УДК УДК 539.3:534.1

©2017. **В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев**

ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ НЕЧЕТКОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ОБОБЩЕННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Изложена методика получения оценок для неопределенных показателей концентрации механических напряжений у контура эллиптического упругого включения в тонкой изотропной пластине при наличии разброса в значениях ее физико-механических и геометрических параметров. Способ учета неконтрастности экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния пластины основывается на применении модифицированного эвристического принципа обобщения в теории нечетких вычислений к аналитическим соотношениям, полученным при решении рассматриваемой задачи теории концентрации напряжений в классической детерминистической постановке. Представлены примеры численной реализации предложенной методики.

Ключевые слова: *тонкая изотропная пластина с упругим эллиптическим включением, обобщенное плоское напряженное состояние, модель концентрации механических напряжений у контура включения, учет разброса в значениях геометрических и физико-механических характеристик, нечетко-множественные вычисления, использование модифицированного эвристического принципа обобщения.*

Введение и формулировка целей исследования. Учет влияния неконтрастности в задании исходных параметров геометрической и физической природы при оценивании уровней возможных разбросов в показателях концентрации механических напряжений около отверстий и включений в случае сжатия-растяжения тонких пластин остается на сегодняшний день актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей, имеющей круг неисследованных аспектов. Ведущим теоретическим подходом к ее исследованию, с точки зрения количественной пропорции специализированных тематических публикаций, является применение аппарата вероятностного стохастического анализа, изложенное в работе [1]. Наряду с этим представляет интерес и развитие альтернативных подходов к описанию влияния факторов неопределенности эндогенных параметров в моделях механики деформируемых сред, связанных, в частности, с применением методов теории нечетких множеств. При этом среди вариантов постановки проблемы учета факторов неопределенности в механике деформируемого твердого тела на базе применения аппарата нечеткой математики [2 – 5] можно выделить класс моделей, в которых экзогенные параметры физико-механической и геометрической природы являются аргументами классических четких аналитических расчетных соотношений для искомых эндогенных характеристик. Для таких моделей учет неопределенности может базироваться на переходе к нечетко-множественной интерпретации самих экзогенных параметров, не имеющих четких контрастных описаний, и на применении эвристического принципа обобщения (принципа расширения) при замене части переменных в функциональных соотношениях для эндогенных характеристик аргументами нечетко-множественного типа [7, 8].

С учетом отмеченных соображений, целью настоящей работы является синтез методики применения методов нечеткой математики для описания неопределенности величин коэффициентов концентрации механических напряжений у контура эллиптического упругого включения в тонкой изотропной пластине в случае ее обобщенного плоского напряженного состояния (у контура протяженного цилиндрического включения эллиптического сечения в изотропном массиве при плоской деформации), при наличии разбросов в значениях физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой конструкции. Принцип обобщения для получения искомого нечетко-множественного описания эндогенного показателя концентрации напряжений применяется в форме [7], использующей представления нечетко-интервальных экзогенных параметров суперпозициями по множествам альфа-уровня (альфа-срезам), и, соответственно, эндогенная характеристика на основании разработанного алгоритма решения формируется в аналогичном виде.

1. Постановка задачи и соотношения аналитического решения ее четкого классического варианта. Разрабатываемый алгоритм учета влияния неконтрастности исходных физико-механических параметров конструкции на показатели концентрации напряжений базируется на использовании изложенного в работе [8] варианта аналитического решения классической четкой версии двумерной задачи о напряженном состоянии бесконечной изотропной упругой пластины, содержащей изотропное деформируемое включение G_1 эллиптической формы из отличающегося по свойствам материала. В срединной плоскости пластины вводится система прямоугольных координат Ox_1x_2 с началом, расположенным в геометрическом центре включения. Его контур имеет вид эллипса с полуосями a и b. Полагается, что область G_2, представляющая собой внешность эллиптического контура L включения в комплексной плоскости $z = x_1 + ix_2$, конформно отображается на внешность окружности единичного радиуса во вспомогательной комплексной плоскости $\varsigma = r\ \exp(i\theta)$ при помощи функции

$$z = \omega(\varsigma) = R(\varsigma + m\varsigma^{-1}),$$
$$R = (a+b)/2, \quad m = (a-b)/(a+b), \quad a = R(1+m), \quad b = R(1-m). \tag{1}$$

При этом занимаемая включением область G_1 с разрезом между фокусами на отрезке $[-c,\ c]$, $c = 2R \cdot m^{1/2}$ посредством функции (1) конформно отображается на кольцевую область $\{r \in [m^{1/2},\ 1],\ \theta \in [0,\ 2\pi]\}$ в комплексной плоскости ς. Из (1) $x_1 = R(r + mr^{-1})\cos\theta$, $x_2 = R(r - mr^{-1})\sin\theta$, а направляющий угол $\gamma = (\mathbf{n}, x_1)$ для внешней нормали $\mathbf{n}$ к контуру L эллиптического включения в произвольной точке L определяется соотношением $\exp(i\gamma) = \varsigma\omega'(\varsigma)/\left|\varsigma\omega'(\varsigma)\right|$, из которого в качестве следствия можно получить

$$e^{-2i\gamma} = (((1+m^2)\cos 2\theta - 2m) - i(1-m^2)\sin 2\theta)/(1+m^2-2m\cos 2\theta). \quad (2)$$

Согласно результатам [8], решение задачи о деформировании рассматриваемой пластины методом комплексных потенциалов при различных вариантах задания приложенных на бесконечности G_2 внешних усилий σ_{11}^{∞}, σ_{22}^{∞}, σ_{12}^{∞} приводит к следующим соотношениям для контурных напряжений $(\sigma_{rr}^{(j)})_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(j)})_L$ в областях G_j на линии сопряжения L:

$$\begin{gathered}(\sigma_{rr}^{(1)})_L = (\sigma_{rr}^{(2)})_L = A_1 + \overline{A}_1 - (B_1 e^{2i\gamma} + \overline{B}_1 e^{-2i\gamma})/2 = \\ = F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta),\end{gathered} \quad (3)$$

$$\begin{gathered}(\sigma_{\theta\theta}^{(1)})_L = A_1 + \overline{A}_1 + (B_1 e^{2i\gamma} + \overline{B}_1 e^{-2i\gamma})/2 = \\ = F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta),\end{gathered} \quad (4)$$

$$\begin{gathered}(\sigma_{\theta\theta}^{(2)})_L = 2(A - mD + \overline{A} - m\overline{D} - (mA - \overline{D})e^{2i\theta} - \\ -(m\overline{A} - D)e^{-2i\theta})/(1+m^2-2m\cos 2\theta) - A_1 - \overline{A}_1 + \\ +(B_1 e^{2i\gamma} + \overline{B}_1 e^{-2i\gamma})/2 = F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta).\end{gathered} \quad (5)$$

