Национальная академия наук Украины

Институт прикладной
математики и механики

СЕРИЯ
«ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ:
МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА,
КИБЕРНЕТИКА»

ТОМ 5

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ
В. И. РЯЗАНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

С Е Р И Я

«ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ:
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, КИБЕРНЕТИКА»

Том 5

В.Я. ГУТЛЯНСКИЙ
В.И. РЯЗАНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2011

УДК 517.54

В пятом томе серии «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика» представлены исследования по теории конформных и квазиконформных отображений и их обобщений. Первая часть монографии посвящена геометрической теории аналитических функций и содержит решение ряда трудных экстремальных задач этой теории. Вторая часть связана с исследованием локального поведения квазиконформного отображения в зависимости от аналитических свойств его комплексной характеристики с приложениями к теории симметрии Гардинера-Салливана и теории асимптотически конформных кривых Поммеренке. Дано точное решение известной задачи вращения Джона из теории упругости и усиление классической теоремы Тейхмюллера-Виттиха-Белинского о конформной дифференцируемости квазиконформных отображений. В заключительной части рассмотрены топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений с приложениями к теории вариационного метода, уравнениям математической физики и исследованию поведения отображений в точке.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории функций и отображений.

У п'ятому томі серії «Задачі і методи: математика, механіка, кібернетика» представлені дослідження з теорії конформних і квазіконформних відображень та їх узагальнень. Перша частина монографії присвячена геометричній теорії аналітичних функцій і містить рішення ряду складних екстремальних задач цієї теорії. Друга частина пов'язана з дослідженням локальной поведінки квазіконформного відображення залежно від аналітичних властивостей його комплексної характеристики з застосуванням до теорії симетрії Гардінера-Салліван і теорії асимптотично конформних кривих Поммеренке. Одержано точний розв'язок рішення відомої проблеми обертання Джона з теорії пружності і наведено посилення класичної теореми Тейхмюллера-Віттіха-Бєлінського про конформну диференційованість квазіконформних відображень. У заключній частині розглянуті топологічні аспекти теорії квазіконформних відображень та їх узагальнень з застосуванням до теорії варіаційного методу, рівнянь математичної фізики та досліджень поведінки відображень у точці.

Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються в галузі теорії функцій і відображень.

Редакционная коллегия серии:
Б.В. Базалий, И.Н. Гашененко, В.Я. Гутлянский, А.М. Ковалев (ответственный редактор),
А.А. Ковалевский, С.Я. Махно, В.И. Рязанов, В.Ю. Скобцов (ответственный секретарь),
А.Ф. Тедеев, В.Н. Ткаченко, Н.С. Хапилова, А.Е. Шишков
Рецензенты:
член-корр. НАН Украины Ю.Ю. Трохимчук, доктор физ.-мат. наук С.А. Плакса

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины

Научно-издательский отдел физико-математической и технической литературы
Редактор *И.Л. Абрамюк*

ISBN 978-966-00-1156-4 © В.Я. Гутлянский, В.И. Рязанов, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Ушедший в историю XX век был отмечен выдающимися достижениями в области теории функций комплексного переменного и многочисленными приложениями этой теории к исследованию актуальных задач современного естествознания. Основополагающие работы начала прошлого века Бибербаха, Г.М. Голузина, Гронуолла, Кёбе, М.А. Лаврентьева, Лёвнера, Пика и многих других математиков, заложили фундамент современной геометрической теории аналитических функций и конформных отображений. Двадцатые годы, благодаря открытиям Грётча и М.А. Лаврентьева, ознаменовались рождением теории квазиконформных отображений. Эта теория, возникшая первоначально на пути непосредственного развития классической теории функций комплексного переменного, за последние 50 лет сформировалась в одно из актуальных и интенсивно развивающихся областей современного анализа. Спектр приложений теории квазиконформных отображений, в основе которой лежит дифференциальное уравнение Бельтрами, также чрезвычайно широк и охватывает, например, такие области, как теория римановых поверхностей, пространства Тейхмюллера, клейновы группы, комплексные динамические системы, эллиптические дифференциальные уравнения в частных производных.

При написании этой книги мы не ставили перед собой цель создать новую монографию по геометрической теории функций комплексного переменного, и уж тем более, осветить во всей полноте основные методы и результаты этой теории. Заинтересованный читатель найдет ответы на многие, возникающие у него вопросы, познакомившись с великолепными монографиями Г.М. Голузина [105], Дженкинса [170], В.Н. Дубинина [178], Дьюрена [180], Г.В. Кузьминой [228], М.А. Лаврентьева и

Б.В. Шабата [253], Н.А. Лебедева [258], И.М. Милина [289], Поммеренке [311], Хеймана [388] по теории однолистных аналитических функций, и Альфорса [16], Астала, Иванца и Мартина [25], П.П. Белинского [48], Вяйсяля [91], Иванца и Мартина [192], С.Л. Крушкаля [223] , С.Л. Крушкаля и Кюнау [226], Лехто и Виртанена [270] и Ю.Г. Решетняка [333] по теории квазиконформных отображений.

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена некоторым, по мнению авторов, наиболее значимым результатам по теории конформных и квазиконформных отображений, полученных ими за последние десятилетия. Она состоит из трех самостоятельных, но тесно связанных друг с другом частей. Первая часть монографии посвящена геометрической теории аналитических функций и содержит решение ряда трудных экстремальных задач этой теории. Вторая часть связана с исследованием локального поведения квазиконформного отображения в зависимости от аналитических свойств его комплексной характеристики с приложениями к теории симметрии Гардинера–Салливана и теории асимптотически конформных кривых Поммеренке. Здесь также дано точное решение известной задачи вращения Джона из теории упругости и усиление классической теоремы Тейхмюллера–Виттиха–Белинского о конформной дифференцируемости квазиконформных отображений. В заключительной части рассмотрены топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений с приложениями к теории вариационного метода, уравнениям математической физики и исследованию поведения отображений в точке.

Авторы надеются, что монография окажется полезной как для специалистов по комплексному анализу, так и для математиков, работающих в других областях и использующих методы современной теории функций.

Донецк, октябрь 2011

В.Я. Гутлянский
В.И. Рязанов

Часть I
Однолистные аналитические функции

ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Первая часть монографии посвящена геометрической теории аналитических функций и конформных отображений и содержит решение ряда трудных экстремальных задач этой теории.

Экстремальные проблемы геометрической теории функций находятся в тесной связи с основными задачами как самой теории, так и многочисленных её приложений. Возникшая в начале прошлого века в работах Гурвица, Кёбе, Гронуолла, Бибербаха, Племея и других, и получившая затем мощный импульс благодаря исследованиям М.А. Лаврентьева, Г.М. Голузина, Л.А. Аксентьева, И.А. Александрова, Ю.Е. Аленицина, И.Е. Базилевича, А.А. Гончара, В.Н. Дубинина, В.А. Зморовича, С.Л. Крушкаля, Г.В. Кузьминой, П.П. Куфарева, Н.А. Лебедева, И.М. Милина, И.П. Митюка, П.М. Тамразова, Ю.Ю. Трохимчука, Бранжа, Гарабедяна, Грётча, Грунского, Дженкинса, Дьюрена, Кюнау, Лёвнера, Поммеренке, Хеймана, Шиффера, Шобера, и многих других авторов, эта область математики продолжает интенсивно развиваться в настоящее время. Развитые здесь методы площадей, контурного интегрирования, параметрический, структурных формул, внутренних и граничных вариаций, квадратичных дифференциалов и симметризации, приближения функций и другие, см., например, [1, 11, 23, 31, 81, 102, 104, 105, 107, 110, 115, 130, 170, 178, 187, 228, 234, 258, 259, 273, 284, 289, 290, 311, 317, 363, 372, 378, 401], позволили решить широкий круг важных задач теории и практики конформных отображений. Обширная информация по истории развития геометрической теории функций комплексного переменного содержится, например, в обзорных статьях И.Е. Базилевича и В.А. Зморовича [28, 188] и в обзоре "Методы и результаты геометрической теории функций" в монографии Г.М. Голузина [105].

Перейдем к обзору основных результатов части I.

Глава 1 содержит краткое введение в геометрическую теорию ана-

литических функций и конформных отображений. Даны определения основных классов исследуемых функций и сформулирован ряд классических результатов, систематически используемых нами в дальнейшем. Среди них - классический принцип площадей Гронуолла и элементарные оценки роста искажения и вращения для однолистных аналитических функций, теоремы сходимости и компактности, в том числе, фундаментальная теорема Каратеодори о сходимости к ядру. В главе 2 мы исследуем некоторые специальные семейства аналитических функций в единичном круге D, а также классы конформных отображений круга на области с заданными геометрическими свойствами, такими, например, как их звездность, выпуклость и т.д. Первым центральным результатом этой главы является, предложенный нами в 1970 году, вариационный метод исследования экстремальных проблем в классах аналитических функций, имеющих параметрические представления с помощью интегралов Стилтьеса. Приложение этого метода к классу $\mathcal{C}$ – Каратеодори аналитических функций в круге с положительной вещественной частью дано в §2.4. Полученные здесь результаты будут применены в главе III при решении общей проблемы искажения и вращения на классе всех конформных отображений единичного круга. Другим центральным результатом данной главы является решение известной задачи И.Е. Базилевича и Г.В. Корицкого о выпуклых дугах линий уровня при конформных отображениях круга на области, звездообразные относительно начала координат.

Обозначим через S класс всех однолистных аналитических функций в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, а через S^* его подкласс, состоящий из функций $f(z)$, для которых $f(D)$ - звездообразная область относительно начала координат. Пусть $f(z) \in S^*$. При отображении круга D функцией $f(z) \in S^*$ образом окружности $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, радиуса r, $0 < r < 1$, является некоторая аналитическая кривая $L(f, r)$, которую принято называть линией уровня функции $f(z)$. Эта кривая принадлежит кольцу

$$K_r : R_{\min}(r) \leq |w| \leq R_{\max}(r),$$

где

$$R_{\min}(r) = \frac{r}{(1+r)^2}\,, \quad R_{\max}(r) = \frac{r}{(1-r)^2}\,.$$

Дуга линии уровня называется выпуклой, если при непрерывном движении вдоль нее в положительном направлении касательная вращается против часовой стрелки. С помощью функции

$$Q(f, z) = 1 + \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

необходимому и достаточному условию принадлежности точки $w_0 = f(z_0)$, $|z_0| = r$, выпуклой дуге линии уровня $L(f,r)$ можно придать следующий вид: $Q(f,z_0) > 0$ (ср. [105], с. 166). Если же $Q(f,z_0) < 0$, то точка w_0 принадлежит вогнутой дуге линии уровня.

Уже достаточно хорошо изучен вопрос о выпуклости дуг линий уровня $L(f,r)$, $f \in S^*$, при малых значениях r. Так, например, известно, что если $r \in (0, r_c)$, $r_c = 2 - \sqrt{3}$, то $L(f,r)$ - выпукла, какова бы ни была функция $f(z)$ класса S^*. При $r > r_c$ поведение дуг линий уровня становится более сложным, Тем не менее, для таких r, на основании знания областей значений определенных комплекснозначных функционалов, заданных на классе S^*, удается заметно увеличить информацию о геометрических свойствах линий уровня.

В параграфе 2.5 находится область значений функционала

$$I(f) = \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} + iQ(f,z),$$

$z \in D$ и фиксировано, на классе S^*, см. теорема 2.11, и, в качестве одного из приложений этого результата к изучению геометрических свойств линий уровня, доказываются теоремы, устанавливающие связь между значениями $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ и выпуклыми (вогнутыми) дугами $L(f,r)$, $f \in S^*$. Здесь же приведены результаты, относящиеся к взаимному росту функционалов $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ и $Q(f,z)$ на классе S^*.

Отметим, что в 1973 году Мокану и Рид [297] применили теорему 2.11 для решения проблемы α - выпуклости в классе S^*. В §2.6 находится область значений системы функционалов

$$P_n(f) = J_n\left(|f(z)|,\ \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}\right),\ \ n = 1,2,$$

$z \in D$ и фиксировано. Здесь $J_n(u,v)$ - непрерывно дифференцируемые вещественные функции в плоской области, образованной точками $|f(z)| + i\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$, когда $f(z)$ пробегает весь класс S^*. Это позволяет, с одной стороны, привести теоремы о взаимном росте некоторых функционалов на классе S^* и его подклассах, с другой стороны, установить те части кольца K_r, в которых любая дуга линии уровня $L(f,r)$, $f \in S^*$, является выпуклой. В §2.7 доказано, что только и лишь только в кольце

$$\frac{1+r^2}{2(1+r)^2} R_{\max}(r) \le |w| \le R_{\max}(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$$

при произвольно фиксированном $r \in (r_c, 1)$ линия уровня $L(f,r)$ при всех $f \in S^*$ имеет выпуклые дуги.

Ранее, в работе [30] И.Е. Базилевич и Г.В. Корицкий установили теорему: существует абсолютная константа α_c, $0.333\ldots < \alpha_c, 0.511\ldots$, не зависящая от r, такая, что в кольце $\alpha R_{\max}(r) \le |w| \le R_{\max}(r)$ дуги линий уровня $L(f,r)$ любой функции $f \in S$ будут выпуклыми. Но имеется такое $r < 1$ и такая функция $f(z)$ класса S, что в более широком кольце $(\alpha - \varepsilon)R_{\max}(r) \le |w| \le R_{\max}(r)$ на $L(f,r)$ найдется невыпуклая дуга.

В §2.7 установлено точное значение абсолютной константы α_c на классе S^*, которое оказалось равным $1/3$.

Глава 3, которая является центральной в первой части книги, посвящена развитию параметрического метода Лёвнера и решению на этой основе общей проблемы роста, искажения и вращения при конформных отображениях единичного круга.

Алгебраическая структура множества всех однолистных функций, заданных в области G, оказывается нелинейной. Простые примеры показывают, что это множество, например, нелинейно и невыпукло. Вместе с тем, свойство однолистности инвариантно относительно операции композиции надлежащих отображений, что позволяет выделить соответствующие полугруппы конформных отображений и применить для их изучения алгебраические методы. Именно это свойство было положено Лёвнером в 1923 году [273] в основу разработанного им метода параметрических представлений однолистных аналитических функций.

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех однолистных аналитических функций φ в круге D, удовлетворяющих условиям: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ и $|\varphi(z)| < 1$ при $z \in D$.

Очевидно, если φ_k, $k = 1, 2$, принадлежат классу $\mathcal{L}$, то и их композиция $\varphi_1(\varphi_2(z))$ принадлежит этому же классу. Поскольку тождественное отображение входит в класс $\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ образует полугруппу относительно операции композиции, а тождественное отображение играет в ней роль единицы.

Лёвнер в [273] исследовал задачу о представлении произвольного отображения из полугруппы $\mathcal{L}$ в виде композиции преобразований, бесконечно близких к тождественному. Другими словами, он изучил возможность представления произвольного отображения φ из $\mathcal{L}$ в виде композиции инфинитезимальных преобразований полугруппы $\mathcal{L}$, то есть как отображения вида $\varphi(z) = \omega(z, T, s; p)$, где $w(t) = \omega(z, t, s; p)$ – решение нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -w\,p(w,t)$$

с начальным условием $w(s) = z$, $0 \le s \le t \le T < \infty$, и однопараметрическим семейством $p(z,t)$ инфинитезимальных преобразований, таких

что $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – класс Каратеодори аналитических функций в круге D с положительной вещественной частью. Это уравнение известно теперь как *уравнение Лёвнера.* Его исследованию посвящено большое число работ, см. [5, 102, 105, 120, 131, 273, 274, 311, 317, 388] и приведенную там библиографию. Сам Лёвнер изучил детально лишь частный случай этого уравнения. Так в работе [273] было доказано, что все отображения из $\mathcal{L}$, которые отображают D на области, получаемые из круга D проведением жорданового разреза, представимы в виде $\varphi(z) = \omega(z, T, s; p)$. При этом инфинитезимальные преобразования $p(z,t)$ конкретизируются и приобретают вид

$$p(z,t) = \frac{\mu(t) + z}{\mu(t) - z},$$

где $\mu(t)$ - равная по модулю единице непрерывная на $[0,\infty)$ функция. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{\mu(t) + w}{\mu(t) - w}$$

также носит название *уравнения Лёвнера.*

Более общий случай уравнения Лёвнера был исследован в работах П.П. Куфарева [234, 236, 237], см. также [116, 312].

Естественно возникает вопрос о возможности представления любой функции класса S с помощью интегралов уравнения Лёвнера. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема: если $f(z)$ – произвольная функция класса S, то существует функция $p(w,t)$ измеримая по t на $[0,\infty)$ при фиксированном $w \in D$ и $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, при почти всех $t \in [0,\infty)$, такая, что

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi(z,t),$$

где $w = \varphi(z,t)$ – решение уравнения Лёвнера–Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t), \quad \text{для п.в. } t \in [0,\infty),$$

с начальным условием $w(0) = z \in D$.

В основе доказательства этой теоремы лежат различные методы замыкания некомпактных классов Лёвнера, см. [110,120,311,312]. В частности, в работе [312], см. также [311], с. 158, доказано, что любая функция класса S может быть включена в цепь подчинения Лёвнера, см. §3.2, и, значит, может быть получена по вышеприведенным формулам.

Другой подход основан на свойстве слабой компактности однопараметрических семейств регулярных вероятностных мер μ_t на единичной окружности, измеримых по параметру t и генерирующих, по формуле Рисса–Герглотца, соответствующие функции $p(z,t)$, см. [120].

Наконец, третий подход базируется на компактности семейства функций $\{p(z,t)\}$ в топологии слабой сходимости, определяемой соотношением

$$\int_I p_n(z,t)\eta(t)dt \to \int_I p(z,t)\eta(t)dt$$

для любой ограниченной измеримой функции $\eta(t)$ на интервале I. При этом, сходимость предполагается локально равномерной по $z \in D$, см. [110].

В заключительной части этой главы мы приводим элегантное решение гипотезы Бибербаха для третьего коэффициента, основанное на редукции нелинейной экстремальной задачи в классе S к линейной задаче на выпуклом классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори. Несмотря на полное решение проблемы коэффициентов, найденное Д'Бранжем [76], приведенное нами доказательство демонстрирует новые возможности параметрического метода.

Глава 4 посвящена решению общей задачи о росте, искажении и вращении при конформных отображениях единичного круга.

Оценки углового смещения, роста, вращения и искажения при конформных отображениях круга играют важную роль в геометрической теории функций и являются предметом интенсивных исследований, см., например, [4, 5, 8, 9, 27, 102, 104, 105, 108, 115, 118, 120–122, 131, 132, 135–138, 141, 146, 163, 170, 233, 255, 314]. Решение таких задач сводится к вопросам о точных оценках функционалов, зависящих от значений однолистной аналитической функции и ее производной в фиксированной точке единичного круга.

Точные элементарные оценки роста и искажения в классе S мы привели в главе 1. Остановимся, более подробно, на результатах, связанных с оценками углового смещения и вращения при конформных отображениях.

В 1919 году Бибербах [65] установил первоначальную форму теоремы вращения доказав, что в классе S при фиксированном $z \in D$ справедливо неравенство

$$|\arg f'(z)| \le 2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

где рассматривается ветвь $\arg f'(z)$, принимающая в начале координат

нулевое значение. Название теоремы происходит от хорошо известного геометрического смысла аргумента производной однолистной аналитической функции. Однако эта оценка оказалась не наилучшей. Спустя почти 17 лет, Г. М. Голузин [102], развивая параметрический метод Лёвнера, получил окончательное решение проблемы вращения, доказав для функций класса S, ставшие теперь классическими, следующие точные оценки:

$$|\arg f'(z)| \le \begin{cases} 4\arcsin|z|, & |z| \le 1/\sqrt{2} \\ \pi + \ln\frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & 1/\sqrt{2} \le |z| < 1. \end{cases}$$

В случае $|z| \le 1/\sqrt{2}$ Г.М. Голузин указал также экстремальную функцию. Вопрос о точности второй части неравенства впервые решил И.Е. Базилевич [26]. Эти пионерские работы послужили началом интенсивного развития параметрического метода и его приложений к исследованию экстремальных задач. Полный анализ знаков равенства в теореме вращения был выполнен В.В. Горяйновым [108]. Отметим, что теорема вращения в классе S_M ограниченных однолистных функций установлена в работе [136], см., также, [137], а анализ всех экстремальных функций выполнен в работе [138].

В 1932 году Грунский [114] установил точное неравенство в классе S

$$\left|\ln\frac{f(z)}{z} + \ln(1-|z|^2)\right| \le \ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

где под $\ln(f(z)/z)$ понимается непрерывная ветвь, стремящаяся к нулю при $z \to 0$, и, как следствие, получил следующую точную оценку углового смещения при конформном отображении

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \le \ln\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Точные оценки функционала

$$|\arg f'(z) - \arg(f(z)/z)| \le \ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

на классе S позволили определить так называемый радиус звездности

$$r^* = \frac{e^{\pi/2}-1}{e^{\pi/2}+1} = 0.655\ldots$$

для функций класса S. Последнее означает, что образ любого круга $|z| < r < r^*$ при отображении любой функцией класса S представляет собой

область звездообразную относительно начала координат. Точные оценки функционала

$$|\arg f'(z) - 2\arg(f(z)/z)| \le -\ln(1-|z|^2), \quad f \in S,$$

привели к решению проблемы вращения в классе Σ, состоящим из всех мероморфных и однолистных функций $F(z)$ в области $|z|>1$ с разложением в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$ вида $F(z) = = z+a_0+a_1/z+\ldots$, см. [105], с. 144. Оценки других функционалов в классах однолистных аналитических функций, содержащих $\arg f'(z)$ и $\arg(f(z)/z))$, и их приложения к изучению геометрии конформного отображения, можно найти, например, в работах [111, 121, 146].

Общая проблема о росте, искажении и вращении при конформных отображениях единичного круга сводится к задаче о множестве $\Omega(z) \subset \mathbb{C}^2 = \{(Z,W) : Z, W \in \mathbb{C}\}$ значений системы функционалов

$$I(f) = \left\{ \ln \frac{f(z)}{z}, \ \ln \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}$$

на классе S, где точка $z \in D$ и фиксирована. Здесь под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z=0$.

Пусть

$$I_1(f) = J\left(|f(z_0)|, \arg(f(z_0)/z_0), |f'(z_0)|, \arg f'(z_0)\right)$$

– произвольный непрерывный функционал, зависящий от роста $|f(z_0)|$, углового смещения $\arg(f(z_0)/z_0)$, искажения $|f'(z_0)|$ и вращения $\arg f'(z_0)$ отображения $f \in S$ в фиксированной точке $z_0 \in D$, $|z_0| = r$. Тогда

$$\max_S I_1(f) = \max_{Z,W \in \Omega(z_0)} J\left(re^{\mathrm{Re}\, Z}, \mathrm{Im}\, Z, e^{\mathrm{Re}\,(W+Z)}, \mathrm{Im}\,(W+Z)\right),$$

и для решения общей задачи достаточно определить множество $\Omega(z_0)$.

Обозначим через $\mathcal{C}(T)$ множество функций $p(z,t)$, $z \in D$, $t \in T$, таких, что $p(z,\cdot)$ измерима по t на интервале T и $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$ для почти всех $t \in T$.

Следующий результат является принципиальным, поскольку он позволяет параметризовать область значений нелинейного функционала $I(f)$ на классе S в терминах линейного непрерывного функционала на выпук-

лом классе $\mathcal{C}(0,|z|)$. А именно,

$$\Omega(z)=\left\{(Z,W): Z(h)=\int\limits_0^{|z|}(h(\rho,\rho)-1)\frac{d\rho}{\rho},\right.$$
$$\left. W(h)=\int\limits_0^{|z|}\frac{h'_z(0,\rho)d\rho}{1-\rho^2}\right\},$$

когда $h(z,t)$ пробегает весь класс $\mathcal{C}(0,|z|)$. Из приведенного результата немедленно следует, что $\Omega(z)$ – выпуклое замкнутое и ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^4$, и, следовательно, его описание можно дать в терминах выпуклого анализа. Именно, Пусть $\zeta=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ произвольный вектор из $\mathbb{R}^4$. Обозначим через $H_\Omega(\zeta)$ опорную функцию множества Ω. Другими словами,

$$H_\Omega(\zeta)=\max_{d\in\Omega}\langle\zeta,d\rangle=\max_{d\in\Omega}(\alpha d_1+\beta d_2+\gamma d_3+\delta d_4),$$

где $d=(d_1,d_2,d_3,d_4)\in\Omega$, а $\langle\zeta,d\rangle$ обозначает скалярное произведение ζ и d. Заметим, что при $|\zeta|=1$ значение $H_\Omega(\zeta)$ равно расстоянию от начала координат до опорной гиперплоскости множества Ω, ортогональной к вектору ζ. Функция $H_\Omega(\zeta)$ является выпуклой и поэтому непрерывна в каждой внутренней точке своей области задания.

Под опорным множеством $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$ выпуклого множества Ω будем понимать множество точек $d\in\Omega$, для которых

$$\langle\zeta,d\rangle=H_\Omega(\zeta).$$

Поскольку границу $\partial\Omega(z)$ множества $\Omega(z)$ можно представить как объединение опорных множеств $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$ по всем ненулевым векторам ζ, то наша задача сводится к исследованию следующей экстремальной проблемы на классе S

$$H_\Omega(\zeta_1,\zeta_2)=\max_S\mathcal{U}(f),$$

где

$$\mathcal{U}(f)=\mathrm{Re}\left[\zeta_1\ln\frac{f(z_0)}{z_0}+\zeta_2\ln\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}\right]$$

при всех $\zeta_1=\alpha-i\beta$ и $\zeta_2=\gamma-i\delta$, таких, что $|\zeta_1|+|\zeta_2|\neq 0$.

На этом пути мы получаем фундаментальный *принцип редукции*: в классе S при фиксированном z_0, $|z_0| = r < 1$,

$$\max_{f\in S} \operatorname{Re}\left[\zeta_1 \ln\frac{f(z_0)}{z_0} + \zeta_2 \ln\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] = \\ = \int_0^r \max_{h\in\mathcal{C}} \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho,\rho)-1) + \zeta_2\rho h'(0,\rho)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right]\frac{d\rho}{\rho}\,.$$

Мы видим, что экстремальная задача на классе S свелась к задаче о максимуме сопряженного функционала

$$\mathcal{G}(h) = \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho)-1) + \zeta_2 h'(0)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right],$$

на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори. Класс $\mathcal{C}$ имеет интегральное представление Рисса–Герглотца

$$h(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\,d\mu(\eta),$$

является выпуклым компактным множеством в пространстве всех аналитических функций в единичном круге D и линейные задачи на $\mathcal{C}$ могут быть исследованы стандартными методами выпуклого анализа.

Отметим, что рассматриваемая экстремальная задача и её многочисленные частные случаи, отвечающие определенным значениям параметров ζ_1, ζ_2, исследовались на протяжении прошлого века многими авторами и различными методами, см., например, [4, 5, 8, 9, 27, 102, 104, 105, 108, 115, 118, 120–122, 131, 132, 135–138, 141, 146, 163, 170, 255, 314, 381].

Исследованию сопряженной задачи посвящен §4.3. В итоге, мы приходим к следующему результату, см. теоремы 4.5 и 4.6: в классе S при фиксированном z_0, $|z_0| = r < 1$, и произвольных $\zeta_1 = \alpha - i\beta$, $\zeta_2 = \gamma - i\delta$, таких, что $\beta^2 + \delta^2 \neq 0$,

$$H_\Omega(\zeta) \equiv \max_{f\in S} \operatorname{Re}\left[\zeta_1 \ln\frac{f(z_0)}{z_0} + \zeta_2 \ln\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] = \int_0^r y(x(\rho),\rho)\frac{d\rho}{\rho}\,,$$

где

$$y(x,\rho) = a\gamma - \alpha + \alpha x - \frac{\gamma}{x} + \left|\beta + \frac{\delta}{x}\right|\sqrt{2ax - x^2 - 1},$$

и $x = x(\rho)$ – единственный, если $l \equiv |\zeta_2| - \gamma = 0$, наибольший, если $l \neq 0$ и $2l\alpha + \beta^2 - l^2 \geq 0$, и наименьший, если $l \neq 0$ и $2l\alpha + \beta^2 - l^2 \leq 0$, корень уравнения

$$(\alpha x^2 + \gamma)\sqrt{2ax - x^2 - 1} = \operatorname{sign}(\beta x + \delta)(\beta x^3 - a\beta x^2 + a\delta x - \delta)$$

на интервале $R : (1-\rho)/(1+\rho) \leq x \leq (1+\rho)/(1-\rho)$. Здесь $a(\rho) = (1+\rho^2)/(1-\rho^2)$. Если $\beta = \delta = 0$, то

$$\max_{f\in S}\left[\alpha \ln\frac{|f(z_0)|}{|z_0|} + \gamma \ln\frac{|z_0 f'(z_0)|}{|f(z_0)|}\right] = \\ = \int_0^r \left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\gamma - \alpha + \max_{x\in R}(\alpha x - \frac{\gamma}{x})\right)\frac{d\rho}{\rho}\,.$$

Анализ и надлежащие вычисления, выполненные в диссертации [122] и опубликованные в монографии [5], позволили записать все интегралы в вышеприведенных формулах в элементарных функциях. В §4.7 мы приведем соответствующие выкладки в частном случае при решении общей проблемы углового смещения и вращения при конформных отображениях круга D функциями класса S и некоторых его подклассов.

В §4.5 исследована структура опорных множеств выпуклого множества $\Omega(z)$. В частности, выписаны все опорные прямые в явном виде. Описанию всех экстремальных функций посвящен §4.6. Отметим, что полный анализ экстремальных функций дан в работах [108,141], см. также [131]. В §4.7, в качестве иллюстрации метода, рассмотрена следующая экстремальная задача. Пусть

$$I(f) = J(\arg(f(z_0)/z_0), \arg f'(z_0))$$

– произвольный непрерывный функционал, зависящий от углового смещения $\arg(f(z_0)/z_0)$ и вращения $\arg f'(z_0)$ отображения $f \in S$ в фиксированной точке $z_0 \in D$. Обозначим через Ω^* множество значений комплекснозначного функционала

$$Z(f) \equiv \arg\frac{f(z_0)}{z_0} + i\arg f'(z_0) = U + iV,\ \ f \in S,$$

где $z_0 \in D$ и фиксировано. Тогда

$$\max_S J(\arg(f(z_0)/z_0), \arg f'(z_0)) = \max_{\Omega^*} J(U,V),$$

и для решения общей задачи достаточно определить множество Ω^*. Очевидно, что вместо функционала $Z(f)$ можно рассмотреть любой другой

линейный комплекснозначный функционал, зависящий от $\arg(f(z_0)/z_0)$ и $\arg f'(z_0)$, например,

$$W(f) \equiv \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + i \arg f'(z_0) = X + iY, \ \ f \in S.$$

Действительно, если обозначить через $\Omega(z_0)$ множество значений функционала $W(f)$, то мы определим и Ω^* как образ Ω при линейном отображении вида

$$\begin{cases} U = -\frac{1}{2}\,[X - Y] \\ V = Y. \end{cases}$$

Справедлива теорема 4.10: на классе S при фиксированном z_0, $0 < |z_0| = r < 1$ и произвольных вещественных A и B, справедливы точные оценки

$$A \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + B \arg f'(z) \le \frac{|\beta|}{2} \ln \frac{1+|\beta|\sigma}{1-|\beta|\sigma} + \frac{|\delta|}{2} \ln \frac{1+|\delta|\sigma}{1-|\delta|\sigma} -$$
$$- \sqrt{|\beta\delta|} \ln \frac{1+\sigma\sqrt{|\beta\delta|}}{1-\sigma\sqrt{|\beta\delta|}} + 2\sqrt{|\beta\delta|} \arctan \sigma\sqrt{|\beta\delta|} -$$
$$- \frac{\delta+\beta}{2} \arctan \frac{\sigma(\beta^2x^2-\delta^2)}{x(\delta-\beta)} + \frac{\delta-\beta}{2} \arctan \frac{\sigma(\beta^2x^2-\delta^2)}{x(\delta+\beta)},$$

где $\beta = B - A, \quad \delta = B + A,$

$$\sigma = \sqrt{\frac{x^2-1}{\beta^2x^2-\delta^2}}$$

и x — наибольший, если $|\beta| \ge |\delta|$, и наименьший, если $|\beta| \le |\delta|$, положительный корень уравнения

$$\beta x^3 - \frac{1+r^2}{1-r^2}\beta x^2 + \frac{1+r^2}{1-r^2}\delta x - \delta = 0.$$

Из этой оценки следует, в частности, решение задачи вращения при конформных отображениях круга на области с p – кратной симметрией вращения относительно начала координат, см. [121], которая содержит в себе, в качестве частного случая, классическую теорему вращения Г.М. Голузина.

Заключительная глава 5 первой части книги посвящена развитию метода П.П. Куфарева об определении неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на полигональные области при наличии граничных нормировок.

Проблема построения конформных отображений канонических областей на полигональные области остается актуальной до настоящего времени в связи с новыми приложениями теории комплексного потенциала в различных областях естествознания (см., например, [400]). В связи с известным интегральным представлением таких отображений (см. [253], с. 162, [400], с. 65), проблема, по существу, состоит в определении неизвестных параметров, входящих в формулу Шварца–Кристоффеля. К настоящему времени разработаны различные эффективные методы численного определения этих параметров (см. [92, 253, 375, 400] и цитируемую там литературу). Один из таких методов восходит к известной работе П.П. Куфарева [235] (см., более подробно, [5], с. 296), который, на основе сочетания принципа симметрии и параметрического метода Лёвнера [273], редуцировал проблему определения неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля к задаче численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Развивая идеи работы [235] и комбинируя их с современными методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Хопкинс и Робертс [391] достигли на этом пути новых глубоких результатов.

В ряде случаев требуется найти конформные отображения круга или полуплоскости на многоугольную область при надлежащих граничных нормировках, например, типа "три точки - в три точки". Отметим, например, что если в качестве таких трех точек в области выбрать вершины многоугольника, то число подлежащих определению параметров уменьшается на три. Далее, если область неограничена, то включение в число таких точек надлежащих вершин многоугольника, расположенных в бесконечности, оказывается целесообразным с вычислительной точки зрения. Для того, чтобы идеи работы [235] распространить на этот случай, нужно, прежде всего, модифицировать уравнение Лёвнера, применительно к отображениям, сохраняющим фиксированные граничные точки.

Параграф §5.2 содержит постановку задачи и некоторые предварительные результаты. В параграфе §5.3 приводится дифференциальное уравнение Лёвнера для полуплоскости с разрезом вдоль кривой Жордана при условии, что точки 0, 1, и ∞ остаются неподвижными. В следующем параграфе проблема определения неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля редуцируется к задаче Коши интегрирования некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Параграф §5.5 посвящен вопросам разрешимости и единственности этой задачи и исследованию качественных свойств решения. В заключительном параграфе §5.6 дано приложение к случаю неограниченной области

специального вида, возникающей в задаче исследования электромагнитного поля в торцевой зоне турбогенераторов.

Глава 1

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОЦЕНКИ

Глава 1 содержит краткое введение в геометрическую теорию аналитических функций и конформных отображений. Даны определения основных классов исследуемых функций и сформулирован ряд классических результатов, систематически используемых нами в дальнейшем. Среди них - классический принцип площадей Гронуолла и элементарные оценки роста искажения и вращения для однолистных аналитических функций, теоремы сходимости и компактности, в том числе, фундаментальная теорема Каратеодори о сходимости к ядру.

1.1. Однолистные функции и конформные отображения

Напомним, что аналитическая функция $f(z)$ в области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *однолистной,* если $f(z_1) = f(z_2)$ только для $z_1 = z_2$, другими словами, если отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, является взаимно однозначным.

В геометрической теории аналитических функций комплексного переменного особую роль играют конформные отображения.

Топологическое отображение $f : G \to \mathbb{C}$ называется *конформным*, если оно сохраняет углы в каждой точке $z \in G$. Поскольку для однолистной аналитической функции $f(z)$, по теореме Гурвица, $f'(z) \neq 0$, $z \in G$, мы приходим к заключению, что каждая однолистная аналитическая функция в области G реализует конформное отображение области G на область $f(G)$.

В данной главе мы ограничимся случаем, когда G – односвязная область. В этом случае имеет место фундаментальная теорема Римана о конформном отображении односвязных областей.

Теорема Римана. *Пусть G – произвольная односвязная область, отличная от всей комплексной плоскости, и точка $z_0 \in G$. Тогда существует единственная аналитическая функция $f(z)$ в области G, нор-*

мированная условиями $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, *которая осуществляет однолистное конформное отображение* G *на единичный круг* $D = \{w : |w| < 1\}$.

Таким образом, мы можем ожидать, что основные свойства однолистных функций, определенных в односвязных областях, могут быть выражены через соответствующие свойства однолистных функций, определенных в канонической области D.

Обозначим через S класс однолистных аналитических функций в единичном круге D с разложением в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Мы выбрали нормировку в виде $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, для того, чтобы обеспечить компактность класса S относительно топологии локально равномерной сходимости и исключить из рассмотрения несущественные параметры.

Алгебраическая структура множеств однолистных функций и, в частности, класса S, оказывается довольно сложной. Простые примеры показывают, например, что класс S нелинеен и не является выпуклым. Вместе с тем, свойство однолистности инвариантно относительно операции композиции надлежащих отображений. Именно это свойство было положено Карлом Лёвнером в 1923 году в основу метода параметрических представлений однолистных аналитических функций. Развитию этого метода и решению на этом пути общей проблемы искажения и вращения при конформных отображениях единичного круга посвящена глава 3 настоящей книги.

Пусть теперь G – односвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку со связным компактным дополнением E, состоящем более, чем из одной точки. Выполняя надлежащее преобразование Мёбиуса, мы вновь можем применить теорему Римана. Теперь в качестве канонической области выберем внешность единичного круга $\Delta = \{z : |z| > 1\}$ и нормируем отображение так, чтобы бесконечно удаленная точка оставалась неподвижной. По теореме Римана, существует единственная функция вида

$$F(z) = bz + b_0 + b_1 z^{-1} \dots \quad b > 0\,,$$

которая отображает конформно Δ на область G.

Выполнив нормировку, а именно, полагая $b = 1$, введем в рассмотрение класс Σ функций вида

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} \dots,$$

которые однолистны и мероморфны (имеют простой полюс в бесконечности) в области Δ.

Заметим, что если $f \in S$, то функция

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)}$$

принадлежит классу Σ и удовлетворяет условию $g(z) \neq 0$ в области Σ, так как $f(z)$ не имеет полюсов в единичном круге. Обратно, если $g \in \Sigma$ и $c \in \mathbb{C} \setminus g(\Delta)$, то функция

$$f(z) = \frac{1}{g(z^{-1}) - c}$$

принадлежит классу S.

Во многих случаях удобно рассматривать класс Σ_0, состоящий из функций класса Σ с так называемой гидродинамической нормировкой на бесконечности, т.е. таких, что

$$g(z) = z + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2} + \dots \quad .$$

1.2. Принцип площадей

Пусть $g(z)$ – произвольная функция класса Σ. Обозначим через $E = E(g)$ дополнение к образу внешности единичного круга при отображении $w = g(z)$. Дальнейшие рассмотрения основаны на простом геометрическом факте: плоская мера Лебега компактного множества $E(g)$ – неотрицательна. Этот факт, выраженный в терминах лорановских коэффициентов b_n разложения функции $g(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, носит название теоремы площадей. В 1914 году Гронуолл [113] впервые использовал принцип площадей и доказал следующую теорему.

Теорема площадей Гронуолла. *Если $g \in \Sigma$ и*

$$g(z) = z + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2} + \dots,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $|E(g)| = 0$, где $|E|$ – двумерная мера Лебега множества E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $g(z) = u + iv$ и на окружности $|z| = r > 1$ выбрана положительная ориентация относительно начала координат, то, по формуле Грина,

$$0 < |E(g(rz))| = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|E(g(rz)|} du\, dv = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{g(|z|=r)} u\, dv - v\, du = \\ = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \overline{g}\, dg.$$

Подставляя сюда разложение функции $g(z)$ в ряд Лорана, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \overline{g}\, dg = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(re^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-n} e^{-int} \right) \left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{b}_n r^{-n} e^{int} \right) dt = \\ = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} > 0.$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\sum_{n=1}^{m} n |b_n|^2 r^{-2n} \le r^2 \ \ (m = 1,\, 2,\, 3 \ldots :\, r > 1).$$

Если устремить $r \to 1$, а затем $m \to \infty$, то можно убедиться в сходимости ряда $\sum n|b_n|^2$. Осуществляя предельный переход при $r \to 1 - 0$, мы получаем основное неравенство площадей. Заключение о знаке равенства следует непосредственно из приведенных выше рассуждений. □

Следствие. *Если $g \in \Sigma$ и g имеет вид*

$$g(z) = z + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2} + \ldots,$$

то

$$|b_1| \le 1\,.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $g(z) = z + b_0 + \varepsilon z^{-1}$, $|\varepsilon| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из теоремы Гронуолла следует, что

$$|b_1|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \le 1.$$

Выясним вид экстремальных функций. Если $|b_1| = 1$, тогда все b_n, $n = 2, 3, \ldots$, должны равняться нулю. Следовательно, $g(z) = z + b_0 + \varepsilon b_1 z^{-1}$. Эта функция принадлежит классу Σ. □

1.3. Теоремы о росте и искажении

Для вывода фундаментальных оценок об искажении и росте при конформных отображениях единичного круга нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1.1. *Пусть $f \in S$ и*

$$g(z) = z\sqrt[n]{\frac{f(z^n)}{z^n}} = z + \ldots, \ n = 2, 3, \ldots$$

Тогда $g(z)$ принадлежит классу S и область $g(D)$ обладает n-кратной симметрией относительно вращения с центром в начале координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in S$, то $f(z) \ne 0$ для $z \ne 0$ и, значит, $h(z) = \sqrt[n]{f(z^n)/z^n} = 1 + \ldots$ – аналитическая функция в круге D. Более того, если η – корень n-ой степени из 1, то $h(\eta z) = h(z)$. Таким образом, $g(z) = zh(z)$ - аналитическая функция в D, нормированная условиями $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ и $g(\eta z) = \eta g(z)$. Для доказательства ее однолистности в круге D, будем рассуждать от противного. Предположим, что существуют точки z_1, $z_2 \in D$, $z_1 \ne z_2$, такие, что $g(z_1) = g(z_2)$. Тогда $g^n(z_1) = g^n(z_2)$, $f(z_1^n) = f(z_2^n)$ и, значит $z_1^n = z_2^n$. Следовательно, $z_2 = \eta z_1$, где $\eta^n = 1$. Так как $g(z_1) = g(z_2) = g(\eta z_1) = \eta g(z_1)$, мы заключаем, что $\eta = 1$. Итак, $z_1 = z_2$, что противоречит нашему предположению. □

Начнем с доказательства одного результата Бибербаха 1916 года, см. [63,64], который инициировал многочисленные исследования в теории однолистных аналитических функций.

