УДК 517.956

Е. А. Калита

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РАЗБРОС СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Рассматриваются обобщенные решения квазилинейных эллиптических систем высокого порядка. Доказано, что чем меньше разброс собственных значений главной части системы, тем выше гладкость решения. Результат справедлив в замкнутой области при соответствующей гладкости границы и граничных условий. Доказательство основано на оценках решения в пространствах Мори.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geqslant 2$, с достаточно гладкой границей. Пусть в Ω задана эллиптическая система

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha (x, u, \ldots, D^m u) = 0 \qquad (1)$$

(u, a_α — вектор-функции). Пусть коэффициенты a_α измеримы и удовлетворяют условиям

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (x, \xi)\, \xi_\alpha \geqslant \mu \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 - V_{m-1}(\xi) - f(x),$$

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha (x, \xi)|^2 \leqslant \nu^2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 + V_{m-1}(\xi) + f(x), \qquad (2)$$

$$|a_\alpha (x, \xi)|^{q'_\alpha} \leqslant V_m(\xi) + f_\alpha(x), \ |\alpha| < m,$$

где μ, ν — положительные константы,

$$V_k(\xi) = C \Big(\sum_{|\alpha| < m'} |\xi_\alpha|^2 \Big) \Big(\sum_{m' \leqslant |\alpha| \leqslant k} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} + 1 \Big);$$

$$m' = m - \frac{n}{2}; \ 0 < p_\alpha < q_\alpha; \ q_\alpha = \frac{2n}{n - 2(m - |\alpha|)} \ (|\alpha| > m');$$

$$q_\alpha = \infty \ (|\alpha| \leqslant m');$$

q'_α — показатель, сопряженный по Гельдеру с q_α; $C(\cdot)$ — неубывающая функция. Условия на f укажем ниже.

Рассмотрим обобщенное решение (1) $u \in W_2^m(\Omega)$. Понятно, что условия (2) не позволяют получить априорную гладкость u выше, чем W_∞^m. С другой стороны, по теореме вложения $u \in C^{m - \frac{n}{2}}$. Многочисленные контрпримеры показывают, что дальнейшее повышение априорной гладкости решения для всего класса эллиптических систем невозможно даже при гладких a_α. Одним из условий, выделяющих системы с решениями более высокой гладкости, является ограничение на разброс собственных значений главной части системы. На этом пути А. И. Кошелев и С. И. Челкак [1; 2] при несколько более сильных предположениях получили достаточные условия гельдеровости производных u до порядка m во внутренних подобластях $\Omega' \Subset \Omega$. В данной работе доказывается, что чем меньше разброс собственных значений главной части системы, тем выше гладкость обобщенного решения во всей области Ω.

Определим пространство $H_a^m(\Omega)$, $-n < a \leqslant 0$, нормой

$$\sup_{x_0 \in \Omega} \Big(\int_\Omega \sum_{k=0}^m |D^k u|^2 r^a dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

где $|D^k u|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2$; $r = |x - x_0|$. По лемме Морри $H_a^m(\Omega) \subset\!\!\to$

$\hookrightarrow C^{m-\frac{n+a}{2}}(\overline{\Omega})$, $m-\frac{n+a}{2}>0$ не целое, поэтому можно ограничиться оценкой в H_a^m (под C^λ, λ не целое, подразумеваем пространство функций, производные которых порядка $[\lambda]$ гельдеровы с показателем $\lambda-[\lambda]$).

Пусть $f\in L_{1,a}(\Omega)$, $f_\alpha\in L_{1,\frac{q'_\alpha a}{2}}(\Omega)$, где $L_{1,a}$ — пространство с нормой $\sup\limits_{x_0\in\Omega}\int\limits_\Omega |f|\,r^a dx$. Пусть u удовлетворяет краевым условиям $u-g\in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$, $g\in H_a^m(R^n)$.