В соотношениях (3)–(5) введены обозначения [8]

$$\begin{gathered}D = m\overline{A} + \overline{B} - m(A_1 + \overline{A}_1) - B_1, \quad F = (1-m^2)(\mu_1 - \mu_2)/\mu_1, \\ G = (\mu_1 + \kappa_1\mu_2)/\mu_1 - m^2(\mu_1 - \mu_2)(\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2)/(\mu_1(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)), \\ C = (1+\kappa_2)\overline{A} - m(1+\kappa_2)(\mu_1 - \mu_2)(mA + B)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1), \\ A_1 = (FC - G\overline{C})/(F^2 - G^2), \\ B_1 = \mu_1(1+\kappa_2)(mA + B)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1) - mA_1 - \\ -m\overline{A}_1(\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1), \\ A = \tfrac{1}{4}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \tfrac{8i\mu}{1+\kappa}\omega^{\infty}), \quad B = \tfrac{1}{2}(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} + 2i\sigma_{12}^{\infty}), \\ \omega^{\infty} = -\sigma_{12}^{\infty} m(1+\kappa_2)/(2\mu_2(m_2 + \kappa_2)).\end{gathered} \quad (6)$$

Характеристика ω^{∞} описывает угол поворота на бесконечности при соответствующем типе внешнего нагружения. Параметры μ_J и ν_J, соответственно, представляют собой модуль сдвига и коэффициент Пуассона для материала в области G_j. Параметр κ_J имеет представление $\kappa_J = (3-\nu_J)/(1+\nu_J)$ в случае, если в представленной геометрической постановке для составного тела рассматривается задача обобщенного плоского напряженного состояния, либо представление $\kappa_J = (3-\nu_J)/(1+\nu_J)$, если рассматривается двумерная задача плоской деформации. Упругие перемещения $u_j^{(1)}$ в произвольной точке включения могут быть рассчитаны с использованием соотношения

$$2\mu_1(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}) = (\kappa_1 A_1 - \overline{A}_1)z - \overline{B}_1\overline{z}. \quad (7)$$

Для ряда приведенных выше параметров могут быть записаны конкретизированные представления применительно к частным случаям задания внешних усилий на бесконечности. Так, при одностороннем растяжении усилиями $\sigma_{11}^{\infty}=p,\ \sigma_{22}^{\infty}=0,\ \sigma_{12}^{\infty}=0$

$$\begin{gathered}A=p/4,\quad B=-p/2,\quad A_1=C/(F+G),\\ C=p(1+\kappa_2)(1-m(m-2)(\mu_1-\mu_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1))/4,\\ B_1=\mu_1 p(1+\kappa_2)(m-2)/(4(\mu_2+\kappa_2\mu_1))-\\ -mA_1(\mu_2(1-\kappa_1)+2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1);\end{gathered}\tag{8}$$

при одностороннем растяжении усилиями $\sigma_{11}^{\infty}=0,\ \sigma_{22}^{\infty}=p,\ \sigma_{12}^{\infty}=0$

$$\begin{gathered}A=p/4,\quad B=p/2,\quad A_1=C/(F+G),\\ C=p(1+\kappa_2)(1-m(m+2)(\mu_1-\mu_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1))/4,\\ B_1=\mu_1 p(1+\kappa_2)(m+2)/(4(\mu_2+\kappa_2\mu_1))-\\ -mA_1(\mu_2(1-\kappa_1)+2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1);\end{gathered}\tag{9}$$

при всестороннем растяжении $\sigma_{11}^{\infty}=p,\ \sigma_{22}^{\infty}=p,\ \sigma_{12}^{\infty}=0$

$$\begin{gathered}A=p/2,\quad B=0,\quad A_1=C/(F+G),\\ C=p(1+\kappa_2)(1-m^2(\mu_1-\mu_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1))/2,\\ B_1=\mu_1 p(1+\kappa_2)m/(2(\mu_2+\kappa_2\mu_1))-\\ -mA_1(\mu_2(1-\kappa_1)+2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1).\end{gathered}\tag{10}$$

Для представленных частных случаев

$$\begin{gathered}F_2(a,b,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{12}^{\infty},\theta)=(\sigma_{\theta\theta}^{(1)})_L=\\ =2G/(F+G)+B_1((1+m^2)\cos 2\theta-2m)/(1+m^2-2m\cos 2\theta),\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}F_3(a,b,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{12}^{\infty},\theta)=(\sigma_{\theta\theta}^{(2)})_L=\\ =4(A-mD-(ma-D)\cos 2\theta)/(1+m^2-2m\cos 2\theta)-\\ -2G/(F+G)+B_1((1+m^2)\cos 2\theta-2m)/(1+m^2-2m\cos 2\theta).\end{gathered}\tag{12}$$

В случае действия приложенных к пластине сдвиговых усилий σ_{12}^{∞}

$$\begin{gathered}A=-im\sigma_{12}^{\infty}/(m^2+\kappa_2),\quad A_1=C/(F-G),\quad B=i\sigma_{12}^{\infty},\\ B_1=i\mu_1((1+\kappa_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1))(\kappa_2/(m^2+\kappa_2))\sigma_{12}^{\infty}-\\ -mA_1\mu_2(1+\kappa_1)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1),\\ C=-i(1+\kappa_2)(1-(1+m^2(\mu_1-\mu_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1))(m/(m^2+\kappa_2))\sigma_{12}^{\infty},\\ F-G=-\mu_2(1+\kappa_1)(1+m^2((\mu_1-\mu_2)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1))/\mu_1.\end{gathered}\tag{13}$$

