УДК 517.946

М. И. Матийчук

О ЯДРАХ ПУАССОНА МОДЕЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Построены ядра Пуассона модельной краевой задачи в четверти пространства для систем параболического типа, содержащей вырождающийся по пространственной координате оператор Бесселя, и с весовыми граничными условиями по той же координате.

Хорошо известна роль ядер Пуассона при построении теории общих равномерно эллиптических и параболических краевых задач [1—4]. Здесь строятся ядра Пуассона модельной краевой задачи в четверти пространства для систем параболического типа, содержащей вырождающийся по пространственной координате оператор Бесселя, и с весовыми граничными условиями по той же координате. Ранее [6, 7] рассматривалась общая задача с краевыми операторами и оператором Бесселя, действующими по различным переменным. Задачи аналогичной конструкции возникают в матфизике и механике.

Постановка задачи и формулировка основной теоремы. В области $Q=(0, \infty)\times E_{n-1}\times(0, \infty)$ переменных (t, x', x_n) рассмотрим краевую задачу модельного вида с весовыми граничными условиями

$$L(D_t, D_{x'}, B_{x_n})\,u \equiv D_t u - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D^k_{x'} B^j_{x_n} u = 0, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$f_\nu(x_n)\,\mathcal{B}_i(D_{x'}, B_{x_n})\,u\,|_{x_n=0} \equiv \lim_{x_n\to 0} f_\nu(x_n) \sum_{|k|+2j=r_i} b^{(i)}_{kj} D^k_{x'} B^j_{x_n} u\,(t,\ x) = g_i(t, x')$$

$$(i=\overline{1, bN}) \tag{3}$$

где

$$B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad f_\nu(x_n) = \begin{cases} x_n^{2\nu}, & \nu > 0 \\ (\ln 1/x_n)^{-1}, & \nu = 0 \\ 1, & \nu < 0 \end{cases}$$

Предположим, что задача (1) — (3) $\mathcal{B}$ — параболическая, т. е. для соответствующей обычной модельной задачи

$$L(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{x'}, \mathcal{D}^2_{x_n})\,v = 0, \quad v\,|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

$$\mathcal{B}_i(\mathcal{D}_{x'}, \mathcal{D}^2_{x_n})\,v\,|_{x_n=0} = g_i, \quad i=\overline{1, bN}$$

выполнены условия параболичности и Я. Б. Лопатинского. Решение задачи (4) представляется в виде [4, с. 377]:

$$v(t, x) = \sum_{i=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} G_i(t-\tau,\ x-\xi')\, g_i(\tau, \xi')\, d\xi', \tag{5}$$

где $G_i(t, x)$ — элементы i-го столбца ядер Пуассона. Теперь определим оператор Пуассона [5, с. 356]:

$$P_{\nu x_n} v\,(t, x) = x_n^{-2\nu} \int_1^\infty (h^2-1)^{-\nu-1/2}\, v\,(t, x', x_n h)\, dh \tag{6}$$

при $0 \leqslant \nu < 1/2$, если $1/2 \leqslant \nu < l + 1/2$ с любым натуральным l, то

$$P_{\nu x_n} v = C^0_{\nu l} x_n^{-2\nu} \int_1^\infty (h^2-1)^{-\nu-1/2+l} \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial h}\right)^{l-1} \left(\frac{v\,(t, x', x_n h)}{h}\right) dh, \tag{6'}$$

а при $\nu < 0$

$$\mathcal{P}_{\nu x_n} v(t, x) = x_n^{-2\nu} P_{(-\nu)x_n} v(t, x). \tag{6''}$$

Справедлива следующая

Теорема. Путь задача (1)—(3) $\mathcal{B}$-параболическая, тогда элементы i-го столбца ядер Пуассона этой задачи определяются формулой $G_i^{(\nu)}(t, x) = P_{\nu x_n} G_i(t, x)$, они при $t > 0$ бесконечно дифференцируемы на своих аргументах и имеют место оценки: при $\nu > 0$

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m \mathcal{D}_{x'}^k B_{x_n}^j G_{i(t,x)}^{(\nu)}| \leqslant C_{imk}^{(\nu,j)} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} e^{-c|\hat{x}|^q} x_n^{-2\nu-m}, \tag{7}$$