Теорема 1.1. *Если $f \in S$ и имеет разложение вида*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad z \in D,$$

то

$$|a_2| \le 2\,.$$

Оценка точная и экстремальными являются только так называемые функции Кёбе

$$f(z) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}\,,$$

где $|\varepsilon| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.1 функция

$$F(z) = \frac{1}{[f(z^2)]^{1/2}} = z - \frac{1}{2}a_2\, z^{-1} + \dots$$

принадлежит классу Σ и, следовательно, $|a_2| \le 2$. В случае знака равенства $F(z) = z + b_1 z^{-1}$ с $|b_1| = 1$ и, значит, $f(z) = z(1 + b_1 z)^{-2}$. □

Напомним, что именно в работе [64] Бибербах высказал предположение, что в классе S должно выполняться точное неравенство

$$|a_n| \le n$$

для всех $n = 2, 3, \dots$. Эта смелая и предельно лаконичная в своей постановке гипотеза вызвала целую серию интенсивных исследований в теории однолистных функций и способствовала созданию эффективных методов решения актуальных проблем геометрической теории функций комплексного переменного, см., например, обзор "Методы и результаты геометрической теории функций" в монографии Г.М. Голузина [105], а также введение к книгу Дженкинса [170], с. 7–24. Спустя почти 70 лет гипотеза Бибербаха была блестяще доказана Д'Бранжем [76].

В 1907 году Кёбе, [208] доказал существование положительной константы $\varkappa$, такой, что $\cap_{f\in S} f(D)$ содержит круг $|w| < \varkappa$. Позднее, в 1916 году Бибербах [63] установил её точное значение, которое оказалось равным 1/4.

Теорема Кёбе об 1/4. *Если* $f \in S$, *то*

$$\bigcap_{f\in S} f(D) = \{|w| < \frac{1}{4}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in S$ и $w \notin f(D)$, то функция

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} \in S$$

и ее разложение в ряд Тейлора в круге D имеет вид

$$g(z) = z + (a_2 + 1/w)z^2 + \dots .$$

По теореме 1.1, $|a_2+1/w| \le 2$ и $|a_2| \le 2$. Следовательно, $1/|w| \le 2+|a_2| \le 4$ и значит $|w| > 1/4$. Таким образом, $\bigcap_{f\in S} f(D) \supset \{|w| < 1/4\}$. С другой стороны, функция Кёбе $f(z) = z/(1-z)^2$ принадлежит кассу S и отображает D на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси от $-\infty$ до $-1/4$. Следовательно, $\bigcap_{f\in S} f(D) \subset \{|w| < 1/4\}$. □

Теорема искажения. *Если $f \in S$ и $|z| < 1$, то*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\,.$$

Оценки точные и знак равенства реализуется только на функциях Кёбе.

Доказательство. Пусть $f \in S$, а точка $a \in D$ и фиксирована. Тогда функция

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)}\,,$$

также принадлежит классу S и разлагается в круге D в ряд вида

$$g(z) = z + \left[\frac{1}{2}(1-|a|^2)\frac{f''(a)}{f'(a)} - \bar{a}\right] z^2 + \dots .$$

По теореме 1.1

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1.$$

Далее, в силу этого неравенства

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \ln[(1-r^2)f'(re^{it})] \right| = \left| e^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} - \frac{2r}{1-r^2} \right| \le \frac{4}{1-r^2}\,.$$

В результате интегрирования по r от 0 до $|z|$ с $t = \arg z$, мы имеем

$$|\ln(1-|z|^2)f'(z)| \le \int_0^{|z|} \left| \frac{\partial}{\partial r} \ln[(1-r^2)f'(re^{it})] \right| dr \le$$

$$\le 2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}\,.$$

Отделяя вещественную часть, приходим к неравенствам

$$-2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} \le \ln(1-|z|^2)|f'(z)| \le 2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

указанным в теореме. □

Теорема о росте. *Если $f \in S$ и $|z| < 1$, то*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}\,.$$

Оценки точные и знак равенства реализуется только на функциях Кёбе.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in S$ и $z = re^{it}$, $0 < r < 1$. Так как $f(0) = 0$, то из правого неравенства теоремы об искажении следует, что

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\int_0^r f'(\rho e^{it})\,d\rho\right| \le \int_0^r |f'(\rho e^{it})|\,d\rho \le \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}\,d\rho \\ &= \frac{r}{(1-r)^2}\,. \end{aligned}$$

Это доказывает правую часть неравенства нашей теоремы. Для доказательства левой части неравенства, предположим, что $f(re^{it}) = Re^{i\Phi}$. Если $R \ge 1/4$, то неравенство очевидно. Таким образом, мы можем предполагать, что $R < 1/4$. По теореме Кёбе о покрытии прообраз γ сегмента $w(\tau) = \tau e^{i\Phi}, 0 \le \tau \le R$ при отображении $f(z)$ принадлежит кругу D с концами в точках 0 и re^{it}. Используя нижнюю оценку из теоремы искажения, получаем, что

$$\begin{aligned} |f(re^{it})| = R = \int_\gamma |dw| = \int_\gamma |f'(\zeta)d\zeta| \ge \\ \ge \int_\gamma |f'(\zeta)|d|\zeta| \ge \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}\,d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}\,. \end{aligned}$$

□

Детальную информацию о первых существенных результатах в теории однолистных функций можно найти, например, в монографиях Г.М. Голузина [105], Дженкинса [170], Дьюрена [130] и Поммеренке [311].

1.4. Последовательности однолистных функций

В данном параграфе мы приведем классические теоремы, связанные с вопросами сходимости и компактности для аналитических функций и конформных отображений, и начнем с фундаментальной теоремы Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. *Пусть последовательность $f_n(z)$ аналитических функций в области G сходится к предельной функции $f(z)$ локально равномерно в G. Тогда $f(z)$ также аналитическая функция в области G. Более того, производные любого порядка $f_n^{(m)}(z)$ сходятся к $f^{(m)}(z)$ локально равномерно в G.*

Далее, непосредственно из классического принципа аргумента для аналитических функций, следует

Теорема Руше. *Пусть γ – замкнутая кривая Жордана в односвязной области G. Если две аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$ в области G удовлетворяют неравенству*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

в точках кривой γ, то $f(z)$ и $g(z)$ имеют одинаковое число нулей внутри γ.

Отсюда вытекает

Теорема Гурвица. *Если аналитические в области G функции $f_n(z)$ не обращаются в этой области в нуль и последовательность $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ локально равномерно в G, то предельная функция $f(z)$ либо тождественно равна нулю, либо не обращается в нуль в области G.*

Из теоремы Гурвица следуют два фундаментальных заключения для однолистных аналитических функций:

1. *Если последовательность однолистных аналитических функций $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ локально равномерно в G, то предельная функция либо также однолистна, либо является константой;*
2. *Если $f(z)$ однолистна в G, то $f'(z) \neq 0$ в этой области.*

Напомним, что семейство $\mathcal{F}$ аналитических функций в области G называется *нормальным*, если любая последовательность $f_n \in \mathcal{F}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно в области G.

Семейство $\mathcal{F}$ аналитических функций в области G называется *компактным*, если оно нормально и замкнуто, то есть все предельные функции принадлежат семейству $\mathcal{F}$.

Теорема Витали. *Последовательность аналитических функций $f_n(z)$ в области G сходится локально равномерно в G к аналитической функции $f(z)$, тогда и только тогда, когда:*

1. $f_n(z)$ локально ограничена в G;

2. $f_n(z_k) \to f(z_k)$ при $n \to \infty$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$ при условии, что $z_k \to z_0 \in G$, $k \to \infty$.

Следующий результат является центральным для наших дальнейших рассуждений.

Теорема 1.2. *Касс S является компактным относительно топологии локально равномерной сходимости в круге D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы о росте, если $f(z) \in S$, то

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}\,.$$

Таким образом, класс S является локально ограниченным в D. По теореме Арцела класс S является нормальным, а теорема Гурвица позволяет сделать заключение, что все предельные функции либо однолистны, либо константы. Последняя возможность исключается, поскольку функции класса S нормированы условием $f'(0) = 1$. Таким образом, класс S замкнут и, следовательно, компактен. □

Следующий результат, принадлежащий Каратеодори, дает геометрическую интерпретацию сходимости последовательности $f_n(z)$ однолистных аналитических функций в области G, в терминах надлежащей сходимости областей $f_n(G)$.

Предварительно напомним определение ядра последовательности плоских областей. Пусть G_n, $n = 1, 2, \ldots$ - последовательность односвязных областей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащих фиксированный круг K с центром в точке w_0. Обозначим через E множество точек $w \in \mathbb{C}$, таких, что каждая из них имеет окрестность, принадлежащую G_n для всех достаточно больших n. Очевидно, что все точки круга K входят в E, и значит E не пусто. Более того, E открыто и может быть представлено в виде объединения конечного или счетного множества односвязных непересекающихся областей. Ту из них, которая содержит точку w_0, обозначим через G_{w_0} и ее будем называть *ядром* последовательности G_n относительно точки w_0.

Теорема Каратеодори о сходимости к ядру. *Пусть* $f_n(z)$, $f_n'(0) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, - *последовательность однолистных аналитических функций в круге* D *и* $G_n = f_n(D)$. *Последовательность* $f_n(z)$ *сходится локально равномерно в* D *тогда и только тогда, когда* G_n *сходятся к* $G \neq \mathbb{C}$, *как к своему ядру. Если предельная функция* $f(z) \neq 0$, *то она отображает* D *на ядро* G.

Доказательство этого, ставшего уже классическим, результата, а также подробные доказательства приведенных ранее в этой главе теорем, читатель может найти практически в каждой из монографий по геометрической теории функций комплексного переменного, см., например, [105, 311].

Глава 2

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной главе мы исследуем некоторые специальные семейства аналитических функций в единичном круге D, а также специальные классы конформных отображений круга на области с заданными геометрическими свойствами, такими, например, как их звездность, выпуклость и т.д.

2.1. Принцип подчинения и класс $\mathcal{C}$ – Каратеодори

Напомним классическую лемму Шварца. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в круге D, такая, что

$$|f(z)| \leq 1, \;\; f(0) = 0.$$

Тогда

$$|f(z)| \leq |z|, \;\; \text{и} \;\; |f'(0)| \leq 1.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $f(z) = \varepsilon z$, где ε – произвольная константа, равная по модулю единице.

Теорема 1.3. (Принцип подчинения). *Пусть f и F – аналитические функции в круге D, такие, что $f(0) = F(0)$ и дополнительно F однолистна в D. Если*

$$f(D) \subset F(D), \;\; \textit{пишем } f \prec F \textit{ и читаем } f \textit{ подчинена } F \textit{ в } D,$$

тогда

(a) $f(z) = F \circ \omega(z)$, где ω – аналитическая функция в D и $|\omega(z)| \leq |z|$,

(b) $|f'(0)| \leq |F'(0)|$ со знаком равенства тогда и только тогда, когда $\omega(z) = \varepsilon z$, $|\varepsilon| = 1$,

(c) $f(|z| < r) \subset F(|z| < r)$ для всех r, $0 < r < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как F аналитична и однолистна в D, то $\omega = F^{-1} \circ f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Значит, $|\omega(z)| \le |z|$, $|F'(0)| = |f'(0)||\omega'(0)| \le |F'(0)|$ со знаком равенства тогда и только тогда, когда $\omega(z) = \varepsilon z$. Так как $f(z) = F(\omega(z))$ и $|\omega(z)| \le |z|$, то

$$f(|z| < r) = F(\omega(|z| < r)) \subset F(|z| \le r)$$

для всех r, $0 < r < 1$. □

Обозначим через $H(D)$ пространство всех аналитических функций в единичном круге D с топологией локально равномерной сходимости, а через $\mathcal{C}$ – класс функций из $H(D)$, таких что $\operatorname{Re} f(z) > 0$, и $f(0) = 1$, введенный и исследованный Каратеодори.

Отметим, что класс $\mathcal{C}$ представляет собой выпуклое компактное подмножество в пространстве $H(D)$.

Из принципа подчинения немедленно следует

Теорема 2.1. *Если $f \in \mathcal{C}$ и $f(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$, то справедливы точные оценки:*

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \le |f(z)| \le \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

и для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$|c_n| \le 2\,.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{1 + \varepsilon z}{1 - \varepsilon z}, \ \ |\varepsilon| = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые оценки и втрое неравенства при $n = 1$ следуют немедленно из того факта, что $f \prec (1+z)/(1-z)$ в круге D. Пусть теперь $n \ge 2$. Функция $h(z) = g(z^{1/n})$, где

$$g(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(e^{2\pi i k/n} z),$$

также принадлежит классу $\mathcal{C}$ и, более того, $h(z) = 1 + c_n z + \ldots$. Значит $|c_n| \le 2$ для всех n. □

Отметим, что из теоремы 2.1 следует локально равномерная ограниченность класса $\mathcal{C}$. Следовательно, по теореме Арцела, класс $\mathcal{C}$ является

компактным подмножеством пространства $H(D)$. Таким образом, класс $\mathcal{C}$ представляет из себя выпуклое компактное подмножество пространства $H(D)$ и, следовательно, к этому классу применимы методы теории локально выпуклых линейных топологических пространств. С другой стороны, в чем мы убедимся ниже, класс $\mathcal{C}$ – Каратеодори тесно связан с конформными отображениями единичного круга.

Следующий классический результат, известный как теорема Рисса–Герглотца, дает интегральное представление класса $\mathcal{C}$.

Теорема Рисса–Герглотца. *Функция f принадлежит классу $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда существует неубывающая функция μ на $[0, 2\pi]$, такая, что*

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t), \qquad \int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1. \tag{2.1}$$

Здесь интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Если μ нормирована так, что

$$\mu(t) = \frac{\mu(t^-) + \mu(t^+)}{2},$$

то такая μ в представлении Рисса–Герглотца единственна.

Доказательство. Пусть f имеет вид (2.1). Тогда f аналитична в D и

$$\operatorname{Re} f(z) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} \right) d\mu(t) \geq 0$$

так как $\operatorname{Re}[(1 + z)/(1 - z)] > 0$ для $z \in D$ и μ не убывает. Более того, $f(0) = 1$ и, следовательно, $f \in \mathcal{C}$.

Обратно, пусть $f \in \mathcal{C}$. Если $|z| \leq r < 1$, тогда, по формуле Шварца,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \operatorname{Re} f(re^{it})\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, d\mu_r(t)$$

с функцией

$$\mu_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \operatorname{Re}[f(re^{i\tau})]\, d\tau\,.$$

Ясно, что $\mu_r(t)$ не убывает по t на промежутке $[0, 2\pi]$ и нормирована условиями $\mu_r(0) = 0$, $\mu_r(2\pi) = 1$ для каждого $0 < r < 1$, так как $f(0) = 1$.

В силу принципа выбора Хелли, найдется неубывающая последовательность r_n, такая, что $0 < r_n < 1$ и $r_n \to 1$ при $n \to \infty$, и неубывающая функция μ на $[0, 2\pi]$, для которых

$$\int_0^{2\pi} h(t)d\mu_n(t) \to \int_0^{2\pi} h(t)d\mu(t)$$

для любой функции h, непрерывной на $[0, 2\pi]$. Так как

$$\frac{r_n e^{it} + z}{r_n e^{it} - z} \to \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

равномерно относительно t, $0 \le t \le 2\pi$ и z, $|z| \le \rho$, $0 < \rho < 1$, можно выполнить предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z}\, d\mu(t)$$

и, тем самым, завершить доказательство интегрального представления функций класса $\mathcal{C}$.

Чтобы доказать единственность, мы применим формулу Стилтьеса–Перона

$$\frac{\mu(t+0) + \mu(t-0)}{2} = \lim_{r \to 1-0} \int_0^t \mathrm{Re}\,[f(re^{i\tau})]\, d\tau,$$

которая справедлива для любого $0 < t < 2\pi$. □

Приведем эквивалентную формулировку теоремы Рисса–Герглотца: функция f принадлежит классу $\mathcal{C}$, тогда и только тогда, когда существует единственная регулярная вероятностная мера μ на единичной окружности $S^1 = \{\eta : |\eta| = 1\}$, такая, что

$$f(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1 + \eta z}{1 - \eta z}\, d\mu.$$

2.2. Звездообразные и выпуклые функции

Класс функций $\mathcal{C}$ – Каратеодори тесно связан с некоторыми важными классами конформных отображений единичного круга.

Напомним, что множество G, $0 \in G$, называется звездообразным относительно начала координат, если

$$tw \in G \text{ для любого } w \in G \text{ и всех } 0 \le t \le 1.$$

Обозначим через S^* подкласс класса S, состоящий из функций $f(z)$, для которых $f(D)$ – звездообразная область относительно начала координат. Следующая теорема устанавливает связь между функциями классов $\mathcal{C}$ и S^*.

Теорема 2.2. *Аналитическая функция $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ в круге D принадлежит классу S^* тогда и только тогда, когда*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = h(z) \in \mathcal{C}\,.$$

Это соотношение однозначно определяет f по формуле

$$f(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{h(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала мы установим, что если $f \in S^*$, то область $G_r = \{f(z) : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, является звездообразной относительно начала координат. Действительно, пусть $t \in (0,1)$ и $\omega(z) = f^{-1}(tf(z))$. Функция ω определена и аналитична в круге D, поскольку f – однолистна и $f(D)$ – звездообразна. Более того, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, и по лемме Шварца $|\omega(z)| \le |z|$ в D. Если $|z_0| < r$, то

$$tf(z_0) = f(\omega(z_0)) \in f(|z| < r).$$

Следовательно, $G_r = \{f(z) : |z| < r\}$ – звездообразна относительно 0.

Пусть теперь $f(z) \in S^*$. Так как G_r звездообразна, то из геометрических соображений следует, что $\arg f(re^{i\tau})$ представляет собой монотонно возрастающую функцию в промежутке $0 \le \tau \le 2\pi$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \arg f(re^{i\tau}) = \frac{\partial}{\partial\tau} \mathrm{Im}\left[\ln f(re^{i\tau})\right] = \mathrm{Re}\left[re^{i\tau}\frac{f'(re^{i\tau})}{f(re^{i\tau})}\right] \ge 0.$$

В силу нормировки $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, функция $h(z)$ имеет устранимую особенность в точке $z = 0$ и $h(0) = 1$. То есть $h(z)$ – аналитическая функция в круге D. В силу принципа минимума для гармонических функций и нормировки $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) \neq 0$ для любого $z \in D$. Таким образом, $h(z) \in \mathcal{C}$.

Обратно, пусть $h(z)$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Тогда $f(z) \neq 0$ для $z \neq 0$, так как, в противном случае, функция $h(z)$ должна была бы иметь полюс. Если $f(z) = a_k z^k + \ldots$, то $k = h(0) = 1$. А это значит,что $h(z) \in \mathcal{C}$, так как $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Поскольку $\arg f(re^{i\tau})$ монотонно возрастает на интервале $0 \leq \tau \leq 2\pi$, ее полное изменение

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \arg f(re^{i\tau})\, d\tau = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \right] = 2\pi.$$

Из геометрических соображений теперь следует, что $f(z)$ отображает окружность $|z| = r$ взаимно однозначно на звездообразную относительно начала координат аналитическую кривую. Следовательно, $f(z)$ – однолистна в круге $|z| < r$ и область G_r – звездообразна для любого $0 < r < 1$. Таким образом, $f \in S^*$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что

$$\frac{d}{dz} \ln[f(z)/z] = \frac{zf'(z)/f(z) - 1}{z},$$

так как $g(z) = \ln[f(z)/z]$, $g(0) = 0$, определена и аналитична в круге D. Интегрирование приводит к формуле

$$\ln[f(z)/z] = \int_0^z \frac{h(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta,$$

которое эквивалентно второму заключению теоремы. □

Теорема 2.3. *$f \in S^*$ тогда и только тогда, когда существует регулярная вероятностная мера μ на единичной окружности, такая, что*

$$f(z) = z \exp\left(-2 \int_{|\eta|=1} \ln(1 - \eta z) d\mu \right).$$

Более того, такая мера единственна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in S^*$, то по теореме Рисса–Герглотца и теореме 2.2, найдется единственная мера μ, такая, что

$$f(z) = z \exp\left(\int_0^z \int_{|\eta|=1} [(1+\eta z)/(1-\eta z) - 1] \, \frac{d\mu \, d\zeta}{z} \right).$$

Выполняя интегрирование, получим

$$f(z) = z \, \exp\left(-2 \int_{|\eta|=1} \ln(1-\eta z) \, d\mu \right).$$

Обратно, если f представима в указанном выше виде, то $zf'(z)/f(z) \in \mathcal{C}$ и $f \in S^*$ по теореме 2.2. □

Пусть $\lambda_k > 0$, $|\varepsilon_k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 2$. Тогда функция

$$f(z) = \frac{z}{\prod_{k=1}^n (1-\varepsilon_k z)^{\lambda_k}}$$

принадлежит классу S^*. Это следует из теоремы 2.3, если выбрать μ на единичной окружности таким образом, чтобы

$$\mu = \sum_{k=1}^n t_k \delta_{\varepsilon_k},$$

где $t_k \geq 0$, $t_1 + \ldots + t_n = 1$ и δ_{ε_k} соответствует массе, сосредоточенной в точке η_k единичной окружности. Отметим, что $f(D)$ представляет собой всю комплексную плоскость с n разрезами вдоль лучей, выходящих из бесконечно удаленной точки и содержащих при своем продолжении точку 0. Функция Кёбе и её вращения отвечают частному случаю, когда $n = 1$.

Теперь мы дадим описание всех конформных отображений единичного круга на выпуклые области. Напомним, что множество G называется *выпуклым*, если выполняется соотношение

$$tw_1 + (1-t)w_2 \in G \text{ для любых } w_1, w_2 \in G \text{ и } 0 \leq t \leq 1.$$

Обозначим через S^c подкласс касса S, состоящий из функций f, для которых $f(D)$ – выпуклая область.

Теорема 2.4. *Аналитическая функция $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, в круге D принадлежит классу S^c тогда и только тогда, когда*

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = h(z) \in \mathcal{C}.$$

Это соотношение однозначно определяет f по формуле

$$f(z) = \int_0^z \exp\left(\int_0^\tau \frac{h(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta\right) d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале покажем, что если $f \in S^c$, то область $G_r = \{f(z) : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, является выпуклой. Положим $z_1 \neq z_2$, где $|z_1| \leq |z_2| < 1$. Тогда $w_t = tf(z_1) + (1-t)f(z_2) \in f(D)$ для $0 \leq t \leq 1$, так как область $f(D)$ выпуклая. Следовательно, $w_t = f(z_t)$ для некоторого $z_t \in D$. Мы должны показать, что $w_t \in G_r$. Пусть $t \in [0, 1]$ и фиксировано и пусть

$$g(z) = tf(zz_1/z_2) + (1-t)f(z).$$

Тогда $g(z)$ аналитична в круге D, $g(0) = 0$, а так как множество $f(D)$ выпуклое, то $g(D) \subset f(D)$. Следовательно, g подчинена однолистной функции f в D. Применяя принцип подчинения, находим, что $g(|z| < r) \subset G_r$. Таким образом, $w_t = g(z_2) \in D$ и $G_r = \{f(z) : |z| < r\}$ – выпуклая область при всех $0 < r < 1$.

Пусть теперь f принадлежит классу S^c. Так как G_r выпукла, то угол касательной к аналитической кривой $w = f(re^{i\tau})$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, представляет собой неубывающую функцию параметра τ, то есть

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \arg \frac{\partial f(re^{i\tau})}{\partial\tau} = \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial\tau} \ln \frac{\partial f}{\partial\tau} = \operatorname{Re}\left[1 + re^{i\tau} \frac{f''(re^{i\tau})}{f'(re^{i\tau})}\right] \geq 0.$$

Так как $h(0) = 1$, то, в силу принципа минимума для гармонической функции $\operatorname{Re} h(z)$, выполняется неравенство $\operatorname{Re} h(z) > 0$ в круге D. Значит, если $f \in S^*c$, то $h \in \mathcal{C}$.

Обратно, пусть $h(z)$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Угол между нормалью к замкнутой аналитической кривой $\Gamma_r = f(re^{i\tau})$ $0 \leq \tau \leq 2\pi$, и вещественной осью записывается в виде $\tau + \arg f'(re^{i\tau})$. Следовательно,

$$(\tau + \arg f'(re^{i\tau}))' = \operatorname{Re} h(re^{i\tau}) > 0.$$

Мы также видим в результате интегрирования, что полное изменение этого угла равно 2π. Значит $f(z)$ отображает окружность $|z| = r$ взаимно

однозначно на выпуклую кривую при каждом $0 < r < 1$. Отсюда следует, что f однолистна и отображает D на выпуклую область. □

Непосредственно из теорем 2.2 и 2.4 вытекает связь между функциями классов S^* и S^c. Именно, $f \in S^c$ тогда и только тогда, когда $g(z) \in S^*$, где

$$g(z) = zf'(z).$$

Отсюда следует интегральное представление функций класса S^c.

Теорема 2.5. *$f \in S^c$ тогда и только тогда, когда существует регулярная вероятностная мера μ на единичной окружности, такая, что*

$$f'(z) = \exp\left(-2\int\limits_{|\eta|=1} \ln(1-\eta z)d\mu\right).$$

2.3. Вариационный метод

Как мы видели в предыдущих параграфах, многие важные специальные классы аналитических функций и конформных отображений имеют параметрические представления с помощью интегралов Стилтьеса. Построению вариационного исчисления в таких классах функций посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных математиков, см., например, [6, 7, 95, 104, 187, 259, 386] и цитируемую там литературу. Развивая идеи работы [259], мы предложили, на наш взгляд, достаточно универсальный метод построения вариаций на таких классах аналитических функций, суть которого изложена ниже.

Пусть G – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $g_k(z,t)$ – заданные непрерывные функции двух переменных в $G \times [a_k, b_k]$, аналитические по $z \in G$ при каждом t из сегмента $[a_k, b_k]$. Обозначим через $M[a_k, b_k]$ класс всех неубывающих функций $\mu(t)$ на $[a_k, b_k]$, нормированных условиями $\mu(a_k) = 0$, $\mu(b_k) = 1$. Обозначим через $\mathcal{M}$ – класс аналитических функций в области G, которые могут быть представлены в виде

$$f(z) = F(z, u_1(z, \mu_1), \ldots, u_n(z, \mu_n)), \tag{2.2}$$

где

$$u_k(z,\mu_k)=\int\limits_{a_k}^{b_k} g_k(z,t)d\mu_k(t). \tag{2.3}$$

Класс $\mathcal{M}$ равномерно ограничен внутри G. Отсюда следует его нормальность. Принцип выбора Хелли и теоремы Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса обеспечивают компактность класса $\mathcal{M}$ относительно локально равномерной сходимости в области G. Класс $\mathcal{M}$ является связным, что следует, например, из выпуклости множества $M[a_k,b_k]$.

Выбирая надлежащим образом ядра $g_k(z,t)$ и функцию F, класс $\mathcal{M}$ можно специализировать. Например, если положить $F=u_1(z,t)$,

$$g_1(z,t)=\frac{1+ze^{it}}{1-ze^{it}},$$

$z\in D$, и $a=0$, $b=2\pi$, то, по теореме Рисса–Герглотца, прийдем к классу $\mathcal{C}$ - Каратеодори. При $F=z\exp\{-2u_1\}$, $u_1(z,t)=\ln(1-ze^{it})$, $z\in D$, а также считая $a=0$, $b=2\pi$, получим, что $\mathcal{M}\equiv S^*$, где S^* - класс всех однолистных звездообразных функций в единичном круге D.

Поскольку $M[a_k,b_k]$ – выпуклые множества, то допустимые вариации в классе $\mathcal{M}$ аналитических функций можно получить на основе выпуклых вариаций функций $\mu_k(t)$. Действительно, если $\mu_k(t)\in M[a_k,b_k]$, то функция

$$\mu_k^*(t)=(1-\varepsilon\lambda_k)\mu_k(t)+\varepsilon\lambda_k\nu_k(t), \tag{2.4}$$

где $\lambda_k\geq 0$ и $0\leq\varepsilon\lambda_k\leq 1$, также принадлежит классу $M[a_k,b_k]$, какова бы ни была функция $\nu_k(t)\in M[a_k,b_k]$.

Подставляя (2.4) в (2.2), мы получаем вариационную формулу в классе $\mathcal{M}$:

$$f^*(z)=f(z)+\varepsilon Q(z)+o(\varepsilon), \tag{2.5}$$

где

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F'_{u_k}(z,u_1(z,\mu_1),\ldots,u_n(z,\mu_n))\int\limits_{a_k}^{b_k} g_k(z,t)d[\nu_k(t)-\mu_k(t)] \tag{2.6}$$

и $o(\varepsilon)/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ локально равномерно в области G.

Вариационная формула (2.5) является эффективным инструментом для приложений. Она позволяет сводить первоначальную, в общем случае, нелинейную экстремальную проблему на классе $\mathcal{M}$ к линейной экстремальной проблеме на выпуклых классах $M[a_k, b_k]$.

Заметим, что все вариационные формулы, установленные ранее в работах [6,104,187,259,386], получаются из (2.5) при надлежащем выборе функций $\nu_k(t)$.

Пусть $J(w_0, \zeta_0, w_1, \zeta_1, \ldots, w_n, \zeta_n)$, отличная от постоянной аналитическая функция $2n+2$ комплексных переменных в некоторой области, достаточной для последующих построений. Для иллюстрации приложения вариационной формулы (2.5), рассмотрим на классе $\mathcal{M}$ комплекснозначный функционал

$$I(f) = J(f(z_0), \overline{f(z_0)}, f'(z_0), \overline{f'(z_0)}, \ldots, f^n(z_0), \overline{f^n(z_0)})$$

считая точку z_0 фиксированной в области G. Тогда

$$I(f^*) = I(f) + \varepsilon\Phi[f, Q] + o(\varepsilon), \tag{2.7}$$

где

$$\Phi[f, Q] = \sum_{s=0}^{m} \left[a_s \frac{d^s Q(z)}{dz^s} + b_s \overline{\frac{d^s Q(z)}{dz^s}} \right] \tag{2.8}$$

и

$$a_s = \frac{\partial J}{\partial w_s}, \quad b_s = \frac{\partial J}{\partial \zeta_s}.$$

Множество Ω значений функционала $I(f)$, когда f пробегает весь класс $\mathcal{M}$ очевидно связно и замкнуто. Для определения его неособых в смысле Лебедева [254] граничных точек, т.е. точек $I_0 \in \Omega$, для которых существует внешняя по отношению к Ω точка I_e такая, что $|I - I_e|$, $I \in \Omega$, достигает минимума при $I = I_0$, поступим следующим образом. Предположим, что функция f вносит в область Ω граничную точку $I(f) \in \partial\Omega$. Тогда найдется внешняя по отношению к области Ω точка I_e, такая, что $|I(f) - I_e| \leq |I(f^*) - I_e|$. Отсюда и из (2.7) следует выполнение неравенства

$$\operatorname{Re}\left(\Phi[f, Q] \cdot \overline{I - I_e}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t) d[\nu_k(t) - \mu_k(t)] \geq 0, \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_k(t) = \operatorname{Re}\left(\Phi[f, F'_{u_k} g_k] \cdot \overline{I - I_e}\right). \tag{2.10}$$

Значит

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t) d[\nu_k(t) - \mu_k(t)] \geq 0. \tag{2.11}$$

Отсюда, в силу произвольности выбора постоянных $\lambda_k \geq 0$, следует принцип максимума: в случае экстремума

$$\min_{\nu_k \in M[a_k, b_k]} \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t) d\nu_k(t) = \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t) d\mu_k(t). \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) можно записать в эквивалентном виде

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t) d\mu_k(t) = \mathfrak{M}_k, \tag{2.13}$$

где

$$\mathfrak{M}_k = \min_{t \in [a_k, b_k]} \varphi_k(t). \tag{2.14}$$

В дальнейшем будем предполагать, что непрерывные на $[a_k, b_k]$ функции $\varphi_k(t)$ принимают свое минимальное значение на этом промежутке конечное число раз. Ясно, что на всяком промежутке $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a_k, b_k]$, на котором $\varphi_k(t) > \mathfrak{M}_k$, экстремальная функция $\mu_k(t)$ принимает постоянное значение. Таким образом, мы приходим к заключению, что граничные функции $f(z) \in \mathcal{M}$ имеют вид

$$f(z) = F\left(z, \sum_{s=1}^{L_1} \mu_1^{(s)} g_1(z, t_1^{(s)}), \ldots, \sum_{s=1}^{L_n} \mu_n^{(s)} g_n(z, t_n^{(s)})\right), \tag{2.15}$$

где $t_k^{(s)} \in [a_k, b_k]$, а неотрицательные числа $\mu_k^{(s)}$ связаны соотношением: $\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)} + \ldots + \mu_k^{(L_k)} = 1$. При этом числа L_k равны числу корней уравнения $\varphi_k(t) = \mathfrak{M}_k$ на $[a_k, b_k]$, а точки $t_k^{(s)}$ совпадают с самими корнями.

2.4. Экстремальные задачи на классе $\mathcal{C}$

В качестве примера, рассмотрим применение описанного выше вариационного метода к исследованию экстремальных задач на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори.

Теорема 2.6. *Пусть комплекснозначный функционал*

$$I(f) = J(f(z_0), \overline{f(z_0)}, f'(z_0), \overline{f'(z_0)}, \dots, f^n(z_0), \overline{f^n(z_0)}) \tag{2.16}$$

определен на классе $\mathcal{C}$. *Тогда все граничные функции содержатся в семействе*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{L} \mu_k \frac{1 + ze^{it_k}}{1 - ze^{it_k}}, \tag{2.17}$$

зависящем от конечного числа вещественных параметров $\mu_k \geq 0$, $t_k \in [0, 2\pi)$. *При этом* $L \leq n + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вид граничных функций следует и формулы Рисса–Герглотца

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{it}}{1 - ze^{it}} \, d\mu(t)$$

и формулы (2.15). В данном случае

$$\varphi(t) = \operatorname{Re} \sum_{s=0}^{n} \gamma_s \frac{d^s}{dz^s} \left(\frac{1 + ze^{it}}{1 - ze^{it}} \right) |_{z=z_0} \, ,$$

где γ_s – комплексные параметры. Элементарный анализ показывает, что функция $\varphi(t)$ может принимать свое минимальное значение на $[0, 2\pi)$ не более, чем в $n + 1$ точке. □

В частности, если функционал зависит лишь от $f(z_0)$ и $f'(z_0)$ в одной фиксированной точке, то экстремальные функции имеют вид (2.17) и содержат всего три независимых параметра. Однако даже в этом случае, решение конкретной экстремальной задачи до конца сопряжено с значительными аналитическими трудностями.

Следующий результат относится как раз к этому случаю и имеет многочисленные приложения к исследованию экстремальных задач на специальных классах однолистных аналитических функций.

Теорема 2.7. *Пусть* $0 < |z_0| = r < 1$ *и фиксировано. Тогда множество значений функционала*

$$J(h) = \{h(z_0), z_0 h'(z_0)\}$$

на классе $\mathcal{C}$ представляет собой компактное, выпуклое множество $\mathcal{M}(z_0)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$. При этом $\mathcal{M}(z_0) = \mathcal{M}(r)$ и

$$\mathcal{M}(r) = \left\{ (\xi_0, \xi_1) : \xi_0 = \frac{1+\omega}{1-\omega}\,, \right.$$
$$\left. \xi_1 = \frac{2}{(1-\omega)^2}\left[\omega + \frac{r^2 - |\omega|^2}{1-r^2}\eta\right],\ |\omega| \le r, |\eta| \le 1. \right\}$$

Граничные функции имеют вид

$$h(z) = \lambda\frac{1+ze^{i\theta_1}}{1-ze^{i\theta_1}} + (1-\lambda)\frac{1+ze^{i\theta_2}}{1-ze^{i\theta_2}}, \tag{2.18}$$

где $\lambda \ge 0$ и θ_k, $k = 1, 2$, – произвольные вещественные числа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathcal{C}$ является выпуклым компактным подмножеством в пространстве всех аналитических функций в единичном круге, а оператор дифференцирования линейный и непрерывный, то $\mathcal{M}(z_0)$ – выпуклое компактное подмножество в пространстве $\mathbb{C}^2$. Поскольку в классе $\mathcal{C}$ действует автоморфизм $h \leftrightarrow h_\varepsilon$, где $h_\varepsilon(z) = h(\varepsilon z)$, то $J(h_\varepsilon(z_0)) = J(h(\varepsilon z_0))$ и, значит, $\mathcal{M}(z_0) = \mathcal{M}(\varepsilon z_0) = \mathcal{M}(r)$.

Так как любая функция класса Каратеодори представима в виде $h(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$, где $\varphi(z)$ – функция из леммы Шварца, то в силу леммы Шварца, $\xi_0 = \frac{1+\omega}{1-\omega} : |\omega| \le r$. Пусть теперь в представлении $h(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию $\varphi(r) = \omega$, $|\omega| \le r$. Тогда функция

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z) - \omega}{1 - \bar{\omega}\varphi(z)} \cdot \frac{1 - rz}{z - r}$$

также голоморфна в единичном круге и $|\varphi_1(z)| < 1$ при $|z| < 1$. При этом

$$\varphi_1(0) = \frac{\omega}{r}, \quad \varphi_1(r) = \frac{1-r^2}{1-|\omega|^2}\varphi'(r).$$

Из леммы Шварца в инвариантной форме следует, что

$$\left|\frac{\omega/r - \varphi_1(r)}{1 - \varphi_1(r)\bar{\omega}/r}\right| \le r.$$

Решая последнее неравенство и учитывая, что $h'(r) = \frac{2\varphi'(r)}{(1-\varphi(r))^2}$, мы завершаем описание множества $\mathcal{M}(z_0)$. □

Приведенное выше подход к доказательству теоремы 2.6 восходит к Шуру [410], и получил глубокое развитие в работе В.В. Горяйнова [109].

В следующих теоремах функцию Φ, заданную в области $\{(\zeta, w) : \operatorname{Re}\zeta > 0,\ |w| < \infty\}$, будем считать вещественной, конечной и при любом фиксированном ζ достигающей своей точной верхней и точной нижней грани в любом круге на его окружности.

Теорема 2.8. [187]. *Пусть* $0 < r < 1$ *и*

$$I = \operatorname{extr}_{f\in\mathcal{C}} \operatorname{extr}_{|z|=r} \Phi(f(z), zf'(z)).$$

Тогда I *достигается на функциях вида* (2.18) *и при этом*

$$I = \operatorname{extr}_{\zeta} \operatorname{extr}_{w} \Phi(\zeta, w),$$

где ζ *изменяется в круге* $|\zeta - a| \le b < a$ w, *при фиксированном* ζ, – *на окружности*

$$\left| w - \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1) \right| = \frac{1}{2}(b^2 - |\zeta - a|^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, по теореме 2.7, все экстремальные функции имеют вид

$$f(z) = \lambda \frac{1 + ze^{i\theta_1}}{1 - ze^{i\theta_1}} + (1 - \lambda)\frac{1 + ze^{i\theta_2}}{1 - ze^{i\theta_2}}, \tag{2.19}$$

где $\lambda \ge 0$ и θ_k, $k = 1, 2$, – произвольные вещественные числа. Пусть точка $z = re^{i\varphi} \in D$ и фиксирована. Тогда множество значений функции (2.19), когда параметры λ и θ_k изменяются в указанных выше областях, представляет собой замкнутый круг $\zeta = a(r) + b(r)\nu e^{i\alpha}$, где ν – произвольный параметр из сегмента $[0, 1]$ и $\alpha \in [0, 2\pi]$. При этом

$$\nu e^{i\alpha} = \lambda e^{i\vartheta_1} + (1 - \lambda)e^{i\vartheta_2} \tag{2.20}$$

и

$$\vartheta_k = \arcsin \frac{\sin(\varphi + \theta_k)}{a - b\cos(\varphi + \theta_k)}\,. \tag{2.21}$$

Замечая, что

$$\frac{2z}{(1-z)^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right],$$

находим, что множество значений для $2zf'(z)$ на семействе (2.19) имеет вид

$$2zf'(z) = (a(r) + b(r)\nu e^{i\alpha})^2 - 1 + b(r)(1 - \nu^2)e^{i\beta},$$

где $\beta \in [0, 2\pi)$, причем

$$\beta = \vartheta_1 + \vartheta_2 - \pi. \tag{2.22}$$

Таким образом, это множество при фиксированном значении $\zeta = a(r) + b(r)\nu e^{i\alpha}$ представляет собой окружность, указанную в формулировке теоремы. □

Заметим, что формулы (2.20) – (2.22), устанавливающие связь между старыми и новыми параметрами, будут использованы нами в главе 4 при определении экстремалей в общей задаче искажения и вращения при конформных отображениях единичного круга.

