

УДК 531.38

©2018. А.В. Зыза

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследованы условия существования одного класса полиномиальных решений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Построено новое частное решение рассматриваемой задачи, которое описывается гиперэллиптическими функциями времени.

Ключевые слова: эффект Барнетта–Лондона, полиномиальные решения, первые интегралы, инвариантные соотношения, гириостат, гиперэллиптические функции.

Введение. Классическая задача о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [1] имеет многочисленные обобщения в динамике твердого тела [2]. Одним из таких обобщений является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [2–7]. Ее математической моделью является система из шести дифференциальных уравнений, содержащая двадцать параметров, которая допускает только два первых интеграла [2]. Задача Коши для этих дифференциальных уравнений имеет решение, но получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно, так как при произвольных значениях параметров уравнения такого движения неинтегрируемы в квадратурах [8]. Поэтому изучение свойств движения твердого тела и гиростата с неподвижной точкой может быть основано либо на построении частных решений, либо на численном интегрировании с помощью компьютерных средств [8–10].

Среди частных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона отдельно выделяют решения полиномиальной структуры, поскольку они являются обобщением полиномиальных решений классической задачи динамики твердого тела и задачи динамики тяжелого гиростата [11–16].

В данной статье продолжено изучение нового класса решений полиномиальной структуры, начатое в работе [14], который обобщает класс полиномиальных решений Коносевиича–Поздняковича [17]. Построено новое решение указанного класса рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи. Структура обобщенного класса полиномиальных решений. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Как известно, нейтральный ферромагнетик при вращении в магнитном поле становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта) [3]. Намагниченность, возникающая при вращении, линейно зависит от угловой скорости ω ($B = B \cdot \omega$), где B – симметричный тензор третьего порядка. Эффект

Лондона [4] относится к явлению, которое имеет место при вращении сверхпроводящего твердого тела. Механизм намагничивания в обоих случаях обусловлен различными физическими причинами, но формулы для магнитного момента одинаковы. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться по направлению вектора напряженности магнитного поля. При этом взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [5].

Изучение движения тела под действием указанного момента имеет важное значение при определении предельной точности навигационных систем, использующих неконтактный подвес.

Поэтому при математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, возникающий в результате эффекта Барнетта–Лондона. Это приводит к тому, что уравнения движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона, в отличие от уравнений Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона, не допускают интеграл энергии из-за диссипации энергии: перехода энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения.

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и момента ньютоновских сил в векторном виде таковы [2]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Уравнения (1) допускают только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \tilde{K}_0. \quad (2)$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})]^\bullet = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая магнитный момент гиростата $\mathbf{B} = B\boldsymbol{\omega}$; матрица $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – приведенный тензор инерции, который характеризует ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; $\tilde{K}_0$ – постоянная интеграла площадей; точка над переменными обозначает относительную производную. Если имеет место равенство $B = \tilde{\alpha}E$ (E – единичная матрица, $\tilde{\alpha}$ – параметр), то из формулы (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1).

Поставим задачу о нахождении условий существования у уравнений (1)

при $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ решений следующей структуры:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2^2 &= Q(\sigma) = \sum_{j=0}^n b_j \sigma^j, & \omega_3^2 &= R(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = \sum_{j=0}^l a_j \sigma^j, & \nu_2 &= \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \omega_2, & \nu_3 &= \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma} \omega_3, \\ \psi(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, & \varkappa(\sigma) &= \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j,\end{aligned}\tag{4}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа, b_j, c_i, a_j, g_i, f_j – параметры, подлежащие определению.

К классу решений (4) при $g_0^2 + f_0^2 = 0$ относятся решение Коносевица–Поздняковича [17] задачи о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и решение Харламовой–Мозалевской [18] задачи о движении тяжелого гиростата.

