УДК 517.5

П. Е. Соболевский

ТЕОРЕМА О СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ЭЙЛЕРА—ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Данная статья — продолжение работы [1]. Рассматривается задача Коши

$$v'(t)+Av(t)=f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),\ v(0)=v^0 \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H. Здесь A — положительно определенный самосопряженный (неограниченный) оператор с областью определения $D(A)$. Пусть $C_0^\alpha=C_0^\alpha([0,1],H)$ $(0<\alpha<1)$— банахово пространство всех определенных на [0, 1] со значениями в H непрерывных функций $f(t)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_\alpha=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t)\|+\sup_{0<t<t+\Delta t\leqslant 1}\|f(t+\Delta t)-f(t)\|\cdot(\Delta t)^{-\alpha}\cdot t^\alpha,$$
$$\|\cdot\|=\|\cdot\|_H. \tag{2}$$

Функция $v(t)$ называется решением задачи (1) в C_0^α, если $v'(t),\ Av(t)\in C_0^\alpha$, и выполнено уравнение и начальное условие (1). Для существования решения, очевидно, необходимо, чтобы $f(t)\in C_0^\alpha$, $v^0\in D(A)$.

Теорема 1 [2]. Для любых $f(t)\in C_0^\alpha$, $v^0\in D(A)$ задача (1) имеет единственное решение $v(t)$ в C_0^α, и справедливо неравенство

$$\|v'\|_\alpha+\|Av\|_\alpha\leqslant M\,[\|Av^0\|+\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha] \tag{3}$$

с M, не зависящим от $f(t)$ и v^0.

Величина M в (3) не зависит также от выбора (положительно определенного самосопряженного или более обще сильно позитивного в произвольном банаховом пространстве) оператора A. Поэтому при любом $\lambda>0$ в условиях теоремы 1 однозначно разрешима задача

$$v'(t)+\lambda Av(t)=f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),\quad v(0)=v^0, \tag{4}$$

и для ее решения $v(t)$ справедливо неравенство

$$\|v'\|_\alpha+\|\lambda Av\|_\alpha\leqslant M\,[\|\lambda Av^0\|+\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha] \tag{5}$$

с M, не зависящим не только от $f(t)$ и v^0, но и от λ.

Рассматривается неявная разностная схема

$$(u_k-u_{k-1})\cdot\tau^{-1}+Au_k=\varphi_k \quad (k=1,\dots,N),\ \tau=N^{-1}. \tag{6}$$

Здесь $u_0\in D(A)$, $\varphi_k\in H$ — заданные элементы. Каждому вектору $\bar\psi=(\psi_1,\dots,\psi_N)$, $\psi_k\in H$, сопоставим норму

$$\|\bar\psi\|_{\alpha,N}=\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\psi_k\|+\max_{1\leqslant k<k+l\leqslant N}\|\psi_{k+l}-\psi_k\|\cdot l^{-\alpha}\cdot k^\alpha \quad (0<\alpha<1). \tag{7}$$

Совокупность векторов с нормой (7) образует банахово пространство $C_0^\alpha(N)$.

Теорема 2 [3]. Справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}_\tau\bar u\|_{\alpha,N}+\|\mathfrak{A}_\tau\bar u\|_{\alpha,N}\leqslant M\,[\|Au_0\|+\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|\bar\varphi\|_{\alpha,N}] \tag{8}$$

с M, не зависящим не только от u_0 и $\bar\varphi$, но и от N. Здесь

$$\mathcal{D}_\tau\bar u=\left(\frac{u_1-u_0}{\tau},\frac{u_2-u_1}{\tau},\dots,\frac{u_N-u_{N-1}}{\tau}\right),\ \mathfrak{A}_\tau\bar u=(Au_1,Au_2,\dots,Au_N). \tag{9}$$

Величина M в (8) не зависит также от выбора A. Поэтому при любом $\lambda > 0$ из соотношения

$$(u_k - u_{k-1})\cdot\tau^{-1} + \lambda A u_k = \varphi_k \quad (k = 1, \dots, N),$$

$$\tau = N^{-1}, \quad u_0, \varphi_k \text{ — заданы,} \tag{10}$$

следует неравенство

$$|\mathcal{D}_\tau \bar{u}\|_{\alpha,N} + \|\lambda \mathfrak{A}_\tau \bar{u}\|_{\alpha,N} \leqslant M[\|\lambda A u_0\| + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|\bar{\varphi}|_{\alpha,N}] \tag{11}$$