Теорема 1. Существует функция $M(a, n, m)$, $-n<a\leqslant 0$ (если $n=2$, то $-1<a\leqslant 0$), удовлетворяющая условиям

1) $M(0, n, m)=1$,

2) $M(a_\theta, n, m)\leqslant M(a, n, m)^{1-\theta}M(a', n, m)^\theta$, $a_\theta=(1-\theta)a+\theta a'$, $0<\theta<1$, такая, что если

$$\left(1-\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} M(a, n, m)<1, \tag{3}$$

то $u\in H_a^m(\Omega)$.

Доказательство. Для $v\in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ очевидно равенство

$$\int\limits_\Omega D^m u\overline{D^m v}dx=\int\limits_\Omega\Big(D^m uD^m v-\varkappa\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha v\Big)dx, \tag{4}$$

$$D^m uD^m v=\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha uD^\alpha v,$$

где $\varkappa$ — произвольная постоянная. Зафиксируем $x_0\in\Omega$; обозначим $r_t=\begin{cases}r, & r>t\\ t, & r\leqslant t\end{cases}$, $t>0$. Оценим старшие производные в правой части (4):

$$\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\Big|(D^\alpha u-\varkappa a_\alpha)D^\alpha v dx\Big|\leqslant\Big(\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u-\varkappa a_\alpha|^2 r_t^a dx\int\limits_\Omega|D^m v|^2 r_t^{-a}dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Из условий на коэффициенты

$$\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u-\varkappa a_\alpha|^2\leqslant(1-2\varkappa\mu+\varkappa^2\nu^2)|D^m u|^2+\ldots, \tag{6}$$

где в многоточие включены младшие члены. Положим $\varkappa=\frac{\mu}{\nu^2}$, при котором коэффициент при $D^m u$ достигает минимума, равного $1-\frac{\mu^2}{\nu^2}$.

Обозначим $W_{p,\omega}^m(\Omega)$ — пространство с нормой $\|u\|_{m,p,\omega}^2=\int\limits_\Omega\sum_{k=0}^m|D^k u|^2\times\omega(x)\,dx$ (если $m=0$ или $p=2$ или $\omega\equiv 1$, соответствующий индекс будем опускать; если $m=0$, будем писать $L_{p,\omega}$).

Для оценки младших членов используем следующие результаты: $|D^\alpha u|\leqslant C\|u\|_m$, $|\alpha|<m'$ (теорема вложения Соболева);

$$W^k_{p,\omega^p}\hookrightarrow L_{q,\omega^q},\ \text{где}\ q=\frac{np}{n-kp};\ 1<p<\frac{n}{k};\ \omega^q\in A_{1+\frac{q}{p'}}\quad [3,\ \text{с. } 77].$$

Здесь A_p — класс Макенхоупта [3, с. 44]. Используя эквивалентное определение A_p для радиальных весов [3, с. 46], видим, что $\omega=r_t^b$ удовлетворяет указанному условию с равномерной по $t>0$ оценкой A-нормы при $-\frac{n}{q}<b<\frac{n}{p'}$;

$$\|u\|_{r_t^a}\leqslant C_0\delta\|Du\|_{r_t^a},\ \text{где}\ u\in\overset{0}{W}{}_2^1(B_\delta);\ B_\delta=\{x:|x-x_0|<\delta\};\ a>-n;$$

C_0 зависит только от n, a (легко проверяется аналогично [2, с. 23]).

Поскольку функция u не финитна, для применения теорем вложения она должна быть определена в области, несколько большей, чем $\operatorname{supp} v$. Поэтому положим $u=g$ вне Ω. Пусть $\operatorname{supp} v \subset \Omega_\delta = \Omega \cap B_\delta$. Введем срезающую функцию $\varphi(x) = \psi(\delta^{-1}|x-x_0|)$, где $\psi \in C^\infty$, $\psi(y) = \begin{cases} 1, & y < \frac{1}{2}, \\ 0, & y > 1 \end{cases}$

Оценивая младшие члены, из (4) с учетом (5), (6) находим

$$\left|\int_\Omega D^m u D^m v dx\right| \leqslant \left(\left(\left(1-\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C\delta^\varepsilon\right)\|D^m(u\varphi)\|_{r_t^a} + C_\delta\right)\|D^m v\|_{r_t^{-a}}, \quad (7)$$

где $\varepsilon > 0$ зависит от p_α; $\delta > 0$ достаточно малое. Обозначим C — все несущественные постоянные.