2. Методика и результаты исследования нечетко-множественной модели. Представленные соотношения для характеристик концентрации напряжений на границе контакта основного тела и включения подлежит исследованию в рамках предположений о нечеткости задания геометрических и физико-механических параметров конструкции a, b, μ_j, ν_j, а также нечеткости силовых параметров внешнего нагружения σ_{11}^{∞}, σ_{22}^{∞}, σ_{12}^{∞}, которая обусловлена технологическими факторами, разбросами данных экспериментальных замеров величин упругих постоянных материалов, неопределенностью эксплуатационных условий и т.д. При этом разрабатываемый вариант методики получения искомых оценок разброса в значениях анализируемых эндогенных параметров модели базируется на предположениях о задании соответствующих неконтрастных величин нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{\mu}_j$, $\tilde{\nu}_j$, $\tilde{\sigma}_{11}^{\infty}$, $\tilde{\sigma}_{22}^{\infty}$, $\tilde{\sigma}_{12}^{\infty}$, характеризуемыми кортежами реперных точек (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), $(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \mu_{3j}, \mu_{4j})$, $(\nu_{1j}, \nu_{2j}, \nu_{3j}, \nu_{4j})$, $(\sigma_1^{(11)}, \sigma_2^{(11)}, \sigma_3^{(11)}, \sigma_4^{(11)})$, $(\sigma_1^{(22)}, \sigma_2^{(22)}, \sigma_3^{(22)}, \sigma_4^{(22)})$, $(\sigma_1^{(12)}, \sigma_2^{(12)}, \sigma_3^{(12)}, \sigma_4^{(12)})$ и функциями принадлежности $\mu_{\tilde{a}}(a)$, $\mu_{\tilde{b}}(b)$, $\mu_{\tilde{\mu}_j}(\mu_j)$, $\mu_{\tilde{\nu}_j}(\nu_j)$, $\mu_{\tilde{\sigma}_{ij}^{\infty}}(\sigma_{ij}^{\infty})$. Для перечисленных нечетко-интервальных величин вводятся представления в виде разложений по множествам α-срезов

$$\begin{gathered}
\tilde{a} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha], \quad \underline{a}_\alpha = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, \quad \overline{a}_\alpha = \alpha a_3 + (1-\alpha)a_4; \\
\tilde{b} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha], \quad \underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \overline{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4; \\
\tilde{\mu}_j = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\mu}_{\alpha j}, \overline{\mu}_{\alpha j}], \quad \underline{\mu}_{\alpha j} = (1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha\mu_{2j}, \\
\overline{\mu}_{\alpha j} = \alpha\mu_{3j} + (1-\alpha)\mu_{4j}; \quad \tilde{\nu}_j = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\nu}_{\alpha j}, \overline{\nu}_{\alpha j}], \\
\underline{\nu}_{\alpha j} = (1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha\nu_{2j}, \quad \overline{\nu}_{\alpha j} = \alpha\nu_{3j} + (1-\alpha)\nu_{4j}; \\
\tilde{\sigma}_{11}^{\infty} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \overline{\sigma}_\alpha^{(11)}], \quad \underline{\sigma}_\alpha^{(11)} = (1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha\sigma_2^{(11)}, \\
\overline{\sigma}_\alpha^{(11)} = \alpha\sigma_3^{(11)} + (1-\alpha)\sigma_4^{(11)}; \quad \tilde{\sigma}_{22}^{\infty} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \overline{\sigma}_\alpha^{(22)}], \\
\underline{\sigma}_\alpha^{(22)} = (1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha\sigma_2^{(22)}, \quad \overline{\sigma}_\alpha^{(22)} = \alpha\sigma_3^{(22)} + (1-\alpha)\sigma_4^{(22)}; \\
\tilde{\sigma}_{12}^{\infty} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \overline{\sigma}_\alpha^{(12)}], \quad \underline{\sigma}_\alpha^{(12)} = (1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha\sigma_2^{(12)}, \\
\overline{\sigma}_\alpha^{(12)} = \alpha\sigma_3^{(12)} + (1-\alpha)\sigma_4^{(12)}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Возможные варианты анализа рассматриваемой проблемы связаны с предположениями о нечеткости величин упругих постоянных μ_j, ν_j при точном задании геометрических параметров a, b и характеристик внешнего нагружения; о нечеткости величин полуосей эллиптического включения a, b при точных значениях модулей упругости материалов и характеристик внешнего нагружения; о нечеткости всей совокупности экзогенных параметров модели.

В наиболее общем случае при применении эвристического принципа расширения для нечетких оценок показателей концентрации контурных напряжений $(\sigma_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\sigma_{rr}^{(2)}(\theta))_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ могут быть записаны представления

$$(\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{F}_{1\alpha}(\theta), \overline{F}_{1\alpha}(\theta)], \tag{15}$$

$$\underline{F}_{1\alpha}(\theta) =$$

$$= \inf_{\substack{a\in[(1-\alpha)a_1+\alpha a_2,(1-\alpha)a_4+\alpha a_3] \\ b\in[(1-\alpha)b_1+\alpha b_2,(1-\alpha)b_4+\alpha b_3] \\ \mu_j\in[(1-\alpha)\mu_{1j}+\alpha\mu_{2j},(1-\alpha)\mu_{4j}+\alpha\mu_{3j}] \\ \nu_j\in[(1-\alpha)\nu_{1j}+\alpha\nu_{2j},(1-\alpha)\nu_{4j}+\alpha\nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(11)}+\alpha\sigma_2^{(11)},(1-\alpha)\sigma_4^{(11)}+\alpha\sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(22)}+\alpha\sigma_2^{(22)},(1-\alpha)\sigma_4^{(22)}+\alpha\sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(12)}+\alpha\sigma_2^{(12)},(1-\alpha)\sigma_4^{(12)}+\alpha\sigma_3^{(12)}]}} F_1(a,b,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^\infty,\sigma_{22}^\infty,\sigma_{12}^\infty,\theta),$$

$$\overline{F}_{1\alpha}(\theta) =$$

$$= \sup_{\substack{a\in[(1-\alpha)a_1+\alpha a_2,(1-\alpha)a_4+\alpha a_3] \\ b\in[(1-\alpha)b_1+\alpha b_2,(1-\alpha)b_4+\alpha b_3] \\ \mu_j\in[(1-\alpha)\mu_{1j}+\alpha\mu_{2j},(1-\alpha)\mu_{4j}+\alpha\mu_{3j}] \\ \nu_j\in[(1-\alpha)\nu_{1j}+\alpha\nu_{2j},(1-\alpha)\nu_{4j}+\alpha\nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(11)}+\alpha\sigma_2^{(11)},(1-\alpha)\sigma_4^{(11)}+\alpha\sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(22)}+\alpha\sigma_2^{(22)},(1-\alpha)\sigma_4^{(22)}+\alpha\sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(12)}+\alpha\sigma_2^{(12)},(1-\alpha)\sigma_4^{(12)}+\alpha\sigma_3^{(12)}]}} F_1(a,b,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^\infty,\sigma_{22}^\infty,\sigma_{12}^\infty,\theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{F}_{2\alpha}(\theta), \overline{F}_{2\alpha}(\theta)], \tag{16}$$

