УДК 519.7

©2009. **С.В. Сапунов**

КОНТРОЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ КЛАССОВ ПОМЕЧЕННЫХ ГРАФОВ

Рассматривается задача проверки мобильным агентом изоморфизма помеченного графа-эталона и произвольного помеченного графа из бесконечного класса таких графов. Решение заключается в построении контрольного эксперимента – определяющей пары множеств слов в алфавите меток, аналогичной системе определяющих соотношений для конечного автомата, и способа проверки наличия/отсутствия соответствующих множеств путей на графе, требующего одну дополнительную метку (камень). Найдены критерии, при которых произвольная пара множеств слов является определяющей парой некоторого помеченного графа.

Введение. Основной проблемой теоретической кибернетики является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и его операционной среды) [1, 2]. Взаимодействие таких систем зачастую представляется как процесс перемещения автомата по помеченному графу или лабиринту среды [3]. Одной из центральных и актуальных как в теоретическом, так и в прикладном аспектах проблем, возникающих при исследовании взаимодействия автоматов и графов, является проблема анализа или распознавания свойств графа при различной априорной информации и при различных способах взаимодействия автомата и графа. Один из подходов к решению проблемы анализа графа операционной среды основывается на том, что операционная среда рассматривается как неориентированный граф с помеченными вершинами. Такие графы возникли первоначально как блок-схемы и схемы программ, а в настоящее время находят применение в задачах навигации роботов [4]. В [2] с вершинами таких графов естественным образом связаны языки в алфавите меток вершин и показано, что эти языки регулярны и не содержат пустого слова.

Задачи организации двигательного поведения или навигации автономных мобильных роботов являются одними из основных задач искусственного интеллекта [5]. Одно из необходимых условий автономности робота – наличие модели (карты) его операционной среды. Общая задача картографирования (robotic mapping problem) подразделяется на три взаимосвязанные задачи: построение роботом карты (map exploration), определение положения робота на карте (robot self location) и проверка соответствия среды и карты или контроль карты (map validation) [4, 6]. Последняя задача формулируется следующим образом: для заданной карты некоторой среды робот должен проверить, является ли эта карта описанием той среды, которую он исследует, или нет. В случае, когда в качестве модели среды выступает граф, задача состоит в том, чтобы по описанию графа-эталона определить, изоморфен ему исследуемый граф или нет. Исследования графовых моделей операционных сред начались сравнительно недавно и далеки от завершения.

В данной работе рассматривается задача контроля конечного связного неориентированного графа с помощью блуждающего по нему агента. Блуждание состоит в перемещениях агента от вершины к вершине. При этом, находясь в вершине графа, агент считывает ее метки и метки смежных с ней вершин. Таким образом он может определить наличие или отсутствие некоторой метки в упомянутых вершинах. Задан бесконечный класс всех таких графов над некоторым множеством меток. Задача заключается в том, чтобы, имея полное описание графа-эталона, найти множество путей по исследуемому графу, которое позволило бы определить, изоморфен последний эталону или нет.

Подобная задача рассматривалась для конечных автоматов Мура [7] и решалась путем построения системы определяющих соотношений автомата-эталона, с помощью которой осуществлялся контроль исследуемого автомата.

В [8] предложено решение задачи контроля для класса графов, не превосходящих по числу вершин граф-эталон и имеющих одно и то же множество меток.

1. Основные определения. Конечным ориентированным графом с помеченными вершинами (помеченным орграфом) назовем четверку $\mathrm{G} = (G, E(G), M, \mu_{\mathrm{G}})$, где G – конечное множество вершин, $|G| = n$, $E(G) \subseteq G \times G$ – конечное множество ребер, M – конечное множество меток, $|M|$, $\mu_{\mathrm{G}} : G \to M$ – сюръективная функция разметки. Последовательность меток вершин $w = \mu_{\mathrm{G}}(g_1) \ldots \mu_{\mathrm{G}}(g_k)$, соответствующую некоторому пути $g_1 \ldots g_k$ в графе G, назовем словом длины k, порожденным вершиной g_1. Через $\mathrm{d}(w)$ обозначим длину слова w.

Инверсией слова $w = x_1 \ldots x_k$ назовем слово $w^{rev} = x_k \ldots x_1$. Слово v называется подсловом слова w, если существуют слова u_1 и u_2 (возможно пустые) такие, что $w = u_1 v u_2$. Если u_1 пусто, то слово v также называется начальным отрезком или префиксом $\mathrm{pre}_k(w)$ слова w длины k, где $k = \mathrm{d}(v)$.

Обозначим через M^+ множество всех непустых слов в алфавите M. Пусть $W \subseteq M^+$. Высотой W назовем наибольшую из длин входящих в него слов, его кратностью – величину $|W|$, его объемом – сумму длин всех входящих в него слов. Замыканием $[W]$ множества слов W по всевозможным начальным отрезкам назовем множество всех начальных отрезков всех слов из W.

Введем частичную операцию $\star : G \times M^+ \to 2^G$ соотношением: для любой вершины $g \in G$ и любого слова $w \in M^+$ через $g \star w$ обозначим множество всех вершин $h \in G$ таких, что существует путь из g в h помеченный словом w. Распространим операцию $\star$ на подмножества множества G естественным образом: если $G' \subseteq G$, то $G' \star w = \bigcup\limits_{g \in G'} (g \star w)$.

Для слов $u, w \in M^+$ введем их композицию $u \circ w$ равную uw', если $u = u'x$, $w = xw'$, $x \in M$, и не определено в противном случае.

Языком L_g вершины g назовем множество всех слов, порожденных этой вершиной. Будем говорить, что вершины $g, h \in G$ неотличимы, т.е. $(g, h) \in \varepsilon$, если $L_g = L_h$. Отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. Фактор-граф G/ε графа G по отношению ε назовем приведенным графом. Языком L_{G} помеченного графа G назовем множество слов $\bigcup\limits_{g \in G} L_g$.

