УДК 517.95/957

С. Г. Суворов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ОБЩИХ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Устанавливается обобщенная (вариационная) форма смешанной краевой задачи для нелинейного параболического уравнения в общей нецилиндрической области. Выведены условия ее корректной разрешимости. Рассмотрен случай смены направления времени.

Параболические уравнения в нецилиндрических областях возникают обычно как составная часть разнообразных задач со свободной границей, но, несмотря на важность темы, исследования в этой области недостаточны. Изучены граничные задачи для линейных уравнений в параболоидах и очень слабые их решения в общих областях [4, 6, 7]; краевые задачи с отсутствием условий на верхних крышках области для линейных [1, 3, 11] и нелинейных [5] уравнений, но только в случае, когда нет участков границы, ортогональных временной оси, кроме начальной $\{(x, t) : t = 0\}$ и конечной $\{(x, t) : t = T_0\}$ крышек.

В то же время, например, в задачах многофазной фильтрации требуется изучить такого рода задачу, не делая по возможности априорных предположений об области. Именно этой ситуации (для нелинейных уравнений) посвящена данная работа.

В обобщенной (вариационной) постановке требуется только, чтобы область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ была ограничена и чтобы $\mathrm{mes}_{n+1}(\partial\Omega) = 0$ (здесь и далее

$x \in \mathbf{R}^n$, $(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$). Что касается граничных, начальных, конечных условий, то они образуются естественным образом именно там, где требуется. В частности, когда применима теория Фикеры [8], условия на $\partial\Omega$ ей соответствуют, а в случае, если априори на «боковой» границе не задавались данные Дирихле, возникают естественные краевые условия, которые здесь оказываются условиями не Неймана, а Веригина. В конце статьи упоминаются случаи смены направления времени. Частично результаты статьи изложены в препринте [10].

Не уменьшая общности, считаем, что $\Omega \subset \{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant T_0\}$; множества $\Omega(t_0) \equiv \Omega \cap \{(x, t) : t = t_0\}$ считаем не пустыми для всех $t_0 \in (0, T_0)$. Аналогично вводятся $\bar{\Omega}(t_0) = \bar{\Omega} \cap \{(x, t) : t = t_0\}$. Далее, пусть $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где Γ_0 — замкнутое множество, а $\bar{\Omega}(0)$, $\bar{\Omega}(T_0)$ входят в $\bar{\Gamma}_1$; обозначаем $\Gamma_i(t) = \Gamma_i \cap \bar{\Omega}(t)$; $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$.

Введем пространство $S = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$, на множестве Γ_1 никаких условий не задаем. На S определяется скалярное произведение

$$(u, h) = \iint\limits_{\Omega} [(\nabla_x u, \nabla_x h) + uh]\, dxdt, \tag{1}$$

пространство E — это пополнение S в норме $\| u \|_E = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Определяем E^* как пространство, сопряженное к E в L_2-двойственности $\langle w, h\rangle$ или изометрично; E^* — пополнение S в норме $\{\| w \|_{E^*} = \sup \langle w, h\rangle,\ h \in S,\ \| h \|_E = 1\}$. (Записывая в дальнейшем какие-либо интегралы на пополнениях, всегда понимаем их как пределы интегралов на классах последовательностей из S.)

Пространство X определено как пополнение S в норме $\| u \|^2_X = \| u \|^2_E + \| u_t \|^2_{E^*}$, после чего на X задается билинейная форма $\mathcal{B}(u, h) = \iint (u_t h - u h_t)\, dxdt$, введенная для других целей в [9]. Если $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ — множество тех u, для которых $\mathcal{B}(u, h)$ может быть по непрерывности продолжена на все $h \in E$, то, очевидно, определен линейный оператор $B : \mathcal{D}(\mathcal{B}) \to E^*$, $\langle Bu, h\rangle = \mathcal{B}(u, h)$.

Наконец, X_0 — это пополнение $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ в норме графика $\| u \|^2_{X_0} = \| u \|^2_E + \| Bu \|^2_{E^*}$; E_0 — замыкание X_0 в норме $\|\cdot\|_E$; E^*_0 — сопряженное к E_0 в L_2-двойственности. Введя оператор тождественного вложения $j : E_0 \to E$, определяем $B_0 = j^* B j : \mathcal{D}(B_0) \subset E_0 \to E^*_0$, $j\mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$.

Оператор B_0 допускает замыкание $\bar{B}_0$ как монотонный, а через $B_m : X_m \subset E_0 \to E^*_0$ обозначим максимальное монотонное линейное его расширение, $X_m = \mathcal{D}(B_m)$.

Если $\Omega = \{(x, t) : \Phi(x, t) > 0\}$, где $\Phi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — функция класса C^n с ненулевым (полным) градиентом $\nabla_{x,t}\Phi$ всюду на $\partial\Omega$, то $E_0 = E$. Это верно и для поверхности, состоящей из конечного или счетного числа таких частей, если места их соединения лежат на $\{(x, t) : t = t_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть задан ограниченный (нелинейный) коэрцитивный псевдомонотонный оператор $A : E \to E^*$ вида $\langle Au, h\rangle = \iint\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x, t, u, \nabla_x u) D_i h dxdt$, где $D_0 = I$; $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ при $i \neq 0$; $A(0) = 0$.