Пусть точка x_0 лежит вблизи границы Ω. Поскольку граница гладкая, можно считать $\Omega_\delta = \{x : |x-x_0| < \delta, x_n > 0\}$, $x_0 = (0, \ldots, x_{0n})$, $0 < x_0 < \delta$.

Выберем пробную функцию $v = \varphi\Lambda_+^{-m} v_1$, $v_1 = \chi r_t^a \Lambda_+^m(u\varphi)$, где Λ_+ — оператор с символом $|\zeta'| - i\zeta_n$, $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$; χ — характеристическая функция множества Ω_δ. Аналогично [4, с. 79] проверяется $v \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega_\delta)$. В левой части (7), подставив v, получим

$$\int_\Omega D^m u D^m v dx = \int_\Omega D^m(u\varphi) D^m \Lambda_+^{-m} v_1 dx + \ldots, \quad (8)$$

где члены, включенные в многоточие, содержат производные φ и распространены только по $\Omega_\delta \setminus B_{\frac{\delta}{2}}$. Используя преобразование Фурье, находим

$$\int_\Omega D^m(u\varphi) D^m \Lambda_+^{-m} v_1 dx = \int_{R^n} \Lambda_+^m(u\varphi) v_1 dx = \int_{\Omega_\delta} |\Lambda_+^m(u\varphi)|^2 r_t^a dx.$$

В правой части (7) имеем

$$D^m(u\varphi) = D^m \Lambda_+^{-m} \Lambda_+^m(u\varphi),$$
$$D^m v = D^m \Lambda_+^{-m} v_1 + \ldots, \quad (9)$$

где члены, включенные в многоточие, распространены только по $\Omega_\delta \setminus B_{\frac{\delta}{2}}$.

Символ оператора $D_j\Lambda_+^{-1}$ равен $-i\frac{\zeta_j}{|\zeta|}\frac{|\zeta'|+i\zeta_n}{|\zeta|}$. Здесь проектор Рисса $\frac{\zeta_j}{|\zeta|}$ ограничен в $L_{p,\omega}$, если $\omega \in A_p$ [3, с. 89]. Используя эквивалентное определение A_p для радиальных весов, находим, что $r_t^a \in A_p$ с равномерной по $t > 0$ оценкой A-нормы при $-n < a < n(p-1)$. Для оценки оператора $\frac{|\zeta'|}{|\zeta|}$ используем следующий результат.

Лемма [3, с. 113]. Пусть $1 < s \leqslant 2$, $\frac{n}{s} < k \leqslant n$, k — целое, ограниченная функция $\sigma(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{R>0}\left(R^{s|\alpha|-n}\int_{R<|\zeta|<2R}|D^\alpha\sigma|^s d\zeta\right)^{\frac{1}{s}} < \infty, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

Если $\frac{n}{k} < p < \infty$, $\omega \in A_{\frac{pk}{n}}$ или $1 < p < \left(\frac{n}{k}\right)'$, $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\frac{p'k}{n}}$, то σ — мультипликатор в $L_{p,\omega}$.