с M, не зависящим не только от u_0, $\bar{\varphi}$, N, но и от λ.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — действующий в C_0^α оператор, определенный формулой

$$(\mathfrak{A}v)(t) = Av(t)$$

на таких $v(t) \in C_0^\alpha$, что $Av(t) \in C_0^\alpha$. Очевидно, для любых комплексных $\lambda = |\lambda|\exp(i\varphi)$, $|\varphi| < \pi$, оператор $\lambda + \mathfrak{A}$ имеет ограниченный обратный, и справедлива оценка

$$\|(\lambda + \mathfrak{A})^{-1}\|_{\alpha\to\alpha} \leqslant M(\varphi)(|\lambda| + 1)^{-1}. \tag{12}$$

Пусть $\mathcal{D}_0$ — действующий в C_0^α оператор, определенный формулой

$$(\mathcal{D}_0 v)(t) = v'(t)$$

на таких $v(t) \in C_0^\alpha$, что $v'(t) \in C_0^\alpha$ и $v(0) = 0$. В C_0^α рассмотрим задачу

$$v'(t) + \lambda v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \; v(0) = 0. \tag{13}$$

Если $|\varphi| < \pi/2$, то оператор умножения на λ будет сильно позитивным, и задачу (13) можно рассматривать как частный случай задачи (1) (с сильно позитивным оператором A). Поэтому существует ее единственное решение $v = v(t, \lambda)$, и справедливо неравенство

$$\|v'\|_\alpha + \|\lambda v\|_\alpha \leqslant M(\varphi)\cdot\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha.$$

Это означает, что оператор $\lambda + \mathcal{D}_0$ имеет ограниченный обратный оператор, и справедлива оценка

$$\|(\lambda + \mathcal{D}_0)^{-1}\|_{\alpha\to\alpha} \leqslant M(\varphi)(|\lambda| + 1)^{-1}. \tag{14}$$

Оценки (12) и (14) означают, что операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{D}_0$ позитивны со спектральными углами $\varphi(\mathfrak{A}) = 0$, $\varphi(\mathcal{D}_0) = \pi/2$ и, следовательно, определены их любые степени [14]. Неравенство (5) (при $v^0 = 0$) означает [5], что $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{D}_0$ образуют коэрцитивно позитивную пару операторов. Наконец, $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{D}_0$ коммутируют. Поэтому [5] справедливо более общее (при $v^0 = 0$), чем (3), неравенство

$$\|\mathfrak{A}^\beta \mathcal{D}_0^{1-\beta} v\|_\alpha \leqslant M\cdot\alpha^{-1}\cdot(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1) \tag{15}$$

с M, не зависящим от f.

В случае произвольного v^0 справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{A}^\beta \mathcal{D}_0^{-\beta} v'\|_\alpha \leqslant M[\|Av^0\| + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha] \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1). \tag{16}$$

Здесь

$$(\mathcal{D}_0^{-\beta} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\,ds \text{ для } \beta > 0 \text{ и } f(t) \in C_0^\alpha, \text{ а } \mathcal{D}_0^\beta = (\mathcal{D}_0^{-\beta})^{-1}.$$

Аналогично в $C_0^\alpha(N)$ введем (см. (9)) операторы $\mathfrak{A}_\tau$ и $\mathcal{D}_{\tau,0}$. Для них справедливы оценки ($\psi = \arg\lambda$):

$$\|(\lambda + \mathfrak{A}_\tau)^{-1}\|_{\alpha,N\to\alpha,N} \leqslant M(\psi)(|\lambda| + 1)^{-1} \quad (|\psi| < \pi), \tag{17}$$

$$\|(\lambda + \mathcal{D}_{\tau,0})^{-1}\|_{\alpha,N\to\alpha,N} \leqslant M(\psi)(|\lambda| + 1)^{-1} \quad (|\psi| < \pi/2), \tag{18}$$

означающие (равномерную по τ) позитивность этих операторов со спектральными углами $\varphi(\mathfrak{A}_\tau)=0$, $\varphi(\mathcal{D}_{\tau,0})\leqslant\pi/2$. Неравенство (11) (при $u_0=0$) означает, что $\mathfrak{A}_\tau$ и $\mathcal{D}_{\tau,0}$ образуют (равномерно по τ) коэрцитивно позитивную пару операторов. Наконец, $\mathfrak{A}_\tau$ и $\mathcal{D}_{\tau,0}$ коммутируют. Поэтому справедливо более общее (при $u_0=0$), чем (8), неравенство

$$\|\mathfrak{A}_\tau^\beta\mathcal{D}_{\tau,0}^{1-\beta}\overline{u}\|_{\alpha,N}\leqslant M\cdot\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|\overline{\varphi}\|_{\alpha,N}\qquad(0\leqslant\beta\leqslant1)\tag{19}$$

с M, не зависящим не только от $\overline{\varphi}$, но и от τ.

