УДК 517.6

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев

ОЦЕНКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим эллиптический оператор

$$L = (-\Delta)^m - V(x)$$

порядка $2m$ в пространстве R^n или в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с нулевыми условиями Дирихле. Вопрос об оценке числа N отрицательных собственных значений этого оператора является важным как для спектральной теории дифференциальных операторов, так и для приложений, в частности к квантовой механике.

В случае, когда $m = 1$, $n \geqslant 3$, в работах М. Цвикеля, Е. Либа, Г. В. Розенблюма получена следующая важная оценка:

$$N \leqslant c_n \int V_+(x)^{n/2} dx, \ V_+(x) = \max(0, V(x)).$$

Обобщения этой оценки были получены в работах Ч. Феффермана [1], Р. Кермана и Е. Сойера [2], Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева [3]. Точные результаты в терминах емкости получены в книге В. Г. Мазьи [4].

Приведенные здесь результаты справедливы и для произвольного сильно эллиптического оператора.

Теорема 1. Если $n > 2m$, то при каждом $q \geqslant n/2m$ имеет место оценка

$$N \leqslant mc_{n,q} \int V_+(x)^q |x|^{2mq-n} dx.$$

Эта оценка усиливает упомянутый результат Цвикеля — Либа — Розенблюма. В доказательстве используются конструкции из работы [3] и работы Г. В. Розенблюма (см. [5]).

Теорема 2. Пусть n нечетно, $1 \leqslant n \leqslant 2m$. Тогда при каждом $q > 1$ имеет место оценка

$$N \leqslant c_{n,m,q} \left(\int V_+(x)^q |x|^{2mq-n} dx + 1 \right).$$

Теорема 3. Пусть n четно, $2 \leqslant n \leqslant 2m$. Тогда при каждом $q > 1$ верна оценка

$$N \leqslant c_{n,m,q} \left(\int V_+(x)^q |x|^{2mq-n} (1 + |\ln|x||)^{2q-1} dx + 1 \right).$$

Пусть числа $b_j^{(i)}$ определены при $0 \leqslant j \leqslant i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ так, что

$$\sum_{j=0}^{i} b_j^{(i)} \lambda^{2j} = \left[\lambda^2 + \left(i - \frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\lambda^2 + \left(i - \frac{5}{2}\right)^2\right] \dots \left[\lambda^2 + \left(\frac{3}{2} - i\right)^2\right].$$

Пусть $a = \min\limits_{j} b_0^{(j)}$, $a_k = \min\limits_{j>k} b_0^{(j)}$, $b_k = \min\limits_{j \leqslant k} b_1^{(j)}$.

Теорема 4. Если

$$V(x) \leqslant \frac{a}{r^{2m}} + \frac{1}{r^{2m}\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} \ln^2 r\right)}, \quad r = |x|,$$

то $N \leqslant n(k)$, где $n(k)$ — размерность пространства собственных функций оператора Лапласа — Бельтрами, соответствующих собственным значениям $\leqslant k^2$.

Пусть $n = 1$, пусть $\ln_0 x = \ln|x|$, $\ln_j x = \ln|\ln_{j-1} x|$ при $j = 1, \dots, k-1$. Пусть

$$S_0(x) = \frac{b_m^{(m)}}{x^{2m}}; \quad S_1(x) = S_0(x) + \sum_{i=1}^{m} b_i^{(m)} \frac{b_0^{(i)}}{x^{2m} (\ln_0 x)^{2i}};$$

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=2}^{i_1} \dots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{b_{i_1}^{(m)} b_{i_2}^{(i_1)} \dots b_0^{(i_k)}}{x^{2m} (\ln_0 x)^{2i_1} \dots (\ln_{k-1} x)^{2i_k}}.$$

Теорема 5. Если

$$V(x) \leqslant S_k(x), \text{ то } N \leqslant 2^{k+1} - 1.$$

Если $W(x) \geqslant S_k(x)$ и $W(x) \geqslant S_k(x) + \delta$ на некотором непустом интервале, $\delta > 0$, то существует такая функция $V \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, что $V(x) \leqslant W(x)$ и для оператора

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^m - V(x).$$

Число точек отрицательного спектра на менее 2^{k+1}.

Отметим, что при $m = 1$

$$b_0^{(1)} = \frac{1}{4}, \; b_1^{(1)} = 1, \text{ так что } S_0(x) = \frac{1}{4x^2},$$

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + \frac{1}{4(x \ln_0 x \ln_1 x \dots \ln_{k-1} x)^2}.$$

1. *Fefferman Ch.* The uncertainty principle // Bull. AMS.— 1983.— 9, N 2.— P. 1—78.
2. *Kerman R., Sawyer E.* Weighted norms inequalities for potentials // Ibid.— 1985.— 12, N 1.— P. 112—116.
3. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* Оценки отрицательного спектра оператора Шредингера // Мат. сб.— 1987.— 56.— С. 11—21.
4. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева С. Л.— Л. : Изд-во ЛГУ, 1985.— 416 с.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории // Десятая мат. школа.— Киев : Изд-во ИМ АН УССР, 1974.— с. 5—189.

Моск. гос. ун-т

Получено 28.09.87