Подставим (4) в уравнения (1) и геометрический интеграл из (2). Имеем

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma)\sigma)^{-1} \Phi(\sigma) \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \quad \Phi(\sigma) = \psi(\sigma) - \varkappa(\sigma); \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(Q(\sigma)\psi^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)\psi(\sigma)(\sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma)), \\ (R(\sigma)\varkappa^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(\varphi(\sigma) - \sigma\psi(\sigma)), \\ 2\sigma^2 A_1 \Phi(\sigma) &= \varphi'(\sigma)[(C_3 - C_2)\psi(\sigma)\varkappa(\sigma) + \\ &\quad + (B_2\varkappa(\sigma) - B_3\psi(\sigma))\sigma + (A_2 - A_3)\sigma^2], \\ A_2 Q'(\sigma)\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)[(C_1 - C_3)\varphi(\sigma)\varkappa(\sigma) + B_3\varphi(\sigma)\sigma - B_1\varkappa(\sigma)\sigma^2 + \\ &\quad + (A_3 - A_1)\sigma^3 - \lambda_1\sigma - s_1\varkappa(\sigma)], \\ A_3 R'(\sigma)\Phi(\sigma) &= 2\varphi'(\sigma)[(C_2 - C_1)\varphi(\sigma)\psi(\sigma) - B_2\varphi(\sigma)\sigma + B_1\psi(\sigma)\sigma^2 + \\ &\quad + (A_1 - A_2)\sigma^3 + \lambda_1\sigma - s_1\psi(\sigma)]; \\ \sigma^2(\varphi^2(\sigma) - 1) + Q(\sigma)\psi^2(\sigma) + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

В уравнениях (5), (6) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной σ . После интегрирования уравнений (6) зависимость σ от времени t устанавливается из дифференциального уравнения (5).

2. Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда максимальные степени полиномов из (4) таковы: $n = m = 3$, $l = n_1 = m_1 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2^2 &= Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\ \omega_3^2 &= R(\sigma) = c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, & \nu_2 &= \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2, & \nu_3 &= \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, \\ \psi(\sigma) &= g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, & \varkappa(\sigma) &= f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0.\end{aligned}\tag{8}$$

Подставим полиномы $Q(\sigma), R(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma), \varkappa(\sigma)$ из (8) в уравнения (6), (7) и потребуем тождественность полученных равенств для всех σ при $a_1 \neq 0$. Получим систему условий на параметры задачи и искомые коэффициенты решения (8):

