УДК 517.948

Л. П. Нижник

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Изложены результаты по двухмерной обратной задаче рассеяния для системы Дирака и уравнения струны. Результаты применены к интегрированию пространственно-двухмерных нелинейных уравнений.

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1990. Вып. 2.

1. Обратная задача рассеяния для гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + u_1(x, y)\psi_2 = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + u_2(x, y)\psi_1 = 0$$

с коэффициентами $u_1, u_2 \in L_2(E^2)$ подробно изучена в [1, 2]. Решения системы (1), у которых $\psi_1(x, \cdot)$, $\psi_2(\cdot, y) \in L_2$, представимы в виде

$$\psi_1(x, y) = [I - \mathcal{G}Q_x F P_y]^{-1}(a(y) + \mathcal{G}Q_x b(y)),$$
$$\psi_2(x, y) = [I - FP_y \mathcal{G} Q_x]^{-1}(b(x) + FP_y a(x)), \qquad (2)$$

где F, $\mathcal{G}$ — операторы Гильберта — Шмидта (данные рассеяния); I — тождественный оператор; P_y — семейство ортопроекторов в L_2 $(P_y f(t) = \Theta(t - y) f(t))$; $Q_x = I - P_x$; a и b — произвольные функции из L_2. Правые части формул (2) содержат применение операторов, зависящих от x и y как параметров, к функциям a и b. Аргументы у этих функций означают, что результат должен рассматриваться как функция соответствующего аргумента. Коэффициенты системы (1) выражаются через данные рассеяния по формулам

$$u_1(x, y) = [I - \mathcal{G}Q_x F P_y]^{-1}\mathcal{G}(y, x),$$
$$u_2(x, y) = -[I - FP_y\mathcal{G}Q_x]^{-1}F(x, y), \qquad (3)$$

правые части которых — ядра соответствующих интегральных операторов. Если F и $\mathcal{G}$ — произвольные операторы Гильберта — Шмидта, для которых формулы (2) определены, то они дают общее решение системы (1) с коэффициентами (2).

Формулам (2), (3) можно придать явный вид в случае вырожденности данных рассеяния. Пусть

$$F(x, y) = f_2^{\mathrm{tr}}(x) f_1(y) = \sum_{n=1}^{N} f_{2n}(x) f_{1n}(y),$$
$$\mathcal{G}(x, y) = g_1^{\mathrm{tr}}(x) g_2(y) = \sum_{n=1}^{N} g_{1n}(x) g_{2n}(y), \qquad (4)$$

где векторы $f_k = \mathrm{col}(f_{k1}, \ldots, f_{kN})$, $g_k = \mathrm{col}(g_{k1}, \ldots, g_{kN})$, $k = 1, 2$, имеют компоненты из L_2, а tr обозначает операцию транспонирования. Общее решение системы (1) имеет вид

$$\psi_1(x, y) = a(y) + g_1^{\mathrm{tr}}(y)[I + Q_2(x) Q_1(y)]^{-1}\Big(Q_2(x)\int_y^{\infty} f_1(s) a(s)\, ds + \int_{-\infty}^{x} g_2(s) b(s)\, ds\Big),$$
$$\psi_2(x, y) = b(x) - f_2^{\mathrm{tr}}(x)[I + Q_1(y) Q_2(x)]^{-1}\Big(Q_1(y)\int_{-\infty}^{x} g_2(s) b(s)\, ds + \int_y^{\infty} f_1(s) a(s)\, ds\Big), \qquad (5)$$

где a, b — произвольные функции из L_2, а $Q_1(y)$, $Q_2(x)$ — матрицы:

$$Q_1(y) = -\int_y^\infty f_1(s)\, g_1^{\mathrm{tr}}(s)\, ds; \qquad Q_2(x) = \int_{-\infty}^x g_2(s)\, f_2^{\mathrm{tr}}(s)\, ds. \tag{6}$$

Формулы (3) для коэффициентов дают следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= g_1^{\mathrm{tr}}(y)\, [I + Q_2(x)\, Q_1(y)]^{-1} g_2(x), \\ u_2(x, y) &= -f_2^{\mathrm{tr}}(x)\, [I + Q_1(y)\, Q_2(x)]^{-1} f_1(y). \end{aligned} \tag{7}$$

Формулы (2) для решений гиперболической системы (1) распространяются и на случай пространственно-периодических коэффициентов. Случай $F\mathcal{G} = \mathcal{G}F = 0$ определяет прозрачные потенциалы. Простейшим примером прозрачного периодического потенциала может служить

$$u_1(x, y) = -u_2(y, x) = \sin x \cos y \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2 x \sin^2 y\right]^{-1}. \tag{8}$$

В этом случае общее решение системы (1) представимо в виде

$$\psi_1 = a(y) - \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2 x \sin^2 y\right]^{-1} \cos y \left(\frac{1}{2}\sin^2 x \int a(y) \sin y dy + \right.$$

$$\left. + \int b(x) \sin x dx\right),$$

$$\psi_2 = b(x) - \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2 x \sin^2 y\right]^{-1} \cos x \left(\frac{1}{2}\sin^2 y \int b(x) \sin x dx + \right.$$

$$\left. + \int a(y) \sin y dy\right).$$

Если коэффициенты u_1, u_2 системы (1) связаны соотношением $u_1(x, y) = \eta u_2(x, y)$ с вещественным числом $\eta = \bar{\eta}$, то данные рассеяния связаны соотношением $\mathcal{G} = -\eta F^*$ [9]. Если $u_1(x, y) = -u_2(y, x)$, то $\mathcal{G}(x, y) = F(x, y)$.

