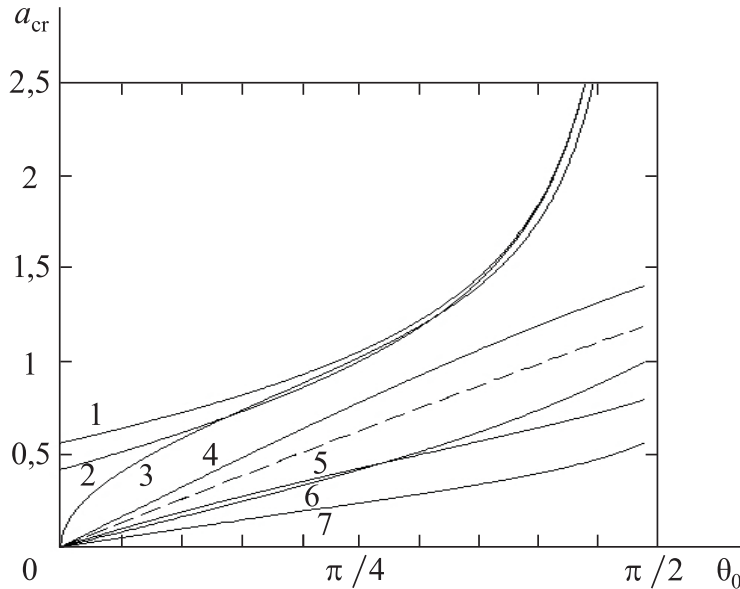


Рис. 2. График вычисленной зависимости $a_{cr}(\theta_0)$ (прерывистая кривая) и графики правых частей ее теоретических оценок (непрерывные кривые).

На рис. 2 прерывистой линией изображен график функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ на промежутке от 0 до 89 градусов, полученный путем вычисления ее значений с мелким шагом по θ_0 . Выше этой расчетной кривой лежат графики правых частей верхних теоретических оценок величины a_{cr} , найденных 1) Трикоми, 2) Табуевой, 3) Зайфертом, 4) Бёмом, а ниже – графики правых частей нижних теоретических оценок, найденных 5) Бёмом, 6) Хейзом, 7) Трикоми (см. [3, с. 122–123]).

3. Аппроксимация критических значений. Рис. 2 показывает, что вычисленная кривая $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ близка к прямой. Проводя хорду через концы вычисленной кривой, получим для a_{cr} линейную аппроксимацию

$$a_{crL} = 0,76 \cdot \theta_0. \quad (4)$$

На рис. 3 представлен график разности вычисленной функции $a_{cr}(\theta_0)$ и ее линейной аппроксимации. Из него видно, что абсолютная погрешность линейной аппроксимации (4) не больше, чем $1,5 \cdot 10^{-2}$.

Рис. 3 позволяет предположить, что более точную аппроксимацию критических значений можно получить в классе синусоидальных функций вида $a_{crS} = A \sin(\Omega \theta_0)$, где A, Ω – некоторые числа. Чтобы определить эти числа, заметим, что при заданном значении Ω величина A однозначно определяется из условия, что на правом конце рассматриваемого интервала изменения θ_0 , т. е. при $\theta_0 = 90^\circ$, значение $A \sin(\Omega \theta_0)$ равно вычисленному значению $a_{cr}(\theta_0)$.

Для вычисления наилучшего значения величины Ω задается диапазон изменения этой величины и затем с мелким шагом перебираются все значения Ω из этого диа-

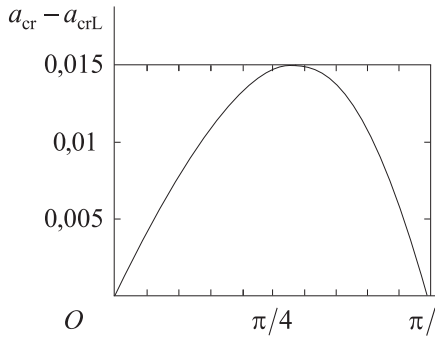


Рис. 3. График разности функции $a_{cr}(\theta_0)$ и ее линейной аппроксимации $a_{crL}(\theta_0)$.

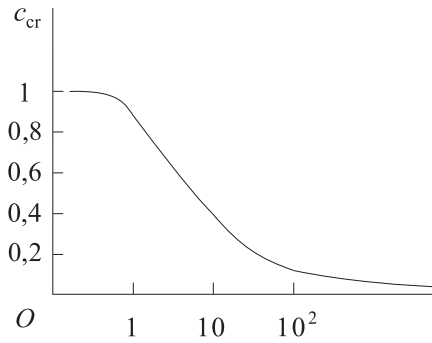


Рис. 4. График зависимости критического значения величины $c = \sin \theta_0$ от $1/a^2$.

пазона. Для каждого из них вычисляется максимальная абсолютная погрешность синусоидальной аппроксимации, то есть максимум $|A \sin(\Omega \theta_0) - a_{cr}(\theta_0)|$ на рассматриваемом интервале изменения θ_0 . В качестве наилучшего выбирается то значение Ω , для которого эта погрешность минимальна. Такие вычисления показывают, что оптимальная аппроксимация получается при $A = 2,766222$ и $\Omega = 0,2838860$. Таким образом, получаем приближенную формулу

$$a_{crS} = 2,766222 \cdot \sin(0,2838860 \cdot \theta_0).$$

Она обеспечивает вычисление критического значения c с абсолютной погрешностью не больше, чем $3,4 \cdot 10^{-5}$.

Вопрос о вычислении критических значений для уравнения (1) рассматривался в литературе. При этом вместо функции $a_{cr}(c)$ вычислялась обратная к ней функция $c_{cr}(a)$. На рис. 4 показан график функции $c_{cr}(1/a^2)$, приведенный в [1, с. 268]. Для нее трудно подобрать простую аппроксимацию.

1. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. – № 4. – 2012. – С. 18–27. (Leonov G.A., Zaretskiy A.M. Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. – 45, no. 4. – 2012. – P. 157–163. © Allerton Press, Inc., 2012.)
3. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
4. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
5. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annal. della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1933. – 2, no. 2. – P. 1–20.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich

Approximation of the critical value of the damping parameter for a synchronous electric motor.

The simplest model of a synchronous electric motor can be described by a second order nonlinear differential equation with respect to the variable $\theta = \omega t - \varphi$, where ωt is the rotational angle of the magnetic field in the stator, and φ is the rotational angle of the rotor. This equation includes two parameters, namely, the damping parameter a and the value $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ of θ in the asymptotically stable rotation of the rotor.

F. Tricomi proved that there exists a critical value $a_{cr}(\theta_0)$ of the damping parameter such that the set of steady rotations of the motor is globally attracting in the case $a > a_{cr}(\theta_0)$ only. In the paper, using computer calculation, the graph of the function $a_{cr}(\theta_0)$ is obtained and simple high accuracy approximations of this functions are given.

Keywords: *synchronous electric motor, critical value, global attraction.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 22.05.14

УДК 66.023:681.5

©2014. И. В. Махно

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Предложена модель процессов, происходящих в химическом реакторе полунепрерывного действия. Решена задача численного моделирования реактора, рассмотрена проблема сходимости алгоритма расчета. Выполнено моделирование процесса растворения вещества в химическом реакторе.

Ключевые слова: нанодисперсные порошки, химический реактор полунепрерывного действия, математическая модель, уравнение конвекции-диффузии-реакции, метод конечных разностей.

1. Введение. Как известно, в настоящее время международное научное общество переживает самый настоящий нанотехнологический бум, который формально сродни тому буму, который пережило это сообщество более 20 лет назад в связи с открытием высокотемпературной сверхпроводимости. Нанотехнология – это междисциплинарная область фундаментальной и прикладной науки и техники, имеющая дело с созданием и использованием материалов, устройств и технических систем, функционирование которых определяется наноструктурой, т.е. ее упорядоченными фрагментами размером от 1 до 100 нм. Важнейшей составной частью нанотехнологии являются наноматериалы – материалы, созданные с использованием наночастиц, обладающие какими-либо уникальными свойствами, обусловленными присутствием этих частиц в материале.

Среди материалов, привлекающих в настоящее время внимание ученых и практиков, особое место занимают нанопорошки, широкое применение которых в различных отраслях промышленности объясняется необычными эффектами в свойствах материалов на их основе при переходе к наноструктурному состоянию. Так, к примеру, в области оксидной керамики снижение размеров частиц исходного порошка от микро- до нанометров позволяет не только повысить плотность и улучшить механические характеристики керамических материалов, но и существенно изменить их физические свойства. Развитие технологии получения нанопорошков даст возможность Украине начать их широкое использование в таких областях промышленности, как энергетика, химическая промышленность, металлургия, электроника, машиностроение, медицина.

Наибольшее распространение получили методы изготовления порошков в жидкой фазе: в водных и неводных растворах, в расплавах. Мы будем рассматривать аналог процесса растворения железа в азотной кислоте в химическом реакторе полунепрерывного действия (в который непрерывно подаются исходные вещества, а продукты реакции удаляются периодически).

2. Постановка задачи. В качестве математической модели реактора принимается уравнение конвекции-диффузии-реакции [1]:

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = a \frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C_x}{\partial x} + AC_x^n e^{-\frac{E}{RT}}, \quad (1)$$

где время является независимой переменной, текущая концентрация реагента – зависимой переменной, а остальные величины будем считать параметрами: a – коэффициент диффузии, v_x – линейная скорость подачи реагента, A – предэкспоненциальный множитель уравнения Аррениуса, n – порядок реакции, E – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, T – температура реакционной системы.

Для численного исследования обратимся к физическим параметрам уравнения (1), представленным в таблице 1.

Таблица 1. Физические параметры реактора и вещества

Физические параметры	Значения параметров
Коэффициент диффузии, a	0.000000001 м ² /с
Линейная скорость подачи реагента, v_x	0.000001
Предэкспоненциальный множитель уравнения Аррениуса, A	1000 м ³ /(кг*с)
Порядок реакции, n	1.5
Энергия активации, E	15000 Дж/моль
Универсальная газовая постоянная, R	8,31 Дж/(моль*К)
Температура реакционной системы, T	300 К

3. Решение задачи. Для решения уравнения конвекции-диффузии-реакции необходимо выполнить переход от математической модели к конкретному численному алгоритму.