Помеченный G назовем детерминированным (D-графом), если для любой вершины $g \in G$ и любых вершин $s, t \in \Gamma_g^-$ из $g \neq t$ следует, что $\mu(s) \neq \mu(t)$ (здесь Γ_g^- –

множество всех вершин, являющихся концами дуг, исходящих из g). Простой симметричный D-граф G назовем сильно детерминированным (SD-графом), если для любой вершины $g \in G$ и любых вершин $s.t \in O_{(g)}$ из $s \neq t$ следует, что $\mu(s) \neq \mu(t)$ (здесь $O_{(g)} = \Gamma_g^- \cup \{g\}$).

Инициальным графом будем называть граф, в котором зафиксирована начальная вершина. Пусть $\mathrm{G} = (G, E(G), M, \mu, g_0)$ инициальный D-граф, где g_0 – выделенная начальная вершина и $G = \{g_0, g_1, ..., g_{n-1}\}$. Базисом достижимости V_{G} графа G назовем произвольное множество слов $\{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\} \subseteq L_{\mathrm{G}}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\{g_0 \star v_i | 0 \leqslant i \leqslant n-1\} = G$;

2) если $i \neq j$, $o \leqslant i, j \leqslant n-1$, то $g_0 \star v_i \neq g_0 \star v_j$;

3) если $v_i = v_i' \cdot x$, $x \in M$, тогда $v_i' \in V_{\mathrm{G}}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Легко убедиться в существовании биекции между множеством всех остовных деревьев произвольного связного SD-графа G и множеством всех базисов достижимости этого графа.

Введем конструкцию, позволяющую переходить от множеств слов к помеченным графам. Пусть $W = \{w_1, \ldots, w_l\}$ некоторое множество конечных слов в алфавите M. С каждым словом $w_i = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, свяжем помеченное корневое дерево $\mathrm{T}(w_i)$, множество вершин которого равно $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}\}$, множество ребер состоит из всех пар $\left(t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)$, $1 \leqslant j < k$, метка $\mu_{\mathrm{T}}\left(t_{i_j}\right)$ равна x_{i_j}, а корнем является вершина t_{i_1}. С множеством W свяжем помеченный лес $\mathrm{F}(W)$, являющийся прямой суммой всех корневых деревьев $\mathrm{T}(w)$, где $w \in W$. Если известно, что множество W порождается некоторой одной и той же вершиной SD-графа, то с W связывается помеченное корневое дерево $\mathrm{T}(W)$, полученное из $\mathrm{F}(W)$ отождествлением всех корней t_{i_1}, $1 \leqslant i \leqslant l$, и последующей детерминизацией, то есть многократным применением следующей операции: если в окрестность некоторой вершины попадают одинаково отмеченные вершины, то такие вершины отождествляем, заменив возникающие кратные ребра одним ребром. Очевидно, что $\mathrm{T}(W)$ является SD-графом и $W \subseteq L_{\mathrm{T}(W)}$.

2. Эксперименты с графами. Экспериментом с графом G относительно априорной информации **I**, цели **C** и средств **S** назовем процесс, состоящий из трех этапов: 1) построение теста $P \subset M^+$ на основе **I** и **C**; 2) получение мобильным агентом (МА) экспериментальных данных **W** на основе P и **S**; 3) вывод заключений о свойствах графа на основе **W** и **I**. Априорная информация – это класс графов, к которому принадлежит G. Основное отличие экспериментов с графами от экспериментов с автоматами [9] состоит в методах и средствах **S** получения экспериментальных данных, а именно, возможностях МА перемещаться по графу, воспринимать локальную информацию о вершинах и ставить в них дополнительные стираемые/нестираемые метки.

Эксперимент назовем контрольным, если полностью известен граф-эталон G_0, задан класс графов $\mathfrak{K}$ и МА установлен в начальную вершину произвольного графа $\mathrm{G} \in \mathfrak{K}$, а целью является проверка существования изоморфизма $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}_0$.

Будем рассматривать следующие меры сложности экспериментов. Операционной кратностью эксперимента назовем величину, равную, в зависимости от способа проведения эксперимента, либо количеству экземпляров МА, использованных при получении **W**, либо количеству установок МА экспериментатором в начальную вершину исследуемого графа. Если используется только один экземпляр МА (одна установка), то эксперимент назовем простым. Операционной высотой эксперимента назовем наибольшую из длин путей, которые проходит каждый экземпляр МА по исследуемому графу в ходе эксперимента.

3. Контрольные эксперименты для бесконечных классов помеченных графов. Пусть $\mathrm{G} = (G, E(G), M, \mu, g_0)$ является приведенным, связным (следовательно, максимальным [10]) инициальным SD-графом, где g_0 – начальная вершина. Обозначим через $\mathfrak{K}$ класс всех конечных связных приведенных инициальных SD-графов над некоторым множеством меток X таким, что $M \subseteq X$, где M – множество меток эталона.

Пусть $\overline{L}_{\mathcal{G}} = \mu\,(g_0)\,X^{+} - L_{\mathcal{G}}$. Обозначим через $Z_{\mathcal{G}}$ подмножество всех слов $wx \in \overline{L}_{\mathcal{G}}$, $x \in X$, для которых $w \notin \overline{L}_{\mathcal{G}}$. Обозначим через $Z_{\mathcal{G}}^{k}$ подмножество всех слов $w \in Z_{\mathcal{G}}$ таких, что $\mathrm{d}(w) \leqslant k$. Пусть $X^{(2)} = \{xy \mid x, y \in X \wedge x \neq y\}$. Обозначим через $\widetilde{Z}_{\mathcal{G}}$ множество слов $\left(V_{\mathcal{G}} \circ X^{(2)}\right) \cap Z_{\mathcal{G}}$, где $V_{\mathcal{G}}$ является произвольным базисом достижимости графа $\mathcal{G}$. Так как множество $\widetilde{Z}_{\mathcal{G}}$ зависит от выбора базиса достижимости $V_{\mathcal{G}}$ графа $\mathcal{G}$, то количество различных множеств $\widetilde{Z}_{\mathcal{G}}$ для графа $\mathcal{G}$ не превосходит количество различных базисов достижимости этого графа.