при $\nu = 0$

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m \mathcal{D}_{x'}^k B_{x_n}^j G_i^{(\nu)}(t, x)| \leqslant C_{imk}^{(j)} \Psi_{n_i+|k|+2j}(t, x) \begin{cases} |\ln \hat{x}_n| + 1, & m = 0, \\ x_n^{-m}, & m > 0, \end{cases} \tag{7'}$$

а при $\nu < 0$

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m \mathcal{D}_{x'}^k B_{x_n}^j G_i^{(\nu)}(t, x)| \leqslant C_{imk}^{(\nu,j)} (1 + \hat{x}_n^{2|\nu|-m}) \Psi_{n_i+|k|+2j+m}(t, x), \tag{7''}$$

где

$$\Psi_p(t, x) = t^{-p/2b} \exp\{-c|\hat{x}|^q\}, \quad \hat{x} = xt^{-1/2b}, \quad x_n \geqslant 0.$$

Для решения задачи (1)—(3) и получения оценок ядер Пуассона изучим некоторые свойства оператора Пуассона.

Леммы о предельных свойствах оператора Пуассона. Обозначим через $C_a^{(m)}(E_1^+)$ класс непрерывно дифференцируемых до порядка m функций $f(x)$, $x \in (0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\mathcal{D}_x^k f(x)| \leqslant C_k \exp\{-ax^q\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m, \ a \geqslant 0, \ q > 0. \tag{8}$$

Лемма 1. Пусть $f(x) \in C_0^{(1)}(E_1^+)$, тогда интеграл

$$\mathcal{F}_\nu(x) = \int_1^\infty (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} f(xh)\, dh = P'_\nu f \tag{9}$$

при $\nu \in (0, 1/2)$ и $x \in (0, 1]$ допускает представление

$$\mathcal{F}_\nu(x) = C'_\nu f(x) + \alpha_\nu(x), \text{ где } \alpha_\nu(x) = O(x^{2\nu}) \tag{10}$$

при $x \to 0$, $C'_\nu = P'_\nu 1 = (2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma(\nu) \Gamma(1/2 - \nu)$. Если $\nu = 0$, $f \in C_\varepsilon^{(1)}(E_1^+)$, $\varepsilon > 0$, или $\int_1^\infty x^{-1} |f(x)| dx < \infty$, $f \in C_0^{(1)}$, то

$$\mathcal{F}_0(x) = f(x) \ln 1/x + \alpha_0(x), \ |\alpha_0(x)| \leqslant \text{const}. \tag{11}$$

Доказательство. В интеграле $\mathcal{F}_\nu(x)$ сделаем замену $xh = \beta$ и предположим, что $A = \text{const} > 1$, тогда получаем представление

$$\mathcal{F}_\nu(x) = \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} f(\beta)\, d\beta x^{2\nu} + \int_A^\infty (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} f(\beta)\, d\beta \cdot x^{2\nu} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{I}_1 \cdot x^{2\nu} + \mathcal{I}_2 \cdot x^{2\nu}. \tag{12}$$

Интеграл $\mathcal{I}_2$ при $\nu \in (0, 1/2)$ на $[0, 1]$ равномерно сходится

$$|\mathcal{I}_2| \leqslant \sup|f| \int_A^\infty (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} d\beta \leqslant |f|_C \int_A^\infty (\beta^2 - 1)^{-\nu-1/2} d\beta \leqslant |f|_C C_\nu(A),$$

$$C_\nu(A) = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)^{-1} (A - 1)^{1/2-\nu}.$$

Интеграл $\mathcal{J}_1$ запишем в виде суммы

$$\mathcal{J}_1 = \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} [f(\beta) - f(x)]\, d\beta + f(x) \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} d\beta \equiv$$

$$\equiv \mathcal{H}_1 + f\mathcal{H}_2. \tag{13}$$

В силу теоремы о среднем с учетом $f \in C^{(1)}(E_1^+)$, находим

$$|\mathcal{H}_1| \leqslant |f'|_C \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} (\beta - x)\, d\beta \leqslant |f'|_C \int_0^A h^{-2\nu} dh < \infty.$$