В случае произвольного u_0 справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{A}_\tau^\beta\mathcal{D}_{\tau,0}^{-\beta}\mathcal{D}_\tau\overline{u}\|_{\alpha,N}\leqslant M\left[\|Au_0\|+\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|\overline{\varphi}\|_{\alpha,N}\right].\tag{20}$$

Здесь $\mathcal{D}_\tau$ определено формулой (9):

$$(\mathcal{D}_{\tau,0}^{-\beta}\overline{\varphi})_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\tau^{\beta-1}\Gamma(k-j+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(k+1-j)}\varphi_j\tau\ \text{ для }\beta>0,\ \text{а}\ \mathcal{D}_{\tau,0}^{\beta}=(\mathcal{D}_{\tau,0}^{-\beta})^{-1}.$$

3. В H рассматривается разностная задача Коши

$$(u_k-u_{k-1})\tau^{-1}+Au_k=f_k\qquad(k=1,\dots,N),\ u_0=v^0,$$

$$f_k=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}f(s)\,ds,\ t_k=k\tau,\quad\tau=1/N,\tag{21}$$

реализующая приближенный метод решения задачи (1), который естественно назвать методом Эйлера.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\|\{A^{1/2}[u_k-v(t_k)]\}_{k=1}^N\|_{\alpha,N}\leqslant\tau^{1/2}\cdot M\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-2}\left[\|v'\|_\alpha+\|Av\|_\alpha\right].\tag{22}$$

Неравенство (3) позволяет получить отсюда оценку скорости сходимости через данные задачи (1) в виде

$$\|\{A^{1/2}[u_k-v(t_k)]\}_{k=1}^N\|_{\alpha,N}\leqslant\tau^{1/2}\cdot M\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-2}\left[\|Av^0\|+\right.$$
$$\left.+\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha\right].\tag{23}$$

Доказательство теоремы 3 будет приведено в следующем пункте.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — система линейно независимых элементов из области определения $D(A^{1/2})$ оператора $A^{1/2}$ и пусть конечные линейные комбинации этих элементов плотны в $D(A^{1/2})$ (в норме $\|A^{1/2}\|$). Через H^n обозначим линейную оболочку элементов $e_1,\dots,e_n$; через P^n — ортопроектор в H на H^n; через Q^n — ортопроектор $D(A^{1/2})$ на H^n. В H^n рассматривается соответствующая (21) разностная задача Коши

$$(u_k^n-u_{k-1}^n)\cdot\tau^{-1}+A^nu_k^n=P^nf_k\qquad(k=1,\dots,N),\ u_0^n=Q^nv^0,\tag{24}$$

реализующая приближенный метод решения задачи Коши, который естественно назвать методом Эйлера—Галеркина. Здесь действующий в H^n оператор A^n определен тождеством

$$(A^n\varphi,\psi)=(A^{1/2}\varphi,A^{1/2}\psi),$$

где $\varphi,\ \psi\in H^n$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H.

Теорема 4. В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\|\{A^{1/2}[u_k^n-u_k]\}_{k=1}^N\|_{\alpha,N}\leqslant$$
$$\leqslant\|(I-Q^n)A^{-1/2}\|_{0\to0}\cdot M\cdot\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-2}\left[\|Av^0\|+\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha\right].\tag{25}$$

Здесь и ниже положено $\|\cdot\|_{0\to0}=\|\cdot\|_{H\to H}$.

Доказательство теоремы 4 проводится методом из [1]. Из оценок (23) и (25) вытекает

Теорема 5. В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\|\{A^{1/2}[u_k^n - v(t_k)]\}_{k=1}^N\|_{\alpha,N} \leqslant$$

$$\leqslant [\tau^{1/2} + \|(I - Q^n)A^{-1/2}\|_{0\to 0}]\cdot M\cdot\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-2}[\|Av^0\| +$$

$$+ \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_\alpha]. \tag{26}$$

В [6] исследован аналог метода (24) для параболического уравнения второго порядка, но не в $C_0^\alpha([0,1],H)$, а в $L^2([0,1],H)$. Установлена оценка вида (26) в предположении, что $\tau = ch^2$, где h — шаг сетки по пространственным переменным.