Обозначим через $R_{\mathcal{G}}$ множество всех слов $w \in L_{\mathcal{G}}$ таких, что $g_0 \star w = g_0$.

Пару $\{R, Z\}$ конечных множеств слов назовем определяющей парой графа $\mathcal{G} \in \mathfrak{K}$, если одновременно выполняются условия: 1) $R \subseteq R_{\mathcal{G}}$ и $Z \subseteq Z_{\mathcal{G}}$; 2) для любого графа $\mathcal{H} \in \mathfrak{K}$ из $R \subseteq R_{\mathcal{H}}$ и $Z \subseteq Z_{\mathcal{H}}$ следует $\mathcal{H} \cong \mathcal{G}$.

Для построения некоторой определяющей пары графа $\mathcal{G}$ воспользуемся известным в теории графов фактом [11]: всякое остовное дерево любого связного графа порождает базис циклов, то есть минимальный набор простых циклов, от которых линейно зависят все циклы.

Выберем некоторый базис достижимости $V_{\mathcal{G}}$ графа $\mathcal{G}$ и построим множество слов $\left(V_{\mathcal{G}} \cdot V_{\mathcal{G}}^{rev}\right) \cap L_{\mathcal{G}}$. Если слова $u, v \in V_{\mathcal{G}}$ и слово $vu^{rev} \in L_{\mathcal{G}}$, то это означает, что $(g_0 \star v, g_0 \star u) \in E(G)$. Следовательно, $g_0 \star vu^{rev} = g_0$. Таким образом, $\left(V_{\mathcal{G}} \cdot V_{\mathcal{G}}^{rev}\right) \cap L_{\mathcal{G}} \subseteq R_{\mathcal{G}}$. Обозначим через $\widetilde{R}_{\mathcal{G}}$ произвольное максимальное по включению подмножество множества $\left(V_{\mathcal{G}} \cdot V_{\mathcal{G}}^{rev}\right) \cap L_{\mathcal{G}}$, удовлетворяющее условиям: 1) если $vu^{rev} \in \widetilde{R}_{\mathcal{G}}$, то $v \not\prec u$ и $u \not\prec v$, где $u, v \in V_{\mathcal{G}}$; 2) если слово $w \in \widetilde{R}_{\mathcal{G}}$, то слово $w^{rev} \notin \widetilde{R}_{\mathcal{G}}$. С каждым графом $\mathcal{G} \in \mathfrak{K}$ свяжем пару множеств слов $\left\{\widetilde{R}_{\mathcal{G}}, \widetilde{Z}_{\mathcal{G}}\right\}$. Ясно, что таких пар может быть несколько, так как множества $\widetilde{R}_{\mathcal{G}}$ и $\widetilde{Z}_{\mathcal{G}}$ зависят от выбора базиса достижимости $V_{\mathcal{G}}$.

Рассмотрим следующие конструкции, необходимые нам для дальнейших рассуждений.

С множествами $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ и $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$ свяжем помеченные корневые деревья $\mathrm{T}(\widetilde{R}_{\mathrm{G}})$ и $\mathrm{T}(\widetilde{Z}_{\mathrm{G}})$. Корень дерева $\mathrm{T}(\widetilde{R}_{\mathrm{G}})$ обозначим через t_0', а корень дерева $\mathrm{T}(\widetilde{Z}_{\mathrm{G}})$ обозначим через t_0''. Для каждого слова $w \in \widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ отождествим вершину t_0' графа $\mathrm{T}(\widetilde{R}_{\mathrm{G}})$ с вершиной $t_0 \star w$ этого же графа. Далее отождествим вершины t_0' и t_0'' и обозначим полученную вершину t_0. Затем детерминизируем полученный граф. Результирующий граф обозначим $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$. Из описания построения графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ следует, что он является SD-графом. На вершинах графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ введем дополнительную разметку σ по правилу: для всех слов $w \in \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$ вершину $t_0 \star w$ пометим дополнительной меткой "–", а все другие вершины пометим дополнительной меткой "+". Для того, чтобы различать обе разметки графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ вершины с меткой "+" будем называть позитивными, а вершины с меткой "–" будем называть негативными. Из описания построения графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ следует, что все его негативные вершины имеют степень 1, то есть являются висячими. Заметим, что граф $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ однозначно определятся парой $\left\{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\right\}$. Подграф графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$, порожденный всеми его позитивными вершинами, обозначим через $\mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$. Покажем, что $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$. Из определения множеств $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ и $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$ следует, что $V_{\mathrm{G}} \subseteq \left[\widetilde{R}_{\mathrm{G}} \cup \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\right]$ и, как следует из описания построения графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$, V_{G} является базисом достижимости графа $\mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$. Следовательно, существует взаимно однозначное отображение φ графа G на граф $\mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ такое, что $\varphi(g_0) = t_0$ и $\varphi(g_0 \star v) = t_0 \star v$, где $v \in V_{\mathrm{G}}$. Пусть $(g', g'') \in E(G)$ и $g' = g_0 \star v'$, $g'' = g_0 \star v''$, где $v', v'' \in V_{\mathrm{G}}$. Если $v' \prec v''$ (или $v'' \prec v'$), то ребро $(t_0 \star v', t_0 \star v'')$ принадлежит графу $\mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$. Если $g_0 \star (v' (v'')^{rev}) = g_0$, то по определению $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ выполняется $\{v' (v'')^{rev}, v'' (v')^{rev}\} \cap \widetilde{R}_{\mathrm{G}} \neq \varnothing$ и ребро $(t_0 \star v', t_0 \star v'')$ принадлежит графу $\mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$. Аналогично доказывается, что ребру (t', t'') графа $\mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$, где $t' = t_0 \star v'$, $t'' = t_0 \star v''$, $v', v'' \in V_{\mathrm{G}}$, соответствует ребро $(g_0 \star v', g_0 \star v'')$. Следовательно, отображение φ устанавливает изоморфизм $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}^{+}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$.