Наиболее распространенным подходом является использование методов сеток [2]. Согласно методу прямых вводится разбиение по пространственной координате и выполняется переход к системе дифференциальных уравнений. Существуют различные вариации метода сеток. Простейшим вариантом является метод конечных разностей, согласно которому на регулярной сетке производные заменяются приближающими их конечными разностями [3].

Сеткой называется дискретная совокупность точек (узлов сетки), в данном случае на плоскости (τ, x) , где τ – время ($\tau \in [0, \infty)$), x – координата по длине реактора ($x \in [0, L)$). Для моделирования системы введем равномерную прямоугольную сетку (τ_n, x_m) , $\tau_n = \tau_0 + n\Delta\tau$, $x_m = x_0 + m\Delta x$, где $\Delta\tau$ и Δx – положительные числа, называемые шагами сетки.

При построении сеточных уравнений возможны разные варианты аппроксимации исходной производной. Совокупность узлов, которые используются при построении сеточных уравнений, называется шаблоном. В зависимости от шаблона и соответствующей схемы расчета выделяют явные и неявные схемы.

Мы будем использовать явную схему, при которой значения в $(i + 1)$ -й момент времени рассчитываются по значениям в i -й момент времени по формулам, задан-

ным в явном виде. Такая схема имеет условие устойчивости, которое накладывает ограничения на шаг по времени и координате.

В качестве явной схемы возьмем ориентированный уголок, для которого используется трехточечный шаблон (рис. 1).

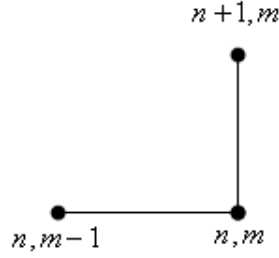


Рис. 1. Шаблон схемы «явный левый уголок»

Такая схема не представляет особых вычислительных сложностей, однако имеет ограничение на величины шагов разбиения по времени и длине реактора. Далее в процессе моделирования мы покажем, что эти шаги разбиения должны удовлетворять неравенству:

$$\tau \leq \frac{1}{\frac{2a}{x^2} + \frac{v_x}{x} + Ae^{\frac{-E}{RT}}}. \quad (2)$$

Если для выбранных шагов моделирования условие выполняется, то явная схема устойчива.

Вводя дискретный шаг по времени (разбиение на N отрезков с шагом $\Delta\tau$) и по длине (разбиение на M отрезков с шагом Δx) реактора получим для явного левого уголка представление в виде:

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} = a \frac{C_{m+1}^n - 2C_m^n + C_{m-1}^n}{x^2} - v_x \frac{C_m^n - C_{m-1}^n}{x} - AC_m^n e^{\frac{-E}{RT}}. \quad (3)$$

Выразим C_{m+1}^n в явном виде, получим:

$$C_{m+1}^n = \alpha_1 C_{m+1}^n + \alpha_2 C_m^n + \alpha_3 C_{m-1}^n, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{x^2} \tau, \\ \alpha_2 &= 1 - \left(\frac{2a}{x^2} + \frac{v_x}{x} + Ae^{\frac{-E}{RT}} \right) \tau, \\ \alpha_3 &= \left(\frac{a}{x^2} + \frac{v_x}{x} \right) \tau. \end{aligned}$$

Условия устойчивости:

$$1) \alpha_1 \geq 0, \quad 2) \alpha_2 \geq 0, \quad 3) \alpha_3 \geq 0. \quad (5)$$

Поскольку условия 1) и 3) выполняются всегда, то для устойчивости схемы достаточно выполнения условия 2), откуда следует формула (2).

Моделирование будем выполнять, считая, что доступны результаты измерений значения начального распределения концентрации реагента по реактору $C_{0,1,...,M} = f(x)$.

Решение ищется в явном виде по формуле (4) при различных $\Delta\tau$ и Δx , удовлетворяющих условию устойчивости. Полученные графики переходных процессов представлены на рис. 2.

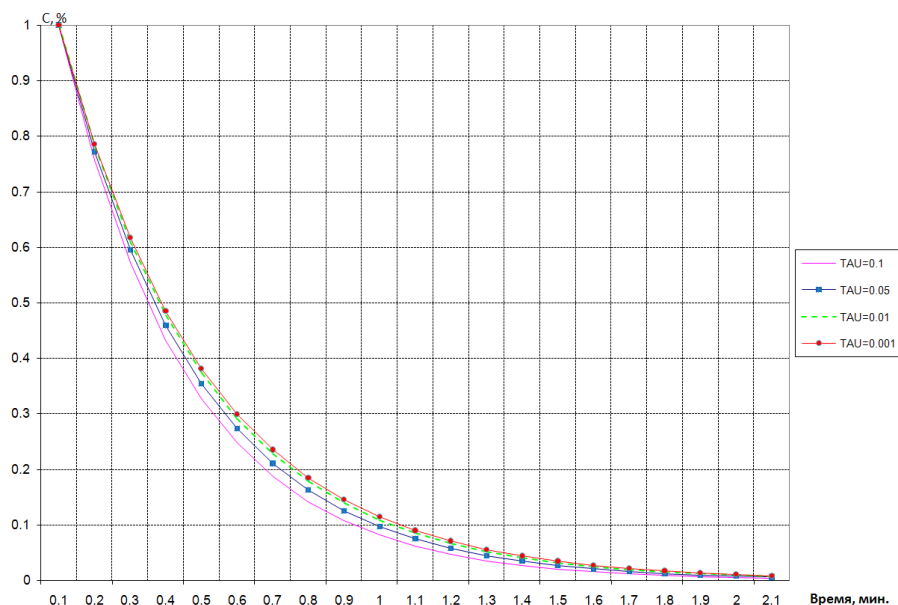


Рис. 2. Концентрация реагента (C_x) в химическом реакторе при различных значениях $\Delta\tau$

Отметим, что при $\Delta\tau = 0.01$ мин. дальнейшее уменьшение шага практически не влияет на переходной процесс: погрешность вычисления значений C_x при $\Delta\tau = 0.01$ и $\Delta\tau = 0.001$ не превышала 0.00778, т.е. была менее 1%. Шаг же разбиения по пространственной координате вообще не играет никакой роли: к примеру, для шага по времени $\Delta\tau = 0.04$ при $\Delta x = 0.05$, $\Delta x = 0.1$ и $\Delta x = 0.2$ значения концентрации были практически идентичны, процесс стабилизировался уже на третьем шаге, см. табл. 2–4.

Таблица 2. Изменение концентрации реагента (C_x) при $\Delta x = 0.05$

Время	x=0.00	x=0.05	x=0.10	x=0.15	x=0.20
0.00	1.00000	0.90251	0.90251	0.90251	0.90251
0.04	0.90251	0.81460	0.81452	0.81452	0.81452
0.08	0.81452	0.73533	0.73511	0.73511	0.73511
0.12	0.73511	0.66385	0.66344	0.66344	0.66344
0.16	0.66344	0.59940	0.59876	0.59876	0.59876
0.20	0.59876	0.54128	0.54038	0.54038	0.54038

Таблица 3. Изменение концентрации реагента (C_x) при $\Delta x = 0.1$

Время	x=0.00	x=0.05	x=0.10	x=0.15	x=0.20
0.00	1.00000	0.90251	0.90251	0.90251	0.90251
0.04	0.90251	0.81456	0.81452	0.81452	0.81452
0.08	0.81452	0.73522	0.73511	0.73511	0.73511
0.12	0.73511	0.66364	0.66344	0.66344	0.66344
0.16	0.66344	0.59908	0.59876	0.59876	0.59876
0.20	0.59876	0.54083	0.54038	0.54038	0.54038

Таблица 4. Изменение концентрации реагента (C_x) при $\Delta x = 0.2$

Время	x=0.00	x=0.05	x=0.10	x=0.15	x=0.20
0.00	1.00000	0.90251	0.90251	0.90251	0.90251
0.04	0.90251	0.81454	0.81452	0.81452	0.81452
0.08	0.81452	0.73516	0.73511	0.73511	0.73511
0.12	0.73511	0.66354	0.66344	0.66344	0.66344
0.16	0.66344	0.59892	0.59876	0.59876	0.59876
0.20	0.59876	0.54061	0.54038	0.54038	0.54038

Для полноты картины мы также провели исследование решения уравнения (1) для схемы «явный правый уголок»; аналогичное (3) представление запишется в виде:

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} = a \frac{C_{m+1}^n - 2C_m^n + C_{m-1}^n}{x^2} - v_x \frac{C_{m+1}^n - C_m^n}{x} - AC_m^n e^{\frac{-E}{RT}}.$$

Теперь в (4) коэффициенты будут следующими:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left(\frac{a}{x^2} - \frac{v_x}{x} \right) \tau, \\ \alpha_2 &= 1 + \left(\frac{v_x}{x} - \frac{2a}{x^2} - Ae^{\frac{-E}{RT}} \right) \tau, \\ \alpha_3 &= \frac{a}{x^2} \tau.\end{aligned}$$

Условие 3) устойчивости в (5) выполняется всегда, а из первых двух следует, что устойчивости схемы необходимо выполнение условий:

$$\begin{aligned}h &\leq \frac{a}{v_x}, \\ \tau &\leq \frac{1}{\frac{2a}{x^2} - \frac{v_x}{x} + Ae^{\frac{-E}{RT}}}.\end{aligned}$$

Наконец, для центральной схемы получили представление (3):

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} = a \frac{C_{m+1}^n - 2C_m^n + C_{m-1}^n}{x^2} - v_x \frac{C_{m+1}^n - C_{m-1}^n}{2x} - AC_m^n e^{\frac{-E}{RT}}.$$

Коэффициенты (4):

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left(\frac{a}{x^2} - \frac{v_x}{2x} \right) \tau, \\ \alpha_2 &= 1 - \left(\frac{2a}{x^2} + Ae^{\frac{-E}{RT}} \right) \tau, \\ \alpha_3 &= \left(\frac{a}{x^2} + \frac{v_x}{2x} \right) \tau.\end{aligned}$$

Условие 3) устойчивости в (5) также выполняется всегда, а из первых двух следует, что устойчивости схемы необходимо выполнение условий:

$$h \leq \frac{2a}{v_x},$$

$$\tau \leq \frac{1}{\frac{2a}{x^2} + A e^{\frac{-E}{RT}}}.$$

Расчеты для различных $\Delta\tau$ и Δx , удовлетворяющих условию устойчивости, показывают, что для всех явных схем (левый и правый уголки, центральная схема) значения концентрации C_x совпадают с точностью до погрешности вычислений.