Вычислим $\mathcal{H}_2$, полагая $\beta = hx$:

$$\mathcal{H}_2 = \int_1^{Ax^{-1}} (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} dh \cdot x^{-2\nu} = x^{-2\nu} \Bigg[\int_1^{\infty} (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} dh -$$

$$- \int_{Ax^{-1}}^{\infty} (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} dh\Bigg] = x^{-2\nu} [P'_\nu 1 - \delta_\nu(x)], \tag{14}$$

$$\delta_\nu(x) = \int_{Ax^{-1}-1}^{\infty} \beta^{-\nu-1/2} (2 + \beta)^{-\nu-1/2} d\beta \leqslant \int_{Ax^{-1}-1}^{\infty} \beta^{-2\nu-1} d\beta =$$

$$= (Ax^{-1} - 1)^{-2\nu} (2\nu + 1)^{-1} = O(x^{2\nu}), \quad x \to 0.$$

Учитывая это равенство и соотношение (12), приходим к формуле (10), в которой

$$\alpha_\nu(x) = x^{2\nu} (\mathcal{J}_2 + \mathcal{H}_1) - f(x)\, \delta_\nu(x).$$

Пусть теперь $\nu = 0$, рассмотрим формулы (12) — (13). Интеграл $\mathcal{J}_2$ существует в силу условий на $f(x)$, причем

$$\lim_{x \to 0} \mathcal{J}_2(x) = \int_A^{\infty} \beta^{-1} f(\beta)\, d\beta < +\infty.$$

Также имеем $|\mathcal{H}_1| \leqslant C(A)$, а интеграл $\mathcal{H}_2$ вычисляется как

$$\mathcal{H}_2 = \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-1/2} d\beta = \ln \frac{A + \sqrt{A^2 - x^2}}{x} = \ln \frac{1}{x} + \alpha_0(x, A),$$

где $\alpha_0(x, A)$ остается ограниченным при $x \to 0$.

Лемма 2. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $C_a^{(m+1)}(E_1^+)$, то интеграл $\mathcal{F}_\nu(x) \in C_{a_1}^{(m+1)}(0, \infty)$, $0 < a_1 < a$, при этом имеет место представление

$$\mathcal{D}_x^k \mathcal{F}_\nu(x) = C'_\nu \mathcal{D}_x^k f(x) + x^{-k} \alpha_{k\nu}(x) \tag{15}$$

для $k = \overline{1, m}$, $\nu \in (0, 1/2)$, $x \in (0, 1)$, $\alpha_{k\nu}(x) = O(x^{2\nu})$, $x \to 0$.

Доказательство. Неравенство (8) для $f(x)$ обеспечивает при $x \geqslant \delta > 0$ равномерную сходимость интегралов полученных непосредственным дифференцированием $\mathcal{F}_\nu(x)$ до порядка $m + 1$ и $|\mathcal{D}_x^k \mathcal{F}_\nu(x)| \leqslant C_\delta\, e^{-a_1 x^q}$. Получим представление (15):

$$\mathcal{D}_x^k \mathcal{F}_\nu(x) = \int_1^{\infty} (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} h^k \mathcal{D}^k f(xh)\, dh =$$

$$= x^{2\nu-k} \left[\int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} \beta^k \mathcal{D}_\beta^k f(\beta)\, d\beta + \int_A^x (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} \beta^k \mathcal{D}_\beta^k f(\beta)\, d\beta\right] \equiv$$

$$\equiv x^{2\nu-k} [\mathcal{J}_{1k} + \mathcal{J}_{2k}]. \tag{16}$$

ISSN 0236-0497. Нелинейн. границ. задачи. 1991. Вып. 3.