Замыканием $[\mathrm{G}]_X$ графа G по множеству меток X назовем граф, полученный из графа G по правилам: 1) все вершины графа G пометим дополнительной меткой "+"; 2) для каждой вершины $g \in G$ и для каждой метки $x \in X - \mu\left(O_{(g)}\right)$ дополним граф G вершиной s с меткой x, ребром (s, t) и пометим вершину s дополнительной меткой "–". Все вершины с дополнительной меткой "–" назовем негативными, а все вершины с дополнительной меткой "+" назовем позитивными. Из описания построения графа $[\mathrm{G}]_X$ следует, что он является SD-графом. Подграф графа $[\mathrm{G}]_X$, порожденный всеми его позитивными вершинами обозначим через $[\mathrm{G}]^{+}_X$. Ясно, что $[\mathrm{G}]^{+}_X \cong \mathrm{G}$ и, таким образом, $\mathrm{G} \subseteq [\mathrm{G}]_X$. Вершину подграфа $[\mathrm{G}]^{+}_X$, отображающуюся при этом изоморфизме в вершину $g_0 \in G$, обозначим через s_0.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого базиса достижимости* V_{G} *графа* G *пара* $\{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\}$ *является определяющей парой графа* G.

Доказательство. Пусть V_{G} является некоторым произвольно выбранным базисом достижимости графа $\mathrm{G} \in \mathfrak{K}$ и пара $\{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\}$ связана с V_{G}. Пусть, далее, $\mathrm{H} \in \mathfrak{K}$ и $\widetilde{R}_{\mathrm{G}} \subseteq R_{\mathrm{H}}$, $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}} \subseteq Z_{\mathrm{H}}$. Покажем, что $\mathrm{H} \cong \mathrm{G}$.

Из $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}} \subseteq Z_{\mathrm{H}}$ и $\widetilde{R}_{\mathrm{G}} \subseteq R_{\mathrm{H}}$ следует, что существует гомоморфизм φ графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ в граф $[\mathrm{H}]_X$ такой, что $\varphi(t_0) = s_0$, и для любого слова $w \in L_{\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}}$ выполняется

$\varphi(t_0 \star w) = s_0 \star w$. Покажем, что при гомоморфизме φ все позитивные вершины графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ отображаются в позитивные вершины графа $[\mathrm{H}]_X$, а все негативные вершины графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$ отображаются в негативные вершины графа $[\mathrm{H}]_X$. Пусть для некоторого слова $w \in L_{\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}}$ вершина $t_0 \star w$ является позитивной вершиной графа $\mathrm{G}_{\widetilde{R}_{\mathrm{G}},\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}}$, а вершина $s_0 \star w$ является негативной вершиной графа $[\mathrm{H}]_X$. Так как вершина $t_0 \star w$ является позитивной вершиной, то существует слово $v \in V_{\mathrm{G}}$ такое, что $t_0 \star v = t_0 \star w$, где V_{G} является связанным с парой $\left\{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\right\}$ базисом достижимости графа G. Так как граф $[\mathrm{H}]_X$ является SD-графом, то $s_0 \star w = s_0 \star v$. Следовательно, $v \in Z_{\mathrm{H}}$. Если $\left(v \circ X^{(2)}\right) \cap \widetilde{Z}_{\mathrm{G}} \neq \varnothing$, то $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}} \nsubseteq Z_{\mathrm{H}}$, что невозможно. Пусть $\left(v \circ X^{(2)}\right) \cap \widetilde{Z}_{\mathrm{G}} = \varnothing$. Так как $v \in V_{\mathrm{G}}$, то, по определению множеств $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ и $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$, либо существует слово $u \in V_{\mathrm{G}}$ такое, что $v \prec u$ и $\mu_{\mathrm{G}}\left(O_{(g_0 \star u)}\right) \neq X$, либо существует слово $q \in \widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ такое, что v является начальным отрезком q или v^{rev} является конечным отрезком q. Если существует слово u, то $\left(u \circ X^{(2)}\right) \cap \widetilde{Z}_{\mathrm{G}} \neq \varnothing$, $\left(u \circ X^{(2)}\right) \cap Z_{\mathrm{H}} = \varnothing$ и $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}} \nsubseteq Z_{\mathrm{H}}$, что невозможно. Если существует слово q, то $\widetilde{R}_{\mathrm{G}} \nsubseteq R_{\mathrm{H}}$, что невозможно.

Предположим, что $\mathrm{H} \ncong \mathrm{G}$. Так как G и H являются связными приведенными (то есть максимальными) SD-графами, то, как показано в [10], из $\mathrm{H} \ncong \mathrm{G}$ вытекает $L_{\mathrm{H}} \neq L_{\mathrm{G}}$. Обозначим через w кратчайшее слово из множества $L_{\mathrm{H}} \oplus L_{\mathrm{G}}$. Пусть $w \in L_{\mathrm{G}} - L_{\mathrm{H}}$. Тогда вершина $t_0 \star w$ является позитивной вершиной графа $\mathrm{T}\left(\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\right)$, а вершина $s_0 \star w$ является негативной вершиной графа $[\mathrm{H}]_X$, что невозможно. Следовательно, $w \in L_{\mathrm{H}} - L_{\mathrm{G}}$. Тогда вершина $t_0 \star w$ является негативной вершиной графа $\mathrm{T}\left(\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\right)$, а вершина $s_0 \star w$ является позитивной вершиной графа $[\mathrm{H}]_X$, что невозможно. Теорема доказана. $\square$