Легко видеть, что $\left| D^{\alpha} \frac{|\zeta'|}{|\zeta|} \right| \leqslant C_{\alpha} |\zeta'|^{1-|\alpha|} |\zeta|^{-1}$, и для применения леммы достаточно проверить $\int\limits_{|\zeta|=1} |\zeta'|^{(1-k)s} d\theta < \infty$, что эквивалентно $(1-k)s > 1-n$. Это выполнено, если $\frac{n}{2} < k < n$, а s достаточно близко к $\frac{n}{k}$. При $p=2$ вес r_t^a при $-n < a \leqslant 0$ удовлетворяет первому, а при $0 \leqslant a < n$ — второму из условий леммы равномерно по $t > 0$. Если $n=2$, то нельзя выбрать k так, что $\frac{n}{2} < k < n$. В этом случае $\frac{|\zeta'|}{|\zeta|} = \frac{\zeta_1}{|\zeta|} \operatorname{sgn} \zeta_1$, где преобразование Гильберта $\operatorname{sgn} \zeta_1$ ограничено в $L_{2, r_t^a}(R \times x_2)$, $|a| < 1$ (равномерность по $t > 0$, $R \times x_2$ выполнения условия [3, с. 46] проверяется прямым счетом). Значит, оператор $D^m \Lambda_{+}^{-m}$ ограничен в L_{2, r_t^a} равномерно по $t > 0$. Члены, включенные в многоточия, содержат также операторы $D^{\alpha} \Lambda_{+}^{-m}$, $|\alpha| < m$. Эти операторы отличаются от предыдущих тем, что содержат оператор интегрирования $|\zeta|^{|\alpha|-m}$, который ограничен в $L_{2,\omega}$ в ограниченной области.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $-a + \varepsilon < n$. Для младших членов в (9) получим

$$\Big| \int\limits_{\Omega_\delta \setminus B_{\frac{\delta}{2}}} \ldots \Big| \leqslant C_\delta \| \Lambda_{+}^{-m} v_1 \|_{m, r_t^{-a+\varepsilon}} \leqslant C_\delta \| \Lambda_{+}^{m} (u\varphi) \|_{r_t^{a+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant C_\delta (\eta \| \Lambda_{+}^{m} (u\varphi) \|_{r_t^a} + C_\eta)$$

с произвольно малым $\eta > 0$. Аналогично оцениваются младшие члены в (8).

Обозначим через M_a равномерную по достаточно малым $t > 0$ оценку нормы $D^m \Lambda_{+}^{-m}$ в $L_{2, r_t^a}(R^n)$. Из (7) получаем, обозначая $w = \| \Lambda_{+}^{m} (u\varphi) \|_{r_t^a}$,

$$w^2 \leqslant \left(\left(1 - \frac{\mu^3}{\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} + C\delta^{\varepsilon} + \eta C_\delta \right) M_a M_{-a} w^2 + C_{\delta\eta} w + C_{\delta\eta}.$$

Если $\left(1 - \frac{\mu^2}{\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_a M_{-a} < 1$, при достаточно малых δ, η отсюда вытекает ограниченность w и конечность $\| \Lambda_{+}^{m} (u\varphi) \|_{r^a}$.

Используя вместо Λ_{+} оператор Λ с символом ζ, получаем аналогичную оценку внутри Ω.

Положим $M(a, n, m) = M_a M_{-a}$. Условие 1) выполнено, поскольку норма $D^m \Lambda_{+}^{-m}$(а также $D^m \Lambda^{-m}$) в L_2 равна единице (проверяется переходом к преобразованиям Фурье). Условие 2) следует из того, что M как норма оператора удовлетворяет точному интерполяционному неравенству.

Пусть теперь коэффициенты a дифференцируемы по всем аргументам и удовлетворяют условиям

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(x, \xi) \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant \mu |\eta|^2,$$

$$|a_{\alpha\beta}(x, \xi)| \leqslant C, \ |\alpha| = |\beta| = m, \tag{10}$$

$$|a_{\alpha\beta}(x, \xi)|^{q'_{\alpha\beta}} \leqslant V_m(\xi) + f_0(x), \ |\alpha| + |\beta| < 2m,$$

$$|a_{\alpha i}(x, \xi)|^{q'_{\alpha}} \leqslant V_m(\xi) + f_\alpha(x),$$

где $a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi_\beta}$; $a_{\alpha i} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i}$; $(q'_{\alpha\beta})^{-1} + q_\alpha^{-1} + q_\beta^{-1} = 1$; $f_0 \in L_1(\Omega)$.