$$\begin{aligned}
 C_2 &= C_3, \\
 B_2 f_0 - B_3 g_0 &= 0, \quad A_1(g_2 - f_2) - a_2 d_1 = 0, \\
 2A_1(g_1 - f_1) - 2a_2 d_0 - a_1 d_1 &= 0, \quad 2A_1(g_0 - f_0) - a_1 d_0 = 0, \\
 \gamma_5 d_1 + 4A_1 g_2 &= 0, \quad \gamma_5 d_0 + \gamma_4 d_1 - 4A_1(a_2 - g_1) = 0, \\
 \gamma_4 d_0 + \gamma_3 d_1 - 4A_1(a_1 - g_0) &= 0, \quad \gamma_3 d_0 + \gamma_2 d_1 - 4A_1 a_0 = 0, \\
 \gamma_2 d_0 + \gamma_1 d_1 &= 0, \quad \gamma_1 d_0 + \gamma_0 d_1 = 0, \quad \gamma_0 d_0 = 0, \\
 \delta_5 d_1 - 4A_1 f_2 &= 0, \quad \delta_5 d_0 + \delta_4 d_1 - 4A_1(f_1 - a_2) = 0, \\
 \delta_4 d_0 + \delta_3 d_1 - 4A_1(f_0 - a_1) &= 0, \quad \delta_3 d_0 + \delta_2 d_1 + 4A_1 a_0 = 0, \\
 \delta_2 d_0 + \delta_1 d_1 &= 0, \quad \delta_1 d_0 + \delta_0 d_1 = 0, \quad \delta_0 d_0 = 0, \\
 B_1 - \beta a_2 &= 0, \\
 3c_3 d_1 A_3 + 4A_1 [\beta(a_2 g_1 + a_1 g_2) + B_2 a_2 - B_1 g_1 + A_2 - A_1] &= 0, \\
 3b_3 d_1 A_2 - 4A_1 [\beta(a_2 f_1 + a_1 f_2) + B_3 a_2 - B_1 f_1 + A_3 - A_1] &= 0, \\
 A_3(3c_3 d_0 + 2c_2 d_1) + 4A_1 [\beta(a_2 g_0 + a_1 g_1 + a_0 g_2) + B_2 a_1 - B_1 g_0 - s_1 g_2] &= 0, \\
 A_2(3b_3 d_0 + 2b_2 d_1) - 4A_1 [\beta(a_2 f_0 + a_1 f_1 + a_0 f_2) + B_3 a_1 - B_1 f_0 - s_1 f_2] &= 0, \\
 A_3(2c_2 d_0 + c_1 d_1) + 4A_1 [\beta(a_1 g_0 + a_0 g_1) + B_2 a_0 - s_1 g_1 - \lambda_1] &= 0, \\
 A_3 c_1 d_0 + 4A_1(\beta_0 a_0 - s_1) g_0 &= 0, \\
 A_2(2b_2 d_0 + b_1 d_1) - 4A_1 [\beta(a_1 f_0 + a_0 f_1) + B_3 a_0 - s_1 f_1 - \lambda_1] &= 0, \\
 A_2 b_1 d_0 - 4A_1(\beta_0 a_0 - s_1) f_0 &= 0, \\
 a_0^2 - 1 + (b_2 g_0 + 2b_1 g_1) g_0 + (2g_2 g_0 + g_1^2) b_0 + \\
 + (c_2 f_0 + 2c_1 f_1) f_0 + (2f_2 f_0 + f_1^2) c_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 d_1 &= B_2 f_2 - B_3 g_2, & d_0 &= B_2 f_1 - B_3 g_1 + A_2 - A_3, \\
 \gamma_0 &= -2c_0 f_0, & \gamma_1 &= -c_1 f_0, & \gamma_2 &= 2c_0 f_2 + c_1 f_1, \\
 \gamma_3 &= c_3 f_0 + 2c_2 f_1 + 3c_1 f_2, & \gamma_4 &= 3c_3 f_1 + 4c_2 f_2, & \gamma_5 &= 5c_3 f_2, \\
 \delta_0 &= -2b_0 g_0, & \delta_1 &= -b_1 g_1, & \delta_2 &= 2b_0 g_2 + b_1 g_1, \\
 \delta_3 &= b_3 g_0 + 2b_2 g_1 + 3b_1 g_2, & \delta_4 &= 3b_3 g_1 + 4b_2 g_2, & \delta_5 &= 5b_3 g_2, \quad \beta = C_1 - C_3.