Используя оценку (8) для $\mathcal{D}_x^k f(x)$ и то, что $\beta - x \geqslant A - 1$ в $\mathcal{J}_{2k}$, находим

$$|\mathcal{J}_{2k}| \leqslant C \int_A^\infty (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} \beta^k e^{-a\beta^q} d\beta \leqslant C(A) \int_0^\infty \beta^k e^{-a\beta^q} d\beta \leqslant C_k(A). \quad (17)$$

Далее запишем $\mathcal{J}_{1k}$ с учетом (13), (14), получим

$$\mathcal{J}_{1k} = \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} [\beta^k \mathcal{D}^k f(\beta) - x^k \mathcal{D}^k f(x)] d\beta +$$

$$+ x^k D^k f(x) \int_x^A (\beta^2 - x^2)^{-\nu-1/2} d\beta \equiv \mathcal{H}_{1k} + x^{k-2\nu} \mathcal{D}^k f [P'_\nu 1 - \delta_\nu(x)]. \quad (18)$$

Интеграл $\mathcal{H}_{1k}$ абсолютно сходится, поэтому из (16) на основании (17), (18) приходим к представлению (15).

Следствие. Пусть $f(x) \in C_a^{(m+1)}(E_1^+)$, тогда выполняются соотношения: при $\nu \geqslant 0$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\nu} B_x^j P_\nu f(x) = C'_\nu \mathcal{D}_x^{2j} f(0) \text{ при } (2j \leqslant m), \quad (19)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-1} B_x^j P_0 f(x) = \mathcal{D}_x^{2j} f(0), \quad (20)$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\nu+k} \mathcal{D}_x^k P_\nu f(x) = C_{\nu k} f(0), \qquad (k \leqslant m), \quad (21)$$

а при $\nu < 0$:

$$\lim_{x\to 0} B_x^j \mathcal{P}_\nu f(x) = C_{\nu j} \mathcal{D}_x^{2j} f(0), \ (2j \leqslant m). \quad (22)$$

Доказательство. На гладких и убывающих функциях $f(x)$ операторы B_x и P_ν обладают свойствами [5, с. 356]:

$$B_x P_\nu f(x) = P_\nu \mathcal{D}_x^2 f(x). \quad (23)$$

Используя лемму 1 и соотношение (23), получаем при $\nu \in (0, 1/2)$:

$$x^{2\nu} B_x^j P_\nu f(x) = x^{2\nu} P_\nu D_x^{2j} f(x) = P'_\nu D_x^{2j} f(x) =$$

$$= C'_\nu \mathcal{D}_x^{2j} f(x) + \alpha_\nu(x), \qquad \alpha_\nu(x) = O(x^{2\nu}), \quad x \to 0. \quad (24)$$

Устремляя $x \to 0$, приходим к (19). Аналогично получаем (20) с помощью (11) и (22) при $\nu < 0$. Для вывода (21) воспользуемся формулой Лейбница и леммой 2:

$$\mathcal{D}_x^m P_\nu f = \mathcal{D}_x^m [x^{-2\nu} \mathcal{F}_\nu(x)] = \sum_{k=0}^m C_m^k \alpha'_{k\nu} x^{-2\nu-k} [C'_\nu \mathcal{D}_x^{m-k} f(x) + O(x^{2\nu-(m-k)})] =$$

$$= \alpha'_{m\nu} x^{-2\nu-m} [C'_\nu f(x) + O(x^{2\nu})] + \sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{C}_{m\nu}^k x^{-2\nu-k} C'_\nu D_x^{m-k} f + O(x^{-m}), \quad (25)$$

где $\alpha'_{k\nu} = (-1)^k 2\nu(2\nu+1) \dots (2\nu+k)$, $k = \overline{0, m}$. Домножая эту формулу на $x^{2\nu+m}$, предельным переходом получаем (21).

Замечание. Леммы 1, 2 и следствие имеют место для $P_\nu f$ с $\nu = [\nu] + \{\nu\} \geqslant 1/2$, только в них пространства $C_a^{(m+1)}$ следует заменить на $C_a^{(m+1+l(\nu))}$, где

$$l(\nu) = \begin{cases} [\nu], & \text{если } \{\nu\} < 1/2, \\ [\nu] + 1, & \text{если } \{\nu\} \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Оценки ядер Пуассона. Для доказательства сформулированной теоремы найдем решение задачи (1)—(3). Отыскиваем его в виде преобразования неизвестной функции $v(t, x)$:

$$u(t, x) = P_{\nu x_n} v(t, x). \quad (26)$$

Тогда вследствие применения к $u(t, x)$ операторов системы (1) и краевых условий (3) с учетом соотношений (19), (20), (22), (23) получим

$$L(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{x'}, B_{x_n}) u = P_{\nu x_n} L(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{x'}, \mathcal{D}^2_{x_n}) v = 0, \quad x_n > 0;$$

$$f_\nu(x_n)\,\mathcal{B}_i(\mathcal{D}_{x'}, B_{x_n})\, u|_{x_n=0} = C^0_\nu \mathcal{B}_i(\mathcal{D}_{x'}, \mathcal{D}^2_{x_n})\, v|_{x_n=0} = y_i.$$