Обобщим понятие контрольного эксперимента следующим образом. Пусть МА перед началом эксперимента отмечает уникальной нестираемой меткой (маркером) начальную вершину h_0 исследуемого графа $\mathrm{H} \in \mathfrak{K}$, то есть при посещении этой вершины МА может отличить ее от всех других вершин по наличию в ней маркера. Следовательно, МА может для любого слова $w \in M^+$ определить не только $w \in L_{\mathrm{G}}$, но и $w \in R_{\mathrm{G}}$. Пусть P является некоторым контрольным тестом для эталона G и класса $\mathfrak{K}$. При проведении контрольного эксперимента для конечных классов графов МА по эталону G строил разбиение теста P на классы $P^+_{\mathrm{G}} = P \cap L_{\mathrm{G}}$ и $P^-_{\mathrm{G}} = P \cap \overline{L}_{\mathrm{G}}$. При наличии маркера МА может построить еще одно разбиение теста P, а именно разбить P на классы $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{G}} = P \cap R_{\mathrm{G}}$ и $P^{\mathrm{ac}}_{\mathrm{G}} = P - R_{\mathrm{G}}$. Таким образом, МА для любой определяющей пары $\{R, Z\}$ эталона G и любого графа $\mathrm{H} \in \mathfrak{K}$ может проверить $R \subseteq R_{\mathrm{H}}$ и $Z \subseteq Z_{\mathrm{H}}$. В дальнейшем под контрольным тестом P будем понимать его разбиение на классы $P^+_{\mathrm{G}} = P \cap L_{\mathrm{G}}$ и $P^-_{\mathrm{G}} = P \cap \overline{L}_{\mathrm{G}}$. Обобщение контрольного эксперимента заключается в том, что при наличии маркера МА помимо проверки $w \in M^+$ входит/не входит в L_{G} может осуществить проверку $w \in R_{\mathrm{G}}$ и проверку $w \in Z_{\mathrm{G}}$ в противном случае.

Из теоремы 1 вытекает очевидное, но важное утверждение.

Утверждение. *Любая определяющая пара $\{R, Z\}$ является контрольным тестом для графа* G *и класса* $\mathfrak{K}$.

Опишем каждый этап порожденного тестом $P = \left\{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\right\}$ контрольного эксперимента для графа G и класса $\mathfrak{K}$.

Для построения базиса достижимости $V_{\mathcal{G}}$ воспользуемся алгоритмом поиска в ширину из начальной вершины g_0 графа $\mathcal{G}$ в варианте, предложенном в [12]. Здесь, наряду с перечислением всех достижимых вершин в порядке возрастания расстояния от начальной вершины, выделяется подграф графа $\mathcal{G}$ – дерево поиска в ширину, задаваемое указателями на предшественников каждой вершины. Время работы алгоритма имеет порядок $O\left(n^2\right)$. В [12] показано, что, основываясь на информации о предшественнике каждой вершины, можно восстановить кратчайший путь между g_0 и любой вершиной графа за время пропорциональное длине этого пути. Ясно, что длина такого пути не превосходит n. Следовательно, кратчайшие пути из вершины g_0 ко всем вершинам графа $\mathcal{G}$ можно восстановить за время $O\left(n^2\right)$. Ясно, что за то же время можно восстановить и соответствующие слова. Таким образом, построение базиса $V_{\mathcal{G}}$ требует $O\left(n^2\right)$ шагов. В подразделе 3.1 показано, что для построения базиса отличимости $W_{\mathcal{G}}$ достаточно $O\left(n^5\right)$ шагов. Следовательно, для построения теста P достаточно $O\left(n^5\right)$ шагов. По определению, число слов в базисе $V_{\mathcal{G}}$ равно n. В подразделе 3.1 показано, что число слов в базисе $W_{\mathcal{G}}$ не превосходит равно n^2. Следовательно, кратность теста P не превосходит mn^3, его высота не превосходит $4n+1$, а его объем равен $O\left(mn^4\right)$.

Ясно, что для построения множества $(V_{\mathrm{G}} \cdot V_{\mathrm{G}}^{rev}) \cap L_{\mathrm{G}}$ достаточно $O\left(n^2\right)$ шагов. Количество слов в этом множестве не превосходит n^2. Тогда, для удаления из каждой пары $\{w, w^{rev}\}$ одного слова достаточно времени порядка $O\left(n^4\right)$. Обозначим количество элементов в алфавите меток X через r. Тогда для построения множества $(V_{\mathrm{G}} \cdot X) \cap Z_{\mathrm{G}}$ достаточно $O(nr)$ шагов. Таким образом, для построения теста P достаточно $O\left(n^2 + nr\right)$ шагов. Ясно, что длина любого слова из базиса V_{G} не превосходит n. Тогда длина любого слова из $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$ не превосходит $n+1$, а длина любого слова из $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ не превосходит $2n$. Следовательно, высота теста P не превосходит $2n$. Количество слов во множестве $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$ не превосходит nr. В теории графов известно [11], что число простых циклов связного графа с n вершинами не превосходит $n^2 - n + 1$. Тогда кратность теста P не превосходят $n^2 + n(r-1) + 1$.

Контроль графа $\mathrm{H} \in \mathfrak{K}$ осуществляется в соответствии со следующей стратегией. Вначале МА метит маркером вершину $h_0 \in H$. Далее МА для каждого слова $w \in \widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ проверяет наличие в графе H пути из вершины h_0 с меткой w и, если такой путь существует, МА проверяет наличие маркера в вершине $h_0 \star w$. Если маркер обнаружен, то МА делает заключение, что $h_0 = h_0 \star w$ и $w \in R_{\mathrm{H}}$, и переходит к рассмотрению следующего слова из $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$. Если $w \notin L_{\mathrm{H}}$ или маркер в вершине $h_0 \star w$ не обнаружен, то эксперимент прекращается и $\mathrm{H} \ncong \mathrm{G}$. Если результат проверки всех слов из $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ положительный, то МА приступает к проверке всех слов из $w \in \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$. МА для каждого слова $wx \in \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$, где $x \in X$, проверяет наличие в графе H пути из вершины h_0 с меткой w и отсутствие пути с меткой wx. Если $w \in L_{\mathrm{H}}$ и $wx \notin L_{\mathrm{H}}$, то МА приступает к проверке следующего слова из $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$. В противном случае эксперимент прекращается и $\mathrm{H} \ncong \mathrm{G}$.