2. С системой (1) ассоциируется ряд пространственно-двухмерных нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [3—10]. Рассмотрим два из них: уравнения типа Дэви—Стюардсона [3—5] и модифицированное пространственно-двухмерное уравнение Кортевега — де Фриза [10].

Пространственно-двухмерное нелинейное уравнение Шредингера (уравнение Дэви — Стюардсона) имеет вид

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta w u, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|u|^2,$$

где k и η — постоянные числа, которые масштабными изменениями независимых переменных могут быть сведены к значениям $k = \pm 1$ и $\eta = \pm 1$. Квазипотенциал w выразим через решение u в виде

$$w = -2\frac{\partial}{\partial x}\int_y^\infty |u(x, s; t)|^2 ds + 2k\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^x |u(s, y; t)|^2 ds. \tag{9}$$

Пространственно-двухмерное модифицированное уравнение КдФ имеет вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial x}(wu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)u, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 3\frac{\partial}{\partial y}(u^2), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3\frac{\partial}{\partial x}(u^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Нелинейные эволюционные уравнения (8), (10) допускают представление Лакса

$$LP - QL = 0,$$

где L — оператор Дирака, определяющий левую часть системы (1):

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & u_1 \\ u_2 & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Для уравнения (8) $u_1 = u\,(x,\ y;\ t)$, $u_2 = \eta \bar{u}\,(x,\ y;\ t)$, для уравнения (10) $u_1 = -u_2 = u\,(x,\ y;\ t)$. Явный вид операторов P и Q указан в работах [3, 4, 9, 10]. Для уравнений (8)

$$P = \begin{pmatrix} \mathcal{D} - v_1 & -2u_x \\ 2k\eta\bar{u}_y & \mathcal{D} - v_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mathcal{D} - v_1 & -2ku_y \\ 2\eta\bar{u}_x & \mathcal{D} - v_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 2k\eta\frac{\partial}{\partial y}|u|^2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = -2\eta\frac{\partial}{\partial x}|u|^2.$$

Для уравнений (10)

$$P = \begin{pmatrix} \mathcal{D} - \frac{1}{2}v_y & -3u_x\partial_x \\ 3u_y\partial_y & \mathcal{D} - \frac{1}{2}w_x \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \mathcal{D} - \frac{1}{2}v_y - w_x & 3\partial_y u_y \\ -3\partial_x u_x & \mathcal{D} - \frac{1}{2}w_x - v_y \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \partial_t - \partial_x^3 - \partial_y^3 - v\partial_y - w\partial_x.$$

Уравнения (8), (10) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния [3, 9, 10]. Формулы (3) представляют собой нелинейные и нелокальные замены переменных, линеаризирующие уравнения. Данные рассеяния эволюционируют согласно линейному уравнению $\dot{F} = AF$, где $A = -i\,(\partial_x^2 + k\partial_y^2)$ для уравнения (8) и $A = \partial_x^3 + \partial_y^3$ для уравнения (10). Решение задачи Коши для уравнений (8) и (10) с начальными данными $u\,(x, y;\, 0) = u_0$ можно представить в виде

$$u = \mathfrak{A}^{-1} e^{tA} \mathfrak{A} u_0,$$

где $\mathfrak{A}$ — оператор, переводящий коэффициенты системы (1) в данные рассеяния. Формулы (3) дают выражение для оператора $\mathfrak{A}^{-1}$. Явные решения нелинейных уравнений (8), (10) получаем из формул (7), полагая для уравнений (8) $g_1 = \bar{f}_1$, $g_2 = \eta\bar{f}_2$, а вектор-функции $f_1\,(y;\, t)$, $f_2\,(x;\, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$i\frac{\partial f_1}{\partial t} - k\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \quad i\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0.$$

Для решений уравнения (10) в формулах (7) полагаем $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2$, где f_1, f_2 — произвольные решения линейных уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial^3 f_1}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial^3 f_2}{\partial x^3} = 0.$$

Метод обратной задачи рассеяния позволяет [9] не только предъявить явные решения нелинейных уравнений (8), (10), но и доказать теоремы существования решений задачи Коши с начальными данными из L_2.