Значит, функция $v(t, x)$ должна являться решением задачи (4) из класса $C_i^{\max(2b, r_i)+1}$ убывающим при $x_n \to \infty$ в силу условий лемм 1, 2. Это решение определяется формулой (5) с бесконечно дифференцируемыми при $t > 0$ ядрами $G_i(t, x)$, для производных которых справедлива оценка [4, с. 377]:

$$|\mathcal{D}^k_x G_i(t, x)| \leqslant C_k t^{-\frac{n_i+|k|}{2b}} e^{-c|\hat{x}|^q}, \quad x_n \geqslant 0 \quad i = \overline{1, bN}. \tag{27}$$

На основании (26) для решения $u(t, x)$ задачи (1)—(3) получаем представление вида (5), в котором ядром служат функции

$$G_i^{(\nu)}(t, x) = P_{\nu x_n} G_i(t, x).$$

Получим оценки (7). Учитывая (23), имеем ($\nu > 0$)

$$\mathcal{D}^m_{x_n}\mathcal{D}^k_{x'} B^j_{x_n} G_i^{(\nu)} = \mathcal{D}^m_{x_n} P_\nu \mathcal{D}^k_{x'} D^{2j}_{x_n} G_i = \mathcal{D}^m_{x_n}\, [x_n^{-2\nu} P'_\nu\, \mathcal{D}^k_{x'} D^{2j}_{x_n} G_i].$$

Отсюда видно, что нужно оценить интегралы

$$\mathcal{J}^{(\nu)}_{kij} \equiv \mathcal{D}^{k_n}_{x_n} P'_\nu\, \mathcal{D}^{k'}_{x'} \mathcal{D}^{2j}_{x_n} G_i(t, x) = \int_1^\infty (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} h^{k_n} \mathcal{D}^{k'}_{x'} \mathcal{D}^{k_n+2j}_{\zeta_n} G_i(t, x', x_n h)\, dh,$$

$$(\zeta_n = x_n h).$$

Пользуясь неравенствами (27) и полагая $\hat{x}_n h = \beta$, находим в случае $\hat{x}_n \leqslant 1$:

$$|\mathcal{J}^{(\nu)}_{kij}| \leqslant C^{i\nu}_{kj} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} \int_1^\infty (h^2 - 1)^{-\nu-1/2} h^{k_n} e^{-c\left(\frac{|x'|+hx_n}{t^{1/2b}}\right)^q} dh \leqslant$$

$$\leqslant C^{i\nu}_{kj} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} e^{-c_1|\hat{x}|^q} \int_{\hat{x}_n}^\infty (\beta^2 - \hat{x}_n^2)^{-\nu-1/2} \beta^{k_n} e^{-\varepsilon\beta^q} d\beta \times \hat{x}_n^{2\nu-k_n};$$

$$|k| = |k'| + k_n, \quad 0 < c_1 < c, \ \varepsilon > 0. \tag{28}$$

Последний интеграл представляет сумму интегралов $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ в формуле (12) с функцией $\beta^{k_n} \exp\{-\varepsilon\beta^q\}$ и не превышает $C(1 + \hat{x}_n^{2\nu-k_n})$, поэтому

$$|\mathcal{J}^{(\nu)}_{kij}| \leqslant C^{\nu}_{kij} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} e^{-c_1|\hat{x}|^q} (\hat{x}_n^{2\nu-k_n} + 1). \tag{29}$$