 \end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (9) разрешима относительно параметров A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 . Считая $k = A_2 A_1^{-1}$, $p = A_3 A_1^{-1}$, $m_0 = B_2 B_3^{-1}$, запишем

решение системы (9) в виде

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \frac{4(4k-5)A_1}{5\alpha_1 B_3 f_2}, \quad b_3 = -\frac{4(4p-5)^2 A_1}{5(4k-5)\alpha_1 B_3 f_2}, \\
 c_2 &= \frac{4(k-p)(4p-5)A_1^2}{5\alpha_0 \alpha_1^2 B_3^2 f_2^2} \left\{ -4(32k^2 - 160k + 125)m_0 p^2 + \right. \\
 &\quad + [(4k-5)(32k^2 - 120k + 25) - 5(4k+5)(8k-5)m_0]p + \\
 &\quad \left. + 25(16k^2 - 35k + 25)m_0 + 5(4k-5)(8k^2 - 15k - 25) \right\}, \\
 b_2 &= -\frac{4(k-p)(4p-5)^2 A_1^2}{5(4k-5)\alpha_0 \alpha_1^2 B_3^2 f_2^2} \left\{ -32(4k+5)m_0 p^3 + 4(5(32k+25)m_0 + \right. \\
 &\quad + 4(2k+5)(4k-5))p^2 - 5(35(4k+5)m_0 + \\
 &\quad \left. + (4k-5)(32k+35))p + 125((k+5)m_0 + (k+1)(4k-5)) \right\}, \\
 a_2 &= -\frac{4(k-p)A_1}{\alpha_1 B_3}, \quad a_1 = \frac{4(k-p)^2(5-4p)\alpha_2 A_1^2}{\alpha_0 \alpha_1^2 B_3^2 f_2}, \\
 g_2 &= \frac{(4k-5)f_2}{4p-5}, \quad g_1 = \frac{(k-p)(4k-5)\alpha_3 A_1}{\alpha_0 \alpha_1 B_3}, \\
 a_0 &= \frac{\Delta_0}{f_2^2}, \quad c_1 = \frac{\Delta_1}{f_2^3}, \quad b_1 = \frac{\Delta_2}{f_2^3}, \quad f_1 = \frac{(k-p)(4p-5)\alpha_5 A_1}{\alpha_0 \alpha_1 B_3}, \\
 g_0 &= 0, \quad f_0 = 0, \quad c_0 = \frac{4A_1 \Delta_0 - \beta_0 \Delta_1 f_1}{2\beta_0 f_2^4}, \\
 b_0 &= \frac{(5-4p)(4A_1 \Delta_0 + \beta_0 \Delta_2 g_1)}{2\beta_0(4k-5)f_2^4}, \\
 \beta &= \frac{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_4 B_3^2}{20(k-p)^2(4k-5)(4p-5)\alpha_2 A_1}, \\
 B_1 &= -\frac{\alpha_0 \alpha_4 B_3}{5(k-p)(4k-5)(4p-5)\alpha_2}, \\
 s_1 &= \frac{1}{2A_1 g_2} \left\{ \beta_0 c_2 f_2 A_3 + 2A_1 [\beta(a_1 g_1 + a_0 g_2) + B_2 a_1] \right\}, \\
 \lambda_1 &= \frac{1}{4A_1} \left\{ \beta_0 c_1 f_2 A_3 + 4A_1 [(\beta g_1 + B_2)a_0 - s_1 g_1] \right\}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\alpha_0 = (5-4p)((16k-25)p + 5(10-7k))m_0 + (4k-5)((16p-25)k + 5(10-7p)),$$