3. Для гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + u(x, y)\psi = 0 \tag{11}$$

решение представимо в виде

$$\psi(x, y) = [I - \mathcal{G}Q_yFP_x]^{-1}(a(x) + \mathcal{G}Q_yb(x)) + [I - FP_x\mathcal{G}Q_y]^{-1} \times \\ \times (b(y) + FP_xa(y)), \tag{12}$$

где данные рассеяния $F, \mathcal{G}$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathcal{G}(\eta, \xi)}{\partial \eta},$$

функции a и b — произвольные из L_2.

Решение (12) приводит к явному выражению коэффициента $u(x, y)$ уравнения (11) через данные рассеяния. Полагая

$$F(\xi, \eta) = f^{tr}(\xi)g'(\eta), \quad \mathcal{G}(\xi, \eta) = -g^{tr}(\xi)f'(\eta),$$

$$A(x) = -\int_x^\infty g'(\tau)g^{tr}(\tau)d\tau, \quad B(y) = \int_{-\infty}^y f'(\tau)f^{tr}(\tau)d\tau,$$

$$M(x, y) = (I - B^{tr}A^{tr})^{-1}[I + B^{tr}A - f(y)g^{tr}(x)](I - BA)^{-1},$$

получаем

$$u(x, y) = g'^{tr}(x)M(x, y)f'(y). \tag{13}$$

Формулы (12), (13) распространяются и на случай пространственно-периодических коэффициентов. Простейшим примером служит

$$u(x, y) = \cos x\cos y\left[1 + \frac{1}{2}\sin x\sin y\right]^{-2}.$$

В этом случае общее решение уравнения (11) имеет вид

$$\psi(x, y) = a(x) + b(y) - \left(1 + \frac{1}{2}\sin x\sin y\right)^{-1}\left(\sin y\int a(x)\cos x dx + \right. \\ \left. + \sin x\int b(y)\cos y dy\right).$$

4. Результаты по обратной задаче рассеяния для уравнения (11) применимы к интегрированию двумеризованного уравнения КдФ [11]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + k_2\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 3\frac{\partial}{\partial x}(vu) + 3\frac{\partial}{\partial y}(wu), \\ \frac{\partial v}{\partial y} = k_1\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = k_2\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{14}$$

Частным случаем уравнений (14) является пространственно-симметрическая двумеризация КдФ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 3\frac{\partial}{\partial x}(vu) + 3\frac{\partial}{\partial y}(wu), \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{15}$$

а также уравнение [12]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\frac{\partial}{\partial x}(vu), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{16}$$

Функции вида (13) с $g(x; t)$ и $f(y; t)$, удовлетворяющими линейным уравнениям $\frac{\partial g}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$, дают решения уравнений (14). Элементарным периодическим решением нелинейного уравнения (15) служит

$$u(x, y; t) = \cos(x - t)\cos(y - t)\left[1 + \frac{1}{2}\sin(x - t)\sin(y - t)\right]^{-2},$$

$$v(x, y; t) = w(y, x; t) = f(x - t, y - t),$$

$$f(x, y) = -\sin y\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin y\right)\left[1 + \frac{1}{2}\sin x \sin y\right]^{-2}.$$

1. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев : Наук. думка, 1973.— 182 с.
2. *Нижник Л. П., Починайко М. Д., Тарасов В. Г.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака в характеристических переменных // Спектральная теория операторов в задачах математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 72—93.
3. *Нижник Л. П., Починайко М. Д.* Интегрирование пространственно-двухмерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функцион. анализ и его приложения.— 1982.— 16, вып. 1.— С. 80—82.
4. *Ablowitz M. J., Haberman R.* Nonlinear evolution equations two and three dimensions // Phys. Rev. Lett.— 1975.— 35.— P. 1185—1189.
5. *Cornille H.* Solution of the generalized nonlinear Schrödinger equation in two spatial dimensions // J. Math. Phys.— 1979.— 20, N 1.— P. 199—209.
6. *Kaup D. J.* The inverse scattering solution for the full three dimensional three-wave resonant interaction // Physica 1 D.— 1980.— P. 45—67.
7. *Nachman A. I., Ablowitz M. J.* Multidimensional inverse scattering problem for first-order systems // Stud. Appl. Math.— 1984.— 71, N 3.— P. 251—262.
8. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane // J. Math. Phys.— 1984.— 25, N 8.— P. 2494—2505.
9. *Нижник Л. П., Починайко М. Д.* Исследование задачи Коши для пространственно-двухмерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи рассеяния // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 89—98.
10. *Починайко М. Д.* Высшее пространственно-двумерное нелинейное уравнение Шредингера // Там же.— С. 103—106.
11. *Нижник Л. П.* Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР.— 1980.— 254, № 2.— С. 332—335.
12. *Boiti M., Leon J. J.-P., Manna M., Pempinelli F.* On the spectral transforms of a Korteweg — de Vries equation in two spatial dimensions // Inverse Problems.— 1986.— 2.— P. 271—279.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 29.09.87