Выполняя дифференцирование $\mathcal{D}^m_{x_n}[x_n^{-2\nu} I^{(\nu)}_{kij}]$ также как в формуле (25), получаем

$$|\mathcal{D}^m_{x_n} \mathcal{D}^{k'}_{x'} B^j_{x_n} G_i^{(\nu)}| = \left|\sum_{k_n=0}^m C^{k_n}_{m\nu} x_n^{-2\nu-(m-k_n)} \mathcal{J}^{(\nu)}_{kij}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C^{(i\nu)}_{kj} t^{-\frac{n_i+|k'|+2j}{2b}} \exp\{-c_1|\hat{x}|^q\} \sum_{k_n=0}^m x_n^{k_n} (\hat{x}_n^{2\nu-k_n} + 1)\, x_n^{-2\nu-m} \leqslant$$

$$\leqslant C^{(i\nu)}_{kj} t^{-\frac{n_i+|k'|+2j}{2b}} x_n^{-2\nu-m} \exp\{-c_1|\hat{x}|^q\}. \tag{30}$$

Если $\hat{x}_n \geqslant 1$, интегралы $I_{kij}^{(\nu)}$ допускают оценку вида (27), так что (30) сохраняет свою силу. Пусть теперь $\nu \geqslant 1/2$. Для оценки производных $P_{\nu x_n} G_i(t, x)$ обозначим

$$\Psi_l(G_i, h) = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial h}\right)^{l-1}(h^{-1}G_i(t, x', x_n h)).$$

Тогда учитывая формулы (6), (23), имеем

$$B_{x_n}^l \mathcal{D}_{x'}^{k'} P_{\nu x_n} G_i(t, x) = x_n^{-2\nu} P'_\nu \Psi_l(\mathcal{D}_{x'}^{k'} \mathcal{D}_{x_n}^{2j} G_i, h). \tag{31}$$

Запишем $\Psi_l(G_i, h)$ в развернутом виде

$$\Psi_l(G_i, h) = (1-l)\, h^{-l} \frac{\partial^{l-1}}{\partial h^{l-1}}(h^{-1}G_i) +$$

$$+ h^{1-l}\frac{\partial^l}{\partial h^l}(h^{-l}G_i) = h^{-l}\sum_{p=0}^{l-1} C_{l-1}^p h^{-1-(l-1-p)} \mathcal{D}_h^p G_i + h^{1-l} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{l} C_l^k h^{-1-(l-p)} \mathcal{D}_h^p G_i = \sum_{p=0}^{l} \widetilde{C}_l^p\, h^{p-2l} x_n^p \mathcal{D}_{\xi_n}^p G_i.$$

Применяя оператор $\mathcal{D}_{x_n}^m$ к функции $\Psi_l(\mathcal{D}_{x'}^k \mathcal{D}_{x_n}^{2j} G_i, h) \equiv \Psi_{li}^{(kj)}$ находим

$$\mathcal{D}_{x_n}^m \Psi_{li}^{(kj)}(t, x, h) = \sum_{p=0}^{l} \widetilde{C}_l^p\, h^{p-2l} \sum_{r=0}^{m} C_m^r x_n^{p-(m-r)} h^r \mathcal{D}_{\xi_n}^{p+r+2} D_{x'}^k G_i.$$

Если воспользоваться оценками (27) и тем, что $h \in [1, \infty)$, получаем неравенство

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m \Psi_{li}^{(kj)}(t, x, h)| \leqslant C x_n^{-m} h^{-2l} \sum_{p=0}^{l}\sum_{r=0}^{m} (x_n h)^{p+r} t^{-\frac{n_i+|k|+2j+p+r}{2b}} \times$$

$$\times e^{-c(|\hat{x}'|+h\hat{x}_n)^q} \leqslant C_{lim}^{(\nu j)} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} x_n^{-m} h^{-2l} \exp\{-c_1 |\hat{x}|^q\}. \tag{32}$$

Это неравенство применяем для оценки производных сомножителей выражения (31):

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m P'_\nu \Psi_l(\mathcal{D}_{x'}^k \mathcal{D}_{xn}^{2j} G_i, h)| \leqslant \int_1^\infty (h^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}+l} |\mathcal{D}_{x_n}^m \Psi_{li}^{(kj)}(t, x, h)|\, dh \leqslant$$

$$\leqslant C_{lim}^{(\nu j)} x_n^{-m} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} e^{-c_2|\hat{x}|^q} \int_1^\infty (h^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}+l} h^{-2l} e^{-\varepsilon|\hat{x}_n h|^q}\, dh.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего неравенства, оценивается с помощью приведенных в лемме 1 рассуждений и учетом условия $0 < \nu + 1/2 - e < 1$. Он не превышает $C(1 + \hat{x}_n^{2\nu})$, вследствие чего