$$\underline{F}_{2\alpha}(\theta) =$$

$$= \inf_{\substack{a\in[(1-\alpha)a_1+\alpha a_2,(1-\alpha)a_4+\alpha a_3] \\ b\in[(1-\alpha)b_1+\alpha b_2,(1-\alpha)b_4+\alpha b_3] \\ \mu_j\in[(1-\alpha)\mu_{1j}+\alpha\mu_{2j},(1-\alpha)\mu_{4j}+\alpha\mu_{3j}] \\ \nu_j\in[(1-\alpha)\nu_{1j}+\alpha\nu_{2j},(1-\alpha)\nu_{4j}+\alpha\nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(11)}+\alpha\sigma_2^{(11)},(1-\alpha)\sigma_4^{(11)}+\alpha\sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(22)}+\alpha\sigma_2^{(22)},(1-\alpha)\sigma_4^{(22)}+\alpha\sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(12)}+\alpha\sigma_2^{(12)},(1-\alpha)\sigma_4^{(12)}+\alpha\sigma_3^{(12)}]}} F_2(a,b,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^\infty,\sigma_{22}^\infty,\sigma_{12}^\infty,\theta),$$

$$\overline{F}_{2\alpha}(\theta) =$$

$$= \sup_{\substack{a\in[(1-\alpha)a_1+\alpha a_2,(1-\alpha)a_4+\alpha a_3] \\ b\in[(1-\alpha)b_1+\alpha b_2,(1-\alpha)b_4+\alpha b_3] \\ \mu_j\in[(1-\alpha)\mu_{1j}+\alpha\mu_{2j},(1-\alpha)\mu_{4j}+\alpha\mu_{3j}] \\ \nu_j\in[(1-\alpha)\nu_{1j}+\alpha\nu_{2j},(1-\alpha)\nu_{4j}+\alpha\nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(11)}+\alpha\sigma_2^{(11)},(1-\alpha)\sigma_4^{(11)}+\alpha\sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(22)}+\alpha\sigma_2^{(22)},(1-\alpha)\sigma_4^{(22)}+\alpha\sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(12)}+\alpha\sigma_2^{(12)},(1-\alpha)\sigma_4^{(12)}+\alpha\sigma_3^{(12)}]}} F_2(a,b,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^\infty,\sigma_{22}^\infty,\sigma_{12}^\infty,\theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{F}_{3\alpha}(\theta), \overline{F}_{3\alpha}(\theta)], \tag{17}$$

$$\underline{F}_{3\alpha}(\theta) =$$

$$= \inf_{\substack{a\in[(1-\alpha)a_1+\alpha a_2,(1-\alpha)a_4+\alpha a_3] \\ b\in[(1-\alpha)b_1+\alpha b_2,(1-\alpha)b_4+\alpha b_3] \\ \mu_j\in[(1-\alpha)\mu_{1j}+\alpha\mu_{2j},(1-\alpha)\mu_{4j}+\alpha\mu_{3j}] \\ \nu_j\in[(1-\alpha)\nu_{1j}+\alpha\nu_{2j},(1-\alpha)\nu_{4j}+\alpha\nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^{\infty}\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(11)}+\alpha\sigma_2^{(11)},(1-\alpha)\sigma_4^{(11)}+\alpha\sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^{\infty}\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(22)}+\alpha\sigma_2^{(22)},(1-\alpha)\sigma_4^{(22)}+\alpha\sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^{\infty}\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(12)}+\alpha\sigma_2^{(12)},(1-\alpha)\sigma_4^{(12)}+\alpha\sigma_3^{(12)}]}} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta),$$

$$\overline{F}_{3\alpha}(\theta) =$$

$$= \sup_{\substack{a\in[(1-\alpha)a_1+\alpha a_2,(1-\alpha)a_4+\alpha a_3] \\ b\in[(1-\alpha)b_1+\alpha b_2,(1-\alpha)b_4+\alpha b_3] \\ \mu_j\in[(1-\alpha)\mu_{1j}+\alpha\mu_{2j},(1-\alpha)\mu_{4j}+\alpha\mu_{3j}] \\ \nu_j\in[(1-\alpha)\nu_{1j}+\alpha\nu_{2j},(1-\alpha)\nu_{4j}+\alpha\nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^{\infty}\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(11)}+\alpha\sigma_2^{(11)},(1-\alpha)\sigma_4^{(11)}+\alpha\sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^{\infty}\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(22)}+\alpha\sigma_2^{(22)},(1-\alpha)\sigma_4^{(22)}+\alpha\sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^{\infty}\in[(1-\alpha)\sigma_1^{(12)}+\alpha\sigma_2^{(12)},(1-\alpha)\sigma_4^{(12)}+\alpha\sigma_3^{(12)}]}} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta),$$

в которых вид функций $F_j(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta)$ определяется представлениями (3) – (5), (11), (12).

При постановке задач парциального учета влияния факторов неопределенности только для отдельных экзогенных параметров рассматриваемых моделей, те параметры, которые при этом рассматриваются в варианте классического четкого задания, исключаются из числа варьируемых в отношениях (15) – (17). К примеру, в случае парциальной оценки влияния разброса в значениях геометрических характеристик – учета нечеткости величин полуосей эллиптического включения a, b при точных значениях модулей упругости материалов и характеристик внешнего нагружения, выражения (15) – (17) могут быть записаны в виде

$$(\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{F}_{1\alpha}(\theta), \overline{F}_{1\alpha}(\theta)], \tag{18}$$