$$\alpha_1 = (5-4p)m_0 + 4k-5, \quad \beta_0 = -\alpha_1 B_3(4p-5)^{-1},$$

$$\alpha_2 = (5-4p)(2(16k-25)p + 5(5-2k))m_0 + (4k-5)(2(16p-25)k + 5(5-2p)),$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 &= (5 - 4p)(5(10 - 11p) + (16p - 5)k)m_0 + (4k - 5)(5(10 - 7p) + (16p - 25)k), \\
 \alpha_4 &= (5 - 4p)(25(1 - p) + (8p - 5)k)m_0 + (4k - 5)(25(1 - k) + (8k - 5)p), \\
 \alpha_5 &= (5 - 4p)(25(2 - p) + (16p - 35)k)m_0 + (4k - 5)(5(10 - 11k) + (16k - 5)p), \\
 \Delta_0 &= -\frac{4(k - p)^3(4p - 5)A_1^3}{3(m_0 - 1)\alpha_0^2\alpha_1^3(4k - 5)B_3^3}[-64(2048k^3 - 8320k^2 + 12920k - \\
 &\quad - 9375)m_0^3p^6 + 16((55808k^3 - 219200k^2 + 324700k - 240625)m_0 + \\
 &\quad + (4k - 5)(6144k^3 - 22912k^2 + 33160k - 20625))m_0^2p^5 - 4(5(115072k^3 - \\
 &\quad - 436240k^2 + 618500k - 490625)m_0^2 + 2(4k - 5)(72448k^3 - 238240k^2 + \\
 &\quad + 302350k - 188125)m_0 + (4k - 5)^2(6144k^3 - 20864k^2 + 23080k - \\
 &\quad - 7125))m_0p^4 + (25(114496k^3 - 41520k^2 + 561300k - 512875)m_0^3 + \\
 &\quad + 5(4k - 5)(271488k^3 - 797360k^2 + 872000k - 553125)m_0^2 + \\
 &\quad + (4k - 5)^2(122368k^3 - 351680k^2 + 350500k - 115625)m_0 + \\
 &\quad + (4k - 5)^3(2048k^3 - 6272k^2 + 2840k - 675))p^3 - 5(25(14384k^3 - \\
 &\quad - 49580k^2 + 62725k - 74500)m_0^3 + 5(4k - 5)(62352k^3 - 168680k^2 + \\
 &\quad + 162275k - 109500)m_0^2 + 15(4k - 5)^2(3296k^3 - 7764k^2 + 6585k - \\
 &\quad - 2500)m_0 + (4k - 5)^3(1664k^3 - 4720k^2 + 1765k - 500))p^2 + 5(125(892k^3 - \\
 &\quad - 2965k^2 + 3500k - 6125)m_0^3 + 25(4k - 5)(6896k^3 - 18155k^2 + 17000k - \\
 &\quad - 12875)m_0^2 + 5(4k - 5)^2(9932k^3 - 20455k^2 + 15500k - 7375)m_0 + \\
 &\quad + (4k - 5)^3(2584k^3 - 6545k^2 + 2000k - 625))p - 3125(27k^3 - 100k^2 + \\
 &\quad + 125k - 250)m_0^3 - 3125(4k - 5)(57k^3 - 160k^2 + 175k - 150)m_0^2 - \\
 &\quad - 3125(4k - 5)^2(33k^3 - 68k^2 + 55k - 30)m_0 - 3125(4k - 5)^3(k - 2)(3k^2 - 2k + 1)], \\
 \Delta_1 &= -\frac{8(k - p)^2(4p - 5)^2A_1^3}{15\alpha_0^2\alpha_1^3B_3^3}[16(16k - 25)(32k^2 - 480k + 625)m_0^2p^4 - \\
 &\quad - 8(5(448k^3 - 14560k^2 + 40400k - 29375)m_0 + (4k - 5)^2(128k^2 - 1800k + \\
 &\quad + 2125))m_0p^3 + (-75(512k^3 + 9520k^2 - 32000k + 24875)m_0^2 + \\
 &\quad + 10(4k - 5)^2(224k^2 - 5640k + 6025)m_0 + (4k - 5)^2(16k - 5)(32k^2 - \\
 &\quad - 440k + 725))p^2 + (125(928k^3 + 920k^2 - 9400k + 8875)m_0^2 + \\
 &\quad + 50(4k - 5)^2(92k^2 + 1140k - 1175)m_0 - 5(4k - 5)^2(224k^3 - 4560k^2 + \\
 &\quad + 9000k - 2875))p - 25(25(7k - 10)(16k^2 - 15k - 25)m_0^2 + \\
 &\quad + 10(4k - 5)^2(29k^2 + 45k - 50)m_0 + (4k - 5)^2(88k^3 + 255k^2 - 825k + 250))],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = & \frac{8(k-p)^2(4p-5)^3 A_1^3}{15(4k-5)\alpha_0^2\alpha_1^3 B_3^3} [128(4k+5)(16k-55)m_0^2 p^5 - \\ & - 16(5(1696k^2 - 5120k + 175)m_0 + 2(4k-5)(128k^2 - 120k - 725))m_0 p^4 + \\ & + 16(25(1304k^2 - 4150k + 1325)m_0^2 + 5(4k-5)(848k^2 - 2040k - \\ & - 275)m_0 + (4k-5)^2(2k+5)(16k-35))p^3 - 5(125(1264k^2 - \\ & - 4160k + 1735)m_0^2 + 30(4k-5)(1456k^2 - \\ & - 3640k + 625)m_0 + (4k-5)^2(1696k^2 - 3040k - 1325))p^2 + \\ & + 125(5(784k^2 - 2720k + 1225)m_0^2 + 10(4k-5)(208k^2 - 504k + \\ & + 125)m_0 + (4k-5)^2(176k^2 - 368k + 5))p - 3125((29k^2 - 115k + \\ & + 50)m_0^2 + 2(4k-5)(k-2)(17k-5)m_0 + (4k-5)^2(k-2)(5k-1))],\end{aligned}$$

а f_2 – отличный от нуля действительный корень уравнения

$$f_2^4 = \Delta_0^2 + \frac{(4A_1\Delta_0 - \beta_0\Delta_1 f_1)f_1^2}{2\beta_0} + \frac{(5-4p)(4A_1\Delta_0 + \beta_0\Delta_2 g_1)g_1^2}{2\beta_0(4k-5)}.$$

Решение (8) при условиях (10) будет действительным, например, если

$$b_0 > 0, \quad c_0 > 0. \quad (11)$$

Зависимость σ от времени получим из дифференциального уравнения (5):

$$\dot{\sigma} = \frac{\beta_0 f_2}{2A_1} \sqrt{(b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0)(c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0)}. \quad (12)$$