В этом случае разброс собственных значений можно оценивать более точно. Обозначим $A = (a_{\alpha\beta})_{|\alpha|,|\beta|=m}$; $K_\varkappa$ — равномерная по x, ξ оценка нормы матрицы $I - \varkappa A$ (I — единичная матрица), т. е. $|(I-\varkappa A)\eta| \leqslant K_\varkappa |\eta|$ при произвольных x, ξ, η; $K = \inf\limits_{\varkappa} K_\varkappa$. Различные оценки для K рассматриваются в [1].

Пусть решение (1) удовлетворяет краевым условиям $u - g \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$, $g \in H_a^{m+1}(R^n)$.

Теорема 2. Если

$$KM(a, n, m) < 1, \tag{11}$$

то $u \in H_a^{m+1}(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку $g \in W_2^{m+1}$, условия (10) обеспечивают $u \in W_2^{m+1}(\Omega)$ [4, с. 84]. Для функций $v \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ справедливо равенство ($i = 1, \ldots, n$)

$$\int\limits_\Omega D^m D_i u D^m v dx = \int\limits_\Omega D^m D_i u D^m v - \varkappa \sum_{|\alpha|\leqslant m} \Big(\sum_{|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\beta D_i u + a_{\alpha i} \Big) D^\alpha v dx. \tag{12}$$

Действительно, пусть $a_\alpha \in W_2^1(\Omega)$, $\int\limits_\Omega \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha v dx = 0 \ \forall\, v \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$. Выбирая последовательность $v_k \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$, $v_k \to v$ в W_2^m, имеем

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} D_i a_\alpha D^\alpha v dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} D_i a_\alpha D^\alpha v_k dx = -\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha D_i v_k dx = 0.$$

Для старших производных в правой части (12) имеем

$$\Big| \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \Big(D^\alpha D_i u - \varkappa \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\beta D_i u \Big) D^\alpha v dx \Big| \leqslant K_\varkappa \| D^m D_i u \|_{r_t^a} \| D^m v \|_{r_t^{-a}}.$$

Для оценки младших членов по теореме вложения функцию u следует продолжить вне Ω в классе W_2^{m+1}. Поскольку граница гладкая, $g \in W_2^{m+1}$, это возможно. Построим пробную функцию по $D_i u$ так, как раньше строили по u. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, получим $D_i u \in H_a^m(\Omega)$, откуда $u \in H_a^{m+1}(\Omega)$.

Замечание 1. Условия на функцию M обеспечивают выполнение (3), (11) на некотором интервале $a' < a \leqslant 0$. Отсюда вытекает известный результат о повышении гладкости на ε (если a_α удовлетворяют (2), то $u \in C^{m-\frac{n}{2}+\varepsilon}(\overline{\Omega})$; если a_α удовлетворяют (10), то $u \in C^{m+1-\frac{n}{2}+\varepsilon}(\overline{\Omega})$ с некот рым $\varepsilon > 0$).

Замечание 2. В случае оценок во внутренних подобластях для функции M может быть указана мажоранта. В этом случае утверждения теорем справедливы без каких-либо граничных условий на решение. Отметим, что мажоранта M, найденная в [1], для случая, аналогичного теореме 1, без изменений переносится на случай теоремы 2. Это несколько ослабляет достаточные условия гельдеровости производных решения до порядка m, приведенные в [1; 2], если коэффициенты a_α удовлетворяют (10).

1. *Кошелев А. И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.— М. : Наука, 1986.— 240 с.
2. *Koshelev A. I., Chelkak S. I.* Regularity of Solutions of Quasilinear Elliptic Systems.— Leipzig : BSB Teubner Verlagsges. 1985.— 208 p.
3. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Мат. анализ.— 1983.— 21.— С. 42—129.
4. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.— Киев : Наук. думка, 1973.— 219 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк

Получено 23.09.87