$$\underline{F}_{1\alpha}(\theta) = \inf_{m\in[(1-\alpha)m_1+\alpha m_2,(1-\alpha)m_4+\alpha m_3]} F_1(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta),$$
$$\overline{F}_{1\alpha}(\theta) = \sup_{m\in[(1-\alpha)m_1+\alpha m_2,(1-\alpha)m_4+\alpha m_3]} F_1(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{F}_{2\alpha}(\theta), \overline{F}_{2\alpha}(\theta)], \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\underline{F}_{2\alpha}(\theta) &= \inf_{m\in[(1-\alpha)m_1+\alpha m_2,(1-\alpha)m_4+\alpha m_3]} F_2(m,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{12}^{\infty},\theta),\\
\overline{F}_{2\alpha}(\theta) &= \sup_{m\in[(1-\alpha)m_1+\alpha m_2,(1-\alpha)m_4+\alpha m_3]} F_2(m,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{12}^{\infty},\theta);
\end{aligned}$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{F}_{3\alpha}(\theta),\overline{F}_{3\alpha}(\theta)], \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\underline{F}_{3\alpha}(\theta) &= \inf_{m\in[(1-\alpha)m_1+\alpha m_2,(1-\alpha)m_4+\alpha m_3]} F_3(m,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{12}^{\infty},\theta),\\
\overline{F}_{3\alpha}(\theta) &= \sup_{m\in[(1-\alpha)m_1+\alpha m_2,(1-\alpha)m_4+\alpha m_3]} F_3(m,\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2,\sigma_{11}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{12}^{\infty},\theta).
\end{aligned}$$

Здесь $m_j \quad (j=\overline{1,4})$ – реперные точки нечеткого интервала $\tilde{m}$, которые в соответствии с выражением (1) и правилами арифметики нечетких интервалов имеют вид

$$\begin{aligned}
&m_1 = (a_1-b_4)/(a_4+b_4), \quad m_2 = (a_2-b_3)/(a_3+b_3),\\
&m_3 = (a_3-b_2)/(a_2+b_2), \quad m_4 = (a_4-b_1)/(a_1+b_1).
\end{aligned} \tag{21}$$

В представляемых вариантах численной реализации описанной методики получения нечетких оценок для показателя концентрации контурных напряжений рассматривается всестороннее растяжение пластин из катаного алюминия с эллиптическими титановыми включениями, для которых упругие постоянные μ_J $[10^{10}Pa]$, ν_j и величины полуосей a $[10^{-2}m]$, b $[10^{-2}m]$ для контура включения являются неконтрастными экзогенными параметрами модели и задаются нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами с кортежами реперных значений

$$\begin{gathered}
\tilde{\mu}_1 : (4.35, 4.37, 4.39, 4.41); \quad \tilde{\mu}_2 : (2.60, 2.61, 2.63, 2.70);\\
\tilde{\nu}_1 : (0.31, 0.315, 0.325, 0.33); \quad \tilde{\nu}_2 : (0.32, 0.34, 0.35, 0.36);\\
\tilde{a} : (1.90, 1.95, 2.05, 2.10); \quad \tilde{b} : (0.90, 0.95, 1.05, 1.10).
\end{gathered}$$

Соответствующие профили функций принадлежности $\mu_{\tilde{a}}(a)$, $\mu_{\tilde{b}}(b)$, $\mu_{\tilde{m}}(b)$, $\mu_{\tilde{\mu}_j}(\mu_j)$, $\mu_{\tilde{\nu}_j}(\nu_j)$ для нечетко-множественных характеристик $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{\mu}_j$, $\tilde{\nu}_j$ представлены на рис. 1 – 7.

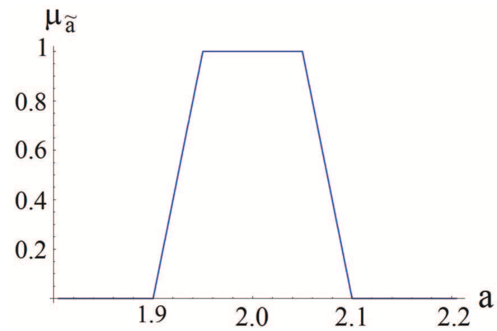

Рис. 1. Функция принадлежности для $\tilde{a}$.

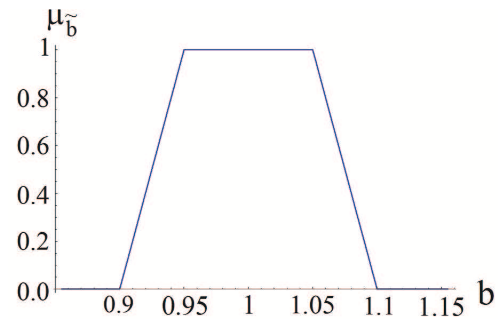

Рис. 2. Функция принадлежности для $\tilde{b}$.

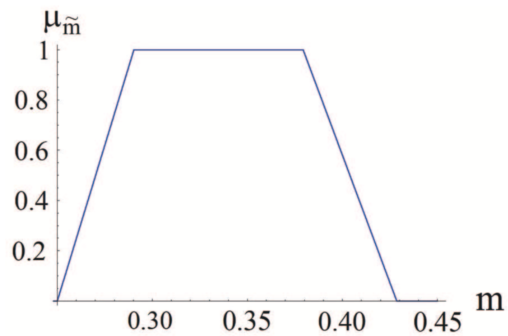

Рис. 3. Функция принадлежности для $\tilde{m}$.

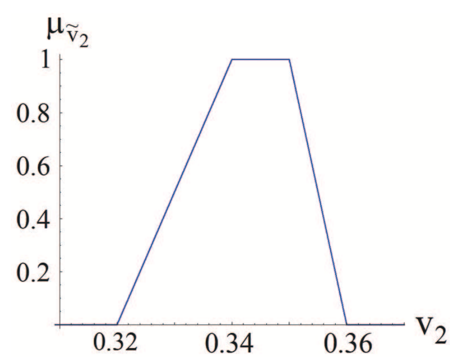

Рис. 4. Функция принадлежности для $\tilde{\nu}_2$.

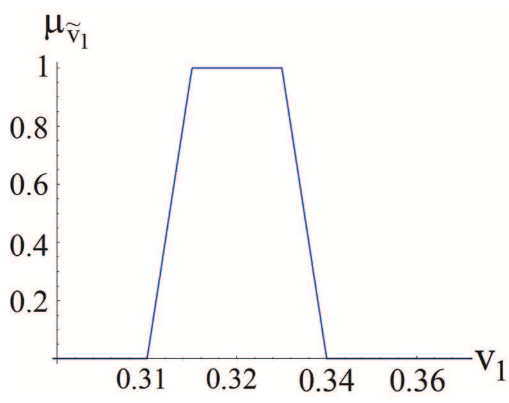

Рис. 5. Функция принадлежности для $\tilde{\nu}_1$.