4. Из (1) следует тождество

$$v_\tau'(t) + Av_\tau(t) = f_\tau(t),\ \psi_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\psi(s)\,ds \qquad (\tau \leqslant t \leqslant 1). \tag{27}$$

Записав его в точке $t = t_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$ и воспользовавшись определением $v_\tau(t)$ и (9), получим соотношение

$$[v_\tau(t_k) - v_\tau(t_{k-1})]\cdot\tau^{-1} + Av_\tau(t_k) = f_k + [\mathscr{D}_\tau(\overline{v} - \overline{v}_\tau)]_k. \tag{28}$$

Именно этим вызван выбор f_k в (21). Положив $z_k = u_k - v_\tau(t_k)$, из (28) и (21) найдем, что

$$(z_k - z_{k-1})\cdot\tau^{-1} + Az_k = [\mathscr{D}_\tau(\overline{v} - \overline{v}_\tau)]_k \qquad (k = 1,\ldots,N).$$

Решив это рекуррентное соотношение, получим формулу

$$z_k = (I + \tau A)^{-k}z_0 + \sum_{j=1}^{k}(I + \tau A)^{-(k+1-j)}[\mathscr{D}_\tau(\overline{v} - \overline{v}_\tau)]_j\,\tau. \tag{29}$$

Положим

$$\psi_k = (I + \tau A)^{-k}z_0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Тогда из (29) следует тождество

$$A^{1/2}z_k = (I + \tau A)^{-k}A^{1/2}z_0 - A\sum_{j=1}^{k}(I + \tau A)^{-(k+1-j)}A^{1/2}\psi_i\tau +$$

$$+ A^{1/2}\mathscr{D}_{\tau,0}^{1/2}\sum_{j=1}^{k}(I + \tau A)^{-(k+1-j)}[\mathscr{D}_{\tau,0}^{1/2}(\overline{v} - \overline{v}_\tau - \overline{\psi})]_j\,\tau \equiv$$

$$\equiv (\overline{J}_1)_k - (\overline{J}_2)_k + (\overline{J}_3)_k, \tag{30}$$

при выводе которого использовано то, что $v^0 - v_\tau(0) - \psi_0 = 0$, и позитивный в $C_0^\alpha(N)$ оператор $\mathscr{D}_{\tau,0}$ коммутирует с оператором $(\mathscr{D}_{\tau,0} + \mathfrak{A}_\tau)^{-1}$. Из определения следует, что

$$z_0 = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau[v(0) - v(s)]\,ds. \tag{31}$$

Поэтому в силу неравенства моментов [4] (для самосопряженного оператора A) будем иметь, что

$$\|A^{1/2}z_0\| \leqslant \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\|A[v(0) - v(s)]\|^{1/2}\|v(0) - v(s)\|^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \tau^{1/2}\frac{2\sqrt{2}}{3}\|Av\|_0^{1/2}\|v'\|_0^{1/2}.$$

Здесь и ниже положено $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_C$. Отсюда и из [3] следуют оценки

$$\|\overline{J}_1\|_{\alpha,N} \leqslant \tau^{1/2}\cdot M\cdot\|Av\|_0^{1/2}\|v'\|_0^{1/2}, \tag{32}$$

$$\|\overline{J}_2\|_{\alpha,N} \leqslant \tau^{1/2}\cdot M\cdot\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|Av\|_0^{1/2}\|v'\|_0^{1/2}. \tag{33}$$

Воспользовавшись неравенством моментов [4] (для позитивного в $C_0^\alpha(N)$ оператора $\mathscr{D}_{\tau,0}$), получим, что

$$J \equiv \|\mathscr{D}_{\tau,0}^{1/2}(\overline{v}-\overline{v}_\tau-\overline{\psi})\|_{\alpha,N} \leqslant M\cdot\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|\mathscr{D}_{\tau,0}(\overline{v}- \\ -\overline{v}_\tau-\overline{\psi})\|_{\alpha,N}^{1/2}\|\overline{v}-\overline{v}_\tau-\overline{\psi}\|_{\alpha,N}^{1/2}. \tag{34}$$

Очевидно,

$$\|\mathscr{D}_\tau v\|_{\alpha,N} \leqslant M\|v'\|_\alpha. \tag{35}$$

Из определения (27) следует, что

$$\|\mathscr{D}_\tau\overline{v}_\tau\|_{\alpha,N} \leqslant M\|v'\|_\alpha. \tag{36}$$

Поскольку

$$(\mathscr{D}_\tau\overline{\psi})_j = -A\psi_j = -(I+\tau A)^{-j}Az_0,\quad Az_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (Av(0)-Av(s))\,ds,$$