Из описания алгоритма контроля следует, что этот алгоритм всегда завершается и в случае успешного завершения алгоритма исследуемый граф H изоморфен эталону G. Таким образом, данная стратегия объединяет два этапа контрольного эксперимента – этап получения экспериментальных данных и этап вывода заключений. Так как любой граф $\mathrm{H} \in \mathfrak{K}$ является неориентированным, то получение экспериментальных данных в ходе контрольного эксперимента можно провести с использованием одного экземпляра МА, то есть контрольный эксперимент будет простым вне зависимости от кратности теста P.

В наихудшем случае рассматриваемая стратегия требует проверки всех слов из P. Количество слов в $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ не превосходит n^2-n+1, а длина каждого такого слова не больше $2n$. Следовательно МА, проверяя все слова $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$, проходит путь по графу H длины $O(n^3)$. Количество слов в $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$ не превосходит nr, а длина каждого такого слова не больше $n+1$. Следовательно МА, проверяя все слова из $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$, проходит путь по графу H длины не более $O(n^2 r)$. Таким образом, операционная высота контрольного эксперимента при данной стратегии равна $O(n^3+n^2 r)$.

Заметим, что маркером может быть помечена любая вершина h исследуемого графа H. При этом процедура проверки любого слова $w \in \widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ требует модификации. Обозначим через u метку кратчайшего пути из вершины h_0 в маркированную вершину h. Тогда проверка $h_0 \star w = h_0$ заменяется проверкой $h_0 \star (w \circ u) = h$. Так как $\mathrm{d}(u) \leqslant n$, то такая модификация не повлияет на порядок сложности проведения контрольного эксперимента, порождаемого тестом $P = \{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\}$.

4. Характеризация пар множеств. Пусть $\{R, Z\}$ является некоторой парой конечных множеств слов над алфавитом X, где $R \subseteq \{w \in X^+ | u = x \circ w \circ x\}$, $Z \subseteq \{w \in X^+ | w = x \circ w\}$, а x является некоторой фиксированной меткой из X. Обозначим через $\mathfrak{D}$ класс всех связных инициальных SD-графов над алфавитом меток X.

Под характеризацией пары $\{R, Z\}$ будем подразумевать решение следующих задач:

1) определить, существует ли граф $\mathrm{G} \in \mathfrak{D}$ такой, что пара $\{R, Z\}$ является для него определяющей;

2) определить, является ли пара $\{R, Z\}$ определяющей для фиксированного графа $\mathrm{G} \in \mathfrak{D}$.

Пару $\{R, Z\}$ назовем правильной, если существует граф $\mathrm{G} \in \mathfrak{D}$, для которого она является определяющей. Охарактеризуем правильные пары. Пару $\{R, Z\}$ назовем детерминированной, если любое слово $v \in R \cup Z$ не содержит подслов вида xx, где x любой элемент X. Всякой детерминированной паре $\{R, Z\}$ поставим в соответствие помеченный граф, построенный по следующим правилам. Пусть $R \cup Z = \{w_1, \ldots, w_l\}$. С каждым словом $w_i = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, $1 \leqslant l \leqslant l$, $k = \mathrm{d}(w_i)$, свяжем помеченное корневое дерево $\mathrm{T}(w_i)$, множество вершин которого равно $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}\}$, множество ребер состоит из всех пар $\left(t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)$, $1 \leqslant j < k$, метка $\mu_{\mathrm{T}}\left(t_{i_j}\right) = x_{i_j}$, а корнем является вершина t_{i_1}. На множестве вершин дерева $\mathrm{T}(w_i)$ определим дополнительную функцию разметки $\sigma : \{+, -\} \to \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}\}$ по правилу: если $w_i \in R$, то $\sigma(t_{i_1}) = \sigma(t_{i_2}) = \ldots = \sigma(t_{i_k}) = +$, если $w_i \in Z$, то $\sigma(t_{i_1}) = \sigma(t_{i_2}) = \ldots = \sigma\left(t_{i_{k-1}}\right) = +$, а $\sigma(t_{i_k}) = -$. Вершины с дополнительной меткой "+" назовем позитивными, а вершины с меткой "–" назовем негативными. Отождествим корни t_{i_1} всех графов $\mathrm{T}(w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и обозначим полученную вершину через t_0. Для каждого слова $w \in R$ отождествим вершину t_0 и вершину $t_0 \star w$. Детерминизируем полученный граф при условии запрета на отождествление позитивной и негативной вершин. Обозначим результирующий граф через $\mathrm{G}_{R,Z}$. Заметим, что этот граф однозначно определяется парой $\{R, Z\}$.

Множество всех позитивных вершин графа $\mathrm{G}_{R,Z}$ обозначим через $G^+_{R,Z}$, а порожденный ими подграф этого графа через $\mathrm{G}^+_{R,Z}$. Из описания алгоритма построения графа $\mathrm{G}_{R,Z}$ следует, что подграф $\mathrm{G}^+_{R,Z} \subseteq \mathrm{G}_{R,Z}$ является связным инициальным SD-графом. Пару $\{R, Z\}$ назовем совместимой, если для любой вершины $g \in G^+_{R,Z}$ и любых вершин $s, t \in O_g$ из $\sigma(s) \neq \sigma(t)$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$. Пару $\{R, Z\}$ назовем полной, если для любой вершины $g \in G^+$ выполняется $\mu(O_{(g)}) = X$. Легко видеть, что пара $\{\widetilde{R}_{\mathrm{G}}, \widetilde{Z}_{\mathrm{G}}\}$ является правильной. Ее полнота и совместимость непосредственно следуют из определения множеств $\widetilde{R}_{\mathrm{G}}$ и $\widetilde{Z}_{\mathrm{G}}$. Следующее утверждение дает критерий правильности пар.