Параметризацию множества $\mathcal{M}(z_0)$ в форме, данной В.А. Зморовичем, можно вывести и из теоремы 2.7. Для этого положим

$$\frac{1+\omega}{1-\omega} = a + b\nu e^{i\alpha},$$

где

$$a = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \;\; b = \frac{2r}{1-r^2}, \;\; 0 < \nu \leq 1, \alpha \in [0, 2\pi),$$

и заметим, что

$$\frac{2\omega}{(1-\omega)^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^2 - 1\right].$$

Тогда

$$\mathcal{M}(r) = \left\{(\xi_0, \xi_1) : \xi_0 = a + b\nu e^{i\alpha}, \;\; \xi_1 = \frac{1}{2}[(a + b\nu e^{i\alpha})^2 - 1 + b^2(1-\nu^2)e^{i\beta}], \right\} \tag{2.23}$$

где $\nu \in [0, 1], \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$.

Действительно, в терминах новых параметров

$$\frac{2}{|1-\omega|^2} \cdot \frac{r^2 - |\omega|^2}{1-r^2} = \frac{1}{2}\, b^2(1-\nu^2).$$

Остается проверить это тождество. Так как

$$\operatorname{Re} \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} = a + b\nu\cos\alpha,$$

то

$$\frac{2}{|1-\omega|^2} \cdot \frac{r^2 - |\omega|^2}{1-r^2} = (a + b\nu\cos\alpha)\frac{r^2 - |\omega|^2}{1-|\omega|^2}\frac{2}{1-r^2}\,.$$

Подставляя

$$|\omega| = \left| \frac{a - 1 + b\nu e^{i\alpha}}{a + 1 + b\nu e^{i\alpha}} \right|,$$

и выполняя элементарные вычисления находим, что

$$(a + b\nu \cos\alpha) \frac{r^2 - |\omega|^2}{1 - |\omega|^2} \frac{2}{1 - r^2} = \frac{1}{2} b^2 (1 - \nu^2),$$

завершая, тем самым, проверку.

В главе 4, при исследовании экстремальных задач на классе S, нам потребуется следующий результат.

Теорема 2.9. *Пусть на классе $\mathcal{C}$ задан функционал*

$$I(f) = \Phi(f(r), f'(0)), \tag{2.24}$$

где $r \in (0, 1)$ и фиксировано, а функция $\Phi(\zeta, w)$ обладает теми же свойствами, что и в теореме 2.8. *Тогда*

$$\operatorname{extr}_{f \in \mathcal{C}} I(f) = \operatorname{extr}_{\zeta} \operatorname{extr}_{w} \Phi(\zeta, w), \tag{2.25}$$

причем ζ изменяется в круге $\{\zeta : |\zeta - a| \le b\}$, а область изменения w при фиксированном ζ есть окружность с центром в точке $|\zeta - 1|^2/(b\operatorname{Re}\zeta)$ и радиусом $(b^2 - |\zeta - a|^2)/(b\operatorname{Re}\zeta)$. Здесь $a = \frac{1+r^2}{1-r^2}$ и $b = \frac{2r}{1-r^2}$. Все экстремальные функции имеют вид (2.18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z) \in \mathcal{C}$, z_0 – фиксированная точка круга D и θ – произвольное число из сегмента $[0, 2\pi]$. Легко видеть, что функция

$$h(z) = \frac{f(\zeta(z)) - i\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Re} f(z_0)},$$

где

$$\zeta(z) = \frac{ze^{i\theta} + z_0}{1 - \bar{z}_0 z e^{i\theta}},$$

также принадлежит классу $\mathcal{C}$. Поскольку имеет место формула обращения

$$f(z) = \frac{h\left(e^{-i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}z}\right) - i\operatorname{Im} h(-z_0 e^{-i\theta})}{\operatorname{Re} h(-z_0 e^{-i\theta})},$$

то

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{extr}_{f \in \mathcal{C}} \Phi(f(r),\, f'(0)) \\ &= \operatorname{extr}_{h \in \mathcal{C}} \Phi\left(\frac{1 - i\operatorname{Im} h(r)}{\operatorname{Re} h(r)},\ \frac{(r^2 - 1)h'(r)}{\operatorname{Re} h(r)} \right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

По теореме 2.8,

$$I = \operatorname{extr}_{\zeta'} \operatorname{extr}_w \Phi \left(\frac{1 - i\operatorname{Im}\zeta'}{\operatorname{Re}\zeta'},\ \frac{(r^2-1)w}{r\operatorname{Re}\zeta'} \right), \tag{2.27}$$

где ζ' и w изменяются в областях, указанных в теореме 2.8. Остается выполнить в (2.27) замену переменной ζ' на ζ по формуле

$$1 - i\operatorname{Im}\zeta' = \zeta \operatorname{Re}\zeta'$$

и заметить, что это преобразование переводит круг $|\zeta - a| \le b$ в себя. Заключение о виде экстремальных функций следует из теоремы 2.7. $\square$

2.5. Области значений функционалов и геометрические свойства конформных отображений

Следующие параграфы посвящены исследованию геометрических свойств конформных отображений единичного круга на звездообразные и выпуклые области.

Пусть $f(z) \in S^*$. При отображении круга D функцией $f(z) \in S^*$ образом окружности $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \le \pi$, радиуса r, $0 < r < 1$, является некоторая аналитическая кривая $L(f, r)$, которую принято называть линией уровня функции $f(z)$. По теореме о росте однолистной функции, см. §1.3, эта кривая принадлежит кольцу

$$K_r : R_{\min}(r) \le |w| \le R_{\max}(r),$$

где

$$R_{\min}(r) = \frac{r}{(1+r)^2}\,, \quad R_{\max}(r) = \frac{r}{(1-r)^2}\,.$$

Дуга линии уровня называется выпуклой, если при непрерывном движении вдоль нее в положительном направлении касательная вращается против часовой стрелки. С помощью функции

$$Q(f, z) = 1 + \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

необходимому и достаточному условию принадлежности точки $w_0 = f(z_0)$, $|z_0| = r$, выпуклой дуге линии уровня $L(f, r)$ можно придать следующий вид: $Q(f, z_0) > 0$ (ср. [105], с. 166). Если же $Q(f, z_0) < 0$, то точка w_0 принадлежит вогнутой дуге линии уровня.

Уже достаточно хорошо изучен вопрос о выпуклости дуг линий уровня $L(f,r)$, $f \in S^*$, при малых значениях r. Так, например, известно, что если $r \in (0, r_c)$, $r_c = 2 - \sqrt{3}$, то $L(f,r)$ - выпукла, какова бы ни была функция $f(z)$ класса S^*. При $r > r_c$ поведение дуг линий уровня становится более сложным. Тем не менее, для таких r, на основании знания областей значений определенных комплекснозначных функционалов, заданных на классе S^*, удается заметно увеличить информацию о геометрических свойствах линий уровня.

В данном параграфе находится область значений функционала

$$I(f) = \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} + iQ(f,z),$$

$z \in D$ и фиксировано, на классе S^*, см. теорема 2.11, и, в качестве одного из приложений этого результата к изучению геометрических свойств линий уровня, доказываются теоремы, устанавливающие связь между значениями $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ и выпуклыми (вогнутыми) дугами $L(f,r)$, $f \in S^*$. Здесь же приведены результаты, относящиеся к взаимному росту функционалов $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ и $Q(f,z)$ на классе S^*.

Отметим, что в 1973 году Мокану и Рид [297] применили теорему 2.10 для решения проблемы α - выпуклости в классе S^*.

В §2.6 находится область значений системы функционалов

$$P_n(f) = J_n\left(|f(z)|,\ \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}\right),\ \ n = 1, 2,$$

$z \in D$ и фиксировано. Здесь $J_n(u,v)$ - непрерывно дифференцируемые вещественные функции в плоской области, образованной точками $|f(z)| + i\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$, когда $f(z)$ пробегает весь класс S^*. Это позволяет, с одной стороны, привести теоремы о взаимном росте некоторых функционалов на классе S^* и его подклассах, с другой стороны, используя результаты §2.5, установить те части кольца K_r, в которых любая дуга линии уровня $L(f,r)$, $f \in S^*$, является выпуклой. В §2.7 доказано, что только и лишь только в кольце

$$\frac{1+r^2}{2(1+r)^2} R_{\max}(r) \le |w| \le R_{\max}(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$$

при произвольно фиксированном $r \in (r_c, 1)$ линия уровня $L(f,r)$ при всех $f \in S^*$ имеет выпуклые дуги.

Ранее, в работе [30] И.Е. Базилевич и Г.В. Корицкий доказали теорему: существует абсолютная константа α_c, $0.333\ldots < \alpha_c, 0.511\ldots$, не

зависящая от r, такая, что в кольце $\alpha R_{\max}(r) \le |w| \le R_{\max}(r)$ дуги линий уровня $L(f,r)$ любой функции $f \in S$ будут выпуклыми. Но имеется такое $r < 1$ и такая функция $f(z)$ класса S, что в более широком кольце $(\alpha-\varepsilon)R_{\max}(r) \le |w| \le R_{\max}(r)$ на $L(f,r)$ найдется невыпуклая дуга.

В §2.7 установлено точное значение абсолютной константы α_c на классе S^*, которое оказалось равным $1/3$.

Сформулируем первую основную теорему.

Теорема 2.10. *Область значений $\Omega(z)$ комплекснозначного функционала*

$$I(f) = \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} + i\left(1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right), \tag{2.28}$$

определенного на классе S^*, z принадлежит единичному кругу D и фиксировано, представляет собой замкнутое множество, ограниченное непрерывной кривой Γ^+ и отрезком прямой Γ^-, соединяющим концевые точки Γ^+. Пусть $a = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}$, тогда при всех $0 < |z| = r < 1$ кривая Γ^+ состоит из трех дуг Γ_k^+, $k = 1,2,3$:

а) $\Gamma_1^+ : I = x + i\Phi_1(x)$, *если* $\frac{1-r}{1+r} \equiv R_1(r) \le x \le \xi_1$, *где*

$$\Phi_1(x) = \frac{x}{2}\left(3 - \frac{1}{2ax-1}\right), \tag{2.29}$$

а ξ_1 – единственный положительный корень уравнения

$$(2ax-1)^{3/2} = x; \tag{2.30}$$

б) $\Gamma_2^+ : I = x + i\Phi_2(x)$, *если* $\xi_1 \le x \le \xi_2 = (a^2+3)^{1/2} - a$, *где*

$$\Phi_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{y_0^3 - (2ax-1)y_0 + x}{2y_0^2} \tag{2.31}$$

и y_0 – единственный положительный корень уравнения

$$y^3 + (2ax-1)y - 2x = 0; \tag{2.32}$$

в) $\Gamma_3^+ : I = x + i\Phi_3(x)$, *если* $\xi_2 \le x \le R_2(r) = \frac{1+r}{1-r}$, *где*

$$\Phi_3(x) = x - \frac{1}{x} + a. \tag{2.33}$$

Уравнение отрезка прямой Γ^- имеет вид

$$\Gamma^- : I = x + i(2x-a), \;\; R_1(r) \le x \le R_2(r). \tag{2.34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая связь между функциями классов $\mathcal{C}$ – Каратеодори и S^*, мы имеем

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = \operatorname{Re} h(z),$$

и

$$\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \operatorname{Re}\left(h(z) + \frac{zh'(z)}{h(z)}\right),$$

и значит множество $\Omega(z)$ совпадает с множеством значений функционала

$$I_h = \operatorname{Re} h(z) + i\operatorname{Re}\left(h(z) + \frac{zh'(z)}{h(z)}\right)$$

на классе $\mathcal{C}$ - Каратеодори. Для решения последней задачи мы применим теорему 2.8, согласно которой, множество значений функционала параметризуется следующим образом:

$$\Omega(z) = \Omega(|z|) : \operatorname{Re}\left(a + b\nu e^{i\alpha}\right)$$

$$+i\operatorname{Re}\left[\frac{3}{2}(a + b\nu e^{i\alpha}) + \frac{b^2(1-\nu^2)e^{i\beta} - 1}{2(a + b\nu e^{i\alpha})}\right],$$

где $0 \le \nu \le 1$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$.

Таким образом, поставленная задача свелась к задаче на условный экстремум о нахождении максимума и минимума функции трех вещественных переменных

$$Q(r; \nu, \alpha, \beta) = \operatorname{Re}\left[\frac{3}{2}(a + b\nu e^{i\alpha}) + \frac{b^2(1-\nu^2)e^{i\beta} - 1}{2(a + b\nu e^{i\alpha})}\right] \tag{2.35}$$

при условии, что

$$\operatorname{Re}\left(a + b\nu e^{i\alpha}\right) = x \tag{2.36}$$

и фиксировано в промежутке $[R_1(r), R_2(r)]$.

Решение задачи о максимуме. Из (2.36) следует, что

$$\nu\cos\alpha = \frac{x-a}{b}.$$

Значит, во-первых, параметр ν может изменяться от $\frac{|x-a|}{b|}$ до 1, во-вторых,

$$y(\nu) = |a + b\nu\varepsilon^{i\alpha}| = (b^2\nu^2 + 2ax - a^2)^{1/2}. \tag{2.37}$$

Из (2.37) непосредственно следует, что

$$2ax - 1 \geq R_1^2(r) > 0 \tag{2.38}$$

при любом r из $(0,1)$ и любом допустимом значении параметра x. Учитывая только что сказанное, имеем

$$Q = \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}\,\Phi(x,\nu,\alpha,\beta), \tag{2.39}$$

где

$$\Phi = -\frac{x}{y^2} + b^2(1-\nu^2)\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\beta}}{a + b\nu e^{i\alpha}}\,. \tag{2.40}$$

Из элементарных геометрических соображений следует, что

$$\Phi^{(1)} \equiv \max_{\beta}\Phi = \Phi(x,\nu,\alpha,\arg(a + b\nu e^{i\alpha})). \tag{2.41}$$

Выражая ν через y, после простых преобразований с учетом того, что $a^2 - b^2 \equiv 1$, получаем

$$\Phi^{(1)}(y) = -\frac{y^3 - (2ax-1)y + x}{y^2}\,. \tag{2.42}$$

Так как $(\Phi^{(1)})'_\nu = (\Phi^{(1)})'_y \cdot y'_\nu$ и $y'_\nu > 0$ при $x \neq a$, то стационарные точки определяются из уравнения

$$\varphi(y) = y^3 + (2ax-1)y - 2x = 0, \tag{2.43}$$

определенного на промежутке $[x, (2ax-1)^{1/2}]$. В силу неравенства (2.38), функция $\varphi(y)$ монотонно возрастает при любом допустимом значении параметра x и любом $r \in (0,1)$. Пусть $y_0 \in [x, (2ax-1)^{1/2}]$ – корень уравнения (2.43). Покажем, что в этой точке функция $\Phi^{(1)}(y)$ имеет максимум. Действительно,

$$(\Phi^{(1)})'(y) = -\frac{\varphi(y)}{y^3} \tag{2.44}$$

и, стало быть,

$$(\Phi^{(1)})''(y_0) = -\frac{\varphi'(y_0)}{y_0^3} < 0. \tag{2.45}$$

Найдем те значения параметра x из $[R_1(r), R_2(r)]$, для которых уравнение (2.43) не имеет решения на промежутке $[x, (2ax-1)^{1/2}]$.

На левом конце области определения функция $\varphi(y)$ принимает значение, равное $x^3 + (2ax - 3)x$, которое неотрицательно при $x \geq \xi_2$, где

$$\xi_2 = (a^2 + 3)^{1/2} - a, \tag{2.46}$$

и, в силу монотонности, $\varphi(y)$ сохраняет положительный знак на промежутке $[x, (2ax - 1)^{1/2}]$ при любом $x > \xi_2$. Из (2.44) следует, что если $\varphi(y) > 0$, то $(\Phi^{(1)})'(y) < 0$, то есть при $x \in [\xi_2, R_2(r)]$

$$\Psi_3(x) = \max_y \Phi^{(1)}(y) = \Phi^{(1)}(x) = 2a - x - \frac{2}{x}\,. \tag{2.47}$$

Легко убедиться в том, что при любом $r \in (0, 1)$ точка ξ_2 принадлежит промежутку $[R_1(r), R_2(r)]$.

На правом конце области определения функция $\varphi(y)$ принимает значение, равное

$$\psi(x) = 2(2ax - 1)^{3/2} - 2x.$$

Функция $\psi(x)$ монотонно возрастает на $[R_1(r), R_2(r)]$ при любом $r \in (0, 1)$. На самом деле, $\psi'(x) = 6a(2ax-1)^{1/2}-2 > 0$, если $(2ax-1)^{1/2} > \frac{1}{3a}$, а последнее неравенство имеет место при любом допустимом x и r. Действительно, в силу (2.42) $(2ax - 1)^{1/2} \geq R_1(r)$ и нетрудно проверить, что при любых $r \in (0, 1)$ имеет место неравенство $R_1(r) > 1/3a$.

Замечая, что $\psi(R_1(r)) < 0$, а $\psi(R_2(r)) > 0$ при любом $r \in (0, 1)$, приходим к выводу, что функция $\psi(x)$ обращается в нуль в единственной точке $\xi_1 \in [R_1(r), R_2(r)]$, при любом $r \in (0, 1)$.

Отметим также, что $\xi_1 < a$ при всех $0 < r < 1$. Действительно, так как $a > 1$, то $(a^2 + b^2)^{3/2} > a$ и, значит, $\psi(a) = 2(2a^2 - 1)^{3/2} - 2a > 0$ при любом $r \in (0, 1)$.

Итак, если $x \in [R_1(r), \xi_1]$, то функция $\phi(y)$ не положительна в точке $y = (2ax - 1)^{1/2}$ и, в силу монотонности $\phi(y)$, уравнение (2.43) не имеет решения на $[x, (2ax - 1)^{1/2}]$ Из (2.44) следует, что если $\phi(y) < 0$, то $(\Phi^{(1)})'(y) > 0$. Следовательно,

$$\Psi_1(x) = \max_y \Phi^{(1)}(y) = \Phi^{(1)}((2ax - 1)^{1/2}) = -\frac{x}{2ax - 1} \tag{2.48}$$

при всех $x \in [R_1(r), \xi_1]$ и любом $0 < r < 1$.

Если $x \in [\xi_1, \xi_2]$, то очевидно, при любом фиксированном r из $(0, 1)$ уравнение (2.43) имеет единственный корень y_0 на $[x, (2ax-1)^{1/2}]$. Нетрудно подсчитать, что при $x = \xi_1$ $y_0 = (2a\xi_1 - 1)^{1/2}$, а если $x = \xi_2$, то $y_0 = \xi_2$.

Таким образом, если $x \in [\xi_1, \xi_2]$, то

$$\Psi_2(x) = \max_y \Phi^{(1)}(y) = \Phi^{(1)}(y_0) \tag{2.49}$$

при любом заданном r из $(0,1)$ и

$$\Psi_1(\xi_1) = \Psi_2(\xi_1), \;\; \Psi_2(\xi_2) = \Psi_3(\xi_2).$$

Подставляя формулы (2.47) – (2.49) в (2.39), получим уравнения для трех дуг Γ_k^+, $r = 1,2,3$, составляющих непрерывную кривую Γ^+. Таким образом, задача о максимуме решена.

Решение задачи о минимуме. Как и прежде, из геометрических соображений следует, что

$$\Phi^{(2)} \equiv \min_{\beta} \Phi = \Phi(x, \nu, \alpha, \pi + \arg(a + b\nu e^{i\alpha})).$$

Учитывая, что $\nu \cos\alpha = \frac{x-a}{b}$, а также (2.37) и тождество $a^2 - b^2 = 1$, имеем

$$\Phi^{(2)}(y) = \frac{y^3 - (2ax-1)y - x}{y^2},$$

где, как и прежде $y = |a + b\nu e^{i\alpha}|$ и $y \in [x, (2ax-1)^{1/2}]$.

Так как при любом r из $(0,1)$

$$(\Phi^{(2)})'(y) = \frac{y^3 + (2ax-1)y + 2x}{y^3} > 0,$$

то

$$\Psi(x) = \min_{y} \Phi^{(2)}(y) = \Phi^{(2)}(x) = x - 2a.$$

Случай, когда $x = a$ ($y'(\nu) = 0$ при $\nu = 0$) охватывается приведенной схемой доказательства.

Подставляя последнее выражение в (2.39), получим нижнюю оценку для функции Q при фиксированном значении x, линейную относительно x.

Покажем, что дуги Γ^+ и Γ^- образуют замкнутую кривую Жордана и, тем самым, мы завершим доказательство теоремы. Действительно, как это было отмечено ранее, дуга Γ^+, состоящая из трех непрерывно - дифференцируемых дуг Γ_k^+ оказывается непрерывной. Дуга Γ^- также непрерывна. Нетрудно проверить, что $\Psi_1(R_1(r)) = \Psi(R_1(r))$ и $\Psi_3(R_2(r)) = \Psi(R_2(r))$. Значит $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ образует непрерывную замкнутую кривую. Остается заметить, что при $x \in [R_1(r), R_2(r)]$ пресечение $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \emptyset$. □

Замечание 1. Дуга Γ^+ – непрерывно дифференцируема.

Действительно, существование непрерывной производной в точках Γ_k^+ очевидно. Остается показать непрерывную дифференцируемость Γ^+ в точках ξ_1 и ξ_2. Для этого сначала покажем, что

$$\Phi_1'(\xi_1) = \Phi_2'(\xi_1), \;\; \Phi_2'(\xi_2) = \Phi_3'(\xi_2).$$

Согласно формулам (2.29), (2.31) и (2.32)

$$\Phi_1'(\xi_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2a\xi_1 - 1)^2}\,,$$

$$\Phi_2'(\xi_1) = \frac{3}{2} + \frac{2ay_0(\xi_1) - 1}{2y_0^2(\xi_1)}\,.$$

Так как при $x = \xi_1$, $y_0 = (2ax - 1)^{1/2,}$ то

$$\Phi_1'(\xi_1) - \Phi_2'(\xi_1) = -\frac{a[(2a\xi_1 - 1)^{3/2} - \xi_1]}{(2a\xi_1 - 1)^2} = 0,$$

поскольку ξ_1 – корень уравнения (2.28). Далее из (2.31), (2.32) и (2.33) следует, что

$$\Phi_2'(\xi_2) = \frac{3}{2} + \frac{2ay_0(\xi_2) - 1}{2y_0^2(\xi_2)}\,,$$

$$\Phi_3'(\xi_2) = 1 + \frac{1}{\xi_2^2}\,.$$

Так как при $x = \xi_2$, $y_0 = \xi_2$, то

$$\Phi_2'(\xi_2) - \Phi_3'(\xi_2) = \frac{\xi_2^2 + 2a\xi_2 - 3}{2\xi_2^2} = 0,$$

поскольку ξ_2 – корень уравнения $x^2 + 2ax - 3 = 0$.

Выясним геометрические свойства граничных кривых.

Легко проверить выполнение неравенств $\Phi_k'(x) > 0$, $\Phi_k''(x) < 0$, $k = 1, 3$, при любом фиксированном r из $(0, 1)$. Нетрудно убедиться и в том, что при любом $r \in (0, 1)$ выполняются неравенства $\Phi_2'(x) > 0$, $\Phi_2''(x) > 0$. На самом деле,

$$\Phi_2'(x) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} y_x',$$

а так как $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(y_0) = 0$, то, имея в виду неравенство (2.38), получим, что $\Phi_2'(x) > 0$. Дифференцируя функцию $\Phi_2(x)$ второй раз, находим, что

$$\Phi_2''(x) = \frac{4(1 - ay_0)^2}{y_0^3 \varphi'(y_0)} > 0,$$

где $\varphi(y)$ определяется по формуле (2.43).

Таким образом, функции $\Phi_k(x)$, $k = 1, 3$, – монотонно возрастающие и, стало быть дуги Γ_k^+, $k = 1, 3$, – выпуклые. Функция $\Phi_2(x)$ – также монотонно возрастающая и, следовательно, дуга Γ_2^+ – вогнутая. □

Замечание 2. Дуга Γ_3^+ не имеет точек пересечения с вещественной осью ни при каких $r \in (0, 1)$, т.к. функция $\Phi_3(x)$ – монотонно возрастающая и $\Phi_3'(\xi_2) > 0$ при любом r из $(0, 1)$.

Обозначим через x_0 точку пересечения дуги Γ_1^+ с вещественной осью, если такая точка существует.

Замечание 3. Дуга Γ_1^+ пересекает вещественную ось в точке $x_0 = 2/3a$, если

$$r \in \left(2 - \sqrt{3},\ \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}}\right),$$

и не имеет точек пересечения при других r из $(0, 1)$.

Для доказательства достаточно решить систему неравенств:

$$R_1(r) = \frac{1-r}{1+r} < \frac{2}{3a} < \xi_1,$$

где ξ_1 – корень уравнения $\psi(x) = (2ax - 1)^{3/2} - x = 0$. Левое неравенство имеет место при $r > 2 - \sqrt{3}$. Так как функция $\psi(x)$ – монотонно возрастающая, то при $x \in [R_1(r), \xi_1]$, $\psi(x) \le 0$. Таким образом, для выполнения неравенства $x_0 = \frac{2}{3a} \le \xi_1$ достаточно проверить, что $\psi(x_0) \le 0$. Действительно $\frac{1}{27} \le \frac{4}{9a^2}$, если $1 < a \le 2\sqrt{3}$, и, следовательно, если $0 < r < \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}}$.

Обозначим через x_1 точку пересечения дуги Γ_2^+ с вещественной осью, если такая точка существует.

Замечание 4. Дуга Γ_2^+ пересекает вещественную ось в точке x_1, если

$$r \in \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}},\ 1\right)$$

и не имеет точек пересечения при других r из $(0, 1)$. Здесь x_1 – единственный положительный корень уравнения $\Phi_2(x) = 0$.

Обозначим через x_3 точку пересечения дуги Γ^- с вещественной осью, если такая точка существует.

Замечание 5. Дуга Γ^- пересекает вещественную ось в точке $x_3 = a/2$, если $r \in (2-\sqrt{3},\, 1)$, и не имеет точек пересечения при других r из $(0, 1)$.

Приведем некоторые следствия теоремы 2.10.

Следствие 2.10.1. *На классе S^* при заданных z, $0 < |z| = r < 1$, и $\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = x$, для $\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ справедливы точные оценки:*

$$1 + \operatorname{Re}\frac{z\,f''(z)}{f'(z)} \le \begin{cases} T_1(x), & \text{если } \frac{1-r}{1+r} \le x \le \xi_1, \\ T_2(x), & \text{если } \xi_1 \le x \le (a^2+3)^{1/2} - a, \\ T_3(x), & \text{если } (a^2+3)^{1/2} - a \le x \le \frac{1+r}{1-r} \end{cases} \tag{2.50}$$

и

$$1 + \operatorname{Re}\frac{z\,f''(z)}{f'(z)} \ge 2x - a. \tag{2.51}$$

Здесь $T_1(x) = \frac{x}{2}\left(3 - \frac{1}{2ax-1}\right)$, $T_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{y_0^3 - (2ax-1)y_0 + x}{2y_0^2}$, где y_0 – единственный положительный корень уравнения $y^3 + (2ax-1)y - 2x = 0$; $T_3(x) = x - \frac{1}{x} + a$; ξ_1 – единственный положительный корень уравнения $(2ax-1)^{3/2} = x$.

Следствие 2.10.2. *В любой точке z, $0 < |z| = r < 1$, на классе S^* справедливы точные оценки:*

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \le 2\frac{1+r^2}{(1-r)^2}\left[\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1+r}{1-r}\right] + \frac{1+4r+r^2}{1-r^2}, \tag{2.52}$$

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \le \frac{3(1-r)^4 + (1+r)^4}{2(1-r)^4}\left[\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1+r}{1-r}\right] + \\ + \frac{1-4r+r^2}{1-r^2}, \tag{2.53}$$

причем знак равенства имеет место только для функций Кёбе

$$f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2},$$

$|\eta| = 1$.

С геометрической точки зрения неравенства (2.52) и (2.53) равносильны указанию для области Ω мажорантной полуплоскости, обладающей тем свойством, что ее граница проходит через одну из угловых точек соединения Γ^+ и Γ^- в направлении касательной в этой точке к Γ^+.

Пользуясь мажорантными областями, можно было бы установить ряд других точных оценок на классе S^*. Для иллюстрации этого факта дадим способ получения точной верхней и точной нижней границ вещественнозначного функционала

$$I(f) = m\left(1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + n\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

на классе S^* при произвольно фиксированных вещественных m и n. Пусть область Ω значений функционала $I(f)$ принадлежит комплексной плоскости $u + iv$. Среди параллельных прямых

$$mv + nu + c = 0,$$

имеющих общие точки с Ω, выберем опорные прямые для области Ω. Тем самым найдутся постоянные c_1 и c_2. Пусть, для определенности, $c_1 < c_2$ и $m > 0$, тогда, очевидно,

$$c_1 \le I(f) \le c_2.$$

Теперь, на основании теоремы 2.10, сформулируем ряд предложений, устанавливающих связь между значениями $\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}$ и свойствами дуг линий уровня $L(f, r)$, $f \in S^*$, быть выпуклыми или вогнутыми.

В дополнение к тому факту, что линия уровня $L(f, r)$ любой функции $f(z)$ класса S^* будет выпуклой при $0 < r < 2 - \sqrt{2}$, имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.11. *Для каждого r из $\left(2 - \sqrt{3},\ \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}}\right)$ дуга линии уровня функции $f(z) \in S^*$ будет вогнутой, как только*

$$R_1(r) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le \alpha_c^1(r) R_1(r), \tag{2.54}$$

где

$$\alpha_c^1(r) = \frac{2(1+r)^2}{3(1+r^2)}\,. \tag{2.55}$$

Но для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f(z) \in S^*$, что некоторая дуга ее линии уровня не будет вогнутой, хотя на ней

$$R_1(r) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le (\alpha_c^1(r) + \varepsilon) R_1(r).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с замечанием 3, при r из промежутка $\left(2-\sqrt{3},\ \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}}\right)$, граничная кривая Γ^+ области Ω значений функционала (2.28) пересекает вещественную ось в точке $x_0 = 2/3a$. Следовательно, для таких значений r при $x \in [R_1(r), x_0]$ выполняется неравенство

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \le 0,$$

т.е. дуги линий уровня $L(f,r)$ любой функции $f(z) \in S^*$ должны быть вогнутыми. Очевидно, $\alpha_c^1(r) = x_0/R_1(r)$. □

Теорема 2.12. *Для каждого r из $\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}},\ 1\right)$ дуга линии уровня функции $f(z) \in S^*$ будет вогнутой, как только*

$$R_1(r) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le \alpha_c^2(r)R_1(r), \tag{2.56}$$

где

$$\alpha_c^2(r) = \gamma\frac{1+r}{1-r}. \tag{2.57}$$

Здесь γ – единственный на $[\xi_1, \xi_2]$ корень уравнения

$$3y_0^2x = y_0^3 - (2ax-1)y_0 + x, \tag{2.58}$$

а y_0, в свою очередь, определяется как единственный положительный корень уравнения

$$y^3 + (2ax-1)y - 2x = 0. \tag{2.59}$$

Но для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f(z) \in S^*$, что некоторая дуга ее линии уровня не будет вогнутой, хотя на ней

$$R_1(r) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le (\alpha_c^2(r) + \varepsilon)R_1(r).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.11 с той лишь разницей, что при $\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}} < r < 1\right)$ граничная кривая Γ^+ пересекает вещественную ось в точке, лежащей на дуге Γ_2^+.

Теорема 2.13. *Для каждого r из $(2-\sqrt{3}, 1)$ дуга линии уровня функции $f(z) \in S^*$ будет выпуклой, как только*

$$\alpha_c^3(r)R_2(r) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le R_2(r), \tag{2.60}$$

где

$$\alpha_c^3(r) = \frac{1+r^2}{2(1+r)^2}\,. \tag{2.61}$$

Но для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f(z) \in S^*$, что некоторая дуга ее линии уровня не будет выпуклой, хотя на ней

$$(\alpha_c^3(r) - \varepsilon)R_2(r) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le R_2(r).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Граничная кривая Γ^- области Ω значений функционала (2.28) пересекает вещественную ось при $r \in (2-\sqrt{3},\,1)$ в точке $x_3 = a/2$. Стало быть, когда $x_3 < \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le R_2(r)$, выполняется неравенство

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > 0,$$

т.е. соответствующие дуги линии уровня $L(f,r)$ – выпуклые. Наконец,

$$\alpha_c^3 = \frac{x_3}{R_2(r)}\,.$$

□

Заметив, что $\beta_c = \sup_{r\in(r_c,1)}\alpha_c^3(r) = 1/3$, приходим к следующему заключению.

Существует абсолютная константа $\beta_c = 1/3$ и такая, что дуга линии уровня любой функции $f(z) \in S^*$ будет выпуклой, если на ней

$$\frac{1+r}{3(1-r)} \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le \frac{1+r}{1-r}\,. \tag{2.62}$$

Но для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r < 1$ и такая функция $f(z) \in S^*$, что некоторая дуга ее линии уровня уже не будет выпуклой, хотя на ней

$$\left(\frac{1+r}{3(1-r)} - \varepsilon\right) \le \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \le \frac{1+r}{1-r}\,.$$

Сформулируем вторую основную теорему.

Теорема 2.14. *Область значений $\Omega_1(z)$ комплекснозначного функционала*

$$I(f) = \ln\frac{|f(z)|}{|z|} + i\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,, \tag{2.63}$$

определенного на классе S^*, z *принадлежит единичному кругу* D *и фиксировано, представляет собой замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости* $I = I_1 + iI_2$, *ограниченное непрерывной кривой* C^+

$$I_1 = \ln \frac{I_2}{1-r^2}, \quad \frac{1-r}{1+r} \le I_2 \le \frac{1+r}{1-r}, \tag{2.64}$$

и отрезком прямой C^-

$$I_1 = \left(\frac{1-r^2}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} \right) I_2 + \ln \frac{1}{(1-r)^2} - \frac{(1+r)^2}{2r} \ln , \tag{2.65}$$

соединяющим концевые точки C^+.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как вместе с функцией $f(z)$ классу S^* принадлежат также функции $\eta f(\bar{\eta} z)$ при любом $|\eta| = 1$, то $\Omega_1(z) = \Omega_1(r)$, $r = |z|$. В силу интегрального представления функций класса S^*, область $\Omega_1(r)$ совпадает с множеством

$$\ln \frac{1}{1-r^2} + \int\limits_{|\tau|=1} \left(\ln \frac{1-r^2}{|1-\tau r|^2} + i \frac{1-r^2}{|1-\tau r|^2} \right) d\mu(\tau),$$

когда μ пробегает весь класс вероятностных мер, заданных на единичной окружности. А это означает, что $\Omega_1(r)$ совпадает с выпуклой оболочкой кривой C^+

$$\varphi(t) = \ln \frac{1}{1-r^2} + \ln \frac{1-r^2}{|1-e^{it}r|^2} + i \frac{1-r^2}{|1-e^{it}r|^2}, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Полагая

$$I_2 = \frac{1-r^2}{|1-e^{it}r|^2} ,$$

мы завершаем доказательство. □

Следствие 2.14.1. *На классе* S^* *при заданных* z, $0 < |z| = r < 1$, *и* $|f(z)|$ *для* $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ *справедливы точные оценки*

$$\frac{1-r^2}{r} |f(z)| \le \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \le 2r \frac{\ln \left[|f(z)| \frac{(1-r)^2}{r} \right]}{(1-r^2) \ln \frac{1+r}{1-r}} + \frac{1+r}{1-r} , \tag{2.66}$$

причем знаки равенства достигаются на функциях из семейства

$$f_{\text{extr}}(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta_1} z)^{\lambda} (1-e^{i\theta_2} z)^{2-\lambda}} , \tag{2.67}$$

зависящим от трех вещественных параметров: $0 \le \lambda \le 2$, $\theta_1 < \theta_2, 2\pi + \theta_1$.

Доказательство. Прямая $I_2 = \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ пересекает область Ω_1 по горизонтальному отрезку с концами, лежащими на C^+ и C^-. Абсциссы концов этого отрезка находятся из уравнений (2.64), (2.65) граничных кривых. □

Рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем доказательстве, устанавливаются ограничения на рост модуля функции класса S^* при фиксированном значении $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$.

Следствие 2.14.2. *На классе* S^* *при заданных* z, $0 < |z| = r < 1$, *и* $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ *для* $|f(z)|$ *справедливы точные оценки*

$$\left[\frac{r}{(1-r)^2}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\frac{(1+r)^2}{2r}}\right] \exp\left[\left(\frac{1-r^2}{2r}\ln\frac{1+r}{1-r}\right)\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \le$$

$$\le |f(z)| \le \frac{r}{1-r^2}\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad (2.68)$$

причем знак равенства достигается на функциях из семейства (2.67).

2.6. Геометрия выпуклых отображений

Опираясь на связь между звездообразными и выпуклыми однолистными аналитическими функциями, приведем два результата, относящихся к взаимному росту функционалов, определенных на классе S^c.

Теорема 2.15. *На классе* S^c *при заданных* z, $0 < |z| = r < 1$, *и* $|f'(z)|$ *для* $\operatorname{Re} \frac{z\,f''(z)}{f'(z)}$ *справедливы точные оценки*

$$(1-r^2)|f'(z)| \le 1 + \operatorname{Re}\frac{z\,f''(z)}{f'(z)} \le$$

$$\le 2r\frac{\ln\left[|f'(z)|(1-r)^2\right]}{(1-r^2)\ln\frac{1+r}{1-r}} + \frac{1+r}{1-r}. \quad (2.69)$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ принадлежит кассу S^c. Тогда функция $zf'(z) \in S^*$ и мы можем применить следствие 2.14.1.

Заметим, что знаки равенства в (2.69) достигаются на функциях из семейства

$$f(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^{2} (1 - e^{i\theta_k} z)^{-\lambda_k},$$

где $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi + \theta_1$. □

Оценки вида (2.69) тесно связаны с геометрическими свойствами конформных отображений единичного круга на выпуклые области. Приведем один пример.

Хорошо известно, что кривизна $K_r(f)$ линии уровня $L(r, f)$ при однолистных отображениях $w = f(z)$ в точке z определяется по формуле

$$K_r(f) = \frac{1 + \operatorname{Re} \frac{z\, f''(z)}{f'(z)}}{|z f'(z)|}\,.$$

В качестве приложения неравенств (2.69) мы получаем оценки кривизны линий уровня при отображении круга на выпуклые области в зависимости от коэффициента искажения отображения в исследуемой точке, а именно на классе S^c справедлива точная оценка

$$K_r(f) \leq 2\frac{\ln\left[|f'(z)|(1-r)^2\right]}{|f'(z)|(1-r^2)\ln\frac{1+r}{1-r}} + \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{r|f'(z)|}\,.$$

Напомним, что линия уровня $L(r, f)$ называется α – выпуклой, если на ней

$$1 + \operatorname{Re}\frac{z\, f''(z)}{f'(z)} > \alpha, \;\; 0 \leq \alpha < 1.$$

Теорема 2.16. *Для каждого фиксированного r, $0 < r < 1$, дуга линии уровня $L(f, r)$ любой функции класса S^c будет α – выпуклой, если на ней*

$$\frac{\alpha}{1-r^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}, \;\; 0 \leq \alpha < 1. \tag{2.70}$$

Но для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f(z) \in S^c$, что некоторая дуга ее линии уровня не будет α – выпуклой, хотя на ней

$$\frac{\alpha}{1-r^2} - \varepsilon \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (2.69) следует, что

$$1 + \operatorname{Re} \frac{z\, f''(z)}{f'(z)} \geq (1 - r^2)|f'(z)|.$$

Так как в классе S^c имеет место точное неравенство

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}\,,$$

то

$$1 + \operatorname{Re} \frac{z\, f''(z)}{f'(z)} \geq \frac{1-r}{1+r}\,.$$

Значит, если выполняется неравенство $\frac{1-r}{1+r} > \alpha$, т.е.

$$0 < r < r_{c\alpha} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,,$$

то линия уровня любой функции $f(z) \in S^c$ является α – выпуклой. Следовательно, теорема 2.16 дополняет информацию о поведении дуг линий уровня $L(r, f)$, $f(z) \in S^c$, при $r \in (r_{c\alpha}, 1)$.