4. Заключение. На основе уравнения конвекции-диффузии-реакции предложена модель процессов, происходящих в химическом реакторе полунепрерывного действия. Предложенная модель позволит промоделировать динамику химического реактора в процессе получения нанопорошков.

Методом сеток решена задача численного моделирования реактора, рассмотрена проблема сходимости алгоритма расчета, приведены условия устойчивости схемы расчета. Выполнено моделирование процесса растворения вещества в химическом реакторе и на основании полученных данных выбран оптимальный шаг разбиения по времени, при котором сохраняется точность моделирования, сопоставимая с точностью измерительной системы, и выполняется условие устойчивости схемы расчета. Показано, что точность расчетов практически не зависит от величины шага разбиения по длине реактора.

1. *Iordanidis A.A.* Mathematical Modelling of Catalytic Fixed Bed Reactors. Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy / A.A. Iordanidis – Twente: placePlaceTypeUniversity of PlaceNameTwente, 2002. – 195 p.
2. *Чермак И.* Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии / И. Чермак, В. Петерка, И. Заворка. – М.: Мир, 1972. – 624 с.
3. *Пасконов В.М.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов – М.: Наука, 1984. – 288 с.

I. V. Makhno

Investigation of finite-difference approximation of the nonlinear model of a chemical reactors.

The model of the processes occurring in the semi-batch chemical reactor is proposed. The numerical simulation problem for the reactor is solved, the convergence condition of the calculation algorithm is obtained. Simulation process of dissolving the substance in the chemical reactor is fulfilled.

Keywords: nano-sized powders, semi-batch chemical reactor, mathematical model of convection-diffusion-reaction, method of finite differences.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
makhno_i@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 22.05.14

УДК 517.5

©2014. О. А. Очаковская

АППРОКСИМАЦИЯ В L^p ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ИНДИКАТОРОВ ШАРОВ

Рассматривается аппроксимация функций на подмножествах $\mathbb{R}^n$ в пространстве L^p , $2 \leq p < \infty$ линейными комбинациями индикаторов шаров. Рассмотрен случай, когда радиусы шаров пропорциональны положительным нулям функции Бесселя.

Ключевые слова: аппроксимационная теорема Винера, аппроксимация сдвигами.

1. Введение. Классическая теорема Винера о замыкании сдвигов утверждает, что множество всех линейных комбинаций сдвигов функций $f_m \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $m = 1, 2, \dots$, плотно в $L^1(\mathbb{R}^1)$ тогда и только тогда, когда не существует точки $x \in \mathbb{R}^1$, в которой преобразования Фурье всех функций f_m равны нулю (см., например, [1–3]). Винер получил также необходимые и достаточные условия для замкнутости линейной оболочки сдвигов заданных функций из $L^2(\mathbb{R}^1)$. В дальнейшем были получены аналоги этих результатов Винера на некомпактных группах (см. [2]). Изучались также L^p -аналоги теорем Винера при $p \geq 1$. В ряде работ (см., например, [4–6] и библиографию в этих работах) изучались случаи, когда заданные функции f_m имеют компактные носители, а их сдвиги сосредоточены на различных подмножествах евклидовых пространств. В данной работе мы рассматриваем аппроксимацию функций из L^p , $2 \leq p < +\infty$, линейными комбинациями индикаторов шаров, радиусы которых пропорциональны положительным нулям функции Бесселя. Изучается также возможность подобной аппроксимации сдвигами некоторых финитных радиальных функций.

2. Формулировки основных результатов. Как обычно, обозначим через $\mathcal{E}'(H)$ пространство распределений с компактным носителем на полупространстве $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Пусть также J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν , $N_\lambda = \{t > 0 : J_{n/2}(\lambda t) = 0\}$ и Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Пусть $f \in L^p(H)$ при некотором $p \in [2, +\infty)$. Пусть также функция f представима в виде

$$f = \Delta u + \lambda^2 u \quad (1)$$

для некоторых $u \in \mathcal{E}'(H)$, $\lambda > 0$. Тогда f является пределом сходящейся в $L^p(H)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами $r \in N_\lambda$, содержащихся в H .

В качестве следствий приведем следующие результаты, показывающие, что класс функций $f \in L^p(H)$, удовлетворяющих условию теоремы 1, является достаточно широким.

Следствие 1. Пусть $p \in [2, +\infty)$ и функция $f \in L^p(H)$ имеет компактный носитель, содержащийся в H . Пусть также множество нулей преобразования

Фурье функции f содержит сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\lambda > 0$ с центром в нуле. Тогда для этой функции выполнено утверждение теоремы 1.

Далее, положим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ и $\overline{B_R}$ – замыкание B_R . Символом $u * v$ обозначим свертку функций $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 2. Пусть $p \in [2, +\infty)$ и функция $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель. Пусть также вещественнозначная радиальная функция $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) носитель v содержится в шаре $\overline{B_R}$ для некоторого $R > 0$;
- 2) v непрерывна в нуле;
- 3) не существует функции $w \in C(\mathbb{R}^n)$, совпадающей с v почти всюду.

Тогда, если носитель функции $f = u * v$ содержится в H , то для этой функции выполнено утверждение теоремы 1.

Следствие 3. Пусть $p \in [2, +\infty)$ и вещественная радиальная функция $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям 1)-3) из следствия 2. Пусть также $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $h_n > R$. Тогда для функции $v(x - h)$ выполнено утверждение теоремы 1.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через χ_A индикатор этого множества. Если $h \in \mathbb{R}^n$, положим

$$A + h = \{x \in \mathbb{R}^n : x - h \in A\}.$$

Следствие 4. Пусть A – непустое, измеримое, инвариантное относительно вращений подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащееся в шаре $\overline{B_R}$, и функция χ_A непрерывна в нуле. Пусть также $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $h_n > R$. Тогда при любом $p \in [2, +\infty)$ существует $\lambda > 0$ такое, что функция χ_{A+h} является пределом последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, сходящейся в $L^p(H)$.

Далее нам потребуется следующее определение (см. [4, раздел 3.2.3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ называется r -областью, если выполнены следующие условия:

- а) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором замкнутом шаре радиуса r , содержащемся в $\mathcal{O}$;
- б) множество центров всех замкнутых шаров радиуса r , содержащихся в $\mathcal{O}$, является связным.

Пусть $\lambda > 0$ и $r \in N_\lambda$. Рассмотрим функцию $g_{\lambda,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенную равенством

$$g_{\lambda,r}(x) = \begin{cases} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|)r^{(n-2)/2}}{|x|^{(n-2)/2}J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)} - 1, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases}$$

Можно показать, что $g_{\lambda,r} \in C(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta g_{\lambda,r} + \lambda^2 g_{\lambda,r} = \chi_r, \quad (2)$$

где χ_r – индикатор шара B_r и дифференцирование в (2) понимается в смысле распределений.

Теорема 2. Пусть $\lambda > 0$ фиксировано и множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ содержит H и является ζ -областью при некотором $\zeta \in N_\lambda$. Тогда множество всевозможных линейных комбинаций функций вида $g_{\lambda,r}(x-h)$, где $r \in N_\lambda$ и $\text{supp } g_{\lambda,r}(x-h) \subset \mathcal{O}$, является плотным в $L^p(\mathcal{O})$ при любом $p \in [2, +\infty)$.

3. Вспомогательные утверждения. Сначала напомним некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{Z}_+(J_{n/2}) = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ – возрастающая последовательность всех нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, лежащих на $(0, +\infty)$.

Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|x'| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. Пусть также $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $dx' = dx_1 \cdots dx_{n-1}$ – лебегова мера в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Для $\mu > 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \varphi(t, r, \mu) = \begin{cases} (r^2 - t^2)^{\frac{n-1}{4}} J_{\frac{n-1}{2}}(\mu\sqrt{r^2 - t^2}), & |t| < r, \\ 0, & |t| \geq r. \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_{k,\mu}(t) = \varphi(t, \nu_k, \mu), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. Пусть $M_r = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leq r\}$, $u \in L^p(M_r)$ для некоторого $p \in [1, 2]$ и

$$v(t) = \int_{B_r} u(x' + t, x_n) dx, \quad t \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (3)$$

Тогда $v \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ и

$$\widehat{v}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{(n-1)/2} \int_{-r}^r \widehat{u}(\lambda, x_n) \varphi(x_n, r, |\lambda|) dx_n \quad (4)$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$, где $\widehat{u}$ – преобразование Фурье функции $u(x', x_n)$ относительно переменной x' .

Доказательство. Из определения функции v и неравенства Гёльдера имеем оценки

$$|v(t)| \leq \int_{B_r} |u(x' + t, x_n)| dx \leq c_1 \left(\int_{B_r} |u(x' + t, x_n)|^p dx \right)^{1/p}, \quad t \in \mathbb{R}^{n-1},$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от t . Из этих неравенств получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(t)|^p dt &\leq c_1 \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x' + t, x_n)|^p dt dx = \\ &= c_1 \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t, x_n)|^p dt dx = \\ &= c_1 \int_{-r}^r dx_n \int_{|x'| \leq \sqrt{r^2 - x_n^2}} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t, x_n)|^p dt \leq c_2 \|u\|_{L^p(M_r)}^p \end{aligned} \quad (5)$$

для некоторой положительной постоянной c_2 , не зависящей от функции u . Таким образом, получили, что $v \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Докажем равенство (4). Прежде всего, установим, что

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{B_r} e^{i(\lambda, x')} \widehat{u}(\lambda, x_n) dx. \quad (6)$$

Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Из определения преобразования Фурье и определения v получаем

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, t)} v(t) dt = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, t)} \int_{B_r} u(x' + t, x_n) dx dt.$$

Отсюда и из теоремы Фубини следует, что

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, t)} u(x' + t, x_n) dx dt. \quad (7)$$

Из последнего равенства с помощью замены переменной во внутреннем интеграле получаем (6).