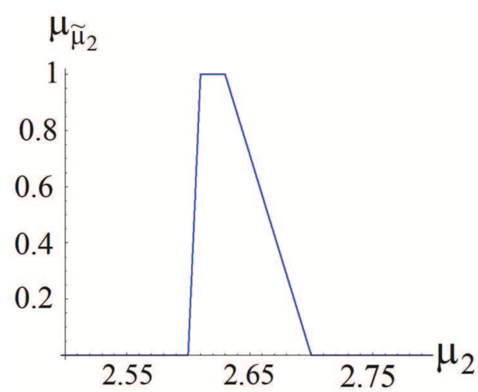

Рис. 6. Функция принадлежности для $\tilde{\mu}_2$.

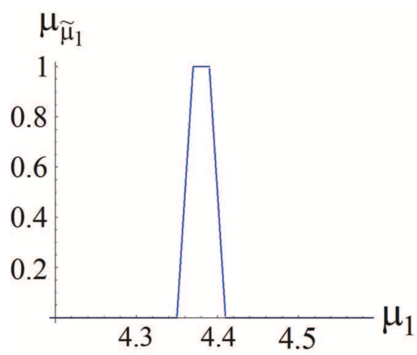

Рис. 7. Функция принадлежности для $\tilde{\mu}_1$.

Описания нечетких оценок отнесенных к значению параметра p показателей концентрации напряжений $(\sigma_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\sigma_{rr}^{(2)}(\theta))_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ в представляемом случае всестороннего растяжения пластины усилиями интенсивности $\sigma_{11}^{\infty} = p$, $\sigma_{22}^{\infty} = p$, $\sigma_{12}^{\infty} = 0$ в рамках допущения о нечеткости очертаний включения при фиксированных значениях упругих постоянных для нескольких значений углового параметра θ представлены на рис. 8 (*а, б, в*) – 10 (*а, б, в*).

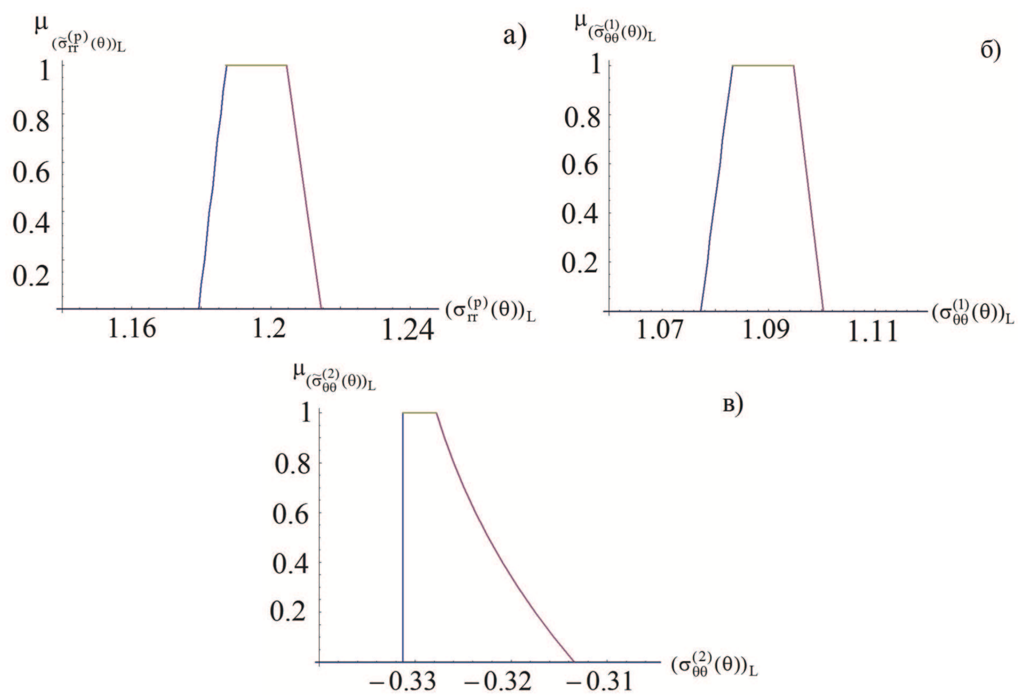

Рис. 8. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ для значения параметра $\theta = 2^{\circ}$.

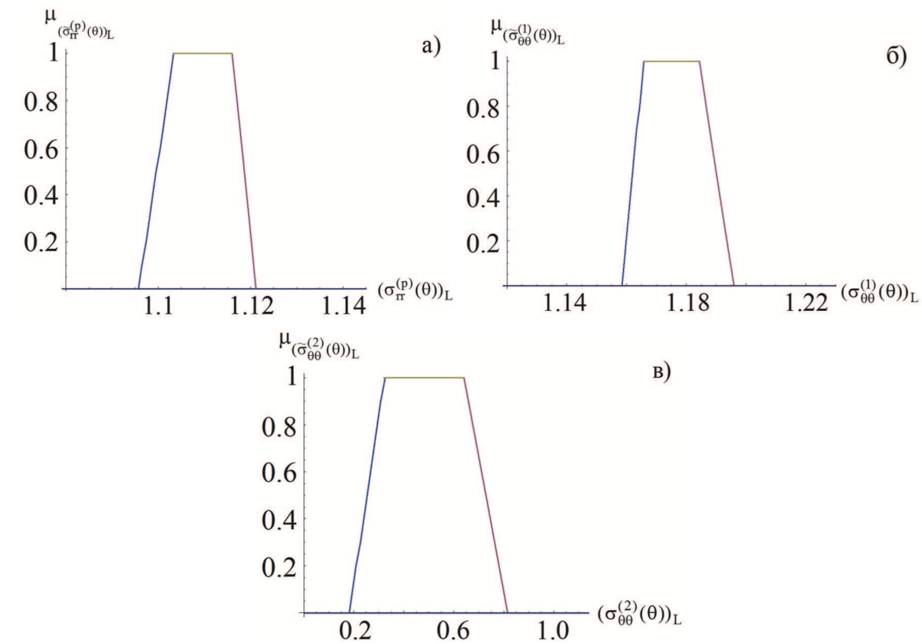

Рис. 9. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ *для значения параметра* $\theta = 45^\circ$.