Оператор $A_0 = j^* A j : E_0 \to E^*_0$ тоже будет ограниченным, псевдомонотонным и коэрцитивным.

Вводим $\Lambda(u, h) = \langle A_0 u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle B_m u, h\rangle$ и если $f \in E^*_0$, то обобщенная форма задачи, которая здесь исследуется, задается уравнением

$$\Lambda(u, h) = \langle f, h\rangle, \quad \forall h \in E_0. \tag{2}$$

Теорема. Задача (2) имеет решение в E_0, единственное, если A строго монотонный оператор, устойчивое по f, если A — сильно монотонный.

Доказательства здесь стандартны.

Легко показать, что если $h \in X_0 \cap X$, то $\langle B_m u, h\rangle = \iint\limits_{\Omega} (u_t h - u h_t) \times \times dxdt$ — в предельном смысле, о котором говорилось выше. Это позволяет в случае кусочной гладкости $\partial\Omega$, $f \in L_2$ и достаточной гладкости решения u задачи (2) указать те классические уравнения и условия, которым u должно удовлетворять, т. е. выписать ту задачу, обобщенной формой которой является (2).

Выбирая в качестве пробных функций $h \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем из (2) уравнение

$$u_t - \sum \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla_x u) = f. \tag{3}$$

Если рассмотреть «невырожденную» точку $p \in \Gamma_1$, т. е. точку, где $\nabla_x \Phi \neq 0$ (для $\Omega = \{(x, t) : \Phi(x, t) > 0\}$), и если использовать в (2) в качестве пробных те функции $h \in S$, которые на $\partial\Omega$ отличны от нуля лишь в малой окрестности точки P, то в этой точке окажется выполненным следующее условие:

$$(\mathbf{a}(x, t, u, \nabla_x u), \nabla_x \Phi) = \frac{1}{2} u \Phi_t. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — вектор из компонент a_i.

Случай, когда P — вырожденная точка, рассмотрим в нескольких типичных ситуациях. Прежде всего, предположим, что M — множество тех $t \in [0, T_0]$, при которых на $\Gamma_1(t)$ имеются вырожденные точки, и пусть $\operatorname{mes}_1 M = 0$, а $\mathcal{U}_\varepsilon$, $\mathcal{U}_{2\varepsilon}$ — окрестности множества M соответствующих радиусов. Положим, что $\beta_\varepsilon(t)$ — функция, равная единице вне $\mathcal{U}_{2\varepsilon}$, нулю в $\mathcal{U}_\varepsilon$ и линейно сходящая от 1 до 0 в $\mathcal{U}_{2\varepsilon} \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$. Используя как пробную $h = \beta_\varepsilon u$, из (2) — (4) выводим условие

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[- \int\limits_{\mathcal{U}_{2\varepsilon} \setminus \mathcal{U}_\varepsilon} \int\limits_{\Omega(t)} u^2 \beta_\varepsilon' dxdt \Big] \geqslant 0. \tag{5}$$

(Собственно говоря, для вывода (5) достаточно только факта $u \in X_m$ и конкретного вида формы $\mathcal{B}$. Если $M = UM_i$, причем для некоторого $\varepsilon > 0$ каждое M_i погружается в окрестности $\mathcal{U}_\varepsilon^i$, $\mathcal{U}_{2\varepsilon}^i$ так, что $\mathcal{U}_{2\varepsilon}^i \cap \mathcal{U}_{2\varepsilon}^j = \varnothing$ при $i \neq j$, то условие, аналогичное (5), выполнено для всех i:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[- \int\limits_{\mathcal{U}_{2\varepsilon}^i \setminus \mathcal{U}_\varepsilon^i} \int\limits_{\Omega(t)} u^2 \beta_{\varepsilon, i} dxdt \Big] \geqslant 0. \tag{6}$$

В скрытом виде в (6) собраны начальное (нулевое) условие и условия на нижних крышках. Убедимся в этом на нескольких примерах.

Если $M_0 = \{0\}$, т. е. отвечает начальной крышке, то (6) переходит в условие $\int\limits_{\Omega(0)} u^2\, dx \leqslant 0$, что означает $u|_{t=0} = 0$. Аналогичное условие на верхней крышке $M|_{T_0} = \{T_0\}$ приводит к неравенству $\int\limits_{\Omega(T_0)} u^2\, dx \geqslant 0$, т. е. отсутствию условий.