Предположим теперь, что $p = 2$. Для $R > 0$ рассмотрим функцию

$$v_R(t) = \int_{B_r} u_R(x' + t, x_n) dx, \quad t \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (8)$$

где

$$u_R(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & |x'| \leq R \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения u_R имеем

$$\|u_R - u\|_{L^2(M_r)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Кроме того, используя неравенство (5) для функции $u_R - u$ вместо u , получаем

$$\|v_R - v\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c_2 \|u_R - u\|_{L^2(M_r)}. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) показывают, что $v_R \rightarrow v$ при $R \rightarrow +\infty$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Поскольку $u_R \in L(M_r)$, по доказанному выше имеем равенство

$$\widehat{v_R}(\lambda) = \int_{B_r} e^{i(\lambda, x')} \widehat{u_R}(\lambda, x_n) dx \quad (11)$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$. Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widehat{v_R}(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda &= \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, x')} \varphi(\lambda) \widehat{u_R}(\lambda, x_n) dx d\lambda = \\ &= \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, x')} \varphi(\lambda) \widehat{u}(\lambda, x_n) dx d\lambda + \end{aligned}$$

$$+ \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, x')} \varphi(\lambda) (\widehat{u_R}(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n)) dx d\lambda. \quad (12)$$

Обозначим через K носитель функции φ . Тогда модуль последнего слагаемого в правой части равенства (12) не превосходит величины

$$\int_{B_r} \int_K |\varphi(\lambda)| |(\widehat{u_R}(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n))| dx d\lambda. \quad (13)$$

Применяя к интегралу в (16) неравенство Коши–Буняковского, получаем, что он не превосходит величины

$$c_3 \left(\int_{M_r} |\widehat{u_R}(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n)|^2 dx_n d\lambda \right)^{1/2}, \quad (14)$$

где c_3 – положительная постоянная, не зависящая от R . По теореме Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{u_R}(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n)|^2 d\lambda = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_R(x', x_n) - u(x', x_n)|^2 dx', \quad (15)$$

то есть, выражение в (14) равно

$$c_3 \left((2\pi)^n \int_{M_r} |u_R(\lambda, x_n) - u(\lambda, x_n)|^2 dx_n d\lambda \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Учитывая условие (9) и произвольность функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, отсюда и из (12) заключаем, что $\widehat{v_R}$ при $R \rightarrow \infty$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ распределений в $\mathbb{R}^{n-1}$ к функции

$$\int_{B_r} e^{i(\lambda, x')} \widehat{u}(\lambda, x_n) dx d\lambda.$$

С другой стороны, по теореме Планшереля имеем

$$\|\widehat{v_R} - \widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = (2\pi)^{n/2} \|v_R - v\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Из этого равенства вытекает, что $\widehat{v_R}$ сходится при $R \rightarrow \infty$ к функции $\widehat{v}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Сопоставляя это с тем, что было получено выше, приходим к равенству (6). Пусть теперь $1 < p < 2$. В этом случае функция u представима в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in L^1(M_r)$, $u_2 \in L^2(M_r)$. При этом

$$\widehat{u}(\lambda, x_n) = \widehat{u_1}(\lambda, x_n) + \widehat{u_2}(\lambda, x_n). \quad (17)$$

Определим функции v_1 и v_2 с помощью равенств (3) при $u = u_1, u_2$, соответственно. Тогда по уже доказанному $v_1 \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $v_2 \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\widehat{v} = \widehat{v_1} + \widehat{v_2}$. Отсюда и из соотношения (17) получаем равенство (6) в общем случае. Далее, записывая интеграл в (6) в виде повторного, находим

$$\widehat{v}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{(n-1)/2} \int_{-r}^r \widehat{u}(\lambda, x_n) \int e^{i(\lambda, x')} dx' dx_n, \quad (18)$$

где внутренний интеграл вычисляется по шару

$$\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq r^2 - x_n^2\}.$$

Используя формулу для преобразования Фурье индикатора шара (см. [7, теорема 4.15]), отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. Пусть $f \in L^p(H)$ для некоторого $p \in [1, 2]$ и

$$\int_{B_r} f(x+w)dx = 0 \quad (19)$$

для всех $r \in \mathcal{Z}_+(J_{n/2})$, $w \in \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > r\}$. Тогда существует функция $u \in C^\infty(H)$ такая, что $\Delta u + u = 0$ и $f = u$ в H почти всюду.

Доказательство. Пусть ψ – произвольная функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре B_1 . Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_H f(u)\psi(x+u)du, \quad x \in H_1 = \{x \in \mathbb{R}^1, x_n > 1\}. \quad (20)$$

Пусть $r \in \mathcal{Z}_+(J_{n/2})$, $z = (t_1, \dots, t_{n-1}, y)$, где $t \in (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y > r + 1$. Из равенств (19) и (20) имеем

$$\begin{aligned} \int_H \int_{B_r} f(u)\psi(x+z+u)du dx = \\ = \int_{B_r} F(x_1 + t_1, \dots, x_{n-1} + t_{n-1}, x_n + y) dx = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

для всех $t \in (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y > r + 1$. Предположим, что $\mu \geq 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ связаны соотношением $\mu = |\lambda|$. Для краткости будем обозначать через $g_\lambda(x_n)$ преобразование Фурье функции $F(x', x_n)$ по переменной x' . Используя лемму 1, из равенства (21) получаем

$$\int_{-\nu_k}^{\nu_k} g_\lambda(x_n + y)\varphi_{k,\mu}(x_n) dx_n = 0 \quad (22)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, $y > \nu_k + 1$ и почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$. Повторяя теперь рассуждения из доказательства теоремы 1 в работе [8], приходим к требуемому утверждению. $\square$

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Поскольку носитель распределения не увеличивает-ся при действии на это распределение дифференциального оператора, из равенства (1) следует, что $\text{supp } f \subset H$. Выберем ненулевую функцию $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, для которой $\text{supp } v \subset H$, где $v = f * \phi$. В силу определения свертки это можно сделать, выбирая функцию ϕ с носителем, содержащимся в шаре достаточно малого радиуса с центром в нуле. Полагая $w = u * \phi$, из равенства (1) делаем вывод, что

$$\Delta w + \lambda^2 w = v. \quad (23)$$

Покажем теперь, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L^p(H)$, аннулирующий индикаторы всех шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, аннулирует v . По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^p(H)$ любой такой функционал имеет вид

$$\Psi(g) = \int_H g(x)f(x)dx, \quad g \in L^p(H), \quad (24)$$

где $f \in L^q(H)$, $q = p/(p-1)$. Поскольку Ψ аннулирует индикаторы всех шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, из (24) имеем

$$\int_B f(x)dx = 0 \quad (25)$$

для любого шара B с радиусом $r \in N_\lambda$, содержащегося в H . В силу эллиптичности оператора Δ и леммы 2 из условия (25) следует, что f почти всюду совпадает с вещественно-аналитической функцией на H , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } H. \quad (26)$$

Используя соотношения (23), (24) и (26), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \int_H f(x)v(x)dx = \int_H f(x)(\Delta w + \lambda^2 w)(x)dx = \\ &= \int_H w(x)(\Delta f + \lambda^2 f)(x)dx = 0, \end{aligned}$$

как и утверждалось. Таким образом, свертка $\chi_A * \phi$ является пределом последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, сходящейся в пространстве $L^p(H)$. Но функция χ_A является пределом некоторой последовательности сверток $\{\chi_A * \phi_m\}_{m=1}^\infty$, сходящейся в $L^p(H)$. Поэтому из произвольности ϕ следует требуемое утверждение. $\square$

Доказательство следствия 1. Докажем, что f представима в виде (1) для некоторого $u \in \mathcal{E}'(H)$. Из [9, теорема 7.3.2] следует, что при указанном условии уравнение (1) разрешимо в пространстве $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть K – выпуклая оболочка носителя функции f , тогда K содержится в H . Из (1) следует, что $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ на открытом множестве $\mathbb{R}^n \setminus K$ для любого решения $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ уравнения (1). Из эллиптичности оператора Δ получаем, что u вещественно аналитична на $\mathbb{R}^n \setminus K$. Таким образом, носитель u содержится в H и требуемое утверждение доказано. $\square$

Доказательство следствия 2. Из определения функции f следует, что $f \in L^p(H)$ (см. [7, теорема 1.3]). Докажем, что множество нулей преобразования Фурье функции f содержит сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\lambda > 0$ с центром в нуле. Из радиальности и интегрируемости функции v следует, что $\hat{v}$ также радиальная функция, непрерывная на $\mathbb{R}^n$. Отсюда и из определения преобразования Фурье вытекает, что

$$\hat{v}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(y)e^{-i(y,x)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} v(-y)e^{-i(y,x)}dy = \overline{\hat{v}(x)},$$

то есть функция $\widehat{v}$ вещественнозначна. Предположим, что $\widehat{v}$ не обращается в нуль в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда $\widehat{v}$ сохраняет знак в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, либо $\widehat{v} \geq 0$, либо $\widehat{v} \leq 0$ в $\mathbb{R}^n$. В силу условия 2) отсюда вытекает (см. [4, теорема 1.6.2]), что $\widehat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что для почти всех x имеет место формула обращения

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y) e^{i(y,x)} dy$$

(см. [4, теорема 1.6.2]). Из этой формулы следует, что $v = w$ почти всюду для некоторой функции $w \in C(\mathbb{R}^n)$. Это противоречит условию 3), поэтому $\widehat{v}(y) = 0$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Полагая $\lambda = |y|$, отсюда и из радиальности $\widehat{v}$ заключаем, что $\widehat{v} = 0$ на сфере $|y| = \lambda$ в $\mathbb{R}^n$. В силу равенства $\widehat{f} = \widehat{u}\widehat{v}$ делаем вывод, что функция $\widehat{f}$ удовлетворяет условиям следствия 1 и требуемое утверждение доказано. $\square$

Доказательство следствия 3. Из условия и доказательства следствия 2 вытекает, что функция $f(x) = v(x - h)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Отсюда и из следствия 1 имеем требуемое утверждение. $\square$

Доказательство следствия 4. Из условия следует, что функция $v = \chi_A$ удовлетворяет условиям следствия 3 при любом $p \in [2, +\infty)$. Отсюда и из следствия 3 получаем требуемое утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L^p(\mathcal{O})$, аннулирующий все функции $g_{\lambda,r}(x - h)$ указанного вида, аннулирует все пространство $L^p(\mathcal{O})$. По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^p(H)$ любой такой функционал имеет вид

$$\Psi(g) = \int_{\mathcal{O}} g(x) f(x) dx, \quad g \in L^p(\mathcal{O}), \quad (27)$$

где $f \in L^q(\mathcal{O})$, $q = p/(p - 1)$. Поскольку Ψ аннулирует указанные выше функции, получаем, что

$$f * g_{\lambda,r} = 0 \quad (28)$$

на области определения. Отсюда и из (2) вытекает, что

$$f * (\Delta g_{\lambda,r} + \lambda^2 g_{\lambda,r}) = f * \chi_r = 0 \quad (29)$$

для всех $r \in N_\lambda$. Из последнего равенства и леммы 2 заключаем, что в полупространстве H функция f совпадает почти всюду с вещественно аналитической функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0. \quad (30)$$

С другой стороны, из (28) вытекает, что

$$(\Delta f + \lambda^2 f) * g_{\lambda,r} = 0. \quad (31)$$

Тогда из теоремы единственности для решений уравнения свертки (см. [4, теорема 3.2.1]) получаем, что равенство (30) выполнено в смысле распределений на всем $\mathcal{O}$.