2.7. О выпуклых дугах линий уровня

В этом параграфе мы приводим точное решение задачи И.Е. Базилевича и Г.В. Корицкого о выпуклых дугах линий уровня при конформных отображениях единичного круга на области, звездообразные относительно начала координат.

Теорема 2.17. *Для каждого фиксированного r, $2 - \sqrt{3} < r < 1$, дуга линии уровня $L(f, r)$ любой функции $f(z)$ класса S^*, находящаяся в кольце*

$$\alpha_c \frac{r}{(1-r)^2} \leq |w| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \tag{2.71}$$

где

$$\alpha_c = \frac{1+r^2}{2(1+r)^2}, \tag{2.72}$$

является выпуклой, но в более широком кольце $(\alpha_c - \varepsilon)\frac{r}{(1-r)^2} \leq |w| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$ для некоторой функции $f(z)$ класса S^* найдется невыпуклая дуга.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 2.10.1, на классе S^* имеет место точная оценка

$$1+\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\geq 2\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}-\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\,. \tag{2.73}$$

А так как, в силу неравенства (2.66),

$$\frac{1-r^2}{r}|f(z)|\leq \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,,$$

то

$$1+\operatorname{Re}\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\geq \frac{2(1-|z|^2)}{|z|}|f(z)|-\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\,. \tag{2.74}$$

Докажем, что оценка (2.74) – точная в классе S^*. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$f(z,t)=\frac{z}{1+2tz+z^2},\ \ -1\leq t\leq 1, \tag{2.75}$$

принадлежащих классу S^*. Нетрудно проверить, что в (2.74) для функций вида (2.75) при любом $t\in[-1,1]$ имеет место знак равенства. Действительно,

$$Q(f,r)=1+\operatorname{Re}\frac{rf''(r)}{f'(r)}=\frac{1-6r^2+r^4-2tr(1+r^2)}{(1-r^2)(1+2tr+r^2)}\,. \tag{2.76}$$

Обозначим $|f(r,t)|=r(1+2tr+r^2)^{-1}$ через x. Очевидно, когда $t\in[-1,1]$,

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq x\leq\frac{r}{(1-r)^2}\,.$$

Выразив t через x и подставив в (2.76), получим равенство, что и доказывает точность неравенства (2.74).

Из точного неравенства (2.74) следует, что $1+\operatorname{Re}\frac{r\,f''(r)}{f'(r)}>0$ для любой функции $f(z)$ класса S^*, как только

$$|f(z)|>\frac{r(1+r^2)}{2(1-r^2)^2}=\frac{1+r^2}{2(1+r)^2}\cdot\frac{r}{(1-r)^2}\,.$$

Очевидно, указанное кольцо выпуклости (2.71) является наилучшим. □

Так как

$$\sup_{r\in(r_c,1)}\alpha_c(r)=\frac{1}{3}\,,$$

то существует абсолютная константа $\alpha_c = 1/3$, и такая, что в кольце

$$\frac{1}{3}\frac{r}{(1-r)^2} \leq |w| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

дуга линии уровня $L(f,r)$ любой функции $f(z) \in S^*$ будет выпуклой. Указанная константа является точной, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r, 0 < r < 1$, и такая функция $f(z) \in S^*$, для которых некоторая дуга линии уровня в более широком кольце

$$(\frac{1}{3} - \varepsilon)\frac{r}{(1-r)^2} \leq |w| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

уже не выпукла.

Глава 3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ЛЁВНЕРА

Глава 3, которая является центральной в первой части книги, посвящена развитию параметрического метода Лёвнера и решению на этой основе общей проблемы искажения и вращения при конформных отображениях единичного круга.

Как уже отмечалось во введении, алгебраическая структура множества однолистных функций, заданных в области G, оказывается довольно сложной. Простые примеры показывают, что это множество, например, нелинейно и невыпукло. Вместе с тем, свойство однолистности инвариантно относительно операции композиции надлежащих отображений, что позволяет выделить соответствующие полугруппы конформных отображений и применить для их изучения алгебраические методы. Именно это свойство было положено К. Лёвнером в 1923 году в основу разработанного им метода параметрических представлений однолистных аналитических функций. Более того, как мы увидим ниже, на этом пути прослеживаются глубокие связи между однолистными аналитическими функциями в единичном круге и функциями касса $\mathcal{C}$ – Каратеодори.

3.1. Полугруппы конформных отображений

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех однолистных аналитических функций φ в круге D, удовлетворяющих условиям: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ и $|\varphi(z)| < 1$ при $z \in D$.

Очевидно, если φ_k, $k = 1, 2$, принадлежат классу $\mathcal{L}$, то и их композиция $\varphi_1(\varphi_2(z))$ принадлежит этому же классу. Поскольку тождественное отображение входит в класс $\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ образует полугруппу относительно операции композиции, а тождественное отображение играет в ней роль единицы.

Пусть $\{\varphi_t\}$, $t \geq 0$, $\varphi_0(z) \equiv z$, – однопараметрическое семейство отображений из $\mathcal{L}$, дифференцируемое по t локально равномерно относитель-

но $z \in D$. Тогда векторное поле

$$\frac{\partial \varphi_t(z)}{\partial t} \,|_{t=0} = v(z),$$

представляющее собой аналитическую в D функцию, называют инфинитезимальным преобразованием полугруппы $\mathcal{L}$. Выясним связь этого преобразования с функциями класса $\mathcal{C}$ – Каратеодори. Из леммы Шварца следует, что $|\varphi_t(z)| \le |z|$ при всех $t \ge 0$ и, значит, вектор $v(z)$ образует с направлением $-z$ угол, не превышающий по модулю $\pi/2$. Это означает, что аналитическая функция

$$-\frac{v(z)}{z}$$

в D имеет в этом круге неотрицательную вещественную часть. Так как $v(0) = 0$ и $\operatorname{Im} v'(0) = 0$, то

$$v(z) = -\alpha z p(z),$$

где $\alpha \ge 0$, а функция $p(z)$ принадлежит классу аналитических в D функций с неотрицательной вещественной частью, нормированных условием $p(0) = 1$, то есть классу $\mathcal{C}$ – Каратеодори.

Лёвнер в [273] исследовал задачу о представлении произвольного отображения из полугруппы $\mathcal{L}$ в виде композиции преобразований, бесконечно близких к тождественному. Другими словами, он изучил возможность представления произвольного отображения φ из $\mathcal{L}$ в виде композиции инфинитезимальных преобразований полугруппы $\mathcal{L}$, то есть как отображения вида

$$\varphi(z) = \omega(z, T, s; p), \tag{3.1}$$

где $w(t) = \omega(z, t, s; p)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\,w}{dt} = -w\,p(w, t) \tag{3.2}$$

с начальным условием $w(s) = z$, $0 \le s \le t \le T < \infty$, и однопараметрическим семейством $p(z, t)$ инфинитезимальных преобразований, таких что $p(\cdot, t) \in \mathcal{C}$.

Уравнение (3.1) известно теперь как *уравнение Лёвнера.* Его исследованию посвящено большое число работ, см. [5, 102, 105, 110, 120, 131, 273, 274, 311, 388] и приведенную там библиографию. Сам Лёвнер изучил детально лишь частный случай этого уравнения. Так в работе [273] было доказано, что все отображения из $\mathcal{L}$, которые отображают D на области,

получаемые из круга D проведением жорданового разреза, представимы в виде (3.1). При этом инфинитезимальные преобразования $p(z,t)$ конкретизируются и приобретают вид

$$p(z,t)=\frac{\mu(t)+z}{\mu(t)-z},$$

где $\mu(t)$ - равная по модулю единице непрерывная на $[0,\infty)$ функция. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dt}=-w\frac{\mu(t)+w}{\mu(t)-w} \tag{3.3}$$

также носит название *уравнения Лёвнера.*

Более общий случай уравнения (3.1) был исследован в работах Куфарева [234, 236, 237].

3.2. Параметрическое представление конформных отображений

Обратимся теперь к исследованию нашего основного объекта, класса S, состоящего из всех однолистных аналитических функций $f(z)$ в круге D, нормированных условиями: $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Здесь мы обнаружим тесную связь между функциями класса S и однопараметрическими семействами функций класса $\mathcal{C}$ - Каратеодори:

$$p(z,t)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}d\mu_t(\theta). \tag{3.4}$$

Пусть $f\in S$ и отображает D на область G, которая получается из плоскости $\mathbb{C}$ удалением одного жорданового разреза Γ, уходящего на бесконечносить. В силу принципа Линделёфа и теоремы Каратеодори о сходимости к ядру, см. главу 1, существует единственная параметризация разреза $\Gamma: w=\psi(t), 0\le t<\infty$, при которой конформный радиус каждой области $G_t=\mathbb{C}\setminus\Gamma_t$, $\Gamma_t=\{w:\ w=\psi(\tau),\tau\ge t\}$, относительно начала координат равняется e^t. Пусть $f(z,t)$ – конформное отображение круга D на область G_t с нормировкой: $f(0,t)=0$, $f'_z(0,t)=e^t$. Существование такого отображение следует из теоремы Римана. Тогда, как показано в [105], с. 123, см. также [388], с. 99, функция $f(z,t)$ непрерывно дифференцируема по $t\in[0,\infty)$ локально равномерно по $z\in D$ и

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\frac{\mu(t)+z}{\mu(t)-z}. \tag{3.5}$$

Здесь, равная по модулю единице, функция $\mu(t)$ имеет простой геометрический смысл, а именно $\mu(t) = f^{-1}(\psi(t), t)$.

Между уравнением (3.5) и уравнением Лёвнера (3.3) существует простая связь. Действительно, при всех s, t, $0 \leq s \leq t < \infty$ определены отображения

$$\varphi(z, s, t) = f^{-1}(f(z, s), t)$$

которые принадлежат полугруппе $\mathcal{L}$ и отображают D на области, получаемые из круга D проведением жорданового разреза. Следовательно, по теореме Лёвнера, $\varphi(z, s, t)$ удовлетворяет уравнению (3.3). Более того, существует локально равномерный предел

$$f(z, s) = \lim_{t \to \infty} e^t \varphi(z, s, t). \tag{3.6}$$

Так как $f(z) = f(z, 0)$, то уравнение Лёвнера генерирует по формуле (3.6) подкласс $S(\mathcal{L})$ класса S, состоящий из конформных отображений круга на области, которые получаются из плоскости $\mathbb{C}$ удалением одного жорданового разреза, уходящего на бесконечность. С другой стороны, из простых геометрических соображений и теоремы Каратеодори о сходимости к ядру следует, что любая функция класса S может быть аппроксимирована, в топологии локально равномерной сходимости в круге D, последовательностью функций класса $S(\mathcal{L})$.

Рассмотренные выше геометрические рассуждения, которые привели к уравнению Лёвнера вида (3.3), могут быть обобщены, используя понятие цепи подчинения, введенное Поммеренке [312].

Обозначим через $G(\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$, семейство односвязных областей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, такое, что $0 \in G(\sigma) \subset G(\tau)$, $0 \leq \sigma < \tau < \infty$, и $G(\tau_0) \to G(\tau_0)$, $\tau_n \to \tau_0 < \infty$, $G(\tau_n) \to \mathbb{C}$, $\tau_n \to \infty$, в смысле сходимости к ядру по Каратеодори. По теореме Римана существует конформное отображение $f(z, \tau)$, отображающее круг D на $G(\tau)$ и нормированное условиями $f(0, \tau) = 0$, $f'_z(0, \tau) > 0$. Тогда, очевидно, имеет место подчинение

$$f(z, \sigma) \prec f(z, \tau) \quad 0 \leq \sigma < \tau < \infty.$$

Отсюда и из теоремы Каратеодори о сходимости к ядру следует, что $a_1(\tau) = f'_z(0, \tau)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая положительная функция на $[0, \infty)$ и $a_1(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$. Это позволяет ввести новый параметр t по формуле $e^t = a_1(\tau)$. В терминах нового параметра отображающая функция $f^*(z, t) \equiv f(z, \tau(t))$ разлагается в круге D в ряд вида

$$f^*(z, t) = e^t z + \ldots, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Функция $f(z,t)$, $z \in D$, $0 \le t < \infty$, образует *цепь подчинения Лёвнера,* если

$$f(z,t) = e^t z + a_2(t)z^2 + \dots, \;\; z \in D, \tag{3.7}$$

- аналитическая и однолистная функция в D при каждом $t \in [0,\infty)$ и если

$$f(z,s) \prec f(z,\tau), \;\; 0 \le s \le \tau < \infty. \tag{3.8}$$

Условие подчинения (3.8) означает, что существует единственная однолистная аналитическая функция $\varphi(z,s,t) = e^{s-t}\, z + \dots$ в круге D, удовлетворяющая условию $|\varphi(z,s,t)| \le |z|$, и такая, что

$$f(z,s) = f(\varphi(z,s,t),t), \;\; 0 \le s \le t < \infty. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что для $\varphi(z,s,t)$ выполняется полугрупповое свойство

$$\varphi(z,s,\tau) = \varphi(\varphi(z,s,t),t,\tau) \tag{3.10}$$

если $0 \le s \le t \le \tau < \infty$, а применение леммы Шварца приводит к фундаментальному неравенству Лёвнера

$$|\varphi(z,s,t) - z| \le 2|z|\frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}). \tag{3.11}$$

Применяя теоремы о росте и искажении в классах S и $\mathcal{C}$, можно установить, что цепь подчинения Лёвнера $f(z,t)$ абсолютно непрерывна по t для каждого $z \in D$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\, p(z,t), \tag{3.12}$$

с некоторой функцией $p(z,t)$ класса $\mathcal{C}$ – Каратеодори, измеримой по $t \in [0,\infty)$. В свою очередь, $\varphi(z,s,t) = f^{-1}(f(z,s),t)$ удовлетворяет уравнению Лёвнера

$$\frac{\partial \varphi(z,s,t)}{\partial t} = -\varphi(z,s,t)\, p(\varphi(z,s,t),t) \tag{3.13}$$

и

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi(z,s,t) \tag{3.14}$$

локально равномерно в круге D.

Поскольку $e^{-s}f(z,s) \in S$, то мы приходим к заключению, что любая функция $f(z)$ класса S, которую можно включить в цепь подчинения Лёвнера $f(z,t)$, $f(z,0) = f(z)$, может быть получена по формулам (3.12) – (3.14).

Естественно возникает вопрос: можно ли по формулам (3.12) – (3.14) при условии, что функция $p(z,t) \in \mathcal{C}$ и измерима по $t \in [0,\infty)$, получить все функции класса S? Утвердительный ответ на поставленный вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $f(z)$ – произвольная функция класса S. Тогда существует функция $p(w,t)$ измеримая по t на $[0,\infty)$ при фиксированном $w \in D$ и $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$ при почти всех $t \in [0,\infty)$, такая, что*

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi(z,t), \tag{3.15}$$

где $w = \varphi(z,t)$ – решение уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t), \quad \text{для п.в. } t \in [0,\infty), \tag{3.16}$$

с начальным условием $w(0) = z \in D$.

Из приведенной выше теории Лёвнера следует

Предложение 3.1. (см. [105], с. 124.) *Функции вида*

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} \varphi(z,t;p), \;\; p(z,t) = \frac{\mu(t)+z}{\mu(t)-z}\,, \tag{3.17}$$

где $\mu(t)$ – непрерывная функция, равная по модулю единице, а $w = \varphi(z,t;p)$ – решение дифференциального уравнения $\dot{w} = -wp(w,t)$ с начальным условием $w(0) = z$, $z \in D$, образуют всюду плотный подкласс $S(\mathcal{L})$ класса S, в топологии локально равномерной сходимости в круге D.

В основе доказательства теоремы 3.1 лежат различные методы замыкания некомпактных классов Лёвнера, см. [110,120,311,312]. В частности, в работе [312], см. [311], с. 158, доказано, что любая функция класса S может быть включена в цепь подчинения Лёвнера и, значит, может быть получена по формулам (3.15), (3.16).

Другой подход основан на свойстве слабой компактности однопараметрических семейств регулярных вероятностных мер μ_t на единичной окружности, измеримых по параметру t и генерирующих, по формуле Рисса–Герглотца, соответствующие функции $p(z,t)$, см. [120].

Наконец, третий подход базируется на компактности семейства функций $\{p(z,t)\}$ в топологии слабой сходимости, определяемой соотношением

$$\int_I p_n(z,t)\eta(t)dt \to \int_I p(z,t)\eta(t)dt$$

для любой ограниченной измеримой на функции $\eta(t)$ на интервале I. При этом, сходимость предполагается локально равномерной по $z \in D$, см. [110].

Результаты, аналогичные теореме 3.1, имеют место и для основных подклассов класса S. В качестве примера рассмотрим подкласс S_n, $n = 1, 2, \ldots$, класса S, состоящий из функций $w = f(z)$, отображающих круг D на области с n-кратной симметрией вращения относительно точки $w = 0$.

Теорема 3.2. *Пусть $f(z)$ – произвольная функция класса S_n. Тогда существует функция $p(w,t)$ измеримая по t на $[0,\infty)$ при фиксированном $w \in D$ и $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$ при почти всех $t \in [0,\infty)$, такая, что*

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi(z,t), \tag{3.18}$$

где $w = \varphi(z,t)$ – решение уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w^n,t), \quad \text{для п.в. } t \in [0,\infty), \tag{3.19}$$

с начальным условием $w(0) = z \in D$.

Аналогичные результаты о параметрическом представлении имеют место и для других классов конформных отображений единичного круга. Например, чтобы получить подкласс S_r класса S функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами, нужно в уравнении (3.16) взять $p(z,t)$ также с вещественными коэффициентами. Чтобы выделить класс $S_M \subset S$ конформных отображений, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| \le M$, $M > 1$, следует в формуле (3.15) выполнить предельный переход при $t \to \ln M$.

3.3 Уравнение Лёвнера и экстремальные задачи

В основе классического варианта параметрического метода исследования экстремальных задач на классе S лежит то обстоятельство, что точные оценки непрерывных функционалов на самом классе S и его подклассе Лёвнера совпадают.

Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ - произвольная функция класса S. Из предложения 3.1 следует, что если $f \in S(\mathcal{L})$, то справедливы следующие параметрические представления начальных коэффициентов:

$$a_2 = -2\int_0^\infty e^{-t}\overline{\mu}(t)dt, \;\; a_3 = a_2^2 - \int_0^\infty e^{-2t}\overline{\mu}^2(t)dt,$$

где $\mu(t)$ – произвольная непрерывная функция, равная по модулю единице. Тогда, очевидно,

$$\max_{f\in S(\mathcal{L})} |a_2| = \max_{f\in S} |a_2| = 2.$$

Лёвнер, используя эти формулы, впервые подтвердил гипотезу Бибербаха в случае $n = 3$, доказав, что в классе S справедлива точная оценка $|a_3| \le 3$. Доказательство оказалось не элементарным и вошло в ряд учебников по вариационному исчислению как пример исследования до конца нелинейной экстремальной задачи, см., например, [251], с. 344. Мы не станем здесь приводить оригинальное доказательство этого результата, которое кроме самой работы Лёвнера можно найти, например, в монографиях [105], [388], а дадим новое доказательство, полученное нами в 1970 году и опубликованное в [5], с. 115, [122, 131].

Пусть $f(z) = z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$. принадлежит классу S и получается в, силу теоремы 3.1, по формулам (3.15), (3.16) с некоторой функцией $p(z,t)$, $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, для почти всех $t \in [0,\infty)$. Если $p(z,-\ln s) = 1 + p_1(s)z + p_2(s)z^2 + \ldots$, $0 < s \le 1$, то, по теореме 2.1, $|p_n(s)| \le 2$, $n = 1, 2, \ldots$, и для начальных коэффициентов справедливы параметрические представления

$$a_2 = -\int_0^1 p_1(s)ds, \quad a_3 = a_2^2 - \int_0^1 sp_2(s)ds.$$

Очевидно функции

$$g(z) = \int_0^1 p(z,-\ln s)ds$$

и

$$\frac{1}{g(z)} = 1 - a_2z + \left(a_2^2 - \int_0^1 p_2(s)ds\right) z^2 + \ldots$$

принадлежат классу $\mathcal{C}$ - Каратеодори. В силу теоремы 2.1, все коэффициенты Тейлора функций класса $\mathcal{C}$ не превосходят по модулю двух. Следовательно,

$$\left|a_2^2 - \int_0^1 p_2(s)ds\right| \le 2.$$

А тогда

$$|a_3| = \left| a_2^2 - \int\limits_0^1 p_2(s)ds + \int\limits_0^1 (1-s)p_2(s)ds \right| \leq 2 + 1 = 3.$$

Аналитичность функции $g(z)$ в круге D устанавливается обычным способом. Действительно, пусть z_0 - фиксированная точка единичного круга и $|z_0| + \delta \leq r < 1$, где $\delta > 0$. Тогда для $|\delta z| < \delta$ и $s \in [0,1]$ из формулы Рисса-Герглотца следует, что

$$\left| \frac{p(z_0 + \triangle z, -\ln s) - p(z_0, -\ln s)}{\triangle z} \right| \leq \frac{2}{(1-r)^2}\,.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла:

$$g'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \int_0^1 \frac{p(z_0 + \delta z, -\ln s) - p(z_0, -\ln s)}{\triangle z}\, ds = \\ = \int_0^1 p'_z(z_0, -\ln s)\, ds.$$

Отметим, что полное решение проблемы коэффициентов, полученное Д'Бранжем в 1984 году, было дано также на основе параметрического метода Лёвнера.

Исследованию других экстремальных задач параметрическим методом посвящена следующая глава.

Глава 4

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ПРОБЛЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ И ВРАЩЕНИЯ

Глава 4 посвящена решению общей задачи о росте, искажении и вращении при конформных отображениях единичного круга. В основе решения, параметрический метод Лёвнера в форме, предложенной в главе 3, и фундаментальный принцип редукции экстремальных задач теории однолистных функций к линейным экстремальным задачам на выпуклом классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори.

4.1. Параметрическое представление функционалов

Общая проблема об оценках роста, искажения и вращения при конформных отображениях единичного круга сводится к задаче нахождения множества $\Omega(z) \subset \mathbb{C}^2 = \{(Z, W) : Z, W \in \mathbb{C}\}$ значений системы функционалов

$$I(f) = \left\{ \ln \frac{f(z)}{z}, \ \ln \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = \{Z, W\} \tag{4.1}$$

на классе S, где точка $z \in D$ и фиксирована. Здесь под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z = 0$. Поскольку вместе с каждой функцией $f(z)$ класса S этому же классу принадлежат функции вида $e^{-i\theta} f(ze^{i\theta})$ при любом фиксированном $\theta \in [0, 2\pi)$, то $\Omega(z) = \Omega(|z|)$.

Пусть

$$I_1(f) = J\left(|f(z_0)|, \arg(f(z_0)/z_0), |f'(z_0)|, \arg f'(z_0)\right)$$

– произвольный непрерывный функционал, зависящий от роста $|f(z_0)|$, углового смещения $\arg(f(z_0)/z_0)$, искажения $|f'(z_0)|$ и вращения $\arg f'(z_0)$ отображения $f \in S$ в фиксированной точке $z_0 \in D$, $|z_0| = r$. Тогда

$$\max_S I_1(f) = \max_{Z,W \in \Omega(r)} J\left(re^{\operatorname{Re} Z}, \operatorname{Im} Z, e^{\operatorname{Re}(W+Z)}, \operatorname{Im}(W+Z)\right),$$

и для решения экстремальной задачи достаточно определить множество $\Omega(r)$ и выполнить надлежащие элементарные вычисления.

Обозначим через $\mathcal{C}(T)$ множество функций $p(z,t)$, $z \in D$, $t \in T$, таких, что $p(z,\cdot)$ измерима по t на интервале T и $p(\cdot,t) \in \mathcal{C}$ для почти всех $t \in T$.

Теорема 4.1. *Множество $\Omega(z_0)$ значений системы функционалов*

$$I(f) = \left\{ \ln \frac{f(z_0)}{z_0},\ \ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right\}, \tag{4.2}$$

на классе S, где $z_0 \in D$ и фиксировано, представимо в виде

$$\Omega(z_0) = \left\{ (Z,W) : Z(h) = \int\limits_0^{|z_0|} (h(\rho,\rho)-1)\frac{d\rho}{\rho},\ W(h) = \int\limits_0^{|z_0|} \frac{h'_z(0,\rho)d\rho}{1-\rho^2} \right\}, \tag{4.3}$$

когда $h(z,t)$ пробегает весь класс $\mathcal{C}(0,|z_0|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z)$ – произвольная функция класса S. Тогда, по теореме 3.1, найдется функция $p(z,t)$ класса $\mathcal{C}(0,\infty)$ такая, что

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi(z,t),$$

где отображения $w = \varphi(z,t)$ определяются как интегралы уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t) \tag{4.4}$$

с начальным условием $w(0) = z$, $z \in D$. Обозначим $w_0(t)$ – интегральную кривую уравнения (4.4), проходящую через точку z_0 при $t = 0$. Положим $w_0(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$. Из уравнения (4.4) следует, что функции $\rho(t)$ и $\theta(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{Re} p(\rho e^{i\theta},t),\ \frac{d\theta}{dt} = -\operatorname{Im} p(\rho e^{i\theta},t) \tag{4.5}$$

и начальным условиям: $\rho(0) = |z_0| = r$, $\theta(0) = \arg z_0$. Поскольку $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$ в круге D то из первого уравнения системы (4.5) следует, что функция $\rho(t)$ монотонно убывает по t и $\rho(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Так как

$$\ln \frac{f(z_0)}{z_0} = \int\limits_0^{\infty} (1 - p(w_0(t),t))$$

и

$$\ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = -\int_0^\infty w_0(t) p'(w_0(t), t)\, dt,$$

то, выполняя под знаками интегралов замену переменной t на ρ по формуле (4.5), получаем

$$\ln \frac{f(z_0)}{z_0} = \int_0^r \frac{1-p}{\operatorname{Re} p} \frac{d\rho}{\rho},$$

$$\ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = -\int_0^r \rho\, e^{i\theta(t(\rho))} \frac{p'(\rho e^{i\theta(t(\rho))}, t(\rho))}{\operatorname{Re} p} \frac{d\rho}{\rho}. \tag{4.6}$$

Чтобы упростить и линеаризировать эти выражения, мы используем автоморфизм в классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори вида

$$p(z) = \frac{h(\gamma(z) - i\operatorname{Im} h(\gamma(0))}{\operatorname{Re} h(\gamma(0))},$$

где $\gamma(z)$ – произвольное дробно-линейное отображение единичного круга D на себя.

Введем в рассмотрение функцию $h(z, \rho)$ класса $\mathcal{C}(0, r)$, связанную с $p(z, t)$ равенством

$$h(z, \rho) = \frac{p\left(e^{i\theta} \frac{\rho - z}{1 - \rho z},\, t\right) - i\operatorname{Im} p(\rho e^{i\theta},\, t)}{\operatorname{Re} p(\rho e^{i\theta},\, t)}, \tag{4.7}$$

где θ и t рассматриваются как функции от ρ. Замечая, что

$$h(\rho, \rho) = \frac{1 - i\operatorname{Im} p(\rho e^{i\theta},\, t)}{\operatorname{Re} p(\rho e^{i\theta},\, t)}$$

и

$$h'(0, \rho) = \frac{e^{i\theta} p'(\rho e^{i\theta},\, t)}{\operatorname{Re} p(\rho e^{i\theta},\, t)} \cdot (\rho^2 - 1),$$

и заменяя в (4.7) p на h, приходим к формулам (4.3):

$$\ln \frac{f(z_0)}{z_0} = \int_0^r (h(\rho, \rho) - 1) \frac{d\rho}{\rho},$$

$$\ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = \int\limits_0^r \frac{h'(0,\rho)d\rho}{1-\rho^2}\,. \tag{4.8}$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.1, нужно еще показать, что для каждой функции $h(z,\rho) \in \mathcal{C}(0,r)$ существует $f(z) \in S$, такая, что выполнены соотношения (4.3). Это следует из того факта, что приведенные выше рассуждения обратимы. Соответствующие формулы обращения мы выделим в отдельное предложение. Именно эти формулы позволяют находить экстремальные функции класса S. □

Предложение 4.1. *Пусть $h(z,\rho) \in \mathcal{C}(0,r)$, $r = |z_0|$. Тогда существует единственная функция $f(z)$ класса S, которая определяется формулами* (3.15), (3.16) *с*

$$p(z,t) = \frac{h\left(\frac{\rho - ze^{-i\theta}}{1-\rho z e^{-i\theta}}\right) - i\mathrm{Im}\, h(\rho,\rho)}{\mathrm{Re}\, h(\rho,\rho)}\,, \tag{4.9}$$

и такая, что $I(f) = (Z(h), W(h))$. Здесь ρ и θ как функции переменной t определяются из уравнений

$$t = \int\limits_\rho^r \mathrm{Re}\, h(\rho,\rho)\frac{d\rho}{\rho}\,,\ \ \theta = \arg z_0 + \int\limits_\rho^r \mathrm{Im}\, h(\rho,\rho)\,\frac{d\rho}{\rho}\,. \tag{4.10}$$

Приведенное выше предложение можно записать в следующем виде, заметив, что $w_0(t) = \rho e^{i\theta}$ и положив $\omega(z,\rho) = \varphi(z,t)e^{-i\theta}$:

$$f(z) = \lim_{\rho\to 0} \exp\left\{\int\limits_\rho^r h(\rho,\rho)\frac{d\rho}{\rho}\right\}\omega(z,\rho), \tag{4.11}$$

где $\omega(z,\rho)$ – решение следующей задачи Коши на интервале $(0,r]$:

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\omega}{\rho} h\left(\frac{\rho-\omega}{1-\rho\omega},\right),\ \omega(r,\rho) = ze^{-\arg z_0}. \tag{4.12}$$

Замечание 4.1. Первые результаты о параметрическом представлении функционалов в классе S через однопараметрические семейства функций класса $\mathcal{C}$ – Каратеодори были опубликованы в [120]. Линеаризация параметрических представлений и теорема 4.1 были установлены

в [122] и их подробные доказательства опубликованы в монографии [5], с. 108–115, см., также, [131].

4.2. Теоремы редукции

В настоящем разделе, на примере задачи об области значений системы функционалов (4.1), мы устанавливаем тесные связи между экстремальными задачами в классе S и сопряженными линейными экстремальными задачами на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори.

Из теоремы 4.1 следует, что $\Omega(z_0)$ – выпуклое замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^4$. Действительно, формулы в (4.3) линейны относительно $h \in \mathcal{C}(0, |z_0|)$, а сам класс $\mathcal{C}(0, |z_0|)$, в силу формулы Рисса–Герглотца, является выпуклым множеством. Замкнутость и ограниченность следуют из непрерывности системы функционалов и компактности класса S.

Дадим описание множества $\Omega(z_0)$ в терминах выпуклого анализа.

Пусть $\zeta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ произвольный вектор из $\mathbb{R}^4$. Обозначим через $H_\Omega(\zeta)$ опорную функцию множества Ω. Другими словами,

$$H_\Omega(\zeta) = \max_{d\in\Omega} \langle \zeta, d\rangle = \max_{d\in\Omega} (\alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3 + \delta d_4), \tag{4.13}$$

где $d = (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \Omega$, а $\langle \zeta, d\rangle$ обозначает скалярное произведение ζ и d. Заметим, что при $|\zeta| = 1$ значение $H_\Omega(\zeta)$ равно расстоянию от начала координат до опорной гиперплоскости множества Ω, ортогональной к вектору ζ. Функция $H_\Omega(\zeta)$ является выпуклой и поэтому непрерывна в каждой внутренней точке своей области задания.

Под опорным множеством $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$ выпуклого множества Ω будем понимать множество точек $d \in \Omega$, для которых

$$\langle \zeta, d\rangle = H_\Omega(\zeta).$$

Поскольку границу $\partial\Omega$ множества Ω можно представить как объединение опорных множеств $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$ по всем ненулевым векторам ζ, то наша задача сводится к исследованию следующей экстремальной проблемы на классе S

$$H_\Omega(\zeta_1, \zeta_2) = \max_S \mathcal{U}(f), \tag{4.14}$$

где

$$\mathcal{U}(f) = \operatorname{Re}\left[\zeta_1 \ln \frac{f(z_0)}{z_0} + \zeta_2 \ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] \tag{4.15}$$

при всех $\zeta_1 = \alpha - i\beta$ и $\zeta_2 = \gamma - i\delta$, таких, что $|\zeta_1| + |\zeta_2| \neq 0$.

Определим на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори функционал

$$\mathcal{G}(h) = \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho)-1) + \zeta_2 h'(0)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right], \tag{4.16}$$

$\rho \in (0, |z_0|]$ и фиксировано.

Теорема 4.2. *Пусть $\zeta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – отличный от нуля вектор из $\mathbb{R}^4$. Для того, чтобы функция $f(z)$ из класса S вносила посредством системы $I(f)$ точку опорного множества $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$, необходимо и достаточно представление ее в виде* (4.11)*, где функция $h(z,\rho) \in \mathcal{C}(0,|z_0|)$ удовлетворяет условию*

$$\mathcal{G}(h(\cdot,\rho)) = \max_{h\in\mathcal{C}} \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho)-1) + \zeta_2 h'(0)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right] \tag{4.17}$$

для почти всех $\rho \in (0, |z_0|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 4.1

$$H_\Omega(\zeta) = \max_{\mathcal{C}(0,|z_0|)} \int_0^{|z_0|} \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho,\rho)-1) + \zeta_2\rho h'(0,\rho)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right]\frac{d\rho}{\rho} \tag{4.18}$$

и достаточность условия (4.17) следует. Доказательство необходимости связано с возможностью синтеза из экстремалей функционала $\mathcal{G}(h)$ на классе $\mathcal{C}$ хотя бы одной функции $h(z,\rho) \in \mathcal{C}(0,|z_0|)$, удовлетворяющей условию (4.17). Этот вопрос решается положительно при исследовании граничных функций. □

Таким образом, имеет место следующий, принципиально новый, результат.

Теорема редукции. *В классе S при фиксированном z_0, $|z_0| = r < 1$*

$$\max_{f\in S} \operatorname{Re}\left[\zeta_1 \ln\frac{f(z_0)}{z_0} + \zeta_2 \ln\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] = \int_0^r \max_{h\in\mathcal{C}} \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho,\rho)-1) + \zeta_2\rho h'(0,\rho)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right]\frac{d\rho}{\rho}. \tag{4.19}$$

Мы видим, что экстремальная задача на классе S свелась к задаче о максимуме сопряженного функционала $\mathcal{G}(h)$ на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори. Класс $\mathcal{C}$ имеет интегральное представление Рисса–Герглотца

$$h(z) = \int\limits_{|\eta|=1} \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\, d\mu(\eta),$$

является выпуклым компактным множеством в пространстве всех аналитических функций в единичном круге D и линейные задачи на $\mathcal{C}$ могут быть исследованы стандартными методами выпуклого анализа.

Для иллюстрации, рассмотрим задачу об искажении при конформных отображениях круга D функциями класса S. Это частный случай задачи о максимуме функционала (4.19), когда $\zeta_2 = 0$ и $\zeta_1 = \pm 1$. По теореме редукции

$$\max_{f\in S} \mathrm{Re}\, \left[\zeta_1 \ln \frac{f(z_0)}{z_0}\right] = \int\limits_0^r \max_{h\in\mathcal{C}} \mathrm{Re}\, \left[\zeta_1 (h(\rho,\rho)-1)\right] \frac{d\rho}{\rho}\,. \tag{4.20}$$

С другой стороны, непосредственно из формулы Рисса–Герглотца следует, что при каждом фиксированном $0 < \rho \le r$

$$-\frac{2\rho}{1+\rho} \le \mathrm{Re}\, [h(\rho) - 1] \le \frac{2\rho}{1-\rho}\,.$$

Интегрирование приводит к хорошо известным двухсторонним оценкам

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}\,. \tag{4.21}$$

Поскольку экстремалями в классе $\mathcal{C}$ являются лишь функции вида

$$h(z) = \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

то, применяя формулы обращения из предложения 4.1, легко показать, что знак равенства в (4.21) достигается только на функциях Кёбе:

$$f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2}, \quad |\eta| = 1.$$

4.3. Исследование сопряженной задачи

Этот раздел посвятим исследованию задачи об экстремуме функционала

$$\mathcal{G}(h) = \mathrm{Re}\left[\zeta_1(h(\rho)-1) + \zeta_2 h'(0)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right], \tag{4.22}$$

$\rho \in (0, r]$ и фиксировано, на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори.

Для этого рассмотрим на классе $\mathcal{C}$ более общую задачу об определении множества $\mathcal{N}$ значений комплекснозначного функционала

$$\Phi(h) = \mathrm{Re}\, h(t) + i\mathrm{Re}\left[\zeta_1 h(t) + \zeta_2 h'(0)\frac{t}{1-t^2}\right] \tag{4.23}$$

в комплексной плоскости $\Phi = x + iy$, которая может иметь и самостоятельный интерес. В (4.23) t, $0 < t < 1$, – фиксированное число и

$$\zeta_1 = \alpha - i\beta, \;\; \zeta_2 = \gamma - i\delta. \tag{4.24}$$

Прежде чем сформулировать решение поставленной задачи, напомним некоторые обозначения. Пусть $t \in [0, 1)$ и

$$a(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \;\; b(t) = \frac{2t}{1-t^2}, \;\; R^{\pm} = a(t) \pm b(t). \tag{4.25}$$

Отметим полезное тождество: $a^2(t) - b^2(t) = 1$ при всех $t \in [0, 1)$ и $R^+ = 1/R^-$. Далее, положим

$$l_{\pm} = |\zeta_2| \mp \gamma, \;\; a_0^{\pm} = \frac{\beta\delta + \sqrt{(\beta^2 + l_{\pm}^2)(\delta^2 + l_{\pm}^2)}}{l_{\pm}^2}, \tag{4.26}$$

и

$$x_k^{\pm} = \frac{a l_{\pm}^2 - \beta\delta + (-1)^k \sqrt{(a l_{\pm}^2 - \beta\delta)^2 - (\beta^2 + l_{\pm}^2)(\delta^2 + l_{\pm}^2)}}{\beta^2 + l_{\pm}^2}. \tag{4.27}$$

Теорема 4.3. *Множество $\mathcal{N}$ значений функционала* (4.23) *на классе $\mathcal{C}$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки кривой $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ с уравнением*

$$\Gamma^{\pm} = \left\{(x, y) : y^{\pm}(x) = a\gamma + \alpha x - \frac{\gamma}{x} \pm \left|\beta + \frac{\delta}{x}\right| \sqrt{2ax - x^2 - 1}\right\}, \tag{4.28}$$

где $R^- \le x \le R^+$.