Теперь представим себе область Ω в виде соединенных торцами двух цилиндров: $\Omega = \operatorname{int}(\{K_1 \times [0, T]\} \cup \{K_2 \times [T, T_0]\})$; K_i — шары в R^n с центрами в нуле; int — внутренность. Пределы интегралов по $\Omega(t)$ при $t \to T \pm 0$ будем обозначать $\int\limits_{\Omega(T\pm)}$. В таких обозначениях (6) перейдет в условие

$$\int\limits_{\Omega(T-)} u^2 dx - \int\limits_{\Omega(T+)} u^2 dx \geqslant 0. \tag{7}$$

Во внутренних точках $\Omega(T)$ функция u непрерывна по t (доказательство обычное; см. [2, с. 177]); так что, если, например, нижний шар больше верхнего (т. е. при $t=T$ образуется верхняя крышка N), от (7) остается $\int\limits_{N_1} u^2\,dx \geqslant 0$. Условия нет. Если нижний шар меньше верхнего, т. е. образуется нижняя крышка N_1, из (7) следует: $-\int u^2\,dx \geqslant 0$, значит, $u|_{N_1}=0$.

При необходимости учета других начальных условий необходимо повторить все построения данной статьи для аффинного оператора B_ψ, определенного формой $\iint\limits_\Omega [(u-\psi)_t h-(u-\psi)h_t]\,dxdt$. Функция ψ должна входить в область определения максимального монотонного расширения оператора $(-B_0)$ и будет иметь ненулевое начальное и нулевое конечное значения.

Обратимся к проверке свойств оператора A на следующем примере: $\langle Au, h\rangle=\iint\limits_\Omega [b(x,t,u)(\nabla_x u, \nabla_x h)+c(x,t,u)uh]\,dxdt$; функции b, c считаем непрерывными, $0<p_0\leqslant b(x,t,u)\leqslant p_1<\infty$, c — ограничена. Если возможны значения $c\leqslant 0$, то для обеспечения коэрцитивности A необходимо предварительно в уравнении (2) произвести экспоненциальное преобразование [2, с. 252], которое здесь приводит к тому же результату, что и в цилиндрическом случае. Так что будем считать $0<p_2\leqslant c(x,t,u)\leqslant p_3<\infty$.

Что касается псевдомонотонности, то для нее достаточно с учетом ограниченности b, чтобы условие «$u_i\to u_0$ слабо в X» влекло сходимость $b(x,t,u_i)$ к $b(x,t,u_0)$ в $L_2(\Omega)$. Последнее подтверждается теоремой 5.1 [5, с. 70] в малых цилиндрах, окружающих точки области, и последующей склейкой.

Наконец, если в уравнении (3) вместо u_t поставлено $\gamma(x)u_t$, где $\gamma(x)$ может менять знак, то все построения дословно выполняются с оператором B_0 вида $\langle B_0 u, h\rangle=\iint\limits_\Omega(\gamma u_t h-\gamma u h_t)\,dxdt$. При этом функция γ войдет в формулы (5) — (7) и, например, в случае [5, с. 351] будут вырабатываться начальные условия на нижних крышках при тех x, при которых $\gamma>0$. Там же, где $\gamma<0$, вырабатываются конечные условия и условия на верхних крышках. Разумеется, меняется и условие (4). Так же можно поступить, если $\gamma=\gamma(x,t)$. Но тогда при переходе от (2) к (3) возникает лишнее слагаемое $\frac{1}{2}\iint \gamma_t uh\,dxdt$. Оно должно аннулироваться, т. е. в форму $\langle Au, h\rangle$ необходимо ввести его же с минусом, после такой операции новый A должен сохранить коэрцитивность (остальные его свойства сохраняются). Это дополнительное условие, связывающее γ и A.

1. *Алиев Р. Д.* Единственность решения обобщенной задачи Пуанкаре для параболических уравнений в нецилиндрических областях с негладкой границей // Дифференц. уравнения.— 1986.— **22**, № 12.— С. 2171—2173.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
3. *Иванов Л. А., Котко Л. А., Крейн С. Г.* Краевые задачи в переменных областях//Дифференц. уравнения и их применение.— 1977.— Вып. 19.— С. 7—160.
4. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Тр. ММО.— 1966.— **15**.— С. 400—451.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 588 с.
6. *Михайлов В. П.* О задаче Дирихле для параболического уравнения. I // Мат. сб.— 1963, **61**, № 1.— С. 40—64.
7. *Михайлов В. П.* О задаче Дирихле для параболического уравнения. II // Там же.— 1963.— **62**, № 2.— С. 140—159.
8. *Олейник О. А. Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки, сер. мат. Мат. анализ, 1969.— 1971.— С. 5—252.
9. *Солодяк М. Т., Третяк В. И.* Вариационная формулировка и законы сохранения для одного нелинейного уравнения параболического типа // Мат. методы и физ.-мат. поля.— 1983.— **17**.— С. 85—87.

10. *Суворов С. Г.* Вариационная постановка эллиптико-параболической задачи Веригина // Исслед. мат. моделей задач фильтрации жидкости и газа в пористых средах.— Киев, 1987.— С. 20—29.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; № 87.7).
11. *Lions I.-L.* Sur les problemes mixtes pour certains systemes paraboliques dans des ouverts non cylindriques // Ann. Inst. Fourier.— 1957.— 7.— P. 143—182.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 07.07.8?