В силу эллиптичности оператора Δ отсюда следует, что f совпадает почти всюду в $\mathcal{O}$ с вещественно аналитической функцией. Кроме того, имеет место равенство

$$(f * g_{\lambda,r})(x) = 2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) f(x), \quad (32)$$

где функция $\widetilde{g_{\lambda,r}}$ задается равенством

$$\widetilde{g_{\lambda,r}}(z) = \int_{B_r} g_{\lambda,r}(x) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|) dx \quad (33)$$

и $\mathbf{I}_\nu(z) = J_\nu(z) z^{-\nu}$ (см. [4, формула (1.7.9)]). Из определения $\widetilde{g_{\lambda,r}}$ и $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}$ имеем

$$\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) = \frac{1}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \int_{B_r} \left(\mathbf{I}_{\frac{n}{2}} - 1(\lambda|x|) \right)^2 dx - \int_{B_r} \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) dx. \quad (34)$$

Поскольку функция $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)$ принадлежит классу $V_r(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [4, лемма 2.1.1]), второй интеграл в правой части равенства (34) равен нулю. Учитывая, что первый интеграл в (34) положителен, отсюда заключаем, что $\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) \neq 0$. Теперь равенства (32) и (28) показывают, что $f = 0$ в $\mathcal{O}$. Таким образом, $\Psi(g) = 0$ для всех $g \in L^p(\mathcal{O})$ и теорема 2 доказана. $\square$

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 346 с.
2. Edwards R.E. Fourier series a modern introduction. – New York: Springer. – 1982. – 514 p.
3. Loomis L.H. An introduction to abstract harmonic analysis. – New Jersey: Princeton. – 1953. – 321 p.
4. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
6. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces, – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
7. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: – Мир, 1974. – 523 с.
8. Очаковская О.А. Теоремы о шаровых средних для решений уравнения Гельмгольца на неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 2. – С. 161–170
9. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

О. А. Ochakovskaya

Approximation in L^p by linear combinations of indicators of balls.

We investigate an approximation of functions on subsets of $\mathbb{R}^n$ in the space L^p with $2 \leq p < \infty$ by linear combinations of indicator of balls. We consider the case where the radii of balls are proportional to positive zeros of the Bessel function.

Keywords: Wiener's approximation theorem, approximation by shifts.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovskaja@yandex.ua

Получено 30.04.14

УДК 004.655

©2014. А. С. Сенченко

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ПРОЕКЦИИ В ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых в табличных алгебрах операция проекции дистрибутивна относительно операций пересечения и разности таблиц, а также критерий перестановочности операций проекции и активного дополнения. Приведены примеры, иллюстрирующие данные критерии.

Ключевые слова: табличная алгебра, проекция, база данных.

1. Введение. Процесс информатизации общества имеет объективный характер. Ядром для подавляющего большинства современных информационных систем являются базы данных. В настоящее время наиболее распространенными остаются реляционные базы данных, математическая модель которых была впервые предложенная Э. Коддом в 1970 году [1]. С математической точки зрения реляционная база данных является конечным множеством конечных отношений различной размерности (арности) между заранее определёнными множествами элементарных данных.

Табличные алгебры, введённые В.Н. Редько и Д.Б. Бум, построены на основе реляционных алгебр Э. Кодда и существенно их развивают. Они составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Элементы носителя табличной алгебры уточняют реляционные структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах и SQL-подобных языках.

В монографии [2] установлено значительное количество различных свойств операций табличных алгебр, большинство из которых для общего случая выполняются в виде включений. В настоящей работе приведены и доказаны критерии перехода трех таких включений в равенства. Эти равенства представляют интерес для теории табличных алгебр по той причине, что только на основе равенств можно осуществлять эквивалентные преобразования выражений. Эти преобразования необходимы для решения актуальной задачи оптимизации запросов [3], [4].

2. Основные определения. Зафиксируем некоторое непустое множество атрибутов $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. Произвольное конечное подмножество множества A назовем схемой, причем схема может быть пустым множеством. Строкой s схемы R называется множество пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проекция которого по первой компоненте равна R , причем атрибуты $A'_1, \dots, A'_k$ попарно различны, то есть строка является функциональным бинарным отношением. Таблицей схемы R называется конечное множество строк схемы R . Далее в работе рассматриваем таблицы схемы R с количеством атрибутов k . На множестве всех таких таблиц введены такие операции:

- 1) объединение $\bigcup_R$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только

тех строк, которые принадлежат хотя бы одной из исходных таблиц;

2) пересечение $\bigcap_R$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат одновременно обеим исходным таблицам;

3) разность $T_1 - T_2$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат таблице T_1 и не принадлежат таблице T_2 .

Для введения операции насыщения необходимо одно вспомогательное понятие. Активным доменом атрибута A относительно таблицы T называется множество $D_{A,T} = \{d \mid \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$, состоящее, говоря содержательно, из всевозможных значений атрибута A в таблице T . Насыщением $C(T)$ называется таблица $\prod_{A \in R} D_{A,T}$, где R – схема таблицы T , а $\prod$ – оператор прямого (декартового) произведения, отвечающий индексированию $A \mapsto D_{A,T}$, $A \in R$ [5]. Активным дополнением таблицы T называется таблица $\tilde{T} = C(T) - T$.

Введем определение операции проекции. Проекцией по множеству атрибутов $X \subseteq R$ называется унарная параметрическая операция π_X , значением которой является таблица, состоящая из ограничений по X всех строк исходной таблицы: $\pi_X(T) = \{s \mid x \mid s \in T\}$. Здесь ограничение понимается стандартно: $s \mid x = s \cap X \times \text{pr}_2 s$, где $\text{pr}_2 s$ – проекция строки s по второй компоненте. Пусть $X = \{X_1, \dots, X_p\}$. Далее в работе через $O = \{O_1, \dots, O_{k-p}\}$ обозначим множество атрибутов $R - X$, не участвующих в проекции.

Кроме этих операций на множестве всех таблиц введены операции селекции, соединения (в некоторых источниках, например, в [6] эта операция называется эквисоединением), деления таблиц и переименования атрибутов; эти операции не будут использованы в настоящей работе, поэтому их определения не приводим. Табличной алгеброй называют частичную алгебру с носителем – множеством всех таблиц произвольной схемы и приведёнными выше девятью операциями (насыщение рассматривается как вспомогательная операция). В табличной алгебре выделяют две особые таблицы: таблицу $T_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, где ε – пустая строка, при этом схема таблицы T_ε является пустым множеством, и таблицу $T_\emptyset = \emptyset$ – пустое множество строк произвольной (в том числе и непустой) схемы.

3. Основные результаты. В монографии [2] в подразделе о свойствах проекции сформулирован и доказан ряд свойств этой операции. Автором были найдены необходимые и достаточные условия (в виде трех теорем), при которых включения превращаются в равенства для таблиц, не являющихся особыми; для особых таблиц эти равенства тоже выполняются, но в этом случае могут не выполняться критерии. Кроме формулировки и доказательства к каждой теореме будут приведены примеры, иллюстрирующие найденные критерии.

Теорема 1 (о перестановочности проекции и активного дополнения). При $T \neq T_\emptyset$ равенство $(\pi_X(\tilde{T})) = \pi_X(\tilde{T})$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T)$ и любых значений $o_1 \in D_{O_1,T}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p},T}$, строка $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in T$.

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $(\pi_X(\tilde{T})) = \pi_X(\tilde{T})$. От противного, допустим, что условие теоремы не выполняется, то есть существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T)$ и значения $o_1 \in D_{O_1, T}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T}$, что $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \notin T$. Тогда ввиду очевидного выполнения принадлежностей $x_1 \in D_{X_1, T}, \dots, x_p \in D_{X_p, T}$, по определению операции активного дополнения выполняется $s' \in \tilde{T}$, и значит, $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(\tilde{T})$. С другой стороны, принадлежность $s \in \pi_X(T)$ влечет $s \notin (\pi_X(\tilde{T}))$, то есть равенство $(\pi_X(\tilde{T})) = \pi_X(T)$ не выполняется, что невозможно по предположению. Получившееся противоречие доказывает необходимость теоремы.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть выполняется условие теоремы. От противного, допустим, что равенство $(\pi_X(\tilde{T})) = \pi_X(\tilde{T})$ не выполняется. Ввиду выполнимости включения $(\pi_X(T)) \subseteq \pi_X(\tilde{T})$, доказанного в [2] (следствие 2.4.2, стр. 45), равенство может не выполняться только в том случае, когда существует такая строка $w = \{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\}$, что $w \in \pi_X(\tilde{T})$ и $w \notin (\pi_X(\tilde{T}))$. Тогда по определению проекции, из $w \in \pi_X(\tilde{T})$ следует существование в таблице $\tilde{T}$ строки $z = \{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$ для некоторых значений $o_1 \in D_{O_1, T}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T}$. По определению операции активного дополнения выполняется $z \notin T$, и, кроме того, выполняются принадлежности $w_1 \in D_{X_1, T}, \dots, w_p \in D_{X_p, T}$, откуда следует принадлежность $\{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\} \in C(\pi_X(T))$. Поскольку по предположению условие теоремы выполняется, то $z \notin T$ влечет выполнение $\{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\} \notin \pi_X(T)$, поэтому по определению активного дополнения $w = \{(X_1, w_1), \dots, (X_p, w_p)\} \in (\pi_X(\tilde{T}))$, что противоречит допущению. Следовательно, допущение неверно, что доказывает достаточность условия теоремы. $\square$

Проиллюстрируем критерии теоремы 1 на следующем примере.