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m P'_\nu \Psi_l(\mathcal{D}_{x'}^k \mathcal{D}_{x_n}^{2j} G_i, h)| \leqslant C x_n^{-m} t^{-\frac{n_i+|k|+2j}{2b}} e^{-c_2|\hat{x}|^q}, \quad (0 < c_2 < c_1 < c). \tag{33}$$

Дифференцируя теперь соотношение (31) по x_n, аналогично как и при выводе неравенства (30), получаем

$$|\mathcal{D}_{x_n}^m B_{x_n}^l \mathcal{D}_{x'}^k G_i^{(\nu)}(t, x)| \leqslant \sum_{k_n=0}^{m} C_{m\nu}^{k_n} x_n^{-(2\nu+m-k_n)} |\mathcal{D}_{x_n}^{k_n} P_\nu(\mathcal{D}_{x'}^k \mathcal{D}_{x_n}^{2j} G, h)| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k_n=0}^{m} x_n^{-(2\nu+m-k_n)} \hat{x}_n^{-k_n} t^{-\frac{n_i+|k'|+2j}{2b}} \exp\{-c_2|\hat{x}|^q\}.$$

Учитывая это неравенство, которое получено при $\nu \geqslant \frac{1}{2}$ и неравенство (30) для $\nu \in (0, 1/2)$, приходим к оценке (7) в случае $\nu > 0$. Пусть $\nu = 0$. Для получения оценок (7) производных $\mathcal{D}_{x_n}^{k_n}\mathcal{D}_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_i^{(0)}(t, x)$ следует оценить интегралы $\mathcal{I}_{kij}^{(0)}$ в неравенстве (28), а это сводится к оценке интеграла

$$R_m(\hat{x}_n) = \int_1^\infty (h^2 - 1)^{-1/2} h^m \exp\{-\varepsilon |\hat{x}_n h|^q\}\, dh,$$

удовлетворяющего неравенству

$$R_m(x_n) \leqslant \begin{cases} C_1 \ln 1/x_n + C_2, & m = 0, \\ C_1 x_n^{-m} + C_2, & m > 0. \end{cases}$$

С помощью последнего неравенства находим

$$|\mathcal{I}_{kij}^{(0)}| \leqslant C_{kij} t^{-\frac{n_i + |k| + 2j}{2b}} e^{-c|\hat{x}|^q} \begin{cases} |\ln \hat{x}| + 1, & x_n = 0, \\ \hat{x}_n^{-k_n} + 1, & k_n > 0. \end{cases}$$

Отсюда вытекает нужное неравенство (7′).

В заключение отметим, что в случае $\nu < 0$

$$G_i^{(\nu)} = \mathcal{P}_\nu G_i = x_n^{-2\nu} P_{-\nu} G_i = P'_{|\nu|}\, G_i.$$

Для производных $\mathcal{D}_{x_n}^m \mathcal{D}_{x'}^k B_{x_n}^j P'_{|\nu|} G_i$ получены оценки вида (29), которые соответствуют неравенствам (7″).

1. *Агном С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I.— М. : ИЛ, 1962.— 205 с.
2. *Загорский Т. Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа.— Изд-во Львов. ун-та.— 1961.— 114 с.
3. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. Стеклова.— 1965.— 83.— С. 162.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М. : Наука, 1964.— 445 с.
5. *Катрахов В. В.* Общие граничные задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений // Мат. сб.— 1980.— 112, № 3.— С. 354—379.
6. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. II.// Дифференц. уравнения.— 1975.— 11, № 7.— С. 1293—1303.
7. *Матийчук М. И.* Решение параболической граничной задачи с особенностями и задачи оптимального управления. Функциональные и численные методы матем. физики.— Киев : Наук. думка, 1988.— С. 151—154.

Чернов. гос. ун-т Получено 18.11.89