то

$$\|\mathscr{D}_\tau\overline{\psi}\|_{\alpha,N} \leqslant M\|Av\|_0. \tag{37}$$

Далее из тождества

$$v(t_j)-v_\tau(t_j) = \frac{1}{\tau}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[v(t_j)-v(s)]\,ds = \int_0^1 [v(t_j)-v(t_i-x\tau)]\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_{t_j-x\tau}^{t_j} v'(z)\,dz\,dx = \int_0^1\int_0^1 v'(t_j-x\tau+yx\tau)\,x\tau\,dy\,dx$$

следует оценка

$$\|\overline{v}-\overline{v}_\tau\|_{\alpha,N} \leqslant \tau\cdot 1/2\,\|v'\|_{\alpha,N}. \tag{38}$$

В силу (31)

$$\|z_0\| \leqslant \tau\cdot 1/2\,\|v'\|_0,$$

и поэтому

$$\|\overline{\psi}\|_{\alpha,N} \leqslant \tau\cdot M\|v'\|_0. \tag{39}$$

Из (34)—(39) следует оценка

$$J \leqslant \tau^{1/2}\cdot M\cdot\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}(\|v'\|_\alpha + \|Av\|_\alpha).$$

Тогда из (30) в силу теоремы о смешанных производных (неравенство (19) при $\beta = 1/2$) будем иметь, что

$$\|\overline{J}_3\|_{\alpha,N} \leqslant \tau^{1/2}\cdot M\cdot\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-2}(\|v'\|_\alpha + \|Av\|_\alpha). \tag{40}$$

Оценки (32), (33) и (40) приводят к оценке

$$\|\{A^{1/2}[u_k - v_\tau(t_k)]\}_{k=1}^N\|_{\alpha,N} \leqslant \tau^{1/2}\cdot M\cdot\alpha^{-2}(1-\alpha)^{-2}(\|v'\|_\alpha + \|Av\|_\alpha). \tag{41}$$

Осталось заменить в этой оценке $v_\tau(t_k)$ на $v(t_k)$. Так как

$$v(t_k) - v_\tau(t_k) = \int_0^1 [v(t_k) - v(t_k - x\tau)]\,dx,$$

то

$$\|\mathfrak{A}_\tau(\overline{v}-\overline{v}_\tau)\|_{\alpha,N} \leqslant 2\|Av\|_\alpha. \tag{42}$$

Так как

$$v(t_k) - v_\tau(t_k) = \int_0^1 \int_0^1 v'(t_k - x\tau + yx\tau)\, x\tau dy dx,$$

то (см. (38))

$$\| \overline{v} - \overline{v}_\tau \|_{\alpha,N} \leqslant \tau \cdot 1/2 \, \| v' \|_\alpha . \tag{43}$$

Из (42) и (43) и неравенства моментов для позитивного в $C_0^\alpha(N)$ оператора $\mathfrak{A}_\tau$ следует оценка

$$\| \{ A^{1/2} [v(t_k) - v_\tau(t_k)] \}_{k=1}^N \|_{\alpha,N} \leqslant \tau^{1/2} \cdot M (\| v' \|_\alpha + \| Av \|_\alpha). \tag{44}$$

Из оценок (41) и (44) вытекает оценка (22).

5. Результаты статьи могут быть перенесены на более общую, чем (1), задачу Коши

$$v'(t) + A(t)\, v(t) = f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad v(0) = v^0 \tag{45}$$

и на периодическую задачу

$$v'(t) + A(t)\, v(t) = f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \; v(1) = v(0). \tag{46}$$

Эти обобщения будут изложены в другой работе.

1. *Соболевский П. Е.* Теорема о смешанных производных и оценки скорости сходимости метода Галеркина для параболических уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 8.— С. 12—16.
2. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1964.— 157, № 1.— С. 52—55.
3. *Соболевский П. Е.* Теория полугрупп и устойчивость разностных схем // Школа по теории операторов в функциональных пространствах.— Новосибирск; ВЦ СО АН СССР, 1975.— С. 1—37.
4. *Красносельский М. А. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М. : Наука, 1966.— 499 с.
5. *Соболевский П. Е.* Дробные степени коэрцитивно позитивных сумм операторов // Сиб. мат. журн.— 1977.— 18, № 3.— С. 637—657.
6. *Акопян Ю. Р., Оганесян Л. А.* Вариационно-разностный метод решения двумерных линейных параболических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1977.— 17, № 1.— С. 109—118.

Воронеж. гос. ун-т

Получено 28.09.87