Граница $\partial\mathcal{N}$ множества $\mathcal{N}$ состоит из двух непрерывных кривых $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^-$:

1) *если* $l_+ = 0$ *и* $a > 1$, *а также, если* $l_+ \neq 0$ *и* $a \in (1, a_0^+)$, *то* $\mathcal{L}^+ \equiv \Gamma^+$; *при* $l_+ \neq 0$ *и* $a \geq a_0^+$, $\mathcal{L}^+$ *состоит из двух дуг кривой* Γ^+, *когда* $x \in [R^-, x_1^+]$ *и* $x \in [x_2^+, R^+]$, *и прямолинейного отрезка* G^+, *соединяющего гладким образом эти дуги;*

2) *если* $l_- = 0$ *и* $a > 1$, *а также, если* $l_- \neq 0$ *и* $a \in (1, a_0^-)$, *то* $\mathcal{L}^- \equiv \Gamma^-$; *при* $l_- \neq 0$ *и* $a \geq a_0^-$, $\mathcal{L}^-$ *состоит из двух дуг кривой* Γ^-, *когда* $x \in [R^-, x_1^-]$ *и* $x \in [x_2^-, R^+]$, *и прямолинейного отрезка* G^-, *соединяющего гладким образом эти дуги.*

При этом,

$$G^{\pm} = \left\{ (x, y) : y_{\pm}(x) = \left(\alpha \pm \frac{\beta^2 - l_{\pm}^2}{2l_{\pm}} \right) x + a(\gamma \pm l_{\pm}) \pm \frac{\beta\delta}{l_{\pm}} \right\} \tag{4.29}$$

и

$$x_1^{\pm} \leq x \leq x_2^{\pm}.$$

Все граничные функции имеют вид

$$f(z) = \sum_{k=1}^{2} \mu_k \frac{1 + ze^{it_k}}{1 - ze^{it_k}}, \tag{4.30}$$

и зависят от трех вещественных параметров $\mu_k \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $t_k \in [0, 2\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из формулы Рисса–Герглотца и линейности функционала (4.23) следует, что множество $\mathcal{N}$ получается по формуле

$$\mathcal{N} = \left\{ (x, y) : x(\mu) = \int\limits_{|\eta|=1} \operatorname{Re} \frac{1 + \eta t}{1 - \eta t} d\mu(\eta), \right.$$
$$\left. y(\mu) = \int\limits_{|\eta|=1} \operatorname{Re} \left[\zeta_1 \frac{1 + \eta t}{1 - \eta t} + \zeta_2 \frac{2t\eta}{1 - t^2} \right] d\mu(\eta) \right\}, \tag{4.31}$$

когда μ пробегает весь класс регулярных вероятностных мер на единичной окружности. Из (4.31) следует, что

$$\mathcal{N} = \overline{\text{co}} \left\{ \Phi : \Phi = \Phi \left(\frac{1 + te^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} \right), \ 0 \leq \theta < 2\pi \right\}. \tag{4.32}$$

Чтобы охарактеризовать кривую $\Phi\left(\frac{1+te^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\right)$ на плоскости $x+iy$, применим теорему 2.9 к рассматриваемой экстремальной задаче. Действительно, на основании этой теоремы, при каждом фиксированном t, $0 < t < 1$, и фиксированном значении $\operatorname{Re} h(t) = x$ из промежутка $R^- \le x \le R^+$

$$\operatorname{extr}_{h\in\mathcal{C}} \operatorname{Im}\Phi(h) = \operatorname{extr}_Z \operatorname{extr}_W \operatorname{Re}\left(\zeta_1 Z + \zeta_2 \frac{b(t)}{2} W\right), \tag{4.33}$$

при условии, что

$$\operatorname{Re} Z = x. \tag{4.34}$$

Здесь

$$Z = a(t) + b(t)\nu e^{i\vartheta},\ 0 \le \vartheta < 2\pi,\ 0 \le \nu \le 1, \tag{4.35}$$

и

$$W = \frac{1}{b\operatorname{Re}\zeta}\left\{(\zeta-1)(\bar{\zeta}+1) + b^2(1-\nu^2)e^{i\omega}\right\},\ 0 \le \omega \le 2\pi. \tag{4.36}$$

Так как в экстремальном случае $e^{i\omega} = \pm 1$, то

$$\operatorname{extr}_{h\in\mathcal{C},\operatorname{Re} h=x} \operatorname{Im}\Phi(h) = \operatorname{extr}_{\nu\in T}\Psi^{\pm}(\nu), \tag{4.37}$$

где функция $\Psi^{\pm}(\nu)$ определяется формулой

$$\Psi^{\pm}(\nu) = a\gamma + \alpha x - \frac{\gamma}{x} \pm \left|\beta + \frac{\delta}{x}\right| \sqrt{b^2\nu^2 - (x-a)^2} \pm \frac{b^2 l_{\pm}}{2x}(1-\nu^2), \tag{4.38}$$

и

$$T = \left\{\nu :\ \frac{|x-a|}{b} \le \nu \le 1\right\}. \tag{4.39}$$

Знак $+$ в (4.37), (4.38) соответствует максимуму, а знак $-$ соответствует минимуму. Элементарные, легко воспроизводимые вычисления, связанные с исследованием функции $\Psi^{\pm}(\nu)$ на экстремум в промежутке T, завершают доказательство теоремы. В заключение заметим, что точкам границы $\partial\mathcal{N}$, принадлежащим $\Gamma^{\pm}$, отвечают экстремальные функции вида $(k+z)/(k-z)$, $|k| = 1$. В этом случае $\nu = 1$. Если же точки лежат на прямолинейных отрезках $G^{\pm}$, то экстремальные функции класса $\mathcal{C}$ – Каратеодори имеют вид (4.30). □

Воспользовавшись теоремой 4.3, легко найти решение задачи о максимуме функционала (4.22) на классе $\mathcal{C}$.

Теорема 4.4. *Пусть $t \in [0,1)$ и фиксировано. Если $\beta^2 + \delta^2 \ne 0$, то*

$$\max_{h\in\mathcal{C}} \operatorname{Re}\left[\zeta_1(h(\rho)-1) + \zeta_2 h'(0)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right] = y^+(x) - \alpha, \tag{4.40}$$

где функция $y^+(x)$ *определена формулой* (4.28) *и* $x = x(t)$ *– единственный, если* $l_+ = 0$, *наибольший, если* $l_+ \neq 0$ *и* $2\alpha l_+ + \beta^2 - l_+^2 \geq 0$, *и наименьший, если* $2\alpha l_+ + \beta^2 - l_+^2 \leq 0$, *корень уравнения*

$$(\alpha x^2 + \gamma)\sqrt{2ax - x^2 - 1} = \operatorname{sign}(\beta x + \delta)(\beta x^3 - a\beta x^2 + a\delta x - \delta). \quad (4.41)$$

Если же $\beta = \delta = 0$, *то в формуле* (4.40) *нужно положить:*

а) $x = R^+$, *если* $\alpha > 0$ *и* $\gamma > 0$, *либо* $\gamma < 0$, $\alpha + \gamma > 0$ *и всех* $a(t)$, *а также, если* $\gamma > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha + \gamma > 0$ *и* $a(t) \in (1, a^*)$, *где*

$$a^* = \frac{\gamma - \alpha}{2\sqrt{-\alpha\gamma}}; \quad (4.42)$$

б) $x = R^-$, *если* $\gamma < 0$, $\alpha + \gamma < 0$ *и всех* $a(t)$, *а также, если* $\gamma > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha + \gamma < 0$ *и* $a(t) \in (1, a^*)$;

в) $x = \sqrt{-\gamma/\alpha}$, *если* $\gamma > 0$, $\alpha < 0$ *и* $a(t) \geq a^*$.

Доказательство. Заметим, что функционал, который мы оцениваем, лишь на константу отличается от мнимой части функционала (4.23). Таким образом, задача сводится к определению точек границы $\partial\mathcal{N}$ множества $\mathcal{N}$, в которых $\operatorname{Im}\Phi$ принимает максимальное значение.

Пусть β и δ не равны нулю одновременно. Тогда, очевидно, $y^+(x) \geq y^-(x)$ для всех x из промежутка $R^- \leq x \leq R^+$, причем $y^{+\prime}(R^- + 0) > 0$ и $y^{+\prime}(R^+ - 0) < 0$. Из теоремы 4.3 следует, что если $l_+ = 0$, то кривая $y^+(x)$ – выпуклая и, следовательно, $\max_x y^+(x) = y^+(\xi)$, где ξ – единственный корень уравнения $y^{+\prime}(x) = 0$.

В случае, если $l_+ \neq 0$ и $a \in (1, a_0^+)$ ситуация аналогична. Наконец, если $l_+ \neq 0$ и $a \geq a_0^+$, то выбор нужного корня уравнения $y^{+\prime}(x) = 0$ осуществляется за счет наличия на границе $\partial\mathcal{N}$ прямолинейного отрезка G^+. Действительно, если угловой коэффициент $\left(\alpha + \frac{\beta^2 - l_+^2}{2l_+}\right)$ этого отрезка положителен, то ξ – наибольший корень уравнения, в противном случае – наименьший. Особый интерес представляет случай, когда угловой коэффициент равен нулю. В этом случае максимум реализуется как в точках x_n^+, $n = 1, 2$, см. формулу (4.27), так, очевидно, и в любой точке интервала $x_1^+ \leq x \leq x_2^+$. При этом крайним точкам интервала отвечают экстремальные функции вида $(k_n + z)/(k_n - z)$, $|k_n| = 1$, $n = 1, 2$, а внутренним точкам - их выпуклые комбинации.

Пусть теперь $\beta = \delta = 0$. Тогда дело сводится к элементарной задаче нахождения максимума функции

$$y^+(x) = a\gamma + \alpha x - \frac{\gamma}{x}$$

в промежутке $R^- \le x \le R^+$. □

Перейдем к выяснению вида экстремальных функций для функционала (4.22). Для этого в пространстве $\mathbb{R}^4$ выделим множество $\mathbb{R}^4_0$ ненулевых векторов $\zeta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и его подмножества:

$$G = \{\zeta \in \mathbb{R}^4_0 : \ 2\alpha l + \beta^2 - l^2 = 0\};$$

$$G_\pm = \{\zeta \in \mathbb{R}^4_0 : \ \pm(2\alpha l + \beta^2 - l^2) > 0\};$$

$$G_l = \{\zeta \in \mathbb{R}^4_0 : \ l = 0\},$$

где $l = l_+ = |\zeta_2| - \gamma$. Тогда, по теореме 2.9, экстремальные функции класса $\mathcal{C}(0, r)$ для сопряженной задачи имеют вид

$$h(z, \rho) = \begin{cases} q(k_0, z), \ \ 0 \le \rho \le \rho_0, \\ (1-\mu)q(k_1, z) + \mu q(k_2, z), \ \ \rho_0 \le \rho \le r, \end{cases}$$

где

$$q(k, z) = \frac{k+z}{k-z},$$

$\mu(\rho)$, $0 \le \mu(\rho) \le 1$, – произвольная измеримая функция и

$$\rho_0 = \begin{cases} \left(\dfrac{\beta\delta - l^2 + \sqrt{(\beta^2+l^2)(\delta^2+l^2)}}{\beta\delta + l^2 + \sqrt{(\beta^2+l^2)(\delta^2+l^2)}} \right)^{1/2}, \ \text{если } (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^4_0 \setminus G_l, \\ \dfrac{\left|1 - \sqrt{-\gamma/\alpha}\right|}{1 + \sqrt{-\gamma/\alpha}}, \ \text{если } (\zeta_1, \zeta_2) \in G \cap G_l \text{ и } \alpha < 0, \\ 1 \ \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Равные по модулю единице функции $k_n(\rho)$ легко вычисляются, зная значения $\operatorname{Re} h(\rho, \rho) = x$ и $\operatorname{Im} h(\rho, \rho)$ в случае экстремума. Именно, пусть $G(r) = \{\zeta \in G : \ 0 \le \rho_0 \le r\}$. В принятых обозначениях

$$k_n(\rho) = \frac{1}{b\xi}(a\xi - 1 - (-1)^n i\sqrt{2a\xi - \xi^2 - 1}), \ \ n = 1, 2$$

при $\zeta \in G(r) \cap G_l$, здесь $\xi = \sqrt{-\gamma/\alpha}$. Далее,

$$k_n(\rho) = \frac{1}{bx_n}(ax_n - 1 - i\sigma(x_n, a)), \ \ n = 1, 2,$$

при $\zeta \in G(r) \setminus G_l$. Здесь

$$\sigma(x,a) = \operatorname{sign}(\beta x + \delta)\sqrt{2ax - x^2 - 1},$$

$$x_n = \frac{al^2 - \beta\delta + (-1)^n\sqrt{(al^2 - \beta\delta)^2 - (\beta^2 + l^2)(\delta^2 + l^2)}}{\beta^2 + l^2}\,. \tag{4.43}$$

Наконец, функция $k_0(\rho)$ определяется по формуле

$$k_0(\rho) = \frac{1}{bx_0}(ax_0 - 1 - i\sigma(x_0, a)),$$

где $x_0 = a + b\operatorname{sign}(\alpha + \gamma)$ при $\zeta \in G \cap G_l$ и $0 \le \rho \le \rho_0$; x_0 – наибольший (наименьший) при $\zeta \in G_+(G_-)$ и $\rho_0 \le \rho \le r$, и единственный при $\zeta \in G_+ \cup G_- \cup (G \setminus G_l)$ и $0 \le \rho \le \rho_0$, на интервале $(1-\rho)/(1+\rho) \le x \le (1+\rho)/(1-\rho)$ корень уравнения

$$(\alpha x^2 + \gamma)\sqrt{2ax - x^2 - 1} = \operatorname{sign}(\beta x + \delta)(\beta x^3 - a\beta x^2 + a\delta x - \delta). \tag{4.44}$$

4.4. Основное неравенство

Результат, сформулированный в теореме 4.3 вместе с теоремой редукции позволяет полностью решить задачу о виде опорной функции $H_\Omega(\zeta)$ для множества $\Omega(|z_0|)$ значений системы функционалов (4.2) на классе S. Следующая теорема является центральным результатом данной главы.

Теорема 4.5. *В классе S при фиксированном z_0, $|z_0| = r < 1$, и произвольных $\zeta_1 = \alpha - i\beta$, $\zeta_2 = \gamma - i\delta$, таких, что $\beta^2 + \delta^2 \ne 0$,*

$$H_\Omega(\zeta) \equiv \max_{f\in S} \operatorname{Re}\left[\zeta_1 \ln\frac{f(z_0)}{z_0} + \zeta_2 \ln\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] = \int_0^{|z_0|} y(x(\rho),\rho)\frac{d\rho}{\rho}\,, \tag{4.45}$$

где

$$y(x,\rho) = a\gamma - \alpha + \alpha x - \frac{\gamma}{x} + \left|\beta + \frac{\delta}{x}\right|\sqrt{2ax - x^2 - 1}, \tag{4.46}$$

и $x = x(\rho)$ – единственный, если $l \equiv |\zeta_2| - \gamma = 0$, наибольший, если $l \ne 0$ и $2l\alpha + \beta^2 - l^2 \ge 0$, и наименьший, если $l \ne 0$ и $2l\alpha + \beta^2 - l^2 \le 0$, корень уравнения

$$(\alpha x^2 + \gamma)\sqrt{2ax - x^2 - 1} = \operatorname{sign}(\beta x + \delta)(\beta x^3 - a\beta x^2 + a\delta x - \delta) \tag{4.47}$$

на интервале $R:\ (1-\rho)/(1+\rho) \le x \le (1+\rho)/(1-\rho)$. *Здесь*

$$a(\rho) = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\,. \tag{4.48}$$

Если $\beta = \delta = 0$, *то*

$$\max_{f\in S}\left[\alpha \ln\frac{|f(z_0)|}{|z_0|} + \gamma \ln\frac{|z_0 f'(z_0)|}{|f(z_0)|}\right] = \\ = \int\limits_0^{|z_0|}\left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\gamma - \alpha + \max_{x\in R}(\alpha x - \frac{\gamma}{x})\right)\frac{d\rho}{\rho}\,. \tag{4.49}$$

Частный случай теоремы 4.5, когда $\beta = \delta = 0$, мы выделим в виде отдельной теоремы

Теорема 4.6. *В классе* S *при фиксированном* z_0, $|z_0| = r < 1$, *для функционала*

$$I(f) = m \ln\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| + n \ln|f'(z_0)|, \tag{4.50}$$

где m *и* n *– произвольные вещественные числа, имеют место следующие точные оценки:*

$$I(f) \le m \ln\frac{1}{(1-r)^2} + n \ln\frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{4.51}$$

для всех $r \in (0,1)$, *если* $m+n>0$, $m+2n>0$, *а также для* $r \in (0, r_1)$, *если* $m+n<0$, $m+2n>0$, *где*

$$r_1 = \frac{m+2n}{\sqrt{n}+\sqrt{-m-n}}\,; \tag{4.52}$$

$$I(f) \le m \ln\frac{1}{(1+r)^2} + n \ln\frac{1-r}{(1+r)^3} \tag{4.53}$$

для всех $r \in (0,1)$, *если* $n<0$, $m+2n<0$, *а также для* $r \in (0, r_2)$, *если* $n>0$, $m+2n<0$, *где*

$$r_2 = -\frac{m+2n}{\sqrt{n}+\sqrt{-m-n}}\,; \tag{4.54}$$

$$I(f) \le m \ln\frac{r_1}{r(1-r_1)^2} + n \ln\frac{(1+r_1)^2}{(1-r_1)^2(1-r^2)} + \\ + 2\sqrt{-n(m+n)}\ln\frac{r_1}{r} \tag{4.55}$$

для $r \in (r_1, 1)$, *если* $m + n < 0$, $m + 2n > 0$;

$$I(f) \le m \ln \frac{r_2}{r(1+r_2)^2} + n \ln \frac{(1-r_2)^2}{(1+r_2)^2(1-r^2)} + \\ + 2\sqrt{-n(m+n)} \ln \frac{r_2}{r} \quad (4.56)$$

для $r \in (r_2, 1)$, *если* $n > 0$, $m + 2n < 0$.

Теоремы 4.5 и 4.6 содержат в себе, как частные случаи при надлежащем выборе параметров m и n, результаты многих авторов, связанные с оценками роста и искажением при конформных отображениях, см., например, [4, 5, 8, 9, 26, 30, 63–65, 102, 105, 110, 111, 132, 135, 136, 138, 141, 146, 163, 170, 254, 255, 289, 314] и цитируемую там библиографию.

Выделим еще один важный частный случай теоремы 4.5, который позволяет обнаружить на $\Omega(z_0)$ семейства опорных отрезков.

Теорема 4.7. *В классе* S *при фиксированном* z_0, $|z_0| = r < 1$, *при условии, что* $l \neq 0$ *и* $2l\alpha + \beta^2 - l^2 = 0$, *справедлива точная оценка*

$$\operatorname{Re}\left[\zeta_1 \ln \frac{f(z_0)}{z_0} + \zeta_2 \ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] \le \int_0^{r_0} y(x(\rho), \rho) \frac{d\rho}{\rho} + \\ + (\gamma + l) \ln \frac{r(1-r_0^2)}{r_0(1-r^2)} + \left(\frac{\beta\delta}{l} - \alpha\right) \ln \frac{r}{r_0}, \quad (4.57)$$

где функции $y(x, \rho)$ *и* $x = x(\rho)$ *определены по формулам* (4.46) *и* (4.47), *соответственно. Здесь*

$$r_0 = \sqrt{\frac{a_0 - 1}{a_0 + 1}} \quad (4.58)$$

и

$$a_0 = \frac{\beta\delta + \sqrt{(\beta^2 + l^2)(\delta^2 + l^2)}}{l^2}. \quad (4.59)$$

Анализ и надлежащие вычисления, выполненные в диссертации [122] и опубликованные в монографии [5], позволили записать интеграл в формуле (4.45) в элементарных функциях. В следующем разделе мы приведем, в качестве иллюстрации, соответствующие выкладки в частном случае при решении общей проблемы углового смещения и вращения при конформных отображениях круга D функциями класса S и некоторых его подклассов.

4.5. Геометрия множества значений системы функционалов

Как мы уже выяснили ранее, $\Omega(z_0)$ представляет собой выпуклое, замкнутое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^4$. Исследуем теперь структуру опорных множеств. Всюду ниже $|z_0| = r$.

При всех $\zeta \in \mathbb{R}^4_0 \setminus G(r)$ экстремальные функции в классе $\mathcal{C}(0, r)$ для сопряженной задачи единственны и имеют вид

$$h(z, \rho) = \frac{k_0(\rho) + z}{k_0(\rho) - z}, \;\; 0 \le \rho \le r.$$

В этом случае опорное множество $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$ состоит из одной точки с координатами

$$\ln \frac{f(z_0)}{z_0} = \int\limits_0^r (h(\rho, \rho) - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \int\limits_0^r (x_0 - 1 + i\sigma(x_0, a)) \frac{d\rho}{\rho}\,,$$

$$\ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = \int\limits_0^r \frac{h'(0, \rho) d\rho}{1 - \rho^2} = \int\limits_0^r (a x_0 - 1 + i\sigma(x_0, a)) \frac{d\rho}{x_0 \rho}\,, \tag{4.60}$$

где функции $k_0(\rho)$ и $\sigma(x, a)$ определены надлежащим образов в секции 4.3.

Покажем, что во всех остальных случаях опорное множество $\mathcal{H}_\Omega(\zeta)$ представляет собой прямолинейный отрезок. Действительно, пусть $\zeta \in G(r)$. Тогда экстремальные функции в классе $\mathcal{C}(0, r)$ не единственны. Они образуют однопараметрическое семейство:

$$h(z, \rho) = \begin{cases} q(k_0, z), \;\; 0 \le \rho \le \rho_0, \\ \\ (1 - \mu(\rho))\, q(k_1, z) + \mu(\rho)\, q(k_2, z), \;\; \rho_0 \le \rho \le r, \end{cases} \tag{4.61}$$

где

$$q(k, z) = \frac{k + z}{k - z}$$

и функции $k_n(\rho)$, $n = 0, 1, 2$, определены в §4.3. Пусть $\mu(\rho)$ – произвольная измеримая функция со значениями из промежутка $[0, 1]$. Покажем,

что полученное по формулам

$$Z = \ln \frac{f(z_0)}{z_0} = \int\limits_0^{\rho_0} (q(k_0,\rho) - 1)\,\frac{d\rho}{\rho} + \\ + \int\limits_{\rho_0}^{r} [(1-\mu(\rho))\,q(k_1,z) + \mu(\rho)\,q(k_2,z) - 1]\,\frac{d\rho}{\rho}, \quad (4.62)$$

$$W = \ln \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = \int\limits_0^{\rho_0} \frac{\rho q'_z(k_0,0)}{1-\rho^2}\,\frac{d\rho}{\rho} + \\ + \int\limits_{\rho_0}^{r} \frac{\rho}{1-\rho^2}[(1-\mu(\rho))\,q'_z(k_1,0) + \mu(\rho)\,q'_z(k_2,0) - 1]\,\frac{d\rho}{\rho}, \quad (4.63)$$

множество опорных точек $(Z,W) \in \mathbb{R}^4$ представляет собой отрезок прямой в $\mathbb{R}^4$ с концами в точках (Z_n, W_n), $n = 1, 2$, где

$$Z_n = \int\limits_0^{\rho_0} (q(k_0,\rho) - 1)\frac{d\rho}{\rho} + \int\limits_{\rho_0}^{r} (q(k_n,\rho) - 1)\frac{d\rho}{\rho};$$

$$W_n = \int\limits_0^{\rho_0} \frac{\rho q'_z(k_0,0)}{1-\rho^2}\frac{d\rho}{\rho} + \int\limits_{\rho_0}^{r} \frac{\rho q'_z(k_n,0)}{1-\rho^2}\frac{d\rho}{\rho}\,.$$

Действительно, пусть $\zeta \in G(r) \setminus G_l$, тогда

$$Z = \int\limits_0^{\rho_0} (q(k_0,\rho) - 1)\frac{d\rho}{\rho} + \int\limits_{\rho_0}^{r} (q(k_1,\rho) - 1)\frac{d\rho}{\rho} + \\ + \int\limits_{\rho_0}^{r} \mu(\rho)[(q(k_2,\rho) - q(k_1,\rho)]\,\frac{d\rho}{\rho}\,.$$

Так как

$$q(k_2,\rho) - q(k_1,\rho) = x_2 - x_1 + i[\sigma(x_2,a) - \sigma(x_1,a)]$$

и

$$\sigma(x_n, a) = \operatorname{sign}(\beta x_n + \delta)\sqrt{2ax_n - x_n^2 - 1} = \frac{\beta x_n + \delta}{l},$$

$n = 1, 2$, то

$$q(k_2, \rho) - q(k_1, \rho) = x_2 - x_1 + i\frac{\beta}{l}(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left(1 + i\frac{\beta}{l}\right).$$

Вынося постоянную за знак интеграла, поучим

$$\int\limits_{\rho_0}^{r} \mu(\rho)[(q(k_2, \rho) - q(k_1, \rho)]\frac{d\rho}{\rho} = \left(1 + i\frac{\beta}{l}\right)\int\limits_{\rho_0}^{r} \mu(\rho)(x_2 - x_1)\frac{d\rho}{\rho}.$$

В силу обобщенной теоремы о среднем

$$\int\limits_{\rho_0}^{r} \mu(\rho)(x_2 - x_1)\,\frac{d\rho}{\rho} = \mu_0 \int\limits_{\rho_0}^{r} (x_2 - x_1)\,\frac{d\rho}{\rho}, \tag{4.64}$$

где μ_0 – некоторое число из промежутка $[0, 1]$. Отсюда следует, что

$$Z = (1 - \mu_0)Z_1 + \mu_0 Z_2.$$

Аналогично,

$$W = \int\limits_{0}^{\rho_0} \frac{\rho q_z'(k_0, 0)}{1 - \rho^2}\frac{d\rho}{\rho} + \int\limits_{\rho_0}^{r} \frac{\rho q_z'(k_1, 0)}{1 - \rho^2}\frac{d\rho}{\rho} + \\ + \int\limits_{\rho_0}^{r} \frac{\rho}{1 - \rho^2}\mu(\rho)[q_z'(k_2, 0) - q_z'(k_1, 0)]\,\frac{d\rho}{\rho}.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{\rho}{1 - \rho^2}[q_z'(k_2, 0) - q_z'(k_1, 0)] = \\ = \frac{1}{x_1 x_2}\{x_2 - x_1 + i[x_1\sigma(x_2, a) - x_2\sigma(x_1, a)]\} \\ = \frac{1}{x_1 x_2}\{x_2 - x_1 + i\frac{1}{l}[x_1(\beta x_2 + \delta) - x_2(\beta x_1 + \delta)]\} = \\ = \frac{1}{x_1 x_2}(x_2 - x_1)\left(1 - i\frac{\beta}{l}\right).$$

Учитывая соотношение $x_1x_2 = (\delta^2 + l^2)(\beta^2 + l^2)^{-1}$, получим

$$\frac{\rho}{1-\rho^2}[q'_z(k_2,0) - q'_z(k_1,0)] = \frac{\beta^2 + l^2}{l(l+i\delta)}(x_2 - x_1).$$

Тогда, в силу (4.64),

$$\int\limits_{\rho_0}^{r} \frac{\rho}{1-\rho^2}\mu(\rho)[q'_z(k_2,0) - q'_z(k_1,0)]\frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= \frac{\beta^2 + l^2}{l(l+i\delta)} \int\limits_{\rho_0}^{r} \mu(\rho)(x_2 - x_1)\frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= \mu_0 \int\limits_{\rho_0}^{r} \frac{\rho}{1-\rho^2}(\rho)[q'_z(k_2,0) - q'_z(k_1,0)]\frac{d\rho}{\rho}.$$

Таким образом,

$$W = (1-\mu_0)W_1 + \mu_0 W_2.$$

Пусть, далее $(\zeta_1, \zeta_2) \in G(r) \cap G_l$, тогда

$$q(_2,\rho) - q(k_1,\rho) = 2i\sqrt{2a\xi - \xi^2 - 1}$$

и

$$q'_z(k_2,0) - q'_z(k_1,0)\frac{\rho}{1-\rho^2} = 2i\frac{1}{\xi}\sqrt{2a\xi - \xi^2 - 1}.$$

Применение теоремы о среднем к интегралу

$$\int\limits_{\rho_0}^{r} \mu(\rho)\sqrt{2a\xi - \xi^2 - 1}\frac{d\rho}{\rho} = \mu_0 \int\limits_{\rho_0}^{r} \sqrt{2a\xi - \xi^2 - 1}\frac{d\rho}{\rho}$$

приводит к аналогичному результату:

$$(Z, W) = ((1-\mu_0)Z_1 + \mu_0 Z_2, (1-\mu_0)W_1 + \mu_0 W_2).$$

Таким образом, точка (Z, W), отвечающая экстремальной функции $h(z,\rho)$ с произвольной измеримой $\mu(\rho)$, есть точка отрезка прямой с концами (Z_1, W_1) и (Z_2, W_2). Перебрав все измеримые функции, получим все точки этого отрезка. Достаточно рассмотреть $\mu(\rho) \equiv \mu_0 = \text{const}$, $0 \le \mu_0 \le 1$.

4.6. Экстремальные функции

Обратимся к выяснению вопросов, связанных с нахождением экстремальных функций для функционала $\mathcal{U}(f)$.

В соответствии с формулами обращения из предложения 4.1, каждой функции – параметру $h \in \mathcal{C}(0,r)$, $r = |z_0|$, отвечает единственная функция класса f, которая находится по формуле

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi(z,t), \tag{4.65}$$

где $w = \varphi(z,t)$, $\varphi(z,0) = z$, $z \in D$, - решение дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\, p(w,t), \ \text{ для п.в. } t \in [0,\infty), \tag{4.66}$$

с функцией

$$p\,(w,t) = \frac{h\left(\frac{\rho - we^{-i\theta}}{1-\rho we^{-i\theta}}\right) - i\,\mathrm{Im}\,h(\rho,\rho)}{\mathrm{Re}\,h(\rho,\rho)}\,. \tag{4.67}$$

Здесь ρ и θ, как функции переменной t, определяются из уравнений

$$t = \int\limits_{\rho}^{r} \mathrm{Re}\,h(\rho,\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \ \ \theta = \arg z_0 + \int\limits_{\rho}^{r} \mathrm{Im}\,h(\rho,\rho)\frac{d\rho}{\rho}. \tag{4.68}$$

Таким образом, задача определения экстремальных функций $f(z) \in S$ относительно функционала $\mathcal{U}(f)$ может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $\zeta = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^4$ и

$$h(z,\rho) = \begin{cases} q(k_0,z), \ \ 0 \le \rho \le \rho_0, \\ (1-\mu(\rho))q(k_1,z) + \mu(\rho)q(k_2,z), \ \ \rho_0 \le \rho \le r, \end{cases} \tag{4.69}$$

соответствующие экстремальные функции для функционала

$$\mathcal{G}(h) = \mathrm{Re}\,\left[\zeta_1(h(\rho)-1) + \zeta_2 h'(0)\frac{\rho}{1-\rho^2}\right], \tag{4.70}$$

на классе $\mathcal{C}$ – Каратеодори. Требуется найти общий интеграл нелинейного дифференциального уравнения (4.66) с функцией вида (4.67) и выполнить предельный переход (4.65).

Ниже мы изложим, предложенный нами в [128, 131, 141] метод интегрирования уравнения Лёвнера.

Начнем со следующего замечания.

Замечание 4.1. Функция $\omega(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, где $\rho(t)$ и $\theta(t)$ определяются из формул (4.68), является частным решением уравнения (4.66), проходящим через точку при $z_0 = re^{i \arg z_0}$.

Действительно,

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = \frac{d \ln \rho}{dt} + i \frac{d\theta}{dt},$$

где, как следует из формул (4.68),

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = -\frac{1}{\operatorname{Re} h(\rho, \rho)},$$

а

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\operatorname{Im} h(\rho, \rho)}{\operatorname{Re} h(\rho, \rho)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = -\frac{1 - i \operatorname{Im} h(\rho, \rho)}{\operatorname{Re} h(\rho, \rho)}.$$

С другой стороны

$$p(\omega, t) = \frac{1 - i\operatorname{Im} h(\rho, \rho)}{\operatorname{Re} h(\rho, \rho)},$$

что и завершает доказательство.

Следующие четыре результата содержат новые случаи интегрируемости уравнения Лёвнера в квадратурах, которые тесно связаны с определением экстремалей функционала $\mathcal{U}(f)$ на классе S.

Предложение 4.1. *Пусть* $w = \omega(t)$, $|\omega(t)| < 1$, – *частное решение уравнения Лёвнера*

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{\mu(t) + w}{\mu(t) - w}, \quad \text{для п.в. } t \in [0, \infty), \tag{4.71}$$

связанное с функцией $\mu(t)$ *на* $[s, \infty)$, $0 \le s \le t < \infty$, *соотношением*

$$\mu^2 \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \text{const}. \tag{4.72}$$

Тогда интеграл $w = \varphi(z, t, s)$ *уравнения* (4.71), *удовлетворяющий начальному условию* $\varphi(z, s, s) = z$, $z \in D$, *для п.в.* $t \in [s, \infty)$, *определяется из условия*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'_{z^2}}{\varphi^2} \cdot \frac{(\varphi - \mu)^2}{(\varphi - \omega)(\varphi - 1/\bar{\omega})}\right) = 0. \tag{4.73}$$

Предложение 4.2. *Пусть* $w = \omega(t)$, $|\omega(t)| < 1$, – *частное решение уравнения Лёвнера* (4.71), *связанное с функцией* $\mu(t)$ *на* $[s, \infty)$, $0 \le s \le t < \infty$, *соотношением*

$$\mu \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \text{const}. \tag{4.74}$$

Тогда интеграл $w = \varphi(z, t, s)$ *уравнения* (4.71), *удовлетворяющий начальному условию* $\varphi(z, s, s) = z$, $z \in D$, *для п.в.* $t \in [s, \infty)$, *определяется из условия*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'_{z^2}}{\varphi^2} \cdot \frac{e^t \varphi(\varphi - \mu)^2}{(\varphi - \omega)^2(\varphi - 1/\bar{\omega})^2}\right) = 0. \tag{4.75}$$

Предложение 4.3. *Пусть* $w = \omega(t)$, $|\omega(t)| < 1$, – *частное решение уравнения Лёвнера* (4.71), *а функции* $\nu_k(t)$, $\nu_k \ne \mu(t)$, $k = 1, 2$, *вида* $\nu_1 = R(t)\nu(t)$, $\nu_2(t) = \nu(t)/R(t)$, $|\nu(t)| = 1$, (*здесь либо* $|R(t)| \ne 0, 1$, $\operatorname{Im} R(t) = 0$, *либо* $|R(t)| = 1$, $\operatorname{Im} R(t) \ne 0$) *связаны с* $\omega(t)$ *и* $\mu(t)$ *на интервале* $0 \le t < \infty$ *соотношениями*

$$\mu^2 \nu_1 \nu_2 \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = \text{const},$$

$$\frac{(\omega - \mu)^2(\omega - \nu_1)(\omega - \nu_2)}{\omega^2(\omega - 1/\bar{\omega})^2} = \text{const}.$$

Тогда:

1. $\nu_k(t)$, $k = 1, 2$, – *решения уравнения* (4.71),

2. *Общий интеграл* $w = \varphi(z, t, s)$, $\varphi(z, s, s) = z$, $z \in D$, *уравнения* (4.71) *в точках дифференцируемости* $\mu(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'_{z^2}}{\varphi^2} \cdot \frac{(\varphi - \mu)^2(\varphi - \nu_1)(\varphi - \nu_2)}{(\varphi - \omega)^2(\varphi - 1/\bar{\omega})^2}\right) = 0. \tag{4.76}$$

Предложение 4.4. *Пусть* $w = \omega(t)$, $|\omega(t)| < 1$, – *частное решение уравнения Лёвнера–Куфарева*

$$\frac{dw}{dt} = -w\left[(1 - \lambda)\frac{\mu(t) + w}{\mu(t) - w} + \lambda \frac{\nu(t) + w}{\nu(t) - w}\right] \tag{4.77}$$

для почти всех $t \in [0, \infty)$, *где* $\lambda(t)$ - *произвольная измеримая функция,* $0 \le \lambda \le 1$, $|\mu(t)| = 1$, $|\nu(t)| = 1$. *Если на интервале* $[\tau, t_0)$ *выполняются соотношения*

$$\mu\nu \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \text{const}, \quad \frac{(\omega - \mu)(\omega - \nu)}{(\omega - 1/\bar{\omega})} = \text{const},$$

то для интегралов уравнения (4.77)*, удовлетворяющих начальному условию* $\varphi(z,\tau,\tau)=z$, $z\in D$, *в точках дифференцируемости функций* $\mu(t)$, $\nu(t)$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'_z}{\varphi}\cdot\frac{(\varphi-\mu)(\varphi-\nu)}{(\varphi-\omega)(\varphi-1/\bar{\omega})}\right)=0. \tag{4.78}$$

Доказательство приведенных утверждений осуществляется непосредственным дифференцированием соотношений (4.73), (4.74), (4.76) и (4.78).

Из формул (4.61) и (4.67) следует, что

$$p(z,t)=\begin{cases}(1-\lambda(t))q(\mu_1,z)+\lambda(t)q(\mu_2,z), & 0\le t\le t_0,\\ \\ q(\mu_0,z), & t_0\le t<\infty,\end{cases} \tag{4.79}$$

где

$$\mu_n(t)=\frac{\rho-k_n}{1-\rho k_n}e^{i\theta} \tag{4.80}$$

и

$$t=\int\limits_{\rho}^{r}\operatorname{Re}h(\rho,\rho)\frac{d\rho}{\rho}\,,\quad \theta=\arg z_0+\int\limits_{\rho}^{r}\operatorname{Im}h(\rho,\rho)\frac{d\rho}{\rho}\,. \tag{4.81}$$

Приведенные выше формулы вместе с предложениями 4.1 - 4.4 позволяют проинтегрировать уравнение Лёвнера с соответствующими правыми частями и для экстремальных функций $f(z)\in S$ получить надлежащие дифференциальные уравнения первого порядка типа Шиффера–Голузина с известными коэффициентами.

Именно:

1). При всех $\zeta\in\mathbb{R}^4\backslash G(r)$ и таких, что $\zeta_1\neq 0$ экстремальные функции $f(z)$ для функционала $\mathcal{U}(f)$ на классе S единственны и удовлетворяют уравнению

$$\frac{f_0(\zeta_1 f_0-(\zeta_1+\zeta_2)f(z))}{\bar{\zeta}_1(f(z)-f_0)^2}\cdot\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2= \\ =\frac{(z-\mu_0(0))^2(z^2-(R(0)+1/R(0))\nu(0)z+\nu^2(0))}{(z-z_0)^2(z-1/\bar{z}_0)^2}\,. \tag{4.82}$$

Здесь

$$\nu^2(t)=\frac{\zeta_1}{\bar{\zeta}_1}\bar{\mu}_0^2\frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2},\quad \omega(t)=\rho e^{i\theta}\,,$$

$$\left(R(t)+\frac{1}{R(t)}\right)\nu(t)=\omega+\frac{\zeta_1}{\bar\zeta_1}\bar\mu_0^2\frac{\omega}{\bar\omega^2}+\frac{\zeta_2}{\bar\zeta_1}\frac{\omega}{\bar\omega^2}\frac{(1-|\omega|^2)^2}{(\omega-\mu_0)^2},$$

$$\ln\frac{f_0}{z_0}=\int\limits_0^r(h(\rho,\rho)-1)\frac{d\rho}{\rho}\,.$$

2). Если $\zeta_1=0$, а $\zeta_2\neq 0$, то экстремальные функции $f(z)\in S$ для функционала $\mathcal{U}(f)$ также единственны и определяются из уравнения

$$\frac{\mu_0^2(0)\bar z_0^2 f_0^2}{z_0^2 f(z)(f(z)-f_0)^2}f'^2(z)=\frac{(z-\mu_0(0))^2}{z(z-z_0)^2(z-1/\bar z_0)^2}\,. \tag{4.83}$$

3). При всех $\zeta\in G(r)$ экстремальные функции не единственны, а образуют однопараметрическое семейство функций $f(z,m_0)$, $0\le m_0\le 1$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\bar z_0 f_0\mu_1(0)\mu_2(0)}{z_0 f(z)(f_0-f(z))}f'(z)=\frac{(z-\mu_1(0))(z-\mu_2(0)}{z(z-z_0)(z-1/\bar z_0)}\,, \tag{4.84}$$

если $\zeta\in G(0)$, и могут быть получены как композиция $F\circ\psi(z)$ двух однолистных аналитических функций, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{(\psi(z)-\mu_0(t_0))^2}{\psi(z)(\psi(z)-\omega(t_0))(\psi(z)-1/\bar\omega(t_0))}\psi'(z)=\frac{(z-\mu_1(0))(z-\mu_2(0)}{z(z-z_0)(z-1/\bar z_0)}\,, \tag{4.85}$$

и

$$\frac{f_0(\zeta_1 f_0-(\zeta_1+\zeta_2)F(z))}{\bar\zeta_1(F(z)-f_0)^2}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2=\frac{(z-\mu_0(t_0))^4}{(z-z_0)^2(z-1/\bar z_0)^2}\,, \tag{4.86}$$

соответственно, при $\zeta\in G(r)\setminus G(0)$.

Все приведенные выше обыкновенные дифференциальные уравнения интегрируются в элементарных функциях.

Для иллюстрации, приведем доказательство утверждения, сформулированного в пункте 2.

Если $\zeta_1=0$ и $\zeta_2=\gamma-i\delta$, то

$$x_0=\frac{a(\delta^2+\gamma^2)+b\gamma\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}{a^2\delta^2+\gamma^2} \tag{4.87}$$

и

$$\mu_0(t)=\frac{ab\delta^2-\gamma\sqrt{\delta^2+\gamma^2}+i\delta(d\gamma+a\sqrt{\delta^2+\gamma^2})}{a^2\delta^2+\gamma^2}e^{i\theta}. \tag{4.88}$$

Легко проверить, что

$$\mu_0(t)\frac{\bar{\omega}(t)}{\omega(t)} = \mu_0(t)e^{-2i\theta} \equiv \text{const}.$$

Таким образом, в данном случае для интегрирования уравнения Лёвнера можно применить предложение 4.2. В соответствии с ним, общий интеграл уравнения (4.69) с $\mu = \mu_0(t)$ вида (4.88) удовлетворяет соотношению (4.75). Проинтегрировав это соотношение по t от 0 до ∞, и учитывая начальное условие $\varphi(z,0) = z$, $z \in D$, и формулу (4.65), для экстремальной функции $f(z) \in S$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\mu_0^2(0)\bar{z}_0^2 f_0^2}{z_0^2 f(z)(f(z)-f_0)^2} f'^2(z) = \frac{(z-\mu_0(0))^2}{z(z-z_0)^2(z-1/\bar{z}_0)^2}\,, \tag{4.89}$$

где μ_0 имеет вид (4.88), а

$$\ln\frac{f_0}{z_0} = \int_0^r (x_0 - 1 + i\sigma(x_0,a))\frac{d\rho}{\rho}.$$

Заинтересованный читатель может обратиться за подробными доказательствами всех приведенных выше соотношений, а также предложений 4.1 – 4.4, к работе [141].

4.7. Взаимный рост аргументов однолистной функции и её производной

Как уже отмечалось выше, оценки углового смещения и вращения при конформных и более общих отображениях играют важную роль в геометрической теории функций и являются предметом интенсивных исследований.