ПРИМЕР 1.

А	В	С	Ф
1	1	1	1
1	2	2	1

Пусть $X = \{A, B\}$ и $T =$

Для строки $s = \{(A, 1), (B, 1)\} \in \pi_X(T)$ и значений $2 \in D_{C, T}, 1 \in D_{F, T}$ в таблице T отсутствует строка $s = \{(A, 1), (B, 1), (C, 2), (F, 1)\}$, то есть условие теоремы 1 не выполняется. Следовательно, равенство $(\pi_X(T)) = \pi_X(\tilde{T})$ в этом случае также не должно выполняться. Действительно,

А	В	С	Ф	А	В	А	В
$\tilde{T} =$ 1	1	2	1	$\pi_X(\tilde{T}) =$ 1	1	$\pi_X(T) =$ 1	1
1	2	1	1	1	2	1	2

$(\pi_X(\tilde{T})) \neq \pi_X(\tilde{T})$.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых операция проекции дистрибутивна относительно операции пересечения. В монографии [2] доказано включение $\pi_X(\bigcap_i T_i) \subseteq \bigcap_i \pi_X(T_i)$ (утверждение 2.4.1, п. 8, стр. 42) и показано (следствие 2.4.1, п. 1, стр. 43), что достаточным условием для выполнения равенства $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ является условие: X – ключ таблицы $\bigcup_i T_i$, то есть все набо-

ры значений на столбцах из X в таблице $\bigcup_i T_i$ являются уникальными. Рассмотрим усиление этого результата для случая $\bigcap_i T_i \neq T_\emptyset$.

Теорема 2 (дистрибутивность проекции относительно пересечения).

При $\bigcap_i T_i \neq T_\emptyset$ равенство $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap_i \pi_X(T)$ существуют такие значения $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$, что строка $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap_i T_i$.

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$. От противного, допустим, что условие теоремы не выполняется, то есть существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap_i \pi_X(T)$, что для всех значений $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$ строки $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \notin \bigcap_i T_i$. Тогда по определению операций проекции и пересечения непосредственно получаем, что $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \notin \pi_X(\bigcap_i T_i)$, то есть равенство $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ не выполняется, что невозможно по предположению. Получившееся противоречие доказывает необходимость теоремы.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть выполняется условие теоремы. От противного, допустим, что равенство $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ не выполняется. Ввиду выполнимости включения $\pi_X(\bigcap_i T_i) \subseteq \bigcap_i \pi_X(T_i)$, равенство может не выполняться только в том случае, когда существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\}$, что $s \in \bigcap_i \pi_X(T_i)$ и $s \notin \pi_X(\bigcap_i T_i)$. По условию теоремы существуют такие значения $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$, что $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap_i T_i$. Тогда по определению проекции $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(\bigcap_i T_i)$, то есть $s \in \pi_X(\bigcap_i T_i)$. Получившееся противоречие доказывает неверность допущения, что доказывает достаточность условия теоремы. $\square$

Проиллюстрируем критерий теоремы 2 на следующем примере.

ПРИМЕР 2.

	A	B	C	F		A	B	C	F
	1	1	1	1		1	1	1	1
Пусть $R = \{A, B, C, F\}$, $X = \{A, B\}$, $T_1 =$	1	2	1	2	и $T_2 =$	1	1	1	2
	2	2	2	1		1	2	2	1
	2	3	2	1		2	2	2	1

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \\ 1 \quad 1 \\ \text{Тогда } \pi_X(T_1) = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \end{array}, \pi_X(T_2) = \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \end{array} \text{ и } \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2) = \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \end{array} . \end{array}$$

Для строки $s = \{(A, 1), (B, 2)\} \in \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2)$ условие теоремы 2 не выполняется. Следовательно, равенство $\pi_X(T_1 \bigcap_R T_2) = \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2)$ в этом случае также не должно выполняться. Действительно,

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{F} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ T_1 \bigcap_R T_2 = \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array}, \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2) = \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array}, \end{array}$$

то есть $\pi_X(T_1 \bigcap_R T_2) \neq \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2)$.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых операция проекции дистрибутивна относительно операции разности. В монографии [2] доказано включение $\pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2) \subseteq \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$ (утверждение 2.4.1, п. 9, стр. 42) и показано (следствие 2.4.1, п. 2, стр. 43), что достаточным условием для выполнения равенства $\pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$ является условие: X – ключ таблицы $T_1 \bigcap_R T_2$. Рассмотрим усиление этого результата для случая $\pi_X(T_1 \bigcap_R T_2) \neq T_\emptyset$.

Теорема 3 (дистрибутивность проекции относительно разности). *При $\pi_X(T_1 \bigcap_R T_2) \neq T_\emptyset$ равенство $\pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2)$ и всех значений $o_1 \in D_{O_1, T_1 \bigcup_R T_2}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T_1 \bigcup_R T_2}$, из принадлежности $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in T_1$ следует принадлежность $s' \in T_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется равенство $\pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$. От противного, допустим, что условие теоремы не выполняется, то есть существуют такая строка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2)$ и такие значения $o_1 \in D_{O_1, T_1 \bigcup_R T_2}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T_1 \bigcup_R T_2}$, что $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in T_1$ и $s' \notin T_2$. Тогда $s' \in T_1 \bigcap_R T_2$, и по определению проекции $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$, то есть $s \in \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$. С другой стороны, по предположению $s \in \pi_X(T_1)$ и $s \in \pi_X(T_2)$, поэтому по определению разности таблиц $s \notin \pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2)$, то есть в этом случае равенство $\pi_X(T_1) \bigcap_X \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 \bigcap_R T_2)$ не выполняется, что невозможно по предположению. Получившееся противоречие доказывает необходимость теоремы.

Теперь докажем достаточность условия теоремы. Пусть выполняется условие

теоремы. От противного, допустим, что равенство $\pi_X(T_1) - \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 - T_2)$ не выполняется. Ввиду выполнимости включения $\pi_X(T_1) - \pi_X(T_2) \subseteq \pi_X(T_1 - T_2)$, равенство может не выполняться только в том случае, когда существует такая строка $s = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\}$, что $s \in \pi_X(T_1 - T_2)$ и $s \notin \pi_X(T_1) - \pi_X(T_2)$. Поскольку $s \in \pi_X(T_1 - T_2)$, то в таблице $T_1 - T_2$ существует строка $s' = \{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \dots, (O_{k-p}, o_{k-p})\}$, для некоторых значений $o_1 \in D_{O_1, T_1 \cup T_2}, \dots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, T_1 \cup T_2}$, поэтому по определению разности таблиц $s' \in T_1$ и $s' \notin T_2$. Тогда по определению проекции выполняется принадлежность $\{(X_1, x_1), \dots, (X_p, x_p)\} \in \pi_X(T_1)$, то есть $s \in \pi_X(T_1)$. По предположению $s \notin \pi_X(T_1) - \pi_X(T_2)$, что с учетом $s \in \pi_X(T_1)$ по определению разности таблиц может быть только в том случае, когда $s \in \pi_X(T_2)$, следовательно $s \in \pi_X(T_1) \cap \pi_X(T_2)$. Ввиду выполнения условия теоремы в этом случае строка s' должна принадлежать таблице T_2 , что противоречит допущению. Получившееся противоречие доказывает неверность допущения, что доказывает достаточность условия теоремы. $\square$

Проиллюстрируем критерий теоремы 3 на следующем примере.

ПРИМЕР 3.

$$\text{Пусть } R = \{A, B, C, F\}, X = \{A, B\}, T_1 = \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \text{ и } T_2 = \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}.$$

$$\text{Тогда } \pi_X(T_1) = \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}, \pi_X(T_2) = \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \text{ и } \pi_X(T_1) \cap \pi_X(T_2) = \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}.$$

Для строки $s = \{(A, 2), (B, 1)\} \in \pi_X(T_1) \cap \pi_X(T_2)$ существуют такие значения $2 \in D_{C, T_1 \cup T_2}, 2 \in D_{F, T_1 \cup T_2}$, что строка $s = \{(A, 2), (B, 1), (C, 2), (F, 2)\}$ принадлежит таблице T_1 и не принадлежит таблице T_2 , то есть условие теоремы 3 не выполняется. Следовательно, равенство $\pi_X(T_1) - \pi_X(T_2) = \pi_X(T_1 - T_2)$ в этом случае также не должно выполняться. Действительно,

$$T_1 - T_2 = \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}, \pi_X(T_1 - T_2) = \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}, \pi_X(T_1) - \pi_X(T_2) = \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

то есть $\pi_X(T_1) - \pi_X(T_2) \neq \pi_X(T_1 - T_2)$.

4. Выводы. В работе исследованы свойства операции проекции для табличных алгебр. Найдены критерии, при которых некоторые включения из [2] превращаются в равенства. Результаты работы представляют теоретический и практический интерес. На основании равенств можно вводить аналоги определяющих соотношений, являющихся эффективным средством задания и анализа различных дискретных

структур, а также осуществлять эквивалентные преобразования выражений, необходимые для их оптимизации, в том числе и для оптимизации запросов в реляционных базах данных.

Автор благодарит Дмитрия Борисовича Буя за постановку задачи и полезные замечания.

1. *Codd E.F.* A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks / E. F. Codd // Communications of the ACM. – 1970. – V.13, N. 6. – P. 377–387. (русский перевод: Е.Ф. Кодд. Реляционная модель данных для больших совместно используемых банков данных // СУБД. – 1995. – № 1. – С. 145–160).
2. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / [В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков]. – Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 198 с.
3. *Donald E. Knuth.* The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions / D.E. Knuth // Addison-Wesley Professional, 2008. – 240 p.
4. *Мендекович Н.А.* Обзор развития методов лексической оптимизации запросов / Н.А. Мендекович, С.Д. Кузнецов // Труды ИСП РАН. – 2012. – Т. 23. – С. 195–214.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 1 / К. Куратовский. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.
6. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.