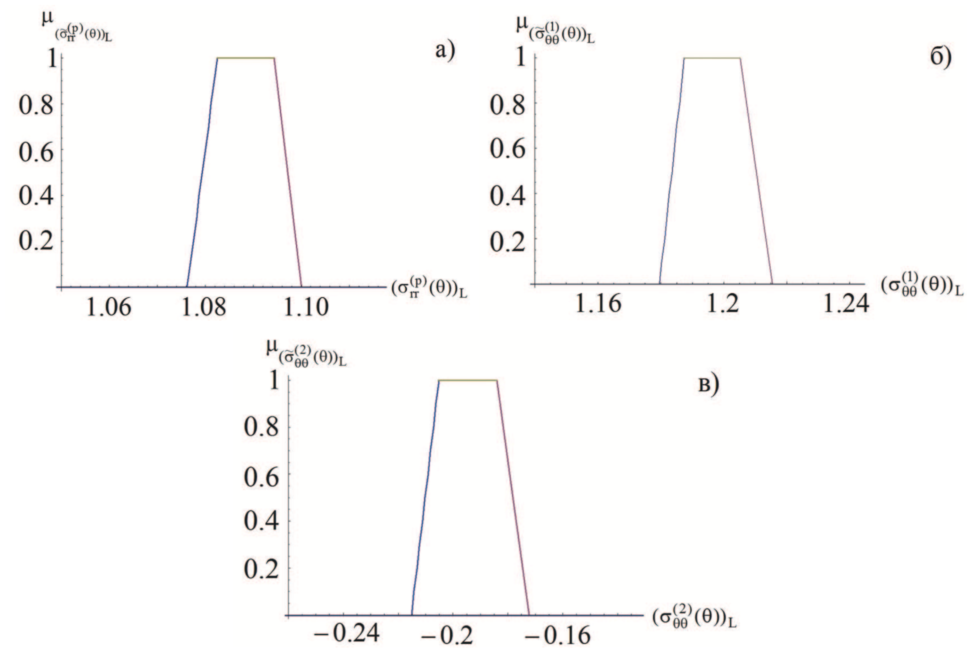

Рис. 10. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ *для значения параметра* $\theta = 88^\circ$.

Аналогичные по смыслу оценки, получаемые в рамках предположения о том, что нечеткостью из всех экзогенных параметров модели характеризуются только модули Пуассона материалов пластины и включения, представлены на рис. 11 (*а, б, в*)$-$13 (*а, б, в*).

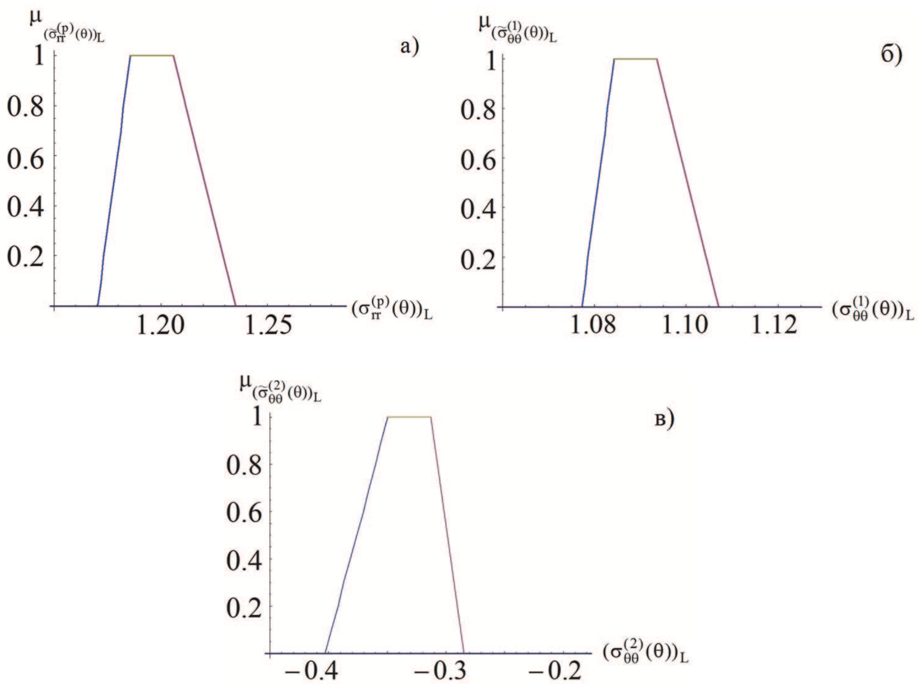

Рис. 11. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ *для значения параметра* $\theta = 2^\circ$.

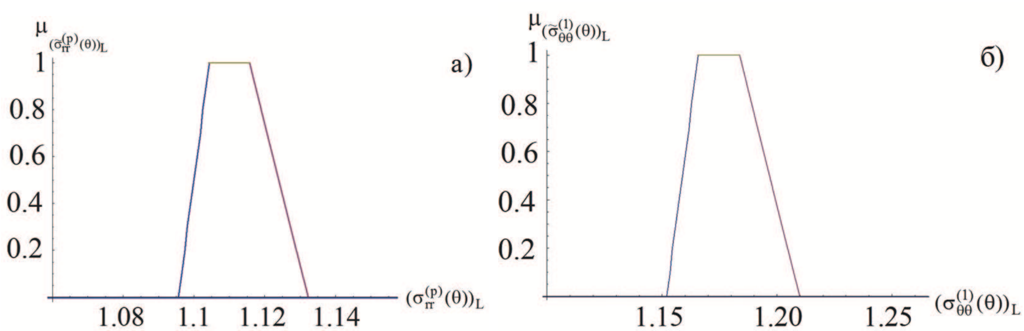

Рис. 12 (а, б). *Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик* $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ *для значения параметра* $\theta = 45^\circ$.

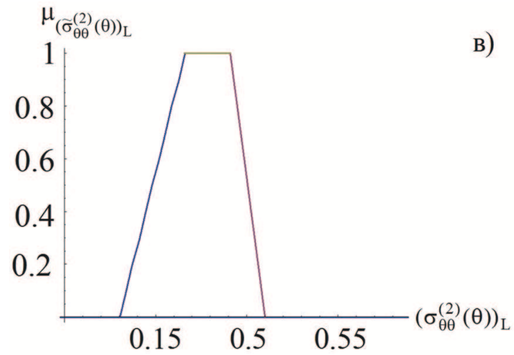

Рис. 12 (в). *Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик* $(\tilde{\sigma}^{(2)}_{\theta\theta}(\theta))_L$ *для значения параметра* $\theta = 45^\circ$.