Пусть $I(f) = J(\arg(f(z_0)/z_0), \arg f'(z_0))$ – произвольный непрерывный функционал, зависящий от углового смещения $\arg(f(z_0)/z_0)$ и вращения $\arg f'(z_0)$ отображения $f \in S$ в фиксированной точке $z_0 \in D$. Обозначим через Ω^* множество значений комплекснозначного функционала

$$Z(f) \equiv \arg\frac{f(z_0)}{z_0} + i\arg f'(z_0) = U + iV,\ \ f \in S,$$

где $z_0 \in D$ и фиксировано. Тогда

$$\max_S J(\arg(f(z_0)/z_0), \arg f'(z_0)) = \max_{\Omega^*} J(U,V),$$

и для решения общей задачи достаточно определить множество Ω^*. Очевидно, что вместо функционала $Z(f)$ можно рассмотреть любой другой линейный комплекснозначный функционал, зависящий от $\arg(f(z_0)/z_0)$ и $\arg f'(z_0)$, например,

$$W(f) \equiv \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + i \arg f'(z_0) = X + iY, \ f \in S.$$

Действительно, если обозначить через $\Omega(z_0)$ множество значений функционала $W(f)$, то мы определим и Ω^* как образ Ω при линейном отображении вида

$$\begin{cases} U = -\frac{1}{2}[X - Y] \\ V = Y. \end{cases}$$

Запишем теорему 4.1 применительно к комплекснозначному функционалу $W(f)$.

Теорема 4.8. *Множество $\Omega(z_0)$ значений функционала*

$$W(f) = \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + i \arg f'(z_0) \tag{4.90}$$

на классе S, где $z_0 \in D$ и фиксировано, $|z_0| = r$, представимо в виде

$$\Omega(z_0) = \left\{ X + iY : X(h) = \int_0^r \operatorname{Im} \left(\frac{\rho}{1-\rho^2} h'_z(0,\rho) - h(\rho,\rho) \right) \frac{d\rho}{\rho}, \right.$$
$$\left. Y(h) = \int_0^r \operatorname{Im} \left(\frac{\rho}{1-\rho^2} h'_z(0,\rho) + h(\rho,\rho) \right) \frac{d\rho}{\rho} \right\}, \tag{4.91}$$

когда $h(z,t)$ пробегает весь класс $\mathcal{C}(0,r)$.

Непосредственно из теоремы 4.8, компактности и выпуклости класса $\mathcal{C}$ следует замкнутость, ограниченность и выпуклость множества $\Omega(z_0)$. Заметим, что вместе с функцией $h(z,t)$, классу $\mathcal{C}(0,|z_0|)$ принадлежит также функция вида $\overline{h(\bar{z},t)}$. При этом

$$(X + iY)(\overline{h(\bar{z},t)}) = -(X + iY)(h(z,t)).$$

Следовательно, если точка $(X,Y) \in \Omega(z_0)$, то множеству $\Omega(z_0)$ принадлежит также точка $(-X,-Y)$. Более глубокий анализ теоремы 4.8, позволит нам ниже установить симметрию множества $\Omega(z_0)$ относительно обеих координатных осей.

Теорема 4.9. *Пусть $f \in S$ и $z_0 \in D$, $|z_0| = r$. Тогда при любых вещественных значениях параметров A и B имеют место следующие точные оценки*

$$\max_{f\in S}\left[A\arg\frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + B\arg f'(z_0)\right] \le \\ \le \int_0^{|z_0|} \max_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Im}\ \left[\beta p(t) + \frac{\delta t}{1-t^2}p'(0)\right]\frac{dt}{t}, \quad (4.92)$$

где

$$\beta = B - A, \quad \delta = B + A.$$

При этом

$$\max_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Im}\ \left[\beta p(t) + \frac{\delta t}{1-t^2}p'(0)\right] = \max_{|\eta|=1} \operatorname{Im}\ \left[\beta\frac{1+t\eta}{1-t\eta} + \frac{2\delta t\eta}{1-t^2}\right] = \\ = \left|\beta + \frac{\delta}{x}\right|\sqrt{2\frac{1+t^2}{1-t^2}x - x^2 - 1}, \quad (4.93)$$

где $x = x(t)$ — наибольший при $|\beta| > |\delta|$, и наименьший при $|\beta| < |\delta|$, положительный корень уравнения

$$\beta x^3 - \frac{1+t^2}{1-t^2}\beta x^2 + \frac{1+t^2}{1-t^2}\delta x - \delta = 0. \quad (4.94)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 4.10. *На классе S при фиксированном z_0, $0 < |z_0| = r < 1$ и произвольных вещественных A и B, справедливы точные оценки*

$$A\arg\frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + B\arg f'(z) \le \frac{|\beta|}{2}\ln\frac{1+|\beta|\sigma}{1-|\beta|\sigma} + \frac{|\delta|}{2}\ln\frac{1+|\delta|\sigma}{1-|\delta|\sigma} - \\ - \sqrt{|\beta\delta|}\ln\frac{1+\sigma\sqrt{|\beta\delta|}}{1-\sigma\sqrt{|\beta\delta|}} + 2\sqrt{|\beta\delta|}\arctan\sigma\sqrt{|\beta\delta|} - \\ - \frac{\delta+\beta}{2}\arctan\frac{\sigma(\beta^2x^2-\delta^2)}{x(\delta-\beta)} + \frac{\delta-\beta}{2}\arctan\frac{\sigma(\beta^2x^2-\delta^2)}{x(\delta+\beta)} \equiv \\ \equiv H(\beta,\delta,r), \quad (4.95)$$

где

$$\beta = B - A, \quad \delta = B + A,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{x^2-1}{\beta^2 x^2 - \delta^2}} \tag{4.96}$$

и x — наибольший, если $|\beta| \geq |\delta|$, и наименьший, если $|\beta| \leq |\delta|$, положительный корень уравнения

$$\beta x^3 - \frac{1+r^2}{1-r^2}\beta x^2 + \frac{1+r^2}{1-r^2}\delta x - \delta = 0. \tag{4.97}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим (4.93) в (4.92) и выполним под знаком интеграла замену переменной $t \mapsto x$ по формуле

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{\delta - \beta x^3}{\delta x - \beta x^2},$$

где $x \geq 1$ при $|\beta| > |\delta|$ и $x \leq 1$ при $|\beta| < |\delta|$. Интегрирование завершает доказательство теоремы. □

Укажем некоторые следствия теоремы 4.10. Прежде всего отметим, что из этой теоремы немедленно выводится теорема вращения Г. М. Голузина и И. Е. Базилевича в классе S. Она получается при $A = 0$ и $B = \pm 1$. Далее, неравенство

$$|\arg f'(z) - \arg(f(z)/z)| \leq \ln \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

также является очевидным следствием теоремы 4.10, если положить $A = B = \pm 1/2$. Выбрав $A = \pm 1$, $B = 0$, получаем точную оценку

$$|\arg f'(z) - 2\arg(f(z)/z)| \leq -\ln(1-|z|^2), \quad f \in S,$$

в классе S. Используя теперь известную связь между функциями f и F классов S и Σ, приходим к теореме вращения в классе Σ :

$$|\arg F'(z)| \leq \ln \frac{|z|^2}{|z|^2-1}, \quad |z| > 1.$$

Далее, если $f(z) \in S$, то функция

$$\Phi(z) = z\sqrt{\frac{f(z^p)}{z^p}} = z + \dots$$

принадлежит подклассу S_p класса S функций, обладающих p - кратной симметрией вращения относительно начала координат, см. [105], с. 50. Тогда

$$\arg \Phi'(z_0) = \frac{1-p}{p} \arg \frac{f(z_0^p)}{z_0^p} + \arg f'(z_0^p).$$

Полагая в теореме 4.10

$$A = \frac{p-1}{2p}, \quad B = \frac{p+1}{2p},$$

и рассматривая функционал в точке z_0^p, мы получаем решение задачи вращения в подклассах S_p класса S однолистных аналитических функций в круге D, обладающих p – кратной симметрией вращения относительно начала координат, см. [121]. Заметим, что $S_1 = S$.

Теорема 4.11. (Теорема вращения в классе S_p). *Пусть $f \in S_p$, $p = 1, 2, \ldots$ и z, $0 < |z| = r < 1$, фиксировано. Тогда справедлива точная оценка*

$$\begin{aligned} |\arg f'(z)| \quad \leq \quad & \frac{2}{\sqrt{p}} \arctan \frac{\sigma}{\sqrt{p}} + \frac{1+p}{2p} \arctan \frac{py}{p-1} + \\ + \quad & \frac{1-p}{2p} \arctan \frac{py}{p+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \\ + \quad & \frac{1}{2p} \ln \frac{p+\sigma}{p-\sigma} - \frac{1}{\sqrt{p}} \ln \frac{\sqrt{p}+\sigma}{\sqrt{p}-\sigma}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma = p\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-p^2}}, \quad y = \frac{1}{px}\sqrt{(x^2-1)(x^2-p^2)},$$

и $x = x(r)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$x^3 - ax^2 + a\,p\,x - p = 0,$$

в котором $a = (1+r^{2p})/(1-r^{2p})$.

В приложениях, при рассмотрении ряда частных случаев, теорема 4.9 может оказаться предпочтительнее ее развернутого варианта, теоремы 4.10. Приведем два примера. Если положить $A = \mp 1/2$, $B = \pm 1/2$, то $\beta = \pm 1$, $\delta = 0$, и непосредственно из теоремы 4.9 следует, что

$$\left|\arg \frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leq \int_0^{|z_0|} \max_{|\eta|=1} \left|\mathrm{Im} \left[\frac{1+t\eta}{1-t\eta}\right]\right| \frac{dt}{t} = \int_0^{|z_0|} \frac{2dt}{1-t^2} = \ln \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

Чтобы оценить $\arg f'(z_0)$, нужно положить $A = 0$, $B = \pm 1$. Тогда $\beta = \delta = \pm 1$, и задача сводится, согласно теореме 4.9, к нахождению максимума функции $y/x + y$ на окружности $(x - a(t))^2 + y^2 = b^2(t)$, где $a(t) = (1-t^2)/(1-t^2)$, $b(t) = 2t/(1-t^2)$, при всех $0 < t < |z_0|$. Элементарные вычисления показывают, что эта функция принимает максимальное значение при $x_0 = 1$, если $0 \le t \le 1/\sqrt{2}$, и в точке

$$x_0(t) = \frac{a(t) - 1 + \sqrt{(a(t)+1)(a(t)-3)}}{2},$$

если $t \ge 1/\sqrt{2}$ $(a(t) \ge 3)$. Тогда

$$|\arg f'(z_0)| \le \int\limits_0^{|z_0|} (1 + 1/x_0)\sqrt{2a(t)x_0 - x_0^2 - 1}\frac{dt}{t}\,.$$

Интегрирование приводит к формулам

$$|\arg f'(z)| \le \begin{cases} 4\arcsin|z|, & |z| \le 1/\sqrt{2}, \\ \pi + \ln\frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & 1/\sqrt{2} \le |z| < 1. \end{cases}$$

Обратимся теперь к задаче об описании самого множества $\Omega(z_0)$ значений функционала $W(f)$ на классе f. Поскольку $\Omega(z_0)$ является выпуклым множеством, то для определения его границы достаточно найти опорную функцию

$$H_\Omega(\theta,\, r) = \max_{f\in S} \mathrm{Re}\,\left\{e^{-i\theta}W(f)\right\}$$

при всех вещественных значениях параметра $\theta \in [0, 2\pi]$. В силу теоремы 4.9,

$$H_\Omega(\theta,\, r) = H(\beta, \delta, r),$$

где

$$\beta = \sin\theta - \cos\theta, \quad \delta = \sin\theta + \cos\theta.$$

Замечание 4.1. Поскольку $\beta(-\theta) = -\delta(\theta)$ и $\delta(-\theta) = -\beta(\theta)$, то $H_\Omega(\theta,\, r) = H_\Omega(-\theta,\, r)$, и мы приходим к заключению, что множество $\Omega(z_0)$ симметрично относительно оси X. А поскольку множеству $\Omega(z_0)$ принадлежат одновременно точки (X, Y) и $(-X, -Y)$, то $\Omega(z_0)$ симметрично и относительно оси Y.

Зная опорную функцию к множеству $\Omega(z_0)$, теперь нетрудно дать описание и самого множества $\Omega(z_0)$.

Теорема 4.12. *Область $\Omega(z_0)$ значений комплекснозначного функционала*

$$W(f) = \arg \frac{z_0^2 f'(z_0)}{f^2(z_0)} + i \arg f'(z_0) = X + iY,\ f \in S,$$
$$0 < |z_0| = r < 1, \quad (4.98)$$

представляет собой замкнутое выпуклое множество, симметричное относительно координатных осей X и Y, граница $\partial\Omega(z_0)$ которого зависит только от r и задается следующим образом.
1) *При $0 < r < 1/\sqrt{2}$ множество $\partial\Omega(z_0)$ состоит из двух вертикальных отрезков*

$$X = \pm \ln \frac{1}{1-r^2},$$

$$|Y| \le \ln \frac{1}{1-r^2} + \ln(1 + r\sqrt{2-r^2}) + 2 \arctan \frac{r}{\sqrt{2-r^2}},$$

соединенных гладким образом кривой с параметрическим уравнением

$$\varphi(\theta) = \mathrm{sign}\beta \frac{1+i}{2} \ln \frac{1+|\beta|\sigma}{1-|\beta|\sigma} + i\frac{\mathrm{sign}\delta}{2} \ln \frac{1+|\delta|\sigma}{1-|\delta|\sigma} -$$
$$- \frac{\mathrm{sign}(\beta\delta)[\delta + i(\beta+\delta)]}{2\sqrt{|\beta\delta|}} \left(\ln \frac{1+\sigma\sqrt{|\beta\delta|}}{1-\sigma\sqrt{|\beta\delta|}} - 2 \arctan \sigma\sqrt{|\beta\delta|} \right) -$$
$$- \frac{1+2i}{2} \arctan \frac{\sigma(\beta^2x^2 - \delta^2)}{x(\delta-\beta)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma(\beta^2x^2 - \delta^2)}{x(\delta+\beta)},$$

когда параметр θ изменяется в интервале $0 \le \theta \le \pi$, и ее зеркальным отражением относительно оси X.
2) *При $1/\sqrt{2} \le r < 1$ граница $\partial\Omega(z_0)$ состоит из двух, отмеченных выше, вертикальных отрезков, двух горизонтальных отрезков*

$$Y = \pm \left\{ \pi + \ln \frac{r^2}{1-r^2} \right\},$$

$$|X| \le \ln \frac{1}{1-r^2} + \ln(r^2 + \sqrt{2r^2-1}) - 2 \arctan \sqrt{2r^2-1}$$

и четырех дуг кривой $\varphi(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, соединяющих гладким образом отрезки. Здесь

$$\sigma = \sqrt{\frac{x^2-1}{\beta^2x^2 - \delta^2}}$$

и x *— наибольший при* $\pi/2 < \theta < \pi$ *и* $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, *и наименьший при* $0 < \theta < \pi/2$ *и* $\pi < \theta < 3\pi/2$, *положительный корень уравнения*

$$\beta x^3 - \frac{1+r^2}{1-r^2}\beta x^2 + \frac{1+r^2}{1-r^2}\delta x - \delta = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что область $\Omega(z_0)$ выпукла, и обозначим через θ угол между внешней нормалью к границе $\partial\Omega(z_0)$ области $\Omega(z_0)$ в точке $\varphi(\theta)$ и положительным направлением оси X. Тогда $\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta}\varphi(\theta)\right\} = = H_\Omega(\theta,\, r)$. Для завершения доказательства, достаточно воспользоваться теоремой 4.13 и правилом получения огибающей семейства прямых. □

Для иллюстрации предложенного нами ранее метода определения экстремальных функций, рассмотрим следующий частный случай.

Теорема 4.13. *В классе* S *при фиксированном значении* $z_0 \in D$, $|z_0| = r$, *справедлива точная оценка*

$$\left|\arg\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \le \ln\frac{1+r}{1-r}\,. \tag{4.99}$$

Знак равенства достигается только для функции

$$f(z) = \frac{z_0}{(1-i\delta r)^2}\left(\frac{1-w(z)}{1+w(z)}\right)^2, \tag{4.100}$$

где

$$w(z) = \frac{1-\sqrt{z/z_0}}{1+\sqrt{z/z_0}}e^{i\delta\ln\frac{1+r\sqrt{z/z_0}}{1-r\sqrt{z/z_0}}},\ \delta = \pm 1. \tag{4.101}$$

Здесь под $\sqrt{z/z_0}$ *понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в* 1 *при* $z \to z_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценки (4.99) проще всего следуют из (4.92) – (4.94) при $A = B = \pm 1/2$, то есть при $\delta = \pm 1$ и $\beta = 0$. В этом случае $x_0 = 1/a(\rho)$ и остается выполнить интегрирование.

Найдем экстремальные функции. По формулам (4.87)– (4.89), которые как раз отвечают нашему случаю, когда $\zeta_1 = 0$, а $\zeta_2 = \pm 1$, находим, что $x_0 = 1/a$,

$$\mu_0(t) = \frac{b \pm i}{a}\,e^{i\theta},\ \ \mu_0(0) = \frac{b(r) \pm i}{a(r)}\,e^{i\arg z_0}$$

и

$$\sigma(x_0, a) = \pm\frac{b}{a},$$

а уравнение (4.89) принимает вид

$$\frac{z_0}{\bar{z}_0\mu_0(0)} \cdot \frac{z - \mu_0(0)}{(z - z_0)(z - 1/\bar{z}_0)} = f'(z)\frac{f_0}{\sqrt{f(z)/z}(f(z) - f_0)}.$$

Здесь под $\sqrt{f(z)/z}$ понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в 1 при $z \to 0$ и

$$f_0 = z_0 \exp\left\{\int_0^r (x_0 - 1 + i\sigma(x_0, a))\frac{d\rho}{\rho}\right\}.$$

Остается выполнить интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделенными переменными и известными коэффициентами. □

Глава 5

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Данная глава посвящена развитию метода П.П. Куфарева об определении неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на полигональные области при наличии граничных нормировок.

5.1. Постановка задачи

Проблема построения конформных отображений канонических областей на полигональные области остается актуальной до настоящего времени в связи с новыми приложениями теории комплексного потенциала в различных областях естествознания (см., например, [400]). В связи с известным интегральным представлением таких отображений (см. [253], с. 162, [400], с. 65), проблема, по существу, состоит в определении неизвестных параметров, входящих в формулу Шварца–Кристоффеля. К настоящему времени разработаны различные эффективные методы численного определения этих параметров (см. [92, 253, 375, 400] и цитируемую там литературу). Один из таких методов восходит к известной работе П.П. Куфарева [235] (см., более подробно, [5], с. 296), который, на основе сочетания принципа симметрии и параметрического метода Лёвнера [273], редуцировал проблему определения неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля к задаче численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Развивая идеи работы [235] и комбинируя их с современными методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Хопкинс и Робертс [391] достигли на этом пути новых глубоких результатов.

В ряде случаев требуется найти конформные отображения круга или полуплоскости на многоугольную область при надлежащих граничных нормировках, например, типа "три точки - в три точки". Отметим, например, что если в качестве таких трех точек в области выбрать вер-

шины многоугольника, то число подлежащих определению параметров уменьшается на три. Далее, если область неограничена, то включение в число таких точек надлежащих вершин многоугольника, расположенных в бесконечности, оказывается целесообразным с вычислительной точки зрения. Для того, чтобы идеи работы [235] распространить на этот случай, нужно, прежде всего, модифицировать уравнение Лёвнера, применительно к отображениям, сохраняющим фиксированные граничные точки.

Данная глава посвящена дальнейшему развитию метода Куфарева применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на полигональные области при наличии граничных нормировок. Второй параграф содержит постановку задачи и некоторые предварительные результаты. В параграфе 3 приводится дифференциальное уравнение Лёвнера для полуплоскости с разрезом вдоль кривой Жордана при условии, что точки 0, 1, и ∞ остаются неподвижными. В следующем параграфе проблема определения неизвестных параметров в формуле Шварца–Кристоффеля редуцируется к задаче Коши интегрирования некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Параграф 5 посвящен вопросам разрешимости и единственности этой задачи и исследованию качественных свойств решения. В заключительном параграфе 6 дано приложение к случаю неограниченной области специального вида, возникающей в задаче исследования электромагнитного поля в торцевой зоне турбогенераторов.

Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ – расширенная комплексная плоскость и H^+ – ее верхняя полуплоскость. Обозначим через D_n внутренность n–угольника с внутренними углами при вершинах A_k, равными $\alpha_k\pi$, $k = 1, \ldots, n$. Для любого многоугольника имеет место простое соотношение между числами α_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2.$$

Если A_k являются конечными вершинами, то $0 \le \alpha_k \le 2$. Мы не требуем, однако, чтобы D_n была ограниченной. Если вершина A_k находится в бесконечности, то угол между двумя прямыми с вершиной в этой точке определяется как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус. При таком определении угла в бесконечности остается в силе соотношение $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$.

Центральным результатом в теории конформного отображения полигональных областей является следующая теорема (см. [253], с. 162,

[400], с. 65)

Теорема 5.1. *Пусть D_n - односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная многоугольником с вершинами в точках A_1, ...,A_n и внутренними углами $\pi\alpha_k$, где $0 \leq \alpha_k \leq 2$, если A_k конечны и $-2 \leq \alpha_k \leq 0$, если $A_k = \infty$. Тогда существует конформное отображение верхней полуплоскости H^+ на D_n и любое такое отображение может быть представлено в виде*

$$f(z) = c \int_0^z \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + c_1. \tag{5.1}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_n$ - прообразы вершин $A_1, \ldots, A_n$.

Комплексные постоянные $a_1, \ldots, a_n, c$ и c_1, входящие в формулу (5.1), называются *аксессорными параметрами* интеграла Шварца - Кристоффеля (5.1). Основная проблема конформного отображения полигональных областей состоит в определении этих аксессорных параметров.

На вещественной оси комплексной плоскости $\mathbb{C}$ фиксируем три точки $a_{n-2} = 0, a_{n-1} = 1$ и $a_n = \infty$ и среди множества конформных отображений вида (5.1) выберем то единственное, которое переводит эти точки, соответственно, в вершины A_{n-2}, A_{n-1} и A_n. В соответствии с выбранной нормировкой, предполагая A_{n-2} конечной, получаем

$$c_1 = A_{n-2}.$$

Далее мы поступим следующим образом. Фиксируем на части границы области D_n, не содержащей вершин A_{n-2}, A_{n-1}, A_n, точку A^* и проведем из этой точки внутрь области D_n прямолинейный разрез $\Lambda(t)$ переменной длины $|\Lambda(t)|$, зависящей от вещественного параметра t. Пусть $|\Lambda(0)| = 0$. Область с разрезом обозначим через $D_n(t)$. Поскольку $D_n(t)$ - полигональная область, то функцию $f(z,t)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость H^+ на $D_n(t)$ и удовлетворяющую прежним условиям нормировки, можно представить в виде

$$f(z,t) = c(t) \int_0^z (z - \lambda(t)) \prod_{k=-1}^{n-1} (z - a_k(t))^{\sigma_k} dz + A_{n-2}. \tag{5.2}$$

Здесь a_{-1} и a_0 - прообразы точки A^*, $\sigma_k = \alpha_k - 1$, $a_{n-2} = 0, a_{n-1} = 1$, при этом параметры α_{-1} и α_0 связаны соотношениями $\alpha_{-1} + \alpha_0 = 1$, если $A^* \neq A_p, p = 1, \ldots, n-3$, и $\alpha_{-1} + \alpha_0 = \alpha_p$, если $A^* = A_p, p = 1, \ldots, n-3$.

Пусть при $t = 0$ известны значения всех параметров, входящих в формулу (5.2), то есть известно конформное отображение $f(z, 0) : H^+ \to D_n(0)$. Требуется определить конформное отображение $f(z, t) : H^+ \to D_n(t)$ при всех допустимых значениях параметра t или, что то же, найти при таких t аксессорные параметры $a_k(t), \lambda(t)$ и $c(t)$. Отметим здесь, что поскольку начальную область $D_n(0)$ можно выбрать достаточно простой, то на этом пути последовательно можно получить конформные отображения полуплоскости на произвольные полигональные области.

5.2. Уравнение Лёвнера для полуплоскости

В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим однопараметрическое семейство $D(t)$, $0 \le t \le T$, односвязных областей, которые получаются из односвязной области $D = D(T)$ с кусочно-гладкой границей проведением разреза вдоль кривой Жордана $w = w(t), 0 \le t \le T$, лежащего в D, кроме одного из своих концов $w(T)$, принадлежащего ∂D. Пусть $D(0)$ - область с полным разрезом, а $D(T)$ - исходная область. Фиксируем на ∂D три точки A_1, A_2, A_3 и, не теряя общности, будем предполагать, что $w(T)$ не принадлежит дуге, связывающей эти точки.

По теореме Римана существует единственное конформное отображение $w = f(z, t)$ верхней полуплоскости H^+ на $D(t)$, нормированное условиями: $f(0, t) = A_1$, $f(1, t) = A_2$, $f(\infty, t) = A_3$.

Теорема 5.2. *Пусть $f(z, t) : H^+ \to D(t)$, $0 \le t \le T$, однопараметрическое семейство конформных отображений, нормированное условиями: $f(0, t) = A_1$, $f(1, t) = A_2$, $f(\infty, t) = A_3$. Существует единственная параметризация разреза, при которой f дифференцируема по t локально равномерно относительно $z \in H^+$ и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial z}\frac{z(z-1)}{\lambda - z}\,. \tag{5.3}$$

Здесь $\lambda = \lambda(t)$ - прообраз подвижного конца разреза при отображении $f(z, t)$.

Отметим, что в формулировке теоремы можно отказаться от кусочной гладкости границы, если под A_k, $k = 1, 2, 3$ понимать три простых конца в смысле Каратеодори.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, сформулируем одно из следствий известной леммы Шварца.

Предложение 5.1. *Пусть функция $w(z)$ осуществляет конформное отображение H^+ на H^+ с разрезом вдоль аналитической кривой, вы-*

ходящим из точки λ, $-\infty < \lambda < 0$, *нормированное условиями* $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$. *Тогда* $w(z)$ *аналитична при* $z = 1$ *и* $w'(1) \le 1$. *В случае знака равенства* $w(z) \equiv z$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная ось и $[\alpha, \beta]$ – отрезок отрицательной части $\mathbb{R}$, который переходит в разрез Γ при отображении $w(z)$. В силу принципа симметрии Римана–Шварца $w(z)$ продолжается в нижнюю полуплоскость через $\mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$ и представляет конформное отображение $\mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$ на $\mathbb{C} \setminus \{\Gamma \cup \Gamma^*\}$. Здесь Γ^* - зеркальное отражение Γ относительно вещественной оси. В частности, $w(z)$ аналитична в точке $z = 1$ и $\operatorname{Im} w'(1) = 0$. Обозначим через ϕ конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на плоскость с разрезом вдоль $\mathbb{R}^-$. Очевидно

$$\phi(\zeta) = \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right)^2 = 1 + \dots .$$

Аналитическая функция $h(\zeta) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$ в круге $|\zeta| < 1$, где $\phi^{-1}(1) = 0$, удовлетворяет условиям леммы Шварца. Значит $h'(0) = w'(1) \le 1$. В случае знака равенства $h(\zeta) \equiv \zeta$, то есть $w(z) \equiv z$.

Доказательство теоремы 5.2. Введем в рассмотрение функцию $w(z, t) = f^{-1}(f(z, 0), t)$, отображающую конформно H^+ на H^+ с разрезом. При этом, очевидно, $w(z, 0) \equiv z$ и отображение оставляет неподвижными точки $0, 1$ и ∞. Не теряя общности, будем предполагать, что конец разреза, принадлежащий $\mathbb{R}$, расположен левее начала координат. По теореме Каратеодори о сходимости к ядру $w(z, \bullet)$ непрерывна на $[0, T]$ при $z \in H^+$. В силу предложения 5.1 и теоремы Вейерштрасса о сходимости последовательности голоморфных функций, $w'(1, t) = \alpha(t)$ – неотрицательная, непрерывная монотонно убывающая функция параметра $t, 0 \le t \le T$.

Действительно, если $0 \le s \le t < T$, то к функции $h(z) = w^{-1}(w(z, t), s)$ применимо предложение 5.1, согласно которому

$$h'(1) = w'(1, t)/w'(1, s) < 1.$$

Поскольку выбор параметризации разреза в нашем распоряжении, то можно положить $\alpha(t) = e^{-t}$.

При выбранной параметризации разреза, при любых $0 \le s \le t < T$, рассмотрим функцию $h(z, s, t) = f^{-1}(f(z, s), t)$, конформно отображающую H^+ на H^+ с разрезом и сохраняющую неподвижными точки $0, 1$ и ∞. По формуле Шварца для полуплоскости

$$h(z, s, t) = z + \frac{z(z-1)}{\pi} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\operatorname{Im} h(x, s, t) dx}{(x - z)(x - 1)x} . \tag{5.4}$$

Теперь отметим, что при обоих предельных переходах $s \to t$ и $t \to s$ отрезок $[\alpha, \beta]$ стягивается в точку $\lambda(t)$ (соответственно, $\lambda(s)$) (ср. [105], с. 91). Далее, из (5.4) при $z \to 1$ находим

$$h'(1, s, t) = e^{s-t} = 1 + \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{Im} h(x, s, t) dx}{(x-1)^2 x}\,. \tag{5.5}$$

Так как $h(w(z, s), s, t) = w(z, t)$, то из (5.4) следует, что

$$w(z, t) - w(z, s) = \frac{w(z, s)(w(z, s) - 1)}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{Im} h(x, s, t) dx}{(x - w(z, s))(x-1)x}\,. \tag{5.6}$$

Эту формулу, по теореме о среднем, можно записать в виде

$$w(z, t) - w(z, s) = \frac{w(z, s)(w(z, s) - 1)}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{Im} h(x, s, t) dx}{(x-1)^2 x} \{\ldots\},$$

где

$$\{\ldots\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{x^{**} - 1}{x^{**} - w(z, s)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{x^{*} - 1}{x^{*} - w(z, s)} \right\}$$

и x^{**}, x^{*} - некоторые точки из $[\alpha, \beta]$. Далее, из соотношений (5.5) и (5.6) следует, что

$$\lim_{s \to t} \frac{w(z, t) - w(z, s)}{t - s} \frac{t - s}{e^{s-t} - 1} = \frac{w(z, s)(w(z, s) - 1)}{\lambda - w(z, t)} (\lambda - 1).$$

Аналогичный результат получим, если устремим $t \to s$.

Таким образом, при выбранной параметризации разреза, функция $w(z, t)$ дифференцируема по t локально равномерно относительно $z \in H^+$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (1 - \lambda) \frac{w(w-1)}{\lambda - w}\,.$$

Здесь $\lambda = \lambda(t)$ – прообраз на $\mathbb{R}$ - подвижного конца разреза при отображении $f : H^+ \to D(t)$.

Поскольку $w(z, t) = f^{-1}(f(z, 0), t)$, то

$$f(w(z, t), t) = f(z, 0).$$

Отсюда и из известной теоремы Витали следует, что $f(z,t)$ дифференцируема по t локально равномерно относительно z в верхней полуплоскости и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{z(z-1)}{\lambda - z}(\lambda - 1).$$

Замечая, что $\lambda(t) < 0$, и переходя к новому параметру $t \to \int(1-\lambda)dt$, приходим к уравнению (5.3). Такую параметризацию разреза будем назвать *стандартной*.

Отметим здесь, что близкие вопросы, связанные с исследованием полугрупп конформных отображений полуплоскости и круга при наличии граничных условий, рассматривались ранее в работах [274], с. 335, [110].

5.3. Уравнения для аксессорных параметров

Возвращаясь к первоначально поставленной задаче, и предполагая, что прямолинейный разрез в области $D_n(t)$ запараметризован стандартным образом, приходим к заключению, что функция $f(z,t)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на область $D_n(t)$, и нормированная при всех $t, 0 \le t \le T$, условиями $f(0,t) = A_1, f(1,t) = A_2, f(\infty,t) = A_3$, одновременно удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial z} = c(t))(z - \lambda(t)) \prod_{k=-1}^{n-1} (\lambda(t) - a_k(t))^{\sigma_k} \tag{5.7}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{z(z-1)}{\lambda(t) - z}\,. \tag{5.8}$$

Отсюда следует

Теорема 5.3. *Для всех $0 \le t \le T$ аксессорные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{da_k(t)}{dt} = -\frac{a_k(t)(a_k(t)-1)}{\lambda(t) - a_k(t)}, \quad k = -1, \ldots, n-3, \tag{5.9}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \lambda(t)(\lambda(t)-1)\sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{1}{\lambda(t) - a_k(t)} + 2\lambda(t) - 1, \tag{5.10}$$

$$\frac{d\ln c(t)}{dt} = -\sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k - 2, \tag{5.11}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} &a_k(0) = a_k, \quad k = 1, \ldots, n-3, \\ &a_{-1}(0) = a_0(0) = \lambda(0) = \lambda_0 = f^{-1}(A^*, 0) \\ &c(0) = c_0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Замечание 5.1. Если $A^* = A_p, p = 1, \ldots, n-3$, то в формуле (5.9) отсутствует уравнение при $k = p$, а в формулах (5.10), (5.11) должно отсутствовать слагаемое при $k = p$.

Замечание 5.2. Из (5.9) – (5.12) следует, что

$$c(t) = c_0 e^{t a_n},$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = (1 - \lambda(t)) \left[\sum_{k=-1}^{n-3} \sigma_k \frac{d \ln(1 - a_k(t))}{dt} + a_n \right] - a_{n-1}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\phi(z,t) = \ln f'(z,s)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{z(z-1)}{\lambda - z} + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda - z)^2} - 1\,. \tag{5.13}$$

Поскольку

$$\phi(z,t) = \ln c + \ln(z - \lambda(t)) + \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \ln(z - a_k(t)),$$

то ее частные производные относительно параметра t и переменной z имеют вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\lambda'(t)}{z - \lambda(t)} - \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{a_k'(t)}{z - a_k(t)}\,, \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{z - \lambda(t)} + \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{1}{z - a_k(t)}\,. \tag{5.15}$$

Подставляя (5.14) и (5.15) в уравнение (5.13), получим соотношение

$$\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\lambda'(t)}{z-\lambda(t)} - \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{a_k'(t)}{z-a_k(t)} = \\ = \left(\frac{1}{z-\lambda(t)} + \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{1}{z-a_k(t)} \right) \times \\ \times \left\{ 1 - z - \lambda(t) + \frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{z-\lambda(t)} \right\} + \frac{\lambda(t)(1-\lambda(t))}{(z-\lambda(t))^2} - 1, \quad (5.16)$$

которое должно выполняться при всех значениях параметра t и всех z из верхней полуплоскости.

Приравнивая вычеты левой и правой частей уравнения (5.16) в точках $z = a_k(t), \lambda(t)$, и сравнивая свободные члены, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{a_k(a_k-1)}{\lambda - a_k}, k = -1, \ldots, n-3, \quad (5.17)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = (2\lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1) \sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k \frac{1}{\lambda - a_k}, \quad (5.18)$$

$$\frac{d \ln c}{dt} = -\sum_{k=-1}^{n-1} \sigma_k - 2. \quad (5.19)$$

Очевидно,

$$\begin{array}{l} a_k(0) = a_k, k = 1, \ldots, n-3, \\ a_{-1}(0) = a_0(0) = \lambda(0) = \lambda_0 = f^{-1}(A^*, 0) \\ c(0) = c_0. \end{array} \quad (5.20)$$

Уравнения (5.17) – (5.19) вместе с начальными условиями (5.20) для аксессорных параметров позволяют путем интегрирования найти их значения в любой момент времени $t, 0 \le t \le T$, а значит решить поставленную выше задачу о конформном отображении верхней полуплоскости на данную полигональную область с прямолинейным разрезом при заданных граничных нормировках.

Отметим, что для вычисления длины разреза можно воспользоваться соотношением

$$|\Lambda(t)| = \int_0^t \left| c(t)\lambda(t)(1-\lambda(t)) \prod_{k=-1}^{n-1} (\lambda(t) - a_k(t))^{\sigma_k} \right| dt, \quad (5.21)$$

если разрез выходит не из вершины многоугольника, и формулой

$$|\Lambda(t)| = \int_0^t \left| c(t)\lambda(t)(1-\lambda(t)) \prod_{k=-1,k\neq p}^{n-1} (\lambda(t) - a_k(t))^{\sigma_k} \right| dt,$$

если разрез выходит из вершины A_p. Эти соотношения непосредственно вытекают из геометрического смысла параметра $\lambda(t)$ и уравнения Лёвнера (5.3).

5.4. Существование и единственность аналитического решения

Следуя работе [235], докажем, что система (5.9) – (5.11) вместе с начальными условиями (5.12) имеет единственное решение для $0 \leq t \leq T$, которое является голоморфным относительно переменной $t^{1/2}$.

Теорема 5.4. *Система* (5.9) – (5.11) *вместе с начальными условиями* (5.12) *имеет единственное аналитическое относительно* $t^{1/2}$ *решение на некотором интервале* $0 \leq t \leq t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнив в системе (5.9), (5.10) замену переменной по формуле $x = \sqrt{t}$, $0 \leq t \leq T$, и сохранив за неизвестными функциями прежние обозначения, получим

$$\frac{da_k}{dx} = -2x\frac{a_k(a_k-1)}{\lambda - a_k}, \quad k = -1, \ldots, n-3, \tag{5.22}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = 2x\{2\lambda - 1 + \sigma_{n-2}(\lambda - 1) + \sigma_{n-1}\lambda\} - \\ - \sum_{k=-1}^{n-3} \sigma_k \frac{da_k}{dx} - 2x(\lambda + a_k - 1)\,. \tag{5.23}$$

Будем искать решение системы (5.22), (5.23) при начальных условиях $\lambda(0) = a_k(0) = \lambda_0, k = -1, 0$, и $a_k(0) = a_{k,0}, k = 1, \ldots, n-3$ в виде степенных рядов

$$a_k(x) = \lambda_0 + a_{k,1}x + \ldots + a_{k,p}x^p + \ldots, \quad k = -1, 0,$$

$$a_k(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + \ldots + a_{k,p}x^p + \ldots, \quad k = 1, \ldots, n-3, \tag{5.24}$$

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_p x^p + \ldots.$$

Подставляя ряды (5.24) в уравнения (5.22), (5.23), и сравнивая коэффициенты при x в первой степени, получим, для определения первых коэффициентов этих рядов, следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= \frac{-q}{\lambda_1 - a_{k,1}}, \quad k = -1, 0, \\ \lambda_1 &= \frac{q\sigma_0}{\lambda_1 - a_{0,1}} + \frac{q\sigma_{-1}}{\lambda_1 - a_{-1,1}}, \\ a_{k,1} &= 0, \quad k = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}$$

где $q = 2\lambda_0(\lambda_0 - 1)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= \sqrt{\frac{q\alpha_{-1}}{\alpha_0}}, \\ a_{-1,1} &= -\sqrt{\frac{q\alpha_0}{\alpha_{-1}}}, \\ \lambda_1 &= (\alpha_{-1} - \alpha_0)\sqrt{\frac{q}{\alpha_{-1}\alpha_0}}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_{-1,1}\lambda_p + (pa_{0,1} - a_{-1,1})\, a_{-1,p} = \phi_{-1}, \\ &a_{0,1}\lambda_p + (pa_{-1,1} - a_{0,1})\, a_{0,p} = \phi_0, \\ &\lambda_p + \textstyle\sum_{k=-1}^{n-3} \sigma_k a_{k,p} = \phi^*, \\ &a_{k,p} = \phi_k, \quad k = 1, \ldots, n-3. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Здесь ϕ_k и ϕ^* зависят только от коэффициентов, предшествующих определяемому.

Исследование знакоопределенности определителя системы (5.25) сводится к изучению квадратного трехчлена

$$-a_{0,1}a_{-1,1}p^2 + (\alpha_{-1}a_{-1,1}^2 + \alpha_0 a_{0,1}^2)p - a_{0,1}a_{-1,1}(\alpha_{-1} + \alpha_0 - 1)$$

при всех значениях $p > 1$, так как $\lambda_1 - a_{-1,1} = a_{0,1}$ и $\lambda_1 - a_{0,1} = a_{-1,1}$.

Поскольку $a_{0,1}a_{-1,1} = -q$, а $\alpha_{-1}a_{-1,1}^2 + \alpha_0\, a_{0,1}^2 = q(\alpha_0 + \alpha_{-1})$, то квадратный трехчлен приводится к виду

$$Q(p) = q(p^2 + (\alpha_0 + \alpha_{-1})p + \alpha_0 + \alpha_{-1} - 1).$$

Отсюда следует, что $Q(p) > 0$ для всех $p \geq 1$.

Таким образом, коэффициенты степенных рядов (5.24) определяются однозначно.

Теперь установим, что ряды (5.24) сходятся и, стало быть, представляют собой в круге сходимости единственное аналитическое решение системы (5.22), (5.23). Для этого перейдем в системе (5.22), (5.23) к новым переменным по формулам (ср. [5], с. 325)

$$y_k = \frac{x}{\lambda - a_{k-2}} + B_k, k = 1, 2,$$

$$y_k = \frac{x}{\lambda - a_{k-2}}, \quad k = 3, \ldots, n-1, \tag{5.26}$$

$$y_n = \lambda - \lambda_0,$$

где $B_k = -1/(\lambda_1 - a_{k-2,1}), \quad k = 1, 2$. Выполнив надлежащие преобразования, получим следующую систему

$$x \frac{dy_k}{dx} + \sum_{p=1}^{n} u_{k,p}\, y_p = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \tag{5.27}$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Здесь $u_{k,p}$ – известные параметры, а $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ - представляют собой полиномы относительно указанных в скобках переменных, которые не содержат членов нулевого и первого измерения относительно переменных y_k.