A. S. Senchenko

The properties of projection operation in table algebra.

In this paper, the necessary and sufficient conditions under which a projection operation is distributive with respect to intersection and difference operations are found. The criterion of permutability for projection and active complement operations is also found. Obtained conditions are illustrated by some examples.

Keywords: *table algebra, projection, database.*

Киевский национальный ун-т им. Тараса Шевченко
senchenko@pisem.net

Получено 17.12.13

УДК 517.9

©2014. С. М. Чуйко

ОПЕРАТОР ГРИНА ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Найдены конструктивные условия существования, а также обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи, а также оператор Грина задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием.

Ключевые слова: нетеровы краевые задачи, матричные дифференциальные уравнения, импульсное воздействие.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [1, 2, 3]

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha, \beta)}(\cdot) \in C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

матричного дифференциального уравнения [4]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \quad t \neq \tau_i, \quad a < \tau_i < b, \quad \Phi(t) \in \mathbb{C}[a, b] \quad (1)$$

с импульсным воздействием

$$\Delta Z(\tau_i) = S_i Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i + \Psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2)$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (3)$$

Здесь $A, B, S_i, R_i, \Psi_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – постоянные $(n \times n)$ -матрицы. Условия разрешимости и структура решения системы (1) были приведены в монографии [4]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения системы (1) получены в статье [5] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [6]. Функционал, определяющий импульсное воздействие (2), является обобщением использованного ранее выражения [1, 2, 3]; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ – линейный ограниченный векторный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Как известно [4], общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$X_0(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ – нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_n, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_n.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ задачи Коши [5]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \quad Z(a) = \Theta$$

ИМЕЕТ ВИД

$$Z(t, \Theta) = X_0(t, \Theta) + K \left[\Phi(s) \right] (t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где

$$K\left[\Phi(s)\right](t):=\int_a^t U(t)U^{-1}(s)\Phi(s)V(t)V^{-1}(s)ds$$

– оператор Грина, определяющий гладкое частное решение задачи Коши для матричного уравнения (1).

2. Обобщенный оператор Грина задачи Коши. Общее решение однородной части задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2) определяет следующая лемма.

Лемма 1. *Общее решение*

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha, \beta)}(\cdot) \in C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

задачи Коши

$$Z(a) = \Theta, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad t \neq \tau_i \in [a, b], \quad \Delta Z(\tau_i) = S_i Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i \quad (4)$$

имеет вид

[illegible]

где $W_i(\Theta)$ – постоянные $(n \times n)$ - мерные матрицы:

$$W_i(\Theta) := U^{-1}(\tau_i) \left[(I_n + S_i)X(\tau_i - 0, \Theta) + X(\tau_i - 0, \Theta)R_i \right] V^{-1}(\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

При условии $\det \Theta \neq 0$ матрица $X(t, \Theta)$ представляет собой фундаментальную систему решений однородной части задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для однородного матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). Матрицу

$\Xi(t) := X(t, I_n)$ назовем нормальной $\Xi(a) = I_n$ фундаментальной матрицей однородного матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). Утверждение леммы 1 является обобщением соответствующих утверждений [1, 2, 3] на случай матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). При условии $\det \Theta = 0$ матрица $X(t, \Theta)$ вырождена и представляет собой аналог фундаментальной системы решений однородной части задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для однородного дифференциального уравнения с вырожденным импульсным воздействием [7, 8].

ПРИМЕР 1. Условия леммы 1 выполнены для задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B, \quad t \in [0; 3\pi], \quad t \neq \tau_1 := \pi, \quad t \neq \tau_2 := 2\pi, \quad (6)$$

$$\Delta Z(\tau_i) = S_i Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i, \quad i = 1, 2, \quad Z(0) = \Theta := I_3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение $Z(t)$ задачи Коши $Z(0) = I_3$ для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием (6) при $t \in [0; \pi[$ имеет вид

$$Z(t) = U(t) \cdot V(t),$$

где

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 2 \sin t & 5 \sin t & 3 - 3 \cos t - 4 \sin t \\ -\sin t & \cos t + 2 \sin t & 2 - 2 \cos t - \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– нормальные $U(0) = I_3$, $V(0) = I_3$ фундаментальные матрицы. Обозначим вектор-столбцы

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи Коши $Z(0, \Theta) = I_3$ для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием (6)

$$X(t, \Theta) = (X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 \quad X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 \quad X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3), \quad \Theta = I_3$$

определяют матрицы

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь при $t \in [0; \pi[$:

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \cos t + 3 \cos 3t + \sin t - \sin 3t \\ -\cos t + \cos 3t - \sin 3t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\cos t + \cos 3t - 2 \sin t + 3 \sin 3t \\ \cos 3t - \sin t + \sin 3t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 3 - 3 \cos t - 4 \sin t \\ 2 - 2 \cos t - \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta = I_3.$$

Аналогично, при $t \in [\pi; 2\pi[$:

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -6 \cos t + 3 \cos 2t + 4 \cos 3t + 3 \sin t - 3 \sin 3t \\ -3 \cos t + 2 \cos 2t + \cos 3t - 2 \sin 3t \\ \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 \cos t + 3 \cos 3t - 6 \sin t + 3 \sin 2t + 4 \sin 3t \\ 2 \cos 3t - 3 \sin t + 2 \sin 2t + \sin 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -3(-1 + \cos t + 8 \sin t) \\ 2 - 6 \cos t - 9 \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta = I_3$$

и при $t \in [2\pi; 3\pi[$:

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 8 \cos t + 6 \cos 2t - 12 \cos 3t + \sin t - 6 \sin 2t + 4 \sin 3t \\ 3 \cos t + 4 \cos 2t - 4 \cos 3t + 2 \sin t - 4 \sin 2t + 4 \sin 3t \\ 2(\cos 2t - \sin 2t) \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\cos t + 6 \cos 2t - 4 \cos 3t + 8 \sin t + 6 \sin 2t - 12 \sin 3t \\ -2 \cos t + 4 \cos 2t - 4 \cos 3t + 3 \sin t + 4 \sin 2t - 4 \sin 3t \\ 2(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix},$$

$$X(t, \Theta) \cdot \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 6 - 5 \cos t - 20 \sin t \\ 4 - 6 \cos t - 7 \sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = I_3.$$

Общее решение неоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2) определяет следующая лемма.

Лемма 2. *Общее решение*

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha, \beta)}(\cdot) \in C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2) имеет вид

$$Z(t, \Theta) = X(t, \Theta) + K \left[\Phi(s); S_i; R_i \right] (t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где

$$K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](t) = \begin{cases} K\left[\Phi(s)\right](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ U(t)\Gamma_1 V(t) + K\left[\Phi(s)\right](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ & , \\ U(t)\Gamma_p V(t) + K\left[\Phi(s)\right](t), & t \in [\tau_p; b], \end{cases}$$

– оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1) с импульсным воздействием (2), G_i – постоянные $(n \times n)$ – мерные матрицы:

$$\Gamma_i := U^{-1}(\tau_i) \left\{ S_i K \left[\Phi(s) \right] (\tau_i) + K \left[\Phi(s) \right] (\tau_i) R_i + \Phi_i \right\} V^{-1}(\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Утверждение леммы 2 является обобщением соответствующих утверждений [1, 2, 3] на случай матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2). При условии $\det \Theta = 0$ оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1) с импульсным воздействием (2) представляет собой аналог оператора Грина задачи Коши для дифференциального уравнения с вырожденным импульсным воздействием [7, 8].

ПРИМЕР 2. Условия леммы 2 выполнены для задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \quad t \in [0; 3\pi], \quad t \neq \tau_1 := \pi, \quad t \neq \tau_2 := 2\pi, \quad (7)$$

$$\Delta Z(\tau_i) = S_i Z(\tau_i - 0) + Z(\tau_i - 0)R_i + \Psi_i, \quad i = 1, 2, \quad Z(0) = \Theta := I_3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Поскольку однородная часть задачи Коши (7) совпадает с задачей Коши (6), постольку нам известны нормальные фундаментальные матрицы $U(t)$ и $V(t)$, а также фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части задачи Коши (7). Оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения с импульсным воздействием (7) представим в виде

$$K[\Phi(s); S_i; R_i](t) = \begin{pmatrix} K[\Phi(s); S_i; R_i]\mathcal{P}_1 & K[\Phi(s); S_i; R_i]\mathcal{P}_2 & K[\Phi(s); S_i; R_i]\mathcal{P}_3 \end{pmatrix},$$

где при $t \in [0; \pi[$:

$$K[\Phi(s); S_i; R_i](t)\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-12 \cos t - 8t \cos t + 12 \cos 3t - 35 \sin t + \\ + 24t \sin t + 24 \sin 2t + \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(-5 \cos t - 8t \cos t + 5 \cos 3t - 18 \sin t + \\ + 8t \sin t + 16 \sin 2t - 2 \sin 3t) \\ - \sin t + \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$K[\Phi(s); S_i; R_i](t)\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(25 \cos t - 24t \cos t - 24 \cos 2t - \cos 3t - 12 \sin t - \\ - 8t \sin t + 12 \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(14 \cos t - 8t \cos t - 16 \cos 2t + 2 \cos 3t + \sin t - \\ - 8t \sin t + 5 \sin 3t) \\ \cos t - \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$K[\Phi(s); S_i; R_i](t)\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-7t \cos t + 9 \sin t - 6t \sin t) \\ \frac{1}{2}(-4t \cos t + 4 \sin t - t \sin t) \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $t \in [\pi; 2\pi[$:

$$K[\Phi; S_i; R_i]\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-80 \cos t + 6\pi \cos t - 8t \cos t + 80 \cos 3t - 34\pi \cos 3t - \\ - 31 \sin t + 32\pi \sin t + 24t \sin t - 35 \sin 3t - 32\pi \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(-33 \cos t - 4\pi \cos t - 8t \cos t + 25 \cos 3t - 20\pi \cos 3t - \\ - 30 \sin t + 14\pi \sin t + 8t \sin t - 30 \sin 3t - 6\pi \sin 3t) \\ - \sin t \end{pmatrix},$$

$$K[\Phi; S_i; R_i]\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(21 \cos t - 32\pi \cos t - 24t \cos t + 35 \cos 3t + 32\pi \cos 3t - \\ - 80 \sin t + 6\pi \sin t - 8t \sin t + 80 \sin 3t - 34\pi \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(26 \cos t - 14\pi \cos t - 8t \cos t + 30 \cos 3t + 6\pi \cos 3t - \\ - 27 \sin t - 4\pi \sin t - 8t \sin t + 25 \sin 3t - 20\pi \sin 3t) \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](t)\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2\pi \cos t - 7t \cos t - \sin t - 26\pi \sin t - 6t \sin t) \\ \frac{1}{2}(-2 \cos t - 6\pi \cos t - 4t \cos t - 10\pi \sin t - t \sin t) \\ \sin t \end{pmatrix}$$