Укажем конкретный пример решения (8), (10)–(12) уравнений движения (1). Пусть $a > 0, b > 0$ и

$$A_1 = a, \quad A_2 = \frac{3}{2}A_1, \quad A_3 = 2A_1, \quad B_2 = b, \quad B_3 = -B_2, \quad (13)$$

$$B_1 = -\frac{4 \cdot 23}{55}B_2, \quad C_2 = C_3, \quad \beta = \frac{8 \cdot 23b^2}{55a};$$

$$\mathbf{s} = \left(\frac{1097a^2}{4 \cdot 23 \cdot 55f^2b}, 0, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{224a^3}{23^2f^2b^2}, 0, 0 \right); \quad (14)$$

$$\omega_1 = \sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\omega_2^2 = Q(\sigma) &= \frac{9a}{5fb} \left(\sigma^3 - \frac{a}{23fb}\sigma^2 - \frac{1197a^2}{4 \cdot 23^2(fb)^2}\sigma + \frac{5741}{8 \cdot 23^3} \frac{a^3}{(fb)^3} \right), \\ \omega_3^2 = R(\sigma) &= \frac{a}{5fb} \left(-\sigma^3 - \frac{291a}{92fb}\sigma^2 + \frac{4377a^2}{2116(fb)^2}\sigma + \frac{122433}{16 \cdot 23^3} \frac{a^3}{(fb)^3} \right), \\ \nu_1 &= \frac{a}{2b} \left(-\sigma^2 + \frac{33a\sigma}{46fb} + \frac{431a^2}{2116f^2b^2} \right), \quad \nu_2 = \left(\frac{f\sigma}{3} + \frac{17a}{46b} \right) \sqrt{Q(\sigma)}, \\ \nu_3 &= \left(f\sigma + \frac{3a}{23b} \right) \sqrt{R(\sigma)}.\end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$f^4 = \frac{11126957a^6}{4^3 2^3 5^5 b^6}.$$

Зависимость $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = \frac{2bf}{3a} \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}. \quad (16)$$

Так как подкоренные функции $Q(\sigma)$ и $R(\sigma)$ при $\sigma = 0$ принимают положительные значения, то действительность решения (13)–(16) установлена. При этом $\sigma = \sigma(t)$ – функция времени, полученная обращением гиперэллиптического интеграла.

Приведенный пример (13)–(16) характеризуется двумя положительными параметрами a и b . В результате подстановки $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (15) устанавливается зависимость всех переменных от времени рассматриваемой задачи.

Заключение. Исследованы условия существования обобщенного класса полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Построено новое частное решение этих уравнений, которое зависит от пяти независимых параметров задачи и описывается гиперэллиптическими функциями времени.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
2. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
3. Barnett S.I. Gyromagnetic and Electron – Inertia Effects // Rev. Modern. Phys. — 1935. — **7** (2). — P. 129–166.
4. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. — М.: Физматгиз, 1963. — 696 с.
5. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. — 1984. — **276**, № 6. — С. 1402–1404.
6. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1984, № 4. — С. 32–34.
7. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1985, № 6. — С. 28–33.
8. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
9. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. — New York: Johnson reprint corp., 1965. — 996 p.
10. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. — 2000. — Вып. 30. — С. 1–13.
11. Миронова Е.М. О решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений // Прикл. механика. — 2001. — **37**, № 2. — С. 105–113.
12. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. — 2003. — Вып. 33. — С. 61–70.
13. Зыза А.В. Новое решение уравнений движения гиростата в магнитном поле // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. — 2015. — **29**. — С. 51–59.

14. Зыза А.В., Ткаченко Д.Н. Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 55–64.
15. Зыза А.В. Новые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле // Вестн. Донецкого национального ун-та. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 4. – С. 23–40.
16. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – **10**, № 1. – С. 7–25.
17. Коносевиц Б.И., Позднякович Е.В. Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. матем. и механика. – 1968. – **32**, вып. 3. – С. 544–548.
18. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегрируемое уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.

A. V. Zyza

On a new case of integrability in the problem of solid body motion in magnetic field

We investigate the existence conditions for one class of polynomial solutions of differential equations related to the gyrostat motion problem in magnetic field taking into account Barnett–London effect. One complete particular solution of the problem under consideration described by hyper-elliptic functions of time is constructed.

Keywords: *Barnett–London effect, polynomial solutions, first integrals, invariant relations, gyrostat, hyper-elliptic functions of time.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный ун-т”, Донецк
z9125494@mail.ru

Получено 11.09.18