Теорема 2. *Равносильны утверждения:*

1) пара $\{R, Z\}$ *является правильной;*

2) пара $\{R, Z\}$ *является определяющей парой для графа* $\mathrm{G}^+_{R,Z}$*;*

3) $\{R, Z\}$ *детерминирована, совместима и полна.*

Доказательство. Очевидно, что из утверждения 2 следует утверждение 1.

Покажем, что из утверждения 3 следует утверждение 2. Пусть пара $\{R, Z\}$ детерминирована, полна и совместима. Покажем, что она является определяющей парой для графа $\mathrm{G}^+_{R,Z}$. На словах из множеств R и Z определим следующие операции.

1) Пусть слово $w \in R \cup Z$ и представимо в виде $u_1 \circ u_2 \circ u_2^{rev} \circ u_3$. Тогда w заменим словом $u_1 \circ u_3$.

2) Пусть слова $u \in R$, $w \in R \cup Z$ и слово $w = u \circ w'$. Тогда w заменим словом w'.

3) Пусть слово $w \in R$. Тогда добавим в R слово w^{rev}, если его там еще нет.

4) Пусть слова $w_1, w_2 \in R$ и $w_1 = u \circ w_1'$, $w_2 = u \circ w_2'$. Тогда добавим к R слова $(w_1')^{rev} \circ w_2'$ и $(w_2')^{rev} \circ w_1'$.

5) Пусть слова $u \in Z$, $w \in R$ и $u = v \circ u'$, $w = v \circ w'$. Тогда добавим в Z слово $(w')^{rev} \circ u'$.

Обозначим через $\{R', Z'\}$ пару множеств слов, полученную из пары $\{R, Z\}$ после исчерпывающего применения операций 1-5 к множествам R и Z.

Покажем, что $\mathrm{G}_{R',Z'} \cong \mathrm{G}_{R,Z}$. Рассмотрим применение операций 1-5 к множествам R и Z. Пусть $w \in R \cup Z$, $w = u_1 \circ u_2 \circ u_2^{rev} \circ u_3$. Предположим, что $\mathrm{G}_{R',Z'} \ncong \mathrm{G}_{R,Z}$ в результате замены слова w словом $u_1 \circ u_3$. Из описания алгоритма построения графа $\mathrm{G}_{R,Z}$ следует, что при таком предположении слово $u_1 \circ u_2$ не является начальным отрезком никакого слова из $R \cup Z$, а слово $(u_1 \circ u_2)^{rev}$ не является конечным отрезком никакого слова из $R \cup Z$. Тогда вершина $g_0 \star (u_1 \circ u_2)$ является висячей позитивной вершиной графа $\mathrm{G}_{R,Z}$ и для нее, очевидно, не выполняется условие полноты. Следовательно, пара $\{R, Z\}$ не полна, что невозможно. Таким образом, после замены слова w словом $u_1 \circ u_3$ выполняется $\mathrm{G}_{R',Z'} \cong \mathrm{G}_{R,Z}$.

Пусть слова $u \in R$, $w \in R \cup Z$ и слово $w = u \circ w'$. Из алгоритма построения дерева $\mathrm{G}_{R,Z}$ вытекает, что $t_0 \star u = t_0$ и, следовательно, $t_0 \star w = t_0 \star w'$. Таким образом, после замены слова w словом w' выполняется $\mathrm{G}_{R',Z'} \cong \mathrm{G}_{R,Z}$.

В результате операций 3–5 множества R и Z пополняются словами, являющимися метками путей по графу $\mathrm{G}_{R,Z}$ из вершины t_0. Следовательно, после применения этих операций к множествам R и Z выполняется $\mathrm{G}_{R',Z'} \cong \mathrm{G}_{R,Z}$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что $\mathrm{G}_{R',Z'} \cong \mathrm{G}_{R,Z}$ и производная от $\{R, Z\}$ пара $\{R', Z'\}$ также детерминирована, полна и совместима.

Из множества Z' выделим подмножество Z'' слов такое, что каждое слово $w \in Z''$ соответствует кратчайшему пути по графу $\mathrm{G}_{R,Z}$ из вершины t_0 в некоторую висячую вершину этого графа, количество слов в этом подмножестве равно количеству висячих вершин и множество вершин $\{t_0 \star w\}_{w \in Z''}$ является множеством всех висячих вершин графа $\mathrm{G}_{R,Z}$. Пусть слова $u, w \in Z''$. Легко видеть, что для любых начальных отрезков u'_1 слова u и w' слова w выполняется либо $u' = w'$, либо $t_0 \star u' \neq t_0 \star w'$. Тогда из полноты пары $\{R', Z'\}$ следует, для некоторого базиса достижимости $V_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$ графа $\mathrm{G}^+_{R,Z} \subseteq \mathrm{G}_{R,Z}$ выполняется $V_{\mathrm{G}^+_{R,Z}} \prec Z''$, то есть $Z'' = \widetilde{Z}_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$.

Покажем, что множество R' содержит множество $\widetilde{R}_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$. Пусть $u, v \in V_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$, $(t_0 \star u, t_0 \star v) \in E\left(G^+_{R,Z}\right)$, $u \not\prec v$ и $v \not\prec u$. Из описания алгоритма построения графа $\mathrm{G}_{R,Z}$ следует, что все циклы в графе $\mathrm{G}_{R,Z}$ порождаются только словами из множества R. Тогда, слова $u \cdot v^{rev}$ и $v \cdot u^{rev}$ либо принадлежат R, либо помещаются в R' в результате операций 1–5. Следовательно, $\widetilde{R}_{\mathrm{G}^+_{R,Z}} \subseteq R'$. Обозначим через R'' подмножество множества R' такое, что $R'' = \widetilde{R}_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$.