и при $t \in [2\pi; 3\pi]$:

$$K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](t)\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-132 \cos t + 234\pi \cos t - 8t \cos 3t + 24 \cos 2t + \\ + 172 \cos 3t - 310\pi \cos 3t - 75 \sin t + 208\pi \sin t + \\ + 24t \sin t - 48 \sin 2t + 41 \sin 3t - 100\pi \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(-45 \cos t + 52\pi \cos t - 8t \cos 3t + 16 \cos 2t + \\ + 77 \cos 3t - 144\pi \cos 3t - 58 \sin t + 130\pi \sin t + \\ + 8t \sin t - 32 \sin 2t - 18 \sin 3t + 22\pi \sin 3t) \\ \cos 2t - \sin t - 2 \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](t)\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(65 \cos t - 208\pi \cos t - 24t \cos t + 48 \cos 2t - \\ - 41 \cos 3t + 100\pi \cos 3t - 132 \sin t + 234\pi \sin t - \\ - 8t \sin t + 24 \sin 2t + 172 \sin 3t - 310\pi \sin 3t) \\ \frac{1}{8}(54 \cos t - 130\pi \cos t - 8t \cos t + 32 \cos 2t + \\ + 18 \cos 3t - 22\pi \cos 3t - 39 \sin t + 52\pi \sin t - \\ - 8t \sin t + 16 \sin 2t + 77 \sin 3t - 144\pi \sin 3t) \\ \cos t + 2 \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](t)\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(6 + 10 \cos t - 14\pi \cos t - 7t \cos t + \\ + 29 \sin t - 112\pi \sin t - 6t \sin t) \\ \frac{1}{2}(4 + 8 \cos t - 28\pi \cos t - 4t \cos t + \\ + 10 \sin t - 42\pi \sin t - t \sin t) \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

3. Оператор Грина линейной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием. Подставляя общее решение

$$Z(t, \Theta) = \left(z^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha, \beta)}(\cdot, \Theta) \in C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2)

$$Z(t, \Theta) = X(t, \Theta) + K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](t)$$

в краевое условие (3), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}X(\cdot, \Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K\left[\Phi(s); S_i; R_i\right](\cdot) \quad (8)$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Линейный ограниченный векторный функционал $\mathcal{L}Z(\cdot)$ представим в виде

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \sum_{i=0}^p \mathcal{L}_i Z(\cdot),$$

где

$$\mathcal{L}_0 Z(\cdot) : C^1[a; \tau_1]_I \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}, \dots, \mathcal{L}_p Z(\cdot) : C^1[\tau_p, b]_I \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}X(\cdot, \Theta) = \sum_{i=0}^p \mathcal{L}_i X(\cdot, \Theta) = \sum_{i=0}^p \mathcal{L}_i U(\cdot) W_i(\Theta) V(\cdot) = \sum_{i=0}^p \mathcal{L}_i U(\cdot) \sum_{j=1}^{n^2} \Xi_i^{(j)} c_j V(\cdot);$$

здесь $\Xi_i^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, 2, \dots, n^2$ – базис пространства $\mathbb{R}^{n \times n}$ и c_j , $j = 1, 2, \dots, n^2$ – константы, определяющие разложения матриц

$$W_i(\Theta) = \sum_{j=1}^{n^2} \Xi_i^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

по векторам $\Xi_i^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{n \times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{n^2} \sum_{i=0}^p \mathcal{L}_i U(\cdot) \Xi_i^{(j)} V(\cdot) c_j = \mathcal{A} - \mathcal{L}K \left[\Phi(s); S_i; R_i \right] (\cdot)$$

относительно n^2 констант $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, 2, \dots, n^2$. Определим оператор

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2},$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{n^2}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{M}[\mathcal{B}] \right\} : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{n^2}$ матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{Q}c = \mathcal{B} \tag{9}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{n^2}$, равносильному уравнению (8); здесь

$$\mathcal{Q} := \left[M \left[\mathcal{Q}^{(1)} \right] \quad M \left[\mathcal{Q}^{(2)} \right] \quad \dots \quad M \left[\mathcal{Q}^{(n^2)} \right] \right], \quad \mathcal{B} := M \left[\mathcal{A} \right] - M \left\{ \mathcal{L}K \left[\Phi(s); S_i; R_i \right] (\cdot) \right\},$$

где

$$\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{m \cdot n \times n^2}, \quad \mathcal{Q}^{(j)} := \sum_{i=0}^p \mathcal{L}_i U(\cdot) \Xi_i^{(j)} V(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad j = 1, 2, \dots, n^2.$$

Как известно [2], уравнение (9) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{Q}} \mathcal{B} = 0. \tag{10}$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ – ортопроектор: $\mathbb{R}^{m \cdot n \times m \cdot n} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$. При условии (10) и только при нем общее решение уравнения (9)

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{B} + P_{\mathcal{Q}_r} c_r$$

определяет общее решение матричного уравнения (8)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1} \left[\mathcal{Q}^+ \mathcal{B} \right] + \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right],$$

которое, в свою очередь, определяет решение матричного дифференциального уравнения (1) с импульсным воздействием (2), подчиненное краевому условию (3)

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right].$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}}$ – ортопроектор: $\mathbb{R}^{n^2 \times n^2} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q})$; матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{n^2 \times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$,

$$G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t) := X \left[t, \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+ \mathcal{B}) \right] + K \left[\Phi(s); S_i; R_i \right] (t)$$

– обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Линейная нетерова матричная краевая задача с импульсным воздействием (1)–(3) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (10). При условии (10) и только при нем общее решение*

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha, \beta)}(\cdot) \in C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет вид

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right],$$

где

$$G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t) := X \left[t, \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+ \mathcal{B}) \right] + K \left[\Phi(s); S_i; R_i \right] (t)$$

– обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для линейной матричной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет место критический случай, при этом задача (1)–(3) разрешима лишь для тех неоднородностей $\Phi(t)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (10). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для матричной краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет место не критический случай, при этом задача (1)–(3) разрешима для любых неоднородностей $\Phi(t)$ и $\mathcal{A}$.

Следствие. *В не критическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) нетерова матричная краевая задача с импульсным воздействием (1)–(3) разрешима для любых неоднородностей $\Phi(t)$ и $\mathcal{A}$, при этом общее решение*

$$Z(t) = \left(z^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad Z^{(\alpha, \beta)}(\cdot) \in C^1 \left\{ [a; b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) имеет вид

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{Q_r} c_r \right],$$

где

$$G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t) := X \left[t, \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+ \mathcal{B}) \right] + K \left[\Phi(s); S_i; R_i \right] (t)$$

– обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

Утверждение теоремы и следствия являются обобщением соответствующих утверждений [1, 2, 3] на случай линейной матричной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием. При условии $\det \Theta = 0$ оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1) с импульсным воздействием (2) представляет собой аналог оператора Грина задачи Коши для дифференциального уравнения с вырожденным импульсным воздействием [7, 8].

ПРИМЕР 3. Условия следствия выполнены для антипериодической задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \quad t \in [0; 2\pi], \quad t \neq \tau_1 := \pi, \quad (11)$$

$$\Delta Z(\tau_1) = S_1 Z(\tau_1 - 0) + Z(\tau_1 - 0)R_1 + \Psi_1, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := Z(0) + Z(2\pi) = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Поскольку однородная часть дифференциального уравнения с импульсным воздействием (11) совпадает с однородной частью дифференциального уравнения с импульсным воздействием (6), постольку нам известны нормальные фундаментальные матрицы $U(t)$ и $V(t)$, а также фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части дифференциальной системы (11) и оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения с импульсным воздействием (11). Для антипериодической задачи (11) имеет место не критический ($P_{Q^*} = 0$) случай, следовательно задача (11) разрешима. Единственное решение матричной антипериодической задачи с импульсным воздействием (11)

$$Z(t) = G \left[\Phi(s); \mathcal{A} \right] (t) = X \left[t, \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+ \mathcal{B}) \right] + K \left[\Phi(s); S_1; R_1 \right] (t)$$

определяет матрица

$$\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{Q}^+\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \pi & 3\pi - \frac{15}{4} & \frac{7\pi}{2} \\ \frac{1}{4} + \pi & \pi - 3 & 2\pi + \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что конструкция обобщенного оператора Грина линейной матричной нетеровой краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3) может быть перенесена на задачи с запаздыванием [9], а также на случай более общего импульсного воздействия [10, 11, 12].

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
3. *Мышкис А.Д., Самойленко А.М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сборник. – 1967. – **74 (116)**, № 2. – С. 202–208.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука: 1969. – 367 с.
5. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464–471.
6. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – **50**, № 8. – P. 1162–1169.
7. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 588–594.
8. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доповіді НАНУ. – 1999. – № 6. – С. 43–47.
9. *Бигун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. – **59**, № 4. – С. 435–446.
10. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132–1135.
11. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 51–65.
12. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. Июль 2001. – **379**, № 2. – С. 170–172.

S. M. Chuiko

Green operator for linear Noetherian boundary value problem for the matrix differential equations with impulsive effect.

Constructive conditions for the existence of solutions have been found and the generalized Green operator for the linear Noetherian problem and the Green operator of the Cauchy problem for linear matrix system of the differential equation with impulsive effect has been constructed.

Keywords: Noetherian boundary value problems, matrix differential equations, impulsive effect.

Донбасский государственный педагогический ун-т, Славянск
chujko-slav@inbox.ru

Получено 08.05.14