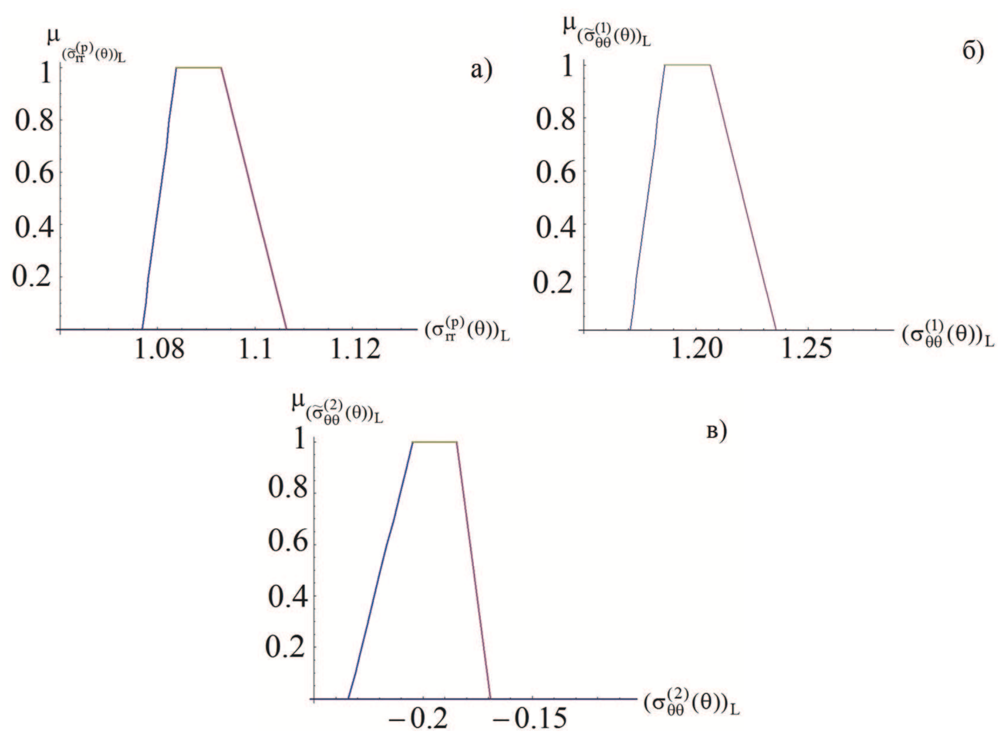

Рис. 13. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $(\tilde{\sigma}^{(p)}_{rr}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}^{(1)}_{\theta\theta}(\theta))_L$, $(\tilde{\sigma}^{(2)}_{\theta\theta}(\theta))_L$ *для значения параметра* $\theta = 2^\circ$.

Полученные оценки позволяют сделать вывод о различии степени разброса оценок показателей концентрации контурных напряжений для точек участков границы включения с различной кривизной при учете факторов геометрической либо механической неопределенности в исходных параметрах рассматриваемой задачи.

Выводы. В работе представлены результаты анализа проблемы учета нечеткости геометрических, механических и силовых экзогенных характеристик в модели получения оценок для показателей концентрации механических напряжений на контурах растягиваемых тонких изотропных пластин с изотропными упругими включениями эллиптического очертания. Для учета влияния разбросов в значениях экзогенных параметров, интерпретируемых как нечетко-множественные величины, используется подход, заключающийся в применении альфа-уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения к четким аналитическим представлениям для искомых характеристик, полученным с использованием аппарата теории комплексных потенциалов. Представлены примеры численной реализации представляемой методики с получением нечетко-множественных оценок для показателей концентрации напряжений у контура контакта пластины и включения в рамках допущения о том, что нечеткие геометрические и физико-механические параметры представлены нечеткими трапецеидальными интервалами.

1. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
2. *Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожев С.В.* Оценки влияния нечеткости геометрических экзогенных параметров в модели растяжения ортотропной пластины с эллиптическим отверстием // Ж. теорет. и прикл. механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 19–26.
3. *Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Анализ неопределенности в оценках концентрации напряжений у контура эллиптического отверстия с нечетким показателем эксцентриситета в анизотропной пластине // XII Всерос. школа-семинар "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете" (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017 г., Россия): Тез. докл. – Ростов-на-Дону: Изд-во Юж. федерал. ун-та, 2017. – С. 141.
4. *Болнокин В.Е., Нгуен Динь Чунг, Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Оценки влияния нечеткости параметров геометрических объектов в эвристических расчетных алгоритмах // Системы управления и информационные технологии. – 2017. – № 1(67). – С. 68–71.
5. *Сторожев С.В.* Нечетко-множественный анализ влияния разброса физико-механических и геометрических параметров при исследовании концентрации напряжений в пластинах с эллиптическими отверстиями // Донецкие чтения–2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Материалы Междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых (Донецк, 17–20 октября 2017 г.). – Т. 1: Физ.-мат. и техн. науки / под общей ред. проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – С. 35–36.
6. *Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология – М.: Изд-во "Машиностроение–1", 2004. – 397 с.
7. *Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНIВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
8. *Мальков В.М., Малькова Ю.В.* Деформация пластины с упругим эллиптическим включением // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. – 2015. – **2** (60), вып. 4. – С. 617–632.

V.E. Bolnokin, S.B. Nombre, S.V. Storozhev

Estimations of influence of uncertainty of exogenous parameters in the model of generalized plane stressed state of isotropic plate with elliptic elastic inclusion

A technique for obtaining estimates for uncertain indices of concentrations of mechanical stresses on the contour of an elliptical elastic inclusion in a thin isotropic plate with fuzzy values of its physical-mechanical and geometric parameters are presented. The way to account for the non-contrast of exogenous parameters in the model of the generalized plane stress state of a plate is based on the application of the modified heuristic principle of generalization, known in the theory of fuzzy computations, to the analytical relationships, obtained by solving the problem of stress concentration theory in the classical deterministic setting, are obtained. Examples of a realization of the proposed methodology are presented.

Keywords: *thin isotropic plate with elastic elliptical inclusion, generalized plane stress state, model of concentration of mechanical stresses on the contour of inclusion, allowance for scatter in the values of geometrical and physical-mechanical characteristics, fuzzy-set calculations, use of the heuristic principle of generalization.*

ФГУП "Научно-исследовательский и экспериментальный ин-т автомобильной электроники и электрооборудования", Москва;
ГОУ ВПО "Донбас. национальная акад. строительства и архитектуры", Макеевка;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т", Донецк
CergeyS@i.ua

Получено 18.10.17