По определению (см. подраздел 3.3) пара множеств $\{R'', Z''\}$ является определяющей парой для графа $\mathrm{G}^+_{R,Z}$. Следовательно, пара множеств $\{R', Z'\}$ также является определяющей парой для графа $\mathrm{G}^+_{R,Z}$. Так как пара $\{R, Z\}$ однозначно определяет граф $\mathrm{G}_{R,Z}$, пара $\{R', Z'\}$ однозначно определяет граф $\mathrm{G}_{R',Z'}$ и, как показано ранее, $\mathrm{G}_{R,Z} \cong \mathrm{G}_{R',Z'}$, то пара $\{R, Z\}$ также является определяющей парой для графа $G^+_{R,Z}$.

Покажем, что из утверждения 1 следует утверждение 3. Пусть пара $\{R, Z\}$ является правильной, то есть существует граф $\mathrm{G} \in \mathfrak{D}$, для которого она является определяющей парой.

Предположим, что пара $\{R, Z\}$ не детерминирована. Тогда $\{R, Z\}$ не может быть определяющей парой никакого SD-графа $\mathrm{G} \in \mathfrak{D}$, поскольку никакое слово $w \in L_{\mathrm{G}}$ не содержит подслово xx, где x – произвольная метка из X. Следовательно, если пара $\{R, Z\}$ является правильной, то она является детерминированной.

Предположим, что пара $\{R, Z\}$ не совместима. Тогда некоторое слово $w \in [R, Z]$ одновременно и принадлежит, и не принадлежит L_{G}, что невозможно ни для какого графа $\mathrm{G} \in \mathfrak{D}$. Следовательно, если пара $\{R, Z\}$ является правильной, то она является совместимой.

Предположим, что правильная пара $\{R, Z\}$ детерминирована и совместима, но не полна. Построим граф $\mathrm{G}_{R,Z}$. Ясно, что $R \subseteq R_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$ и $Z \subseteq Z_{\mathrm{G}^+_{R,Z}}$. Так как пара $\{R, Z\}$

не полна, то существует, по крайней мере, одна вершина $t \in G^{+}_{R,Z}$ и $\mu\left(O_{(t)}\right) = X''$, где $X'' \subset X$. Преобразуем граф $\mathrm{G}^{+}_{R,Z}$ следующим образом: к множеству вершин этого графа добавим вершину s с меткой $x \in X - X''$ и соединим ребром вершину s с вершиной t. Полученный граф обозначим через H. Пусть $W = \left\{ w \in L_{\mathrm{G}^{+}_{R,Z}} \,|\, t_0 \star w = t \right\}$ и $Z'_{\mathrm{G}^{+}_{R,Z}} = Z_{\mathrm{G}^{+}_{R,Z}} - WX''$. Ясно, что $Z \subseteq Z'_{\mathrm{G}^{+}_{R,Z}}$ и $Z'_{\mathrm{G}^{+}_{R,Z}} \subseteq Z_{\mathrm{H}}$. Тогда, $Z \subseteq Z_{\mathrm{H}}$ и $R \subseteq R_{\mathrm{H}}$. Следовательно, пара $\{R, Z\}$ не является определяющей парой ни для какого графа из $\mathfrak{D}$. Таким образом, если пара $\{R, Z\}$ является правильной, то она является полной. Теорема доказана. □

Теорема 2 дает возможность решить обе задачи характеризации пар. Решение первой задачи для пары $\{R, Z\}$ заключается в построении графа $\mathrm{G}_{R,Z}$, проверке полноты и совместимости системы и, при положительном результате такой проверки, удалении из этого графа негативных вершин. Полученный граф G^{+} и является искомым. Решение второй задачи заключается в построении графа G^{+} и проверке изоморфизма этого графа и исследуемого графа из класса $\mathfrak{D}$.

Заключение. Таким образом, в работе предложен полиномиальный метод построения и проведения контрольного эксперимента для инициального, связного, детерминированного графа-эталона и класса всех таких графов. Этот метод основан на представлении графа определяющей парой конечных множеств слов, аналогичной системе определяющих соотношений для конечного автомата. Найдены критерии, при которых произвольная пара конечных множеств слов является определяющей парой некоторого помеченного графа.

1. *Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л.* Алгебра. Языки. Программирование. – К.: Наукова думка, 1989. – 376с.
2. *Капитонова Ю.В., Летичевский А.А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М.: Наука, 1988. – 296с.
3. *Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Щ.* Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т.15, вып.2. – С.3-39.
4. *Dudek G., Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. – Cambridge University Press, Cambridge, 2000. – 280p.
5. *Borenstein J., Everett B., Feng L.* Navigation Mobile Robots: System and Techniques. – A.K. Peters, Ltd., Wellesley M.A. – 1996. – 223p.
6. *Dudek G., Jenkin M., Milios E., Wilkes D.* Map validation and Robot Self-Location in a Graph-Like World // Robotics and Autonomous Systems. – 1997. – Vol.22, №2. – P.159-178.
7. *Олейник Р.И.* О контроле автоматных лабиринтов конечными автоматами // Труды ИПММ НАНУ. – 2000. – Т.5. – С.107-114.
8. *Сапунов С.В.* Контроль детерминированных графов // Труды ИПММ НАНУ. – 2003. – Т.8. – С.106-110.
9. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985. – 320с.
10. *Сапунов С.В.* Эквивалентность отмеченных графов // Труды ИПММ НАНУ. – 2002. – Т.7. – С.162-167.
11. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 303с.
12. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2001. – 960с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sapunov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 31.08.09