Замечая, что $y_k(0) = 0$, представим решение системы (5.26) в рядах вида

$$y_k = \sum_{m=1}^{\infty} c_{k,m} x^m, \tag{5.28}$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Подставив (5.28) в (5.27) и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим, для определения $c_{k,m}$, следующую систему уравнений

$$\begin{array}{l} (u_{1,1} + m)c_{1,m} + u_{1,2}c_{2,m} + \ldots + u_{1,n}c_{n,m} = B_{1,m} \\ u_{2,1}c_{1,m} + (u_{2,2} + m)c_{2,m} + \ldots + u_{2,n}c_{n,m} = B_{2,m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1}c_{1,m} + u_{n,2}c_{2,m} + \ldots + (u_{n,n} + m)c_{n,m} = B_{n,m}, \end{array} \tag{5.29}$$

где $B_{k,m}$ уже известные параметры.

Покажем теперь, что система (5.27) имеет аналитическое решение $y_1, \ldots, y_n$, обращающееся в нуль при $x = 0$.

Обозначим через Δ_m^* - определитель системы (5.29). Разложим определитель $\Delta_{k,m}$, получаемый из определителя Δ_m^* заменой его k-го столбца на столбец из правых частей системы (5.29), по элементам k-го столбца. Будем иметь

$$\Delta_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,m}\delta_{k,j}^m,$$

где $\delta_{k,j}^m$ – алгебраические дополнения к элементам k-го столбца определителя $\Delta_{k,m}$. Пусть $c = \max|u_{k,j}|$ по всем $1 < k,\ j \le n$. Тогда, применяя к определителю $\delta_{k,j}^m$ теорему Адамара, получим оценку

$$\delta_{k,j}^m \le (c+m)^{n-1}\sqrt{(n-1)^{n-1}}\,.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$(c+m)^{n-1}|\Delta_m^*|^{-1} < N/m,$$

где N - некоторая постоянная, не зависящая от m.

Полученные оценки приводят к неравенству

$$|u_{k,m}| = |\Delta_{k,m}||\Delta_m^*|^{-1} \le |\Delta_m^*|^{-1}\sum_{j=1}^{n}|B_{j,m}||\delta_{k,j}^{(m)}| \le \beta_m,$$

где

$$\beta_m = m^{-1}D_n\sum_{j=1}^{n}|B_{j,m}|$$

и

$$D_n = N\sqrt{(n-1)^{n-1}}.$$

Обозначим через $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ функцию, мажорирующую каждую функцию $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Пусть $\tilde{u}_p(x), (p = 1, 2, \ldots, n)$ – решение системы уравнений

$$x\frac{d\tilde{u}_p}{dx} = nD_nF(x, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$$

с нулевыми начальными условиями. Тогда функции $\tilde{u}_p(x)$ тождественно равны друг другу и являются решением уравнения

$$x\frac{du}{dx} = nD_nF^*(x, u), \tag{5.30}$$

где $F^*(x,u) = F(x,u,\ldots,u)$. Если

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m, \tag{5.31}$$

то

$$d_m = m^{-1} n D_n G_m,$$

где G_m – полиномы от коэффициентов функций $u(x)$, предшествующих определяемому, и от коэффициентов тех слагаемых в разложении функции $F^*(x,u(x))$, которые содержат x в степени m. Отсюда следует оценка $\beta_m \le d_m$. То есть ряд (5.31) мажорирует ряд

$$\beta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m x^m. \tag{5.32}$$

С другой стороны, ряд (5.31) мажорируется решением уравнения

$$\tilde{u} = n D_n F^*(x,\tilde{u}) \tag{5.33}$$

с нулевым начальным условием, так как из теоремы о неявных функциях следует, что уравнение (5.33) имеет аналитическое решение

$$\tilde{u}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{d}_m x^m,$$

с коэффициентами $\tilde{d}_m = n D_n \tilde{G}_m$, где $\tilde{G}_m$ – полиномы от $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_{m-1}$ и тех коэффициентов разложения $F^*(x,\tilde{u})$, которые содержат x в степени m, удовлетворяющими неравенству $d_m \le \tilde{d}_m$.

Таким образом, в области сходимости решения уравнения (5.33) сходится ряд (5.31), а вместе с ним и ряды (5.28), что доказывает существование аналитического решения системы (5.9) – (5.11).

Функция $F^*(x,\tilde{u})$ – голоморфна в $\mathbb{C}^2$. Пусть $R, 0 < R < \infty$, фиксировано и $M = M(R) = \max|F^*(x,\tilde{u})|$, в бикруге $|x| < R, |\tilde{u}| < R$. Тогда для коэффициентов $b_{k,p}$ разложения этой функции в ряд Тейлора

$$F^*(x,\tilde{u}) = \sum_{k,p=0}^{\infty} b_{k,p} x^k \tilde{u}^p, b_{0,0} = 0, b_{0,1} = 0, \tag{5.34}$$

в силу неравенства Коши, (см. [396], с. 276) имеют место оценки

$$|b_{k,p}| \le \frac{M}{R^{k+p}}\,.$$

Если положить $|b_{k,p}| = M/R^{k+p}$, $b_{0,0} = 0$, $b_{0,1} = 0$, то ряд (5.34) можно просуммировать в бикруге $|x| < R, |\tilde{u}| < R$ и получить явный вид мажорантной функции

$$\Phi(x, \tilde{u}) = \frac{MR^2}{(R-x)(R-\tilde{u})} - \frac{M\tilde{u}}{R} - M.$$

Наряду с уравнением (5.33) рассмотрим уравнение

$$v = n\, D_n \Phi(x, v). \tag{5.35}$$

Его аналитическое решение с нулевыми начальными данными мажорирует соответствующее решение уравнения (5.33), а значит, в силу неравенств $|c_{k,m}| \le \beta_m \le d_m \le \tilde{d}_m$, и решение исходной системы (5.28).

Оценим радиус сходимости рядов системы (5.28). Для этого достаточно заметить, что степенной ряд, представляющий собой искомое решение уравнения (5.35), имеет радиус сходимости $R^* = R^2/(R+2nMD_n)^2$.

5.5. Случай ступенчатой области

Рассмотрим, более подробно, один частный случай конформного отображения верхней полуплоскости на область ступенчатого вида. К такой задаче приводит, например, проблема исследования электромагнитного поля в торцевой зоне мощных турбогенераторов (см., например, [411], [400] с. 259 – 265).

Пусть $N = 0, 1, \ldots$ и фиксировано. Для любых положительных M_k и Q_k, $k = 1, \ldots, N$, $Q_0 = 0$, обозначим через Δ_k вертикальную полуполосу в комплексной плоскости w

$$\Delta_k = \left\{ w : \sum_{j=1}^{k-1} Q_j < \operatorname{Re} w < \sum_{j=1}^{k} Q_j, \operatorname{Im} w > \sum_{j=1}^{k} M_j \right\}$$

и рассмотрим, в качестве начальной области D_n, области следующего вида:

$$D_3 = \{ w : (-\pi < \arg w < \pi/2) \cap (\operatorname{Im} w > ih) \}$$

и

$$D_{2N+3} = D_3 \setminus \cup_{k=1}^{N} \Delta_k,$$

для $N = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $f_N(z)$, $N = 0, 1, \ldots$ конформное отображение верхней полуплоскости комплексной плоскости z на $2N+3$–угольник D_{2N+3}, нормированное условиями $f_N(0) = 0$, $f_N(1) = A_{2N+2}$ и $f_N(\infty) = \infty$, где A_{2N+2} вершина области D_{2N+3} с нулевым внутренним углом в бесконечности. В соответствии с формулой Шварца-Кристоффеля (5.1),

$$f_N(z) = c_0 \int_0^z \prod_{k=1}^{2N+2} (\zeta - a_k)^{\sigma_k} d\zeta, \tag{5.36}$$

где $a_{2N+2} = 1$, $a_{2N+1} = 0$, $\sigma_{2k+1} = 1/2$, $k = 0, \ldots, N$, $\sigma_{2k} = -1/2$, $k = 1, \ldots, N$, и

$$c_0 = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^{2N} (1 - a_k)^{-\sigma_k}.$$

Наша цель, зная конформное отображение $f_N(z)$ верхней полуплоскости на область D_{2N+3} построить отображение $f_{N+1}(z)$ верхней полуплоскости на область D_{2N+5}. При $N = 0$ отображение $f_0(z)$ выписывается в явном виде.

Эту цель мы достигнем в два этапа. На первом этапе строим отображение $f_N(z, t_1)$ верхней полуплоскости на область D_{2N+3} с горизонтальным разрезом длинны Q_{N+1}, выходящим из точки $A^* = \sum_{k=0}^{N} Q_k + i \sum_{k=1}^{N+1} M_k$. Область D_{2N+3} с отмеченным разрезом, которая представляет собой полигональную область с $2N + 6$ вершинами, обозначим через D^*_{2N+6}.

На втором этапе, зная $f_N(z, T)$, строим отображение $f^*_N(z, t)$ верхней полуплоскости на область D^*_{2N+6} с вертикальным разрезом, выходящим из точки $\sum_{k=1}^{N+1}(Q_k + iM_k)$. По теореме Каратеодори о сходимости к ядру (см. глава 1, а также [13], с. 56)

$$f_{N+1}(z) = \lim_{t \to \infty} f^*_N(z, t). \tag{5.37}$$

Этап 1. Начальная область представляет собой $2N + 3$ угольник, следовательно $n = 2N+3$. Конформное отображение $f_N(z, T)$ верхней полуплоскости на область D_{2N+3} с горизонтальным разрезом длинны Q_{N+1}, выходящим из точки $A^* = \sum_{k=0}^{N} Q_k + i \sum_{k=1}^{N+1} M_k$, в соответствии с формулой (5.2), имеет вид

$$f_N(z, T) = c(T) \int_0^z (\zeta - \lambda(T)) \prod_{k=-1}^{2N+2} (\zeta - a_k(T))^{\sigma_k} d\zeta. \tag{5.38}$$

Для определения аксессорных параметров, согласно теореме 5.3, имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\tfrac{da_k(t)}{dt} &= -\tfrac{a_k(t)(a_k(t)-1)}{\lambda(t)-a_k(t)}, \quad k=-1,\ldots,2N,\\
\tfrac{d\lambda(t)}{dt} &= (2\lambda(t)-1)+\lambda(t)(\lambda(t)-1)\textstyle\sum_{k=-1}^{2N+2}\sigma_k\tfrac{1}{\lambda(t)-a_k(t)} \qquad (5.39)\\
\tfrac{d\ln c(t)}{dt} &= -1/2,
\end{aligned}$$

и начальные условия

$$\begin{gathered}
a_k(0)=a_k, \quad k=1,\ldots,2N+2,\\
a_{-1}(0)=a_0(0)=\lambda(0)=\lambda_0, \qquad (5.40)\\
c(0)=c_0.
\end{gathered}$$

Здесь λ_0 – единственный отрицательный корень уравнения

$$f_N(\lambda_0)=\sum_{k=0}^{N}Q_k+i\sum_{k=1}^{N+1}M_k.$$

Уравнения (5.39) вместе с начальным условии (5.40) для аксессорных параметров позволяют, путем интегрирования, найти их значения в момент времени $t=T$. Для определения момента времени T, можно использовать уравнение (5.21) для вычисления длины разреза

$$Q_{N+1}=\int_0^T\left|c(t)\lambda(t)^{3/2}\prod_{k=-1}^{2N}(\lambda(t)-a_k(t))^{\sigma_k}\right|dt.$$

Остается заметить, что уравнение для параметра λ в системе (5.39), которое может быть записано в виде,

$$\frac{d\lambda}{dt}=(1-\lambda)\left[\sum_{k=-1}^{2N}\sigma_k\frac{d\ln(1-a_k)}{dt}+\alpha_{2N+3}\right]-\alpha_{2N+2},$$

допускает первый интеграл

$$\lambda(t)=1-e^{-t/2}\prod_{k=1}^{2N}\left(\frac{1-a_k(t)}{1-a_k}\right)^{-\sigma_k}(1-a_{-1}(t))^{1/2}(1-a_0(t))^{1/2},$$

поскольку $\alpha_{2N+2} = 0$. Его можно использовать для контроля точности вычислений.

Этап 2. На этом этапе нам известно конформное отображение $f_N(z,T)$ верхней полуплоскости на область D^*_{2N+6}, которое мы запишем в стандартных обозначениях

$$f_N(z,T) = c_0 \int_0^z \prod_{k=1}^{2N+5} (\zeta - a_k)^{\sigma_k} d\zeta,$$

где $a_{2N+5} = 1, a_{2N+4} = 0$, $\sigma_2 = 2$, и

$$c_0 = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^{2N+3} (1 - a_k)^{-\sigma_k}.$$

Построим отображение $f^*_N(z,t)$ верхней полуплоскости на область D^*_{2N+6} с вертикальным разрезом, выходящим из вершины $A_2 = \sum_{k=1}^{N+1}(Q_k + iM_k)$. По формуле (5.2) при $n = 2N+6$ при всех $t > 0$

$$f^*_N(z,t) = c(t) \int_0^z (\zeta - \lambda(t)) \prod_{k=-1,k\neq 2}^{2N+5} (\zeta - a_k(t))^{\sigma_k} d\zeta,$$

причем $\alpha_0 = 3/2$ и $\alpha_{-1} = 1/2$. Заметим, что $f^*_M(z,0) \equiv f_N(z,T)$.

Для определения аксессорных параметров, вновь применим теорему 5.3 с учетом замечания 5.1. Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\tfrac{da_k(t)}{dt} &= -\tfrac{a_k(t)(a_k(t)-1)}{\lambda(t)-a_k(t)}, \quad k = -1,\, 0,\, 1,\, 3,\, \ldots,\, 2N+3, \\
\tfrac{d\lambda(t)}{dt} &= (2\lambda(t)-1) + \lambda(t)(\lambda(t)-1) \textstyle\sum_{k=-1,k\neq 2}^{2N+5} \sigma_k \tfrac{1}{\lambda(t)-a_k(t)} \qquad (5.41) \\
\tfrac{d\ln c(t)}{dt} &= -1/2,
\end{aligned}$$

и начальные условия

$$\begin{gathered}
a_k(0) = a_k, \quad k = 1,\, 3,\, \ldots,\, 2N+3, \\
a_{-1}(0) = a_0(0) = \lambda(0) = a_2, \qquad (5.42) \\
c(0) = c_0.
\end{gathered}$$

Уравнения (5.41) вместе с начальными условиями (5.42) для аксессорных параметров позволяют, путем интегрирования, найти их значения

в любой момент времени $t > 0$. Для определения длины разреза $\Lambda(t)$ можно использовать уравнение (5.21)

$$|\Lambda(t)| = \int_0^t \left| c(t)\lambda(t)^{3/2} \prod_{k=-1,k\neq 2}^{2N+3} (\lambda(t) - a_k(t))^{\sigma_k} \right| dt.$$

Остается заметить, что уравнение для параметра λ в системе (5.41), которое может быть записано в виде,

$$\frac{d\lambda}{dt} = (1-\lambda)\left[\sum_{k=-1,k\neq 2}^{2N+3} \sigma_k \frac{d\ln(1-a_k)}{dt} + \alpha_{2N+6} \right] - \alpha_{2N+5}.$$

допускает первый интеграл

$$\lambda(t) = 1 - e^{-t/2} \prod_{k=1,k\neq 2}^{2N+3} \left(\frac{1-a_k(t)}{1-a_k} \right)^{-\sigma_k} \times$$
$$\times (1-a_{-1}(t))^{1/2}(1-a_0(t))^{-1/2}(1-a_2),$$

поскольку $\alpha_{2N+5} = 0$.

Таким образом, искомое конформное отображение $f_{N+1}(z)$ верхней полуплоскости на ступенчатую область D_{2N+5} имеет вид (5.36), если вместо N положить $N+1$ и аксессорные параметры a_k выбрать в виде

$$a_k = \lim_{t\to\infty} a_{k+1}(t), \quad k = 2, \ldots, 2N+2,$$
$$a_1 = \lim_{t\to\infty} a_0(t).$$

Здесь $a_k(t)$ – решение задачи Коши (5.41), (5.42).

Часть II

К теории квазиконформных отображений на плоскости

ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Теория квазиконформных отображений на плоскости, основы которой были заложены в 20–30-е годы Грётчем [112] и М.А. Лаврентьевым [246], представляет собой одну из наиболее интенсивно развивающихся областей современной геометрической теории функций комплексного переменного.

В работах Альфорса, Астала, П.П. Белинского, Берса, Б.В. Боярского, И.Н. Векуа, Л.И. Волковыского, Геринга, Иванца, С.Л. Крушкаля, Кюнау, М.А. Лаврентьева, Лехто, Мартина, Тейхмюллера, Е.М. Чирки, Б.В. Шабата и других авторов были изучены основные свойства квазиконформных отображений на плоскости и некоторых их обобщений, а также обнаружены важные приложения ко многим разделам современного анализа (см., например, [12–20, 23–25, 35–48, 56, 60, 61, 83–85, 88, 89, 89, 97, 100, 101, 106, 174, 182, 183, 193, 203, 209, 247, 248, 250, 263–265, 280, 281, 299, 308, 326–331, 333, 361, 392, 393, 406]). Фундаментальные исследования Вуоринена, Вяйсяля, Геринга, В.А. Зорича, Мартио, Ю.Г. Решетняка, Рикмана и др., см., например, [90, 91, 96, 106, 189, 190, 282, 332, 371], позволили распространить эту теорию на случай пространственных отображений с ограниченным искажением, или, что то же самое, на класс квазирегулярных отображений.

Аналитический подход к исследованию квазиконформных отображений связан с изучением эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных, см., например, [25, 192, 249, 390]. В этом отношении уникальное положение в геометрической теории диф-

ференциальных уравнений занимает комплексное уравнение Бельтрами, которому удовлетворяет любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм плоскости с обобщенными производными и, стало быть, любое квазиконформное отображение. Поэтому многие свойства квазиконформных отображений и их обобщений могут быть получены, исходя из теории дифференциальных уравнений (см., например, [51, 52, 57–59, 69–71, 84,85,175,176,179,211,252,298,302,303,383,394,395]). Впервые это уравнение в вещественной форме появилось в работе Бельтрами [49] в связи с изучением аналитических функций на поверхностях. Отметим, что любое квазиконформное отображение плоскости можно рассматривать как конформное отображение на соответствующей поверхности (см. [14,17]). Аналитическое определение квазиконформного отображения, как гомеоморфного обобщенного решения уравнения Бельтрами, фактически содержалось в одной из работ Моррей [298], опубликованной в 1938 году вне всякой связи с существовавшей уже тогда геометрической теорией квазиконформных отображений. Полная эквивалентность этого определения геометрическому определению квазиконформных отображений была установлена много позже, благодаря работам Берса, Пфлюгера, Лехто, Мори и других авторов, к концу 50-х – началу 60-х годов (см., например, [53, 54, 270, 318]).

При аналитическом подходе к изучению квазиконформных отображений центральным является вопрос о взаимосвязи коэффициента уравнения Бельтрами с его решением. Поведение этой характеристики при локально равномерной сходимости отображений имеет очень сложную природу. Отметим, в частности, что непрерывность коэффициента Бельтрами не влечет, в общем случае, дифференцируемость отображения с соответствующей точке. Это обусловлено тем, что решение уравнения Бельтрами связано с комплексной характеристикой посредством нелинейного преобразования, в котором к тому же задействован сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда – так называемое комплексное преобразование Гильберта, именуемое также иногда преобразованием Альфорса-Берлинга (см., например., [16,17,55,181,185, 186, 191, 195–201, 267, 291–296]). В связи с вышеизложенным, одним из центральных вопросов, который мы намерены изучить в этой и в следующей части книги, как раз и связан с исследованием локального поведения квазиконформного отображения в зависимости от аналитических свойств его комплексной характеристики.

Перейдем к краткому обзору основных результатов части II.

Глава 6 посвящена исследованию проблемы локального поведения квазиконформных отображений на плоскости и связанным с ней вопро-

сам граничного соответствия. Особое внимание уделено случаю, когда комплексные характеристики квазиконформных отображений являются аппроксимативно непрерывными функциями, поскольку, как отмечалось выше, даже их непрерывность не гарантирует существование полного дифференциала у соответствующего квазиконформного отображения. В основе исследования – введенное нами ранее [156, 157, 159], и развиваемое во втором параграфе данной главы, понятие асимптотической однородности квазиконформного отображения в фиксированной точке, эквивалентное специальному типу дифференцируемости, восходящему к П.П. Белинскому ([48], с. 41). В параграфе 6.1 рассмотрены основные пространства нормированных Q – квазиконформных автоморфизмов комплексной плоскости и их комплексных характеристик и, на базе известной теоремы Берса–Боярского и свойства равностепенной абсолютной непрерывности, установлены предварительные результаты о сходимости. В этом же параграфе исследованы, важные для дальнейших рассуждений, частные случаи интегрируемости в квадратурах дифференциального уравнения Бельтрами. В частности, установлен следующий результат, см., предложение 6.5, который будет служить источником, важных для дальнейшего, примеров квазиконформных отображений и их обобщений: если $h \in \mathfrak{F}_Q$ имеет комплексную характеристику вида

$$\nu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}},$$

где $k(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – измеримая функция, то

$$h(z) = \frac{z}{|z|}\exp\left\{\int_1^{|z|}\frac{1+k(\tau)}{1-k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right\}.$$

Параграф 6.2 целиком посвящен геометрическим и аналитическим аспектам квазиконформных отображений, связанным с понятием асимптотической однородности. Отображение $f : G \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, будем называть асимптотически однородным в точке $0 \in G \subset \mathbb{C}$, если

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta$$

для любого $\zeta \in \mathbb{C}$. Как легко видеть, асимптотически однородное отображение f сохраняет инфинитезимальные окружности

$$\lim_{r\to 0}\frac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{\min_{|z|=r}|f(z)|} = 1,$$

модули инфинитезимальных колец

$$\lim_{|z|\to 0}\frac{|f(z\zeta)|}{|f(z)|}=|\zeta|,$$

и углы между лучами, выходящими из начала в направлении соответствующих точек,

$$\lim_{z\to 0}[\arg f(z\zeta)-\arg f(z)]=\arg\zeta$$

для любого $\zeta\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Перечисленные геометрические свойства являются характеристическими для асимптотической однородности и обнаруживают ее близость с обычной конформностью. Связь между понятием асимптотической однородности квазиконформного отображения и свойствами его комплексной характеристики устанавливает предложение 6.11, которое гласит: если $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(0)=0$, – квазиконформное отображение, комплексная характеристика которого $\mu(z)$, $\mu(0)=0$, аппроксимативно непрерывна в нуле, то отображение f асимптотически однородно в нуле.

Два следующих параграфа содержат приложения асимптотической однородности к вопросам граничного соответствия при квазиконформных отображениях, см. также [160]. В параграфе 6.3 исследованы симметрии Гардинера–Салливана [94] и доказаны новые критерии того, чтобы квазисимметричный автоморфизм вещественной оси был асимптотически симметричным или асимптотически конформным в смысле Карлесона [206], см. теорему 6.2. В заключительном четвертом параграфе рассмотрены квазиокружности и найдены эквивалентные условия, в терминах квазиконформных отображений и их комплексных характеристик, обеспечивающие их асимптотическую конформность по Беккеру и Поммеренке [33]. В частности доказано, что кривая Жордана $\Gamma\subset\mathbb{C}$ является асимптотически конформной, если существует квазиконформное отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\Gamma=f(S^1)$, $S^1=\{\eta:|\eta|=1,\}$ с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что для некоторого $\alpha>0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\iint\limits_{\substack{|z-\eta|\le t\\ z\in D}}|\mu(z)-\mu(\eta)|^{\alpha}dm_z=0$$

равномерно относительно $\eta\in S^1$.

Отметим, что частный случай теоремы 6.4, когда $\mu(\eta)\equiv 0$ на S^1, был установлен ранее в работе [157] на основе сочетания понятия асимптотической однородности и геометрического критерия Беккера и Поммеренке [33].

Развитию вариационного исчисления в различных классах квазиконформных отображений и решению на этой основе актуальных экстремальных проблем посвящена глава 7. Это направление представляет собой интенсивно развивающуюся ветвь современного анализа и теории функций. Фундаментальные результаты здесь получены, прежде всего, в работах П.П. Белинского, С.Л. Крушкаля, Шиффера, Шиффера и Шобера, см. [48, 223, 403, 404] и цитируемую там литературу.

Основная цель данной главы представить достаточно общую, на наш взгляд, вариационную процедуру исследования экстремальных задач в компактных классах квазиконформных отображений, предложенную нами в [129] и развитую в работах [125, 153, 359]. Известно, что множества комплексных характеристик, генерирующих с помощью уравнения Бельтрами основные компактные классы квазиконформных отображений, являются выпуклыми множествами. Более того, как это будет показано в части III книги, см., например, глава 12, теорема 12.2 и глава 13, теорема 13.2, доказано, что таким свойством обладает любой компактный класс квазиконформных отображений. Это обстоятельство позволяет выбрать вариацию комплексной характеристики $\mu(z)$ в виде следующей выпуклой комбинации

$$\mu(z,t) = \mu(z) + t(\nu(z) - \mu(z)),$$

где $\nu(z)$ – произвольная характеристика из рассматриваемого класса. Применяя теоремы о зависимости решений уравнения Бельтрами от параметра, легко выписать допустимые вариации в самом исследуемом классе квазиконформных отображений, см. например, теорему 7.1. Широкий произвол в выборе функции $\nu(z)$ позволяет вывести вариационный принцип максимума и выписать другие эффективные необходимые условия экстремума, см. например, теорему 7.2. Отметим, что дальнейшему развитию нашего подхода к построению вариационного исчисления, в частности, на классах Давида отображений с неограниченной дилатацией, с условием экспоненциального типа, посвящена заключительная часть монографии.

В качестве иллюстрации метода рассмотрены следующие две конкретные экстремальные задачи. Первая из них связана с известной задачей М.А. Лаврентьева. Именно, М.А. Лаврентьев [130] доказал точные неравенства

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \le |a_2 - a_1|^2,$$

справедливые для пар аналитических в единичном круге функций $f_l(z)$, $l = 1, 2$, $f_l(0) = a_l$, $a_1 \ne \infty$, $a_2 \ne \infty$, отображающих круга на неналегающие области.

Особо отметим, что теорема М.А. Лаврентьева содержит в себе, как частный случай, классическую теорему покрытия Кёбе об 1/4.

Задача об оценке произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей изучалась многими авторами (более подробно см. [258], с. 32).

Нами, вариационным методом, доказано следующее точное неравенство: в классе Q – квазиконформных гомеоморфизмов комплексной плоскости, конформных в круге $|z| < R < 1$ и вне единичного круга и нормированных условиями $f(0) = a$, $f(\infty) = \infty$,

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\gamma}\lim_{z\to 0}\ln\frac{f(z)-a}{zf'(\infty)}\right\} \le \frac{2k(k\cos\gamma-1)}{1-k^2}\ln R,$$

где $k = (Q-1)/(Q+1)$ и под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при z стремящемся к бесконечности.

Очевидно, каждая функция с перечисленными выше свойствами генерирует пару отображений $\{f_1(z), f_2(z)\}$ из класса М.А. Лаврентьева. Для таких пар функций непосредственно из нашей оценки следуют точные неравенства

$$R^Q|a_2 - a_1|^2 \le |f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \le R^{1/Q}|a_2 - a_1|^2.$$

Осуществляя предельный переход при $Q \to \infty$, приходим к отмеченной выше оценке М.А. Лаврентьева.

Второй пример связан с приложением вариационного метода к доказательству теорем существования решений с особенностями обобщенной системы Коши – Римана и их представления через квазиконформные гомеоморфизмы.

Пусть $Q : \mathbb{C} \to [1, \infty)$ – измеримая функция такая, что норма $\|Q\|_\infty = \operatorname{esssup}_{\mathbb{C}}\mathrm{Q}$ конечна. Рассмотрим следующее эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных $\operatorname{div}(Q(z)\operatorname{grad} U) = 0$. Это уравнение возникает при исследовании различных физических полей в неоднородных средах и естественным образом связано с обобщенной системой Коши–Римана

$$V_x = -QU_y, \quad V_y = QU_x.$$

Если ввести в рассмотрение комплексный потенциал по формуле $F(z) = U + iV$, то система эквивалентна следующему уравнению Бельтрами

$$F_{\bar{z}} = -k(z)\overline{F_z}.$$

с измеримой функцией $k(z) = (Q(z) - 1)(Q(z) + 1)^{-1}$. Вариационным методом доказана теорема 7.5: существует решение уравнения

$$\operatorname{div}(Q(z)\operatorname{grad} U) = 0$$

с логарифмическими особенностями в точках $z_1 \in \mathbb{C}$ и ∞, представимое в виде

$$U(z) = \log|f(z) - f(z_1)|,$$

где f надлежащее квазиконформное отображение. При условиях Тейхмюллера–Виттиха–Белинского (см. §9.4)

$$\int\int\limits_{|z-z_1|\le\delta} \frac{|Q(z) - Q(z_1)|}{|z - z_1|^2}\, dx\, dy < \infty,$$

и

$$\int\int\limits_{|z|\le\delta} \frac{|Q(1/z) - Q(\infty)|}{|z|^2}\, dx\, dy < \infty,$$

существуют конечные пределы

$$\lim_{z\to z_1}\left\{U(z) - \frac{1}{Q(z_1)}\ln|z - z_1|\right\},$$

$$\lim_{z\to\infty}\left\{U(z) - \frac{1}{Q(\infty)}\ln|z|\right\} = 0.$$

Отметим, что если функция Q удовлетворяет более сильному условию Дини

$$\int_0 \frac{\omega(r)}{r} dr < \infty, \quad \omega(r) = \operatorname{ess}\sup_{|z-z_n|\le r} |Q(z) - Q(z_n)|,$$

то приведенные выше асимптотические формулы были доказаны Шиффером и Шобером в работе [403]. Дальнейшему развитию этой темы посвящен §14.3.

Принцип площадей занимает особое место в геометрической теории функций комплексного переменного благодаря своей простоте и эффективности при исследовании широкого круга задач, см., например, [258, 289] и цитируемую там литературу.

В главе 8, на основе принципа площадей и принципа Дирихле, выводится коэффициентное неравенство для квазиконформных гомеоморфизмов $f(z)$ расширенной комплексной плоскости, конформных в области $|z| > 1$ и нормированных условиями $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$.

Этот результат представляет собой аналог обобщенной теоремы площадей Н.А. Лебедева и И.М. Милина [260] (см. также [289], теорема 1.1) и содержит в себе, в качестве предельного случая классическую теорему площадей Гронуолла, а также неравенства площадей Н.А. Лебедева [257], Гарабедяна и Шиффера [93], Педерсона и Шиффера [307] и И.Е. Базилевича [29]. Наше основное неравенство содержится в теореме 8.1. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах [164] и [142]. Отметим, что изучение метрико-геометрических свойств квазиконформных отображений, конформных в некоторой части области задания, было начато С.Л. Крушкалём [220, 221], Кюнау [242] и Лехто [268], см. также [269]. Обратим внимание лишь на одно следствие теоремы 8.1. Пусть $f(z)$ – однолистная аналитическая функция в единичном круге $|z| < 1$, нормированная условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ с Q – квазиконформным продолжением на плоскость $\mathbb{C}$. Тогда

$$\left|\ln \frac{zf'(z)}{f(z)} + \ln \frac{f(\infty)}{f(\infty) - f(z)}\right| \leq k \ln \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

где $k = (Q-1)/(Q+1)$ и выбраны ветви логарифмов, обращающиеся в нуль при $z = 0$. В частности, при $f(\infty) = \infty$ имеет место точная оценка

$$\left|\ln \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq k \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} \ .$$

Отметим, что последний результат, впервые установленный нами в 1973 году и опубликованный в работе [123], имеет важные приложения. Например, это неравенство со ссылкой на книгу Лехто 1987 года, см. [269], было использовано в 1988 году Беккером и Роммеренке [33] при доказательстве гельдеровости конформных отображений с квазиконформным продолжением. Другим приложением является следующий результат геометрического характера: радиус звездности $r_s(k)$ в классе конформных отображений единичного круга с $Q = (1+k)/(1-k)$ – квазиконформным продолжением в $\mathbb{C}$ и нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(\infty) = \infty$ равен $\operatorname{th} \frac{\pi}{4k}$. Другими словами, при таких отображениях любая окружность $|z| = r$ при $r < r_s(k)$ переходит в замкнутую аналитическую кривую, звездообразную относительно начала координат. Указанное значение радиуса звездности является точным. Осуществляя предельный переход при $k \to 1$, мы приходим к классическому результату о радиусе звездности в классе S.

В 1961 году Джон [172], изучая взаимосвязи между напряжением и вращением внутри упругого тела, доказал, что если $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^n$ осуществляет $(1+\varepsilon)$ – билипшицево отображение куба $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ объема $m(\mathcal{Q})$,

то f' принадлежит классу $BMO(\mathcal{Q})$ функций с ограниченным средним колебанием. Значит, существует универсальная постоянная D, такая что для данного куба и любого параллельного вложенного куба $\mathcal{R}$

$$\frac{1}{m(\mathcal{R})}\int\limits_{\mathcal{R}}|f'(x)-{f_{\mathcal{R}}}'|dv\le D\varepsilon,$$

где $f'_{\mathcal{R}}$ обозначает интегральное среднее f' по кубу $\mathcal{R}$. Применив к компонентам вектора $f'-f'_{\mathcal{R}}$ фундаментальную лемму о функциях класса BMO, доказанную совместно с Ниренбергом в работе [173], Джон показал, что для каждого M мера $\mu(M)$ тех x из $\mathcal{R}$, для которых $|f'(x)-f'_{\mathcal{R}}|\ge M\varepsilon$, удовлетворяет неравенству

$$\mu(M)\le Ee^{-FM}m(\mathcal{R})$$

с универсальными постоянными E и F. В качестве иллюстрации последнего результата, он установил следующую теорему вращения: если $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – $(1+\varepsilon)$ – билипшицево отображение комплексной плоскости, такое что

$$f(z)=\begin{cases}z & \text{для } |z|>b,\\ ze^{i\theta} & \text{для } |z|<a<b\end{cases}$$

и $\theta\in[0,\pi]$, то

$$\theta\le O(1+\log(b/a))\varepsilon.$$

Эта оценка не является оптимальной. Оказывается, что точное решение задачи следует искать в классе квазиконформных отображений, который включает в себя билипшицевы отображения. Более того, такой подход ведет к точным интегральным оценкам вращения в терминах локальных коэффициентов искажения.

Глава 9 посвящена точному решению задачи вращения Джона для произвольных билипшицевых отображений и их обобщений. Это решение выводится из следующего результата, установленного в работе [143]. Пусть f – квазиконформное отображение кругового кольца $R(a,b):a\le|z|\le b$, с комплексной характеристикой $\mu_f(z)$ и такое, что $f(z)=z$ для $|z|=b$ и $f(z)=ze^{i\theta}$ для $|z|=a$. Тогда для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции Φ справедливы точные оценки

$$\iint\limits_{R(a,b)}\Phi(K_f(z))\frac{dx\,dy}{|z|^2}\ge\iint\limits_{R(a,b)}\Phi(K_{f^*}(z))\frac{dx\,dy}{|z|^2},$$

где $K_f(z) = (1 + |\mu_f(z)|)/(1 - |\mu_f(z)|)$, а экстремальное отображение f^* имеет вид логарифмической спирали

$$f^*(z) = z \exp\left\{-i\theta \frac{\ln(|z|/b)}{\ln(b/a)}\right\}.$$

Полагая $\Phi(u) = u$, мы получаем, что

$$|\theta| \left(\frac{|\theta|}{2\log(b/a)} + \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{4\log^2(b/a)}} \right) \leq \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R(a,b)} \frac{K_f(z) - 1}{|z|^2}\, dx\, dy.$$

Оценка является точной и знак равенства реализуется для функции $f^*(z)$. Поскольку L–билипшицево отображение является одновременно L^2–квазиконформным, то мы приходим к точному решению задачи Джона:

$$|\theta| \leq (L - 1/L)\log(b/a),$$

которое имеет место для любого $L \geq 1$.

Оценки углового смещения при квазиконформных отображениях, учитывающие не только модуль комплексной характеристики, но и её аргумент, приведены в §9.3. В частности, неравенства для углового смещения, содержащиеся в следствии 9.4 к теореме 9.5, являются ключевыми при исследовании в §9.5 вопроса о конформной дифференцируемости квазиконформных отображений.

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ – квазиконформное отображение с комплексной характеристикой μ и пусть $z_0 \in G$. Хорошо известно, что свойства регулярности отображения f в точке z_0 тесно связаны с регулярностью $\mu(z)$ в окрестности этой точки. В данном разделе мы исследуем конформность отображения f в точке z_0. Это означает, что комплексная производная

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

существует в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Не теряя общности, мы будем предполагать, что $z_0 = 0$ и отображение нормировано условием $f(0) = 0$. Следующий результат, который принято называть теоремой о конформной дифференцируемости Тейхмюллера–Виттиха–Белинского, является классическим, см. [270], с. 232: квазиконформное отображение f является конформным в нуле, если

$$\int\limits_{|z|<1} \int \frac{|\mu_f|}{|z|^2}\, dx\, dy < \infty.$$

Доказательство этой теоремы имеет долгую историю. Тейхмюллер [373] в начале показал, что из этого условия следует, что $|f(z)| \sim C|z|$ при $z \to 0$ для квазиконформных диффеоморфизмов f. Затем Виттих [86] распространил этот результат на весь класс квазиконформных отображений. Наконец, П.П. Белинский [40, 48], см. также Лехто [262], доказал конформность отображения $f(z)$ при указанном условии. Позднее, Райх и Вальчак [322], а также Бракалова и Дженкинс [75] несколько ослабили условие для поведения $|f(z)|$. И лишь спустя почти полвека, удалось значительно ослабить условие Тейхмюллера–Виттиха–Белинского, см. теорему 9.5 и [164, 398]. А именно, если

$$\iint\limits_{|z|<1} \frac{|\mu|^2}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{dx\,dy}{|z|^2} < \infty$$

и если сингулярный интеграл

$$\iint\limits_{|z|<1} \frac{\mu}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{dx\,dy}{z^2}$$

существует в смысле главного значения по Коши, тогда отображение $f(z)$ конформно в точке $z = 0$.

Простые рассуждения показывают, что условие конформной дифференцируемости Тейхмюллера–Виттиха–Белинского влечет одновременно сходимость указанных двух интегралов. Однако обратное заключение не имеет места. Таким образом, наша теорема включает в себя теорему Тейхмюллера–Виттиха–Белинского как частный случай. Попутно заметим, что теорема 9.6 дает решение рассмотренной ранее задачи Райха–Вальчака при выполнении нашего первого интегрального условия.

Заключительная глава 10 посвящена приложению теории квазиконформных отображений к построению вариаций конформных отображений.

Построение вариационного исчисления на классах однолистных аналитических функций опирается на надлежащие вариационные формулы в этих классах функций, то есть, на формулы вида $f^*(z) = f(z) + tq(z) + o(t)$, где t – малый параметр, а $q(z)$ - аналитическая функция, которая должна обладать определенным произволом. В силу нелинейности основных классов однолистных аналитических функций, построение вариационных формул представляет собой нетривиальную задачу. В дальнейшем, в качестве объекта исследований мы выберем класс S. Первые вариационные формулы для этого класса восходят к Адамару и

были получены на основе надлежащей вариации функции Грина. Затем Шиффер, Г.М. Голузин, М.А. Лаврентьев и многие другие авторы исследовали эту проблему. Фундаментальный результат в данном направлении был достигнут Шиффером [401] и Г.М. Голузиным [103], которые впервые вывели эффективные вариационные формулы и на их основе создали метод внутренних вариаций в теории конформных отображений единичного круга. Оригинальное доказательство вариационной теоремы Шиффера–Голузина достаточно объемно, а попытки ее распространения на многосвязный случай, многолистные функции и римановы поверхности натолкнулись на ряд непреодолимых аналитических трудностей. В связи с этим, например, П.П. Куфарев [238] вывел вариационную формулу Шиффера–Голузина исходя из метода Лёвнера, а затем распространил новое доказательство на двухсвязный случай.

В данной главе мы знакомим читателя с "квазиконформной" версией доказательства фундаментальной вариационной теоремы Шиффера–Голузина, предложенной нами в 1980 году, см. [126]. Подход к построению вариаций, который мы изложим в §10.2 и 10.3, допускает далеко идущие обобщения и, в частности, применим к однолистным функциям, заданным в многосвязных областях и на римановых поверхностях.

Глава 6

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Хорошо известно, что произвольное квазиконформное отображение дифференцируемо в смысле вещественного анализа лишь почти всюду в области своего задания. Как уже отмечалось выше, даже непрерывность комплексной характеристики в данной точке не гарантирует существование полного дифференциала у соответствующего квазиконформного отображения в этой точке. Исследование поведения таких отображений в окрестности точек, где отсутствует полный дифференциал, представляет собой актуальную проблему и требует создания специального инфинитезимального аппарата. Глава 6 как раз и посвящена исследованию проблемы локального поведения квазиконформных отображений на плоскости и связанным с ней вопросам граничного соответствия. Особое внимание уделено случаю, когда комплексные характеристики отображений являются аппроксимативно непрерывными функциями.

6.1 Квазиконформные отображения на плоскости

6.1.1. Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Мы обозначим единичный круг $|z| < 1$ через D, единичную окружность $|z| = 1$ через S^1 и верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ через $\mathbb{H}$.

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f класса $\mathcal{ACL}$ называется квазиконформным с комплексной характеристикой μ, если он удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z \tag{6.1}$$

почти всюду для некоторой измеримой комплекснозначной функции μ с нормой

$$\|\mu\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\mu(z)| \le q < 1. \tag{6.2}$$

Если $Q = (1+q)/(1-q)$, то f называется также Q–квазиконформным.

Теорема существования для уравнения Бельтрами гарантирует наличие квазиконформного гомеоморфизма f для произвольной комплексной характеристики $\mu(z)$ (см., например, [16], с. 90, [69], [270], с. 194). Если F – другой квазиконформный гомеоморфизм с той же комплексной характеристикой, то, по теореме единственности, см. [270], с. 183,

$$F = \phi \circ f, \tag{6.3}$$

где ϕ – конформное отображение. Из (6.3), в частности, следует, что дифференциальные свойства квазиконформного отображения в точке определяются исключительно его комплексной характеристикой в окрестности данной точки.

6.1.2. Теоремы сходимости и мажорирующие метрики. В дальнейших наших исследованиях ключевую роль будет играть известная теорема сходимости Берса–Боярского для Q–квазиконформных отображений: если $f_n \to f$ локально равномерно и $\mu_n \to \kappa$ почти всюду, то $\mu = \kappa$ также почти всюду (см., например, [270], с. 187).

Обозначим через $\mathfrak{F}_Q$ класс всех Q–квазиконформных автоморфизмов f расширенной комплексной плоскости, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. Пространство $\mathfrak{F}_Q$ с топологией локально равномерной сходимости является метризуемым и секвенциально компактным (см. [270], с. 78).

Метрика ρ, определенная на $\mathfrak{F}_Q$, называется *генерирующей*, если сходимость $\rho(f_n, f) \to 0$ эквивалентна локально равномерной сходимости $f_n \to f$. Одна из таких метрик имеет вид (см. [229], с. 243):

$$\rho(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\rho_m(f, g)}{1 + \rho_m(f, g)}, \tag{6.4}$$

где

$$\rho_m(f, g) = \max_{|z| \le m} |f(z) - g(z)| . \tag{6.5}$$

Абстрактные пространства $\mathcal{B}$, в которых сходимость играет роль исходного понятия, были впервые рассмотрены в диссертации Фреше в 1906 году. Затем Урысон ввел в этих пространствах третью аксиому: если компактная последовательность $a_n \in \mathcal{B}$ имеет единственную точку накопления $a \in \mathcal{B}$, то $\lim a_n = a$. Такие пространства принято называть L^* – пространствами. Аксиоме Урысона удовлетворяет, в частности, любая сходимость, порождаемая какой–либо метрикой, см. [229], с. 197-199, 215. Однако всем известная сходимость почти всюду для измеримых функций доставляет пример сходимости, не удовлетворяющей

аксиоме Урысона: любая последовательность, сходящаяся по мере, является компактной относительно сходимости почти всюду, но не любая такая последовательность сходится почти всюду.

Пусть $\mathfrak{M}_Q$ – пространство всех комплексных характеристик μ для отображений $f \in \mathfrak{F}_Q$. Метрика r, определенная на $\mathfrak{M}_Q$, называется *мажорирующей,* если сходимость $r(\mu_n, \nu_n) \to 0$ влечет сходимость последовательности $\rho(f_n, g_n)$ к нулю для любой генерирующей метрики ρ на $\mathfrak{F}_Q$ и для соответствующих отображений f_n и $g_n \in \mathfrak{F}_Q$.

Предложение 6.1. *Пусть для некоторого* $\alpha > 0$

$$r(\mu, \nu) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{r_m(\mu, \nu)}{1 + r_m(\mu, \nu)}, \tag{6.6}$$

где

$$r_m(\mu, \nu) = \iint_{|z| \le m} |\mu(z) - \nu(z)|^{\alpha} dm_z. \tag{6.7}$$

Тогда $r(\mu, \nu)$ *– мажорирующая метрика на* $\mathfrak{M}_Q$.

Доказательство. Действительно, предположим, что $r(\mu_n, \nu_n) \to 0$, но $\rho(f_n, g_n) \ge \varepsilon > 0$ для некоторой генерирующей метрики ρ и некоторых последовательностей f_n и $g_n \in \mathfrak{F}_Q$. В силу секвенциальной компактности класса $\mathfrak{F}_Q$, можно считать, что $f_n \to f \in \mathfrak{F}_Q$ и $g_n \to g \in \mathfrak{F}_Q$ локально равномерно.

Покажем теперь, что $f = g$. По теореме Лебега о сходимости интегралов, на $\mathfrak{M}_Q$ сходимость по метрике $r(\mu_n, \nu_n) \to 0$ эквивалентна сходимости по мере $\mu_n - \nu_n \xrightarrow{mes} 0$. Поэтому

$$\phi_n(z) = \frac{\mu_n(z) - \nu_n(z)}{1 - \mu_n(z)\overline{\nu_n(z)}} \frac{(g_n)_z}{\overline{(g_n)_z}} \xrightarrow{mes} 0 \tag{6.8}$$

Для продолжения доказательства нам потребуется одно свойство нормированных Q–квазиконформных отображений, относящееся к искажению площадей. Именно, для $f \in \mathfrak{F}_Q$ и любого измеримого множества $E \subset D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ имеет место неравенство:

$$\mathrm{mes}(f(E)) \le C(Q, R)(\mathrm{mes}E)^{\delta(Q)}, \tag{6.9}$$

где C и δ зависят только от Q, R и Q, соответственно (см., например, [24, 98, 101]).

Указанный результат влечет, что

$$\kappa_n = \phi_n \circ g_n^{-1} \xrightarrow{mes} 0, \tag{6.10}$$

где κ_n представляет собой комплексную характеристику отображения $h_n = f_n \circ g_n^{-1} \in \mathfrak{F}_{Q^2}$. Таким образом, $h_n \to h = f \circ g^{-1}$ и, одновременно, $\kappa_n \xrightarrow{mes} 0$. По теореме сходимости Берса–Боярского мы заключаем, что $f = g$. Таким образом, по неравенству треугольника

$$\rho(f_n, g_n) \le \rho(f_n, f) + \rho(g_n, f) \to 0$$

при $n \to \infty$. Последнее противоречит сделанному выше предположению. $\Box$

Предложение 6.2. *Пусть ρ и r – генерирующая и мажорирующая метрики на $\mathfrak{F}_Q$ и $\mathfrak{M}_Q$, соответственно. Тогда сходимость $r(\mu_{t,j}, \mu_j) \to 0$ при $t \to 0$, равномерная относительно абстрактного параметра $j \in J$, влечет равномерную сходимость $\rho(f_{t,j}, f_j) \to 0$.*

Действительно, допустим, что существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $t_n \to 0, j_n \in J$ такие, что $\rho(g_n, h_n) \ge \varepsilon$, где $g_n = f_{t_n, j_n}, h_n = f_{j_n}, n = 1, 2, \ldots$.

Однако $r(\mu_n, \nu_n) \to 0$ и потому $\rho(g_n, h_n) \to 0$ в силу определения мажорирующей метрики. Последнее противоречит сделанному выше предположению.

6.1.3. О специальных классах квазиконформных отображений. В общем случае при $|\mu(z)| \le k < 1$ решение уравнения Бельтрами может быть записано в виде бесконечного ряда сингулярных интегральных преобразований типа Гильберта и Коши для комплексных характеристик (см. [16, 69, 270]).

Здесь мы приводим явные решения уравнения Бельтрами для случаев, когда комплексные характеристики являются произвольными измеримыми функциями, но зависят только от одной вещественной переменой $x = \operatorname{Re} z$ или $y = \operatorname{Im} z$, либо от $\arg z$ или $|z|$.

Предложение 6.3. *Пусть $\mu(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - произвольная измеримая функция с $\|\mu\|_\infty \le q < 1$, зависящая только от $x = \operatorname{Re} z$ и пусть*

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{1 + \mu(t)}{1 - \mu(t)} dt\,. \tag{6.11}$$

Тогда формула

$$w = f(z) = \phi(x) + iy \tag{6.12}$$

задает единственное квазиконформное отображение $\mathbb{C}$ на себя с комплексной характеристикой μ и нормировками:

$$f(0) = 0, \quad f(i) = i, \quad f(\infty) = \infty. \tag{6.13}$$

Кроме того, как видно из соотношений

$$u = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \phi(x), \tag{6.14}$$

$$v = \operatorname{Im} f(z) = y + \operatorname{Im} \phi(x), \tag{6.15}$$

отображение f переводит вертикальные прямые в вертикальные прямые без каких–либо сжатий или растяжений, а мнимая ось отображается на себя тождественным образом, поскольку $\phi(0) = 0$. Легко показать, что перечисленные геометрические свойства являются характеристическими для указанного класса квазиконформных отображений, так как

$$\mu(z) = \frac{\phi'(x) - 1}{\phi'(x) + 1} \tag{6.16}$$

зависит только от x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, как видно непосредственно из формул,

$$Q^{-1}|x_1 - x_2| \le |f(z_1) - f(z_2)| \le Q|z_1 - z_2|. \tag{6.17}$$

Таким образом, f – гомеоморфизм плоскости класса $\mathcal{ACL}$. Нормировка (6.13) очевидна.

Далее,

$$f_x = \phi'(x) = \frac{1 + \mu(x)}{1 - \mu(x)}\,, \tag{6.18}$$

$$f_y = i\,. \tag{6.19}$$

Следовательно,

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)}\,, \tag{6.20}$$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{1 - \mu(x)}\,, \tag{6.21}$$

и поэтому f удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(x) f_z. \tag{6.22}$$

При этом, якобиан этого отображения

$$J(z) = \frac{1 - |\mu(x)|^2}{|1 - \mu(x)|^2} \ge Q^{-1} > 0 \tag{6.23}$$

положителен, то есть f сохраняет ориентацию (см. [270], с. 10). Тем самым предложение 6.3 полностью доказано. □

Следствие. *Пусть $g \in \mathfrak{F}_Q$ имеет комплексную характеристику $\nu(z)$, зависящую только от $y = \operatorname{Im} z$. Тогда:*

$$g(z) = x + i\,\psi(y)\,, \tag{6.24}$$

где

$$\psi(y) = \int_0^y \frac{1-\nu(it)}{1+\nu(it)}\,dt\,. \tag{6.25}$$

Действительно, пусть

$$f = \mathcal{A} \circ g \circ \mathcal{A}^{-1}, \tag{6.26}$$

где

$$\mathcal{A}(\zeta) = e^{i\frac{\pi}{2}}\zeta = i\zeta \tag{6.27}$$

– поворот на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Тогда $f(0) = 0$, $f(i) = i$, $f(\infty) = (\infty)$ и комплексная характеристика f,

$$\mu(z) = -\nu(-iz), \tag{6.28}$$

зависит только от $x = \operatorname{Re} z$. Таким образом, из (6.11), (6.12) и (6.26) получаем (6.24), (6.25).

На том же пути доказывается следующее предложение, которое восходит к Шатцу [397].

Предложение 6.4. *Пусть $\omega \in \mathfrak{F}_Q$ имеет комплексную характеристику $\nu(z)$, зависящую только от* $\arg z$. *Тогда:*

$$\omega(z) = \left\{ |z| \exp\left(i \int_0^{\arg z} \gamma(\theta)\,d\theta \right) \right\}^{1/a}, \tag{6.29}$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(\theta)d\theta, \operatorname{Re} a > 0, \tag{6.30}$$

$$\gamma(\theta) = \frac{1-\nu(e^{i\theta})e^{-2i\theta}}{1+\nu(e^{i\theta})e^{-2i\theta}}\,. \tag{6.31}$$

Отметим, что при отображении ω радиальные линии $\arg z = \text{const}$ могут преобразовываться в бесконечно накручивающиеся спирали в том

и только в том случае, когда $\operatorname{Im} a \neq 0$. При $\operatorname{Im} a = 0$ все радиальные линии переходят в радиальные линии. Вещественная ось $\mathbb{R}$ (и верхняя полуплоскость $\mathbb{H}$) сохраняются тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) d\theta = \operatorname{Re} \int_{\pi}^{2\pi} \gamma(\theta) d\theta. \tag{6.32}$$

Это так, к примеру, если комплексная характеристика ν симметрична относительно вещественной оси, то есть при выполнении равенства

$$\nu(e^{-i\theta}) = \overline{\nu(e^{i\theta})}. \tag{6.33}$$

В этом случае

$$a = \operatorname{Re} c > 0, \tag{6.34}$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) d\theta. \tag{6.35}$$

Пример 1. Если ν_0 – произвольная комплексная постоянная из единичного круга D и

$$\nu(z) = \nu_0 \frac{z}{\bar{z}}\,, \tag{6.36}$$

то

$$\omega(z) = \frac{z}{|z|} |z|^{c_0}\,, \tag{6.37}$$

где

$$c_0 = \frac{1 + \nu_0}{1 - \nu_0} \tag{6.38}$$

– произвольная комплексная постоянная с положительной вещественной частью.

В частности, если $c_0 = \alpha - i$, $\alpha > 0$, то мы получаем квазиконформное отображение

$$h(re^{i\theta}) = r^{\alpha} e^{i(\alpha - \ln r)}, \tag{6.39}$$

которое отображает радиальные линии $\arg z = \text{const}$ на соответствующие спирали. Отметим, что такие отображения были использованы Герингом [99] для решения известной проблемы Берса о структуре универсального пространства Тейхмюллера.

Пример 2. Если ν_0 – произвольная комплексная постоянная из единичного круга и

$$\nu(z) = \begin{cases} \nu_0, & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ \bar{\nu}_0 & \text{при } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

то

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{z+\nu_0\bar{z}}{1+\nu_0}, & \text{при } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \frac{z+\bar{\nu}_0\bar{z}}{1+\bar{\nu}_0}, & \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 6.4. Пусть f – отображение из предложения 1.3 с комплексной характеристикой

$$\mu(z) = -\nu(e^{iz})e^{-2i\operatorname{Re} z}, \tag{6.40}$$

зависящей только от $x = \operatorname{Re} z$.

Тогда

$$\omega(\zeta) = g(\zeta) = \mathcal{A} \circ (\alpha f) \circ \mathcal{A}^{-1}(\zeta), \tag{6.41}$$

где

$$\mathcal{A}(w) = e^{iw}, \tag{6.42}$$

$$\mathcal{A}^{-1}(\zeta) = -i(\ln \zeta). \tag{6.43}$$

Здесь через $(\ln \zeta)$ обозначено главное значение логарифма, а комплексная постоянная $\alpha = a_{-1}$ определяется требованиями однолистности, а также непрерывности g во всей плоскости, включая отрицательную вещественную ось.

Действительно, комплексная характеристика g равна

$$\nu(\zeta) = (\mu\mathcal{A}_z/\overline{\mathcal{A}_z}) \circ \mathcal{A}^{-1}(\zeta).$$

Переписав (6.41) в более явной форме,

$$g(\zeta) = e^{\alpha \ln|\zeta| + i\alpha\phi(\arg\zeta)}, \tag{6.44}$$

и доопределив $g(0) = 0$ и $g(\infty) = \infty$, замечаем условие непрерывности g

$$\alpha[\phi(\pi) - \phi(-\pi + 0)] = 2\pi n, \tag{6.45}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Однолистность (инъективность) отображения g можно обеспечить только при $n = 1$, то есть при $\alpha = a_{-1}$.

Однолистность отображения g проверяется рассуждением от противного. Действительно, допустим, что при некоторых $\zeta_1 \neq \zeta_2$, ζ_1 и $\zeta_2 \neq 0, \infty$ выполнено равенство $g(\zeta_1) = g(\zeta_2)$. Тогда

$$i\,\alpha \left\{ \int_{\arg\zeta_1}^{\arg\zeta_2} P(t)dt - i \ln \left| \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right| \right\} = 2\pi m\, i, \tag{6.46}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$

$$P(t) = \frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}\,, \tag{6.47}$$

$$\operatorname{Re} P(t) \geq Q^{-1} > 0. \tag{6.48}$$

Из (6.46) в частности следует равенство

$$\int_{\arg\zeta_1}^{\arg\zeta_2} \operatorname{Re} P(t)dt = m\int_{-\pi}^{\pi} P(t)dt. \tag{6.49}$$

В силу неравенства (6.48) последнее возможно только при $m = 0$ и $\arg\zeta_2 = \arg\zeta_1$. Но тогда из (6.46) немедленно получаем также равенство $|\zeta_1| = |\zeta_2|$, то есть $\zeta_1 = \zeta_2$. □

Наконец, приведем здесь еще одно предложение, которое будет служить источником, важных для дальнейшего, примеров квазиконформных отображений.

Предложение 6.5. *Пусть $h \in \mathfrak{F}_Q$ имеет комплексную характеристику вида*

$$\nu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}}\,, \tag{6.50}$$

где $k(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – измеримая функция. Тогда

$$h(z) = \frac{z}{|z|}\exp\left\{\int_1^{|z|}\frac{1+k(\tau)}{1-k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right\}. \tag{6.51}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f – отображение из предложения 1.3 с

$$\mu(z) = k(e^{\operatorname{Re} z}) \tag{6.52}$$

и

$$g(\zeta) = A \circ f \circ A^{-1}(\zeta), \tag{6.53}$$

где

$$A(w) = e^w, \tag{6.54}$$

$$A^{-1}(\zeta) = \ln\zeta. \tag{6.55}$$

Заметим, что здесь, не смотря на многозначность аналитической функции $\ln\zeta$, функция $g(\zeta)$ является однозначной в силу специального вида функции f.

Запишем g в явном виде:

$$g(\zeta)=\frac{\zeta}{|\zeta|}\exp\left\{\int_0^{\ln|\zeta|}\frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}dt\right\}. \tag{6.56}$$

Отсюда видно, что модуль этой функции

$$|g(\zeta)|=\exp\{\operatorname{Re}\phi(\ln|\zeta|)\} \tag{6.57}$$

зависит только от модуля независимой переменной, то есть окружности с центром в нуле переходят в такие же окружности, но быть может, с другим радиусом.

Характеристика отображения $g(\zeta)$ равна $\nu(\zeta)=(\mu A_z/\overline{A_z})\circ A^{-1}(\zeta)$. Нормировки $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g(\infty)=\infty$ очевидны, поскольку

$$\operatorname{Re}\frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}\geq Q^{-1}>0 \tag{6.58}$$

и, следовательно, при $|\zeta|\leq 1$

$$|g(\zeta)|\leq|\zeta|^{Q^{-1}}, \tag{6.59}$$

а при $|\zeta|\geq 1$

$$|g(\zeta)|\geq|\zeta|^{Q^{-1}}. \tag{6.60}$$

Однолистность отображения g легко доказывается рассуждением от противного. Действительно, допустим, что при некоторых ζ_1 и $\zeta_2\neq 0$ и ∞ выполнено равенство $h(\zeta_1)=h(\zeta_2)$. Тогда из соотношения (6.57) получаем равенство $|\zeta_1|=|\zeta_2|$. После этого из (6.56) замечаем, что и $\arg\zeta_2=\arg\zeta_1$.

Непрерывность и однолистность отображения g на плоскости уже гарантирует его гомеоморфность, см. ([270], с. 6. Принадлежность его классу $\mathcal{ACL}$ очевидна из (6.56). Таким образом, g является искомым отображением $h\in\mathfrak{F}_Q$. Делая в (6.56) элементарные замены переменных, приходим к формуле (6.51). □

6.2. Об асимптотической однородности

6.2.1. Хорошо известно, что произвольное Q–квазиконформное отображение $f: G\to\mathbb{C}$, являясь непрерывным по Гельдеру с показателем $\alpha=1/Q$ внутри G, дифференцируемо почти всюду, см. [100] и [229],

с. 128. Следующий простой пример Q–квазиконформного автоморфизма комплексной плоскости $\mathbb{C}$

$$f(z) = z|z|^{\frac{1}{Q}-1},$$

который получается по формулам (6.1) – (6.3) при $\nu = q\frac{z}{\bar{z}}$, указывает на отсутствие полного дифференциала в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Даже непрерывность комплексной характеристики $\mu(z)$ соответствующего Q–квазиконформного отображения, как показывает пример (см. [48], с. 41)

$$f(z) = z(1 - \ln|z|),$$

не спасает положения, и без дополнительных ограничений на $\mu(z)$ вероятно трудно ожидать, в общем случае, более точную информацию о поведении $f(z)$ в фиксированной точке.

В направлении исследования проблемы регулярности Q–квазиконформных отображений, тесно связанной с изучением геометрических свойств соответствующих гомеоморфизмов, был получен ряд результатов фундаментального характера. Тейхмюллер [223], Виттих [226], П.П. Белинский [48] и Лехто (см. [270], с. 248) доказали, что сходимость интеграла

$$\iint_{|z-z_0|<r} \frac{|\mu(z) - \mu(z_0)|}{|z - z_0|^2}\, dm_z$$

влечет дифференцируемость отображения f в точке z_0 с невырожденным якобианом. Особый интерес представляет случай, когда $\mu(z_0) = 0$, поскольку тогда f *конформно* в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0, \infty$. Нетривиальное развитие этого результата содержится в работах Шатца [397] и Райха и Вальчака [322]. Применяя свою формулу явного представления гомеоморфного решения уравнения Бельтрами, Боярский доказал регулярность в точке при условии, что

$$\iint_{|z-z_0|<r} \left|\frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0}\right|^p dm_z < \infty$$

и $p > 2$. Близкие вопросы были исследованы также Б.В. Шабатом [394] и Л.И. Волковыским [89].

Как уже отмечалось выше, непрерывность комплексной характеристики еще не гарантирует наличие полного дифференциала у соответствующего гомеоморфизма уравнения Бельтрами в фиксированной точке. Вместе с тем, как это впервые по–видимому было отмечено П.П. Белинским (см. [48], с. 41), при непрерывности $\mu(z)$ во всякой достаточно

малой окрестности произвольной точки $|z-z_0|<\triangle r$ справедливо представление

$$\triangle f = A(\triangle r)((z-z_0)+\mu(z_0)\overline{(z-z_0)}+o(\triangle r)), \tag{6.61}$$

в котором, в отличие от обычной дифференцируемости, $A(\triangle r)$ может не иметь предела при $\triangle r \to 0$. Не теряя общности, можно предполагать в формуле (6.61) $z_0=0$, $f(0)=0$ и $\mu(z_0)=0$, поскольку вернутся к первоначальному случаю всегда можно в результате рассмотрения композиции $\gamma\circ f\circ\omega$ с надлежащими мебиусовым и афинным отображениями. Понятие "слабой конформности" Q – квазиконформного отображения f в точке $z=0$, выражаемое формулой

$$f(z)=A(|z|)(z+o(|z|)),$$

и возможность его описания в терминах аппроксимативной непрерывности комплексной характеристики

$$\frac{1}{t^2}\iint_{|z|<t}|\mu(z)|dm_z \to 0$$

при $t\to 0$, оказалось также весьма полезным для приложений (см., например, [156], [157]).

6.2.2. Определение асимптотической однородности. Отображение $f: G\to\mathbb{C}$, $f(0)=0$, будем называть асимптотически однородным в точке $0\in G\subset\mathbb{C}$, если

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z\zeta)}{f(z)}=\zeta \tag{6.62}$$

для любого $\zeta\in\mathbb{C}$. В дальнейшем используется сокращенная запись (6.62) в виде

$$f(\zeta z)\sim\zeta f(z).$$

Очевидно, что асимптотическая однородность квазиконформного отображения f в нуле эквивалентна одновременному выполнению следующих двух условий

$$f(z)=A(|z|)(z+o(|z|)), \tag{6.63}$$

где $o(|z|)/|z|\to 0$ при $|z|\to 0$, и

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{A(t\rho)}{A(\rho)}=1,\quad \forall t>0. \tag{6.64}$$

Далее, как легко видеть, асимптотически однородное отображение f сохраняет инфинитезимальные окружности

$$\lim_{r\to 0}\frac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{\min_{|z|=r}|f(z)|}=1, \tag{6.65}$$

модули инфинитезимальных колец

$$\lim_{|z|\to 0}\frac{|f(z\zeta)|}{|f(z)|}=|\zeta| \tag{6.66}$$

и углы между лучами, выходящими из начала в направлении соответствующих точек,

$$\lim_{z\to 0}[\arg f(z\zeta)-\arg f(z)]=\arg\zeta \tag{6.67}$$

для любого $\zeta\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Перечисленные геометрические свойства являются характеристическими для асимптотической однородности и обнаруживают ее близость с обычной конформностью.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на (6.67), при асимптотической однородности радиальные линии могут переходить в бесконечно накручивающиеся спирали, как это показывает пример отображения

$$f(z)=ze^{i(-\ln|z|)^{1/2}},\quad f(0)=0.$$

Следующий результат является основным для дальнейшего изучения асимптотической однородности, поскольку значительно облегчает проверку условия (6.62) и одновременно вскрывает природу введенного понятия.

Пусть M – произвольное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $z=0$ в качестве точки накопления. Полагаем

$$\varphi_M(\rho)=\frac{\inf_{|m|\geq\rho,m\in M}|m|}{\sup_{|m|\leq\rho,m\in M}|m|}\,.$$

Теорема 6.1. *Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(0)=0$, и M – подмножество $\mathbb{C}$, для которого*

$$\limsup_{\rho\to 0}\varphi_M(\rho)<\infty. \tag{6.68}$$

Если существует предел

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ m\in M}}\frac{f(\zeta m)}{f(m)}=\zeta,\quad\forall\zeta z\in\mathbb{C}, \tag{6.69}$$

то f является асимптотически однородным в нуле.

Следующее утверждение говорит о точности условия (6.68) на множество M.

Предложение 6.6. *Пусть для любого квазиконформного отображения $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, существование предела* (6.69) *влечет асимптотическую однородность f в нуле. Тогда множество M удовлетворяет условию* (6.68).

Таким образом, для выполнения заключения теоремы 6.1, условие (6.68) на степень возможной прореженности множества M является не только достаточным, но и необходимым. В частности, в качестве множества M в теореме 6.1 можно взять любой непрерывный путь в начало координат или дискретное множество, скажем, $m_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6.1. По условию (6.69) имеем, что

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ m\in M}} F(\zeta, m) = \zeta, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \tag{6.70}$$

где функции

$$F(\zeta, z) = f(\zeta z)/f(z), \quad z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \zeta \in \mathbb{C},$$

являются Q–квазиконформными отображениями по переменной ζ. Хорошо известно, что (6.70) влечет локально равномерную сходимость относительно $\zeta \in \mathbb{C}$ (см. [270], с. 74).

Предположим, что условие (6.62) не выполнено для f. Тогда найдутся $\zeta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $z_n \to 0$, $z_n \in \mathbb{C}^*$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$|F(\zeta, z_n) - \zeta| > \varepsilon. \tag{6.71}$$

С другой стороны, по условию (6.68), найдется последовательность $m_n \in M$ для $n > N$ такая, что

$$0 < \delta \le |\tau_n| \le 1 < \infty,$$

где

$$\tau_n = \frac{z_n}{m_n}, \quad \delta = \frac{1}{2 \limsup_{\rho\to 0} \varphi_M(\rho)}\,.$$

Таким образом,

$$F(\zeta, z_n) = \frac{F(\zeta\tau_n, m_n)}{F(\tau_n, m_n)}.$$

В силу равномерности предела (6.70) относительно параметра ζ на любом компакте, $F(\zeta\tau_n, m_n) \sim \zeta\tau_n$ и $F(\tau_n, m_n) \sim \tau_n$. Поскольку же $\tau_n \ge$

$\delta > 0$, то $F(\zeta, z_n) \sim \zeta$ при $z_n \to 0$. Последнее противоречит (6.71) и, следовательно, сделанное выше предположение неверно. □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 6.6. Допустим, что

$$\limsup_{\varrho \to 0} \phi_M(\rho) = \infty \,. \tag{6.72}$$

Покажем, что тогда найдется такое f, для которого имеет место (6.69), а условие асимптотической однородности (6.62) не выполнено. Пример будет базироваться на предложении 6.5.

По условию (6.72), найдется последовательность $\rho \searrow 0$ такая, что $\varphi_M(\rho_n) > e^{4n}$, для всех $n = 1, 2, \ldots$. Зафиксируем n и обозначим через (τ_n, t_n) интервал длины $4n$ с тем свойством, что он не содержит точек $\ln |m|$, $m \in M$. Положим $\kappa_n = (\tau_n + t_n)/2$ и определим измеримую функцию

$$k(t) = \begin{cases} q, & \text{для } \ t \in [e^{\kappa_n - n}, e^{\kappa_n + n}], \ \ n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{для остальных } \ t \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $0 < q < 1$ – произвольное число. Такое k порождает по формуле (6.51) квазиконформное отображение $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Как легко вычислить,

$$\frac{h(\zeta m)}{h(m)} = \zeta \exp \left\{ \int\limits_{\ln |m|}^{\ln |\zeta m|} \frac{k(e^\tau)}{1 - k(e^\tau)} d\tau \right\}$$

и поэтому

$$\lim_{\substack{m \to 0 \\ m \in M}} \frac{h(\zeta m)}{h(m)} = \zeta.$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h(e^{\kappa_n} e)}{h(e^{\kappa_n})} = e e^{\frac{2q}{1-q}} \neq e.$$

Это и завершает доказательство предложения 6.6. □

6.2.3. Об одном обобщении конформности по Белинскому. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, является произвольным Q–квазиконформным отображением. Тогда функция $F(\zeta, z) = f(z\zeta)/f(z)$ по переменной $\zeta \in \mathbb{C}$ при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C}^*$ принадлежит классу $\mathfrak{F}_Q$. В силу

секвенциальной компактности этого класса, справа в (6.62) должно стоять отображение ω того же класса. Оказывается, все возможные ω легко описать.

Предложение 6.7. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, является произвольным Q–квазиконформным отображением, для которого существует предел*

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}^*}} \frac{f(\zeta z)}{f(z)} = \omega(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}. \tag{6.73}$$

Тогда ω имеет вид

$$\omega(\zeta) = \frac{\zeta}{|\zeta|}|\zeta|^c, \quad \operatorname{Re} c > 0. \tag{6.74}$$

При этом, комплексная характеристика отображения ω имеет вид

$$\nu(\zeta) = \nu_0 \frac{\zeta}{\bar{\zeta}}, \tag{6.75}$$

где

$$\nu_0 = \frac{c-1}{c+1} \tag{6.76}$$

может быть произвольным комплексным числом из единичного круга D.

Таким образом, здесь мы имеем дело с отображениями весьма частного вида из предложения 6.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t = \zeta\tau$, где ζ и τ являются комплексными. Тогда из (6.73) следует, что $f(\zeta\tau z) \sim f(\tau)\omega(\zeta)\omega(z)$ при $t \to 0$. Теперь мы поменяем ролями ζ и τ, чтобы доказать, что $f(\zeta\tau z) \sim f(\tau)\omega(\zeta z)$. Следовательно, предельная функция должна удовлетворять следующему характеристическому условию

$$\omega(\zeta z) = \omega(\zeta)\omega(z), \quad \forall \zeta, z \in \mathbb{C}. \tag{6.77}$$

Обозначая через ν комплексную характеристику отображения ω, и используя (6.77), находим, что

$$\nu(\zeta z)\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = \nu(z).$$

Отсюда следует, что

$$\nu(z) = \nu_0 \frac{z}{\bar{z}},$$

где ν_0 – произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $|\nu_0| \le (Q-1)/(Q+1)$. Теперь мы можем применить предложение 1.4 и записать ω в виде (6.74).

Отметим, что при $c = 1$ мы возвращаемся к случаю асимптотической однородности. □

Как видим из предложения 6.7, прямое обобщение асимптотической однородности недостаточно богато. Более плодотворным, с точки зрения дальнейших приложений, оказывается другое обобщение, основанное на теореме 6.1, если в качестве множества M выбрать положительную полуось $\mathbb{R}^+$.

Предложение 6.8. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, является произвольным Q–квазиконформным отображением, для которого существует предел*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(\zeta t)}{f(t)} = \omega(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}. \tag{6.78}$$

Тогда ω также является квазиконформным отображением, причем его комплексная характеристика $\nu(\zeta)$ зависит только от $\arg\zeta$, то есть $\nu(\rho\zeta) = \nu(\zeta)$, для любого $\rho > 0$, а само ω имеет представление (6.29).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая также, как при доказательстве предыдущего предложения, непосредственно из (6.78) выводим, что

$$\omega(\zeta\rho) = \omega(\zeta)\omega(\rho), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \rho > 0. \tag{6.79}$$

Из (6.79) следует, что комплексная характеристика $\nu(z)$ отображения ω должна удовлетворять соотношению

$$\nu(\rho\zeta) = \nu(\zeta)$$

для любого $\rho > 0$. Последнее эквивалентно тому, что ν зависит только от $\arg\zeta$. В силу предложения 6.4 предельные функции $\omega(\zeta)$ представимы по формуле (6.29). □

Предложение 6.9. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, является произвольным Q–квазиконформным отображением. Тогда соотношение*

$$f(\zeta t) \sim \omega(\zeta) f(t), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \tag{6.80}$$

при $t \to 0$, $t > 0$, равносильно асимптотической однородности в нуле отображения $g = f \circ \omega^{-1}$, то есть

$$g(wz) \sim w g(z), \quad \forall w \in \mathbb{C},$$

при $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку отображение ω из (6.80) удовлетворяет характеристическому соотношению (6.79), то условие эквивалентности (6.80) можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f\circ\omega^{-1}(\omega(t)\omega(\zeta))}{f\circ\omega^{-1}(\omega(t))} = \omega(\zeta), \quad \forall\zeta\in\mathbb{C},$$

или

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ \tau\in l}} \frac{f\circ\omega^{-1}(\tau w)}{f\circ\omega^{-1}(\tau)} = w, \quad \forall\zeta\in\mathbb{C},$$

где $l = \{\tau \in \mathbb{C} : \tau = \omega(t), t > 0\}$ – некоторая простая непрерывная кривая, идущая из ∞ в начало координат. По теореме 6.1, последнее соотношение равносильно асимптотической однородности отображения g в нуле. Другими словами, $g(wz) \sim wg(z)$, $\forall w \in \mathbb{C}$, при $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}^*$. □

Таким образом, предложение 6.9 позволяет свести проблему обобщенной асимптотической однородности (6.80) к обычной асимптотической однородности соответствующей композиции.

Заключительный результат этого пункта является существенным обобщением леммы об асимптотической конформности, доказанной нами в работе [157].

Предложение 6.10. *Пусть* $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_j(0) = 0$, $j \in J$ *– семейство* Q*–квазиконформных отображений. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Существует предел*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f_j(t\zeta)}{f_j(t)} = \omega_j(\zeta), \quad \forall\zeta\in\mathbb{C}, \tag{6.81}$$

равномерный относительно параметра $j \in J$.

2. *Все функции семейства* f_j *могут быть представлены в виде*

$$f_j(z) = A_j(\rho)(\omega_j(z) + o_j(\rho)), \tag{6.82}$$

где $\rho = |\omega_j(z)|$. *Здесь* $o_j(\rho)/\rho \to 0$ *при* $\rho \to 0$ *и*

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{A_j(t\rho)}{A_j(\rho)} = 1, \quad \forall t > 0 \tag{6.83}$$

равномерно относительно $j \in J$.

3. *Существует предел*

$$\lim_{z',z\to 0}\left\{\frac{f_j(z')}{f_j(z)}-\frac{\omega_j(z')}{\omega_j(z)}\right\}=0 \tag{6.84}$$

равномерный относительно $j\in J$ *при* $z,z'\in\mathbb{C}$ *и* $|z'/z|\le\delta$ *для* $\delta>0$.

Доказательство. В силу предложения 6.9, семейство функций $g_j=f_j\circ\omega_j^{-1}$ является асимптотически однородным в точке $z=0$ равномерно относительно параметра $j\in J$. Теперь все заключения следуют непосредственно из упомянутой выше леммы из [157], примененной к семейству g_j. □

6.2.4. Асимптотическая однородность и аппроксимативная непрерывность. Функция $\mu(z)$ называется аппроксимативно непрерывной в точке z_0, если существует измеримое множество E такое, что $\mu(z)\to\mu(z_0)$ при $z\to z_0$ по множеству E и z_0 является точкой плотности E, то есть

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\operatorname{mes}E\bigcap D(z_0;\varepsilon)}{\operatorname{mes}D(z_0;\varepsilon)}=1,$$

где $D(z_0;\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le\varepsilon\}$ (см. [300], с. 199). Для функций из $\mathcal{L}^\infty$ точки аппроксимативной непрерывности совпадают с точками Лебега:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\iint_{|z|<r}|\mu(z)-\mu(z_0)|dm_z=0.$$

Предложение 6.11. *Пусть* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(0)=0$, *– квазиконформное отображение, комплексная характеристика которого* $\mu(z)$, $\mu(0)=0$, *аппроксимативно непрерывна в нуле. Тогда отображение* f *асимптотически однородно в нуле.*

Доказательство. Действительно, условие аппроксимативной непрерывности характеристики μ эквивалентно сходимости по мере $\mu_t(z)\to 0$, где

$$\mu_t(z)=\mu(tz),\quad t>0.$$

Рассматривая семейство отображений класса $\mathfrak{F}_Q$ с указанными характеристиками

$$f_t(z)=\frac{f(tz)}{f(t)},\quad t>0,$$

по предложению 6.1 заключаем, что $f_t(z)\to f_0(z)\equiv z$, $z\in\overline{\mathbb{C}}$, локально равномерно при $t\to 0$. Таким образом, по теореме 6.1, получаем асимптотическую однородность отображения f. □

Предложение 6.11 допускает далеко идущие обобщения. Именно, имеет место

Лемма 6.1. *Пусть* $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_j(0) = 0$, $j \in J$, – *семейство квазиконформных отображений и пусть их комплексные характеристики* $\mu_j(z)$ *при некотором* $\alpha > 0$ *удовлетворяют интегральному условию*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \iint\limits_{|z|\le r} |\mu_j(z) - \nu_j(z)|^\alpha dm_z = 0 \tag{6.85}$$

равномерно относительно $j \in J$, *где* $\nu_j(z)$ *зависит только от* $\arg z$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} \frac{f_j(tz)}{f_j(t)} = \omega_j(z) \tag{6.86}$$

равномерный относительно $j \in J$, *где* $\omega_j(z)$ – *квазиконформные отображения класса* $\mathfrak{F}_Q$ *с комплексными характеристиками* $\nu_j(z)$, *описанными в предложении 6.4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, квазиконформные отображения

$$g_{j,t}(z) = \frac{f_j(tz)}{f_j(t)}, \quad t > 0$$

класса $\mathfrak{F}_Q$ имеют характеристики

$$\mu_{j,t}(z) = \mu_j(tz), \quad t > 0.$$

Полагая в (6.85) последовательно $r = nt$, $n = 1, 2, \ldots$, при $t \to 0$, $t > 0$, и делая под знаком интеграла замены $z \to tz$, получаем

$$\lim_{t\to 0} \iint\limits_{|z|\le n} |\mu_{j,t}(z) - \nu_j(z)|^\alpha dm_z = 0,$$

$n = 1, 2, \ldots$, равномерно относительно $j \in J$ поскольку ν_j удовлетворяют соотношению $\nu_j(tz) = \nu_j(z)$, $t > 0$. Таким образом, из предложений 6.1, 6.2 и 6.4 приходим к (6.86) при $t > 0$. Наконец, переходя от отображений $f_j(z)$ к отображениям $f_j(-z)$, получаем (6.86) и при $t < 0$. □

6.3. Об асимптотической симметрии

6.3.1. Непрерывная строго возрастающая функция h, отображающая вещественную ось $\mathbb{R}$ на себя, называется *квазисимметричной* (M–квазисимметричной), $1 \le M < \infty$, если

$$\frac{1}{M} \le \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \le M$$

для всех $t \ne 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ (см. [270], с. 81).

Множество квазисимметрических гомеоморфизмов инвариантно по отношению к линейным преобразованиям и после нормировки $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, представляет собой компакт $H_0(M)$ относительно локально равномерной сходимости (см. [16], с. 64).

Различные аналитические и геометрические свойства квазисимметрических гомеоморфизмов и вопросы их продолжения до квазиконформных автоморфизмов $\mathbb{H}$ изучались, например, Карлесоном [206], Фелманом [384], Андерсоном, Беккером и Лесли [21], Хейманом и Хинканеном [389], Тукиа [379], Дуади и Ирлом [177] и Партука [306]. Проблема параметрического представления исследовалась Агардом и Келингосом [3] и Рейманом [321]. В недавней работе Гардинер и Салливан [94] обнаружили новые замечательные приложения квазисимметрических отображений к теории комплексных банаховых многообразий. Некоторые свойства регулярности и симметрии квазисимметрических отображений в зависимости от свойств комплексных характеристик их квазиконформных продолжений были установлены в работе [157].

6.3.2. Квазисимметричный гомеоморфизм $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть *асимптотически симметричным* на $\mathbb{R}$, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} = 1 \tag{6.87}$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$ (ср. [94]).

Наряду с асимптотически симметричными гомеоморфизмами мы будем рассматривать *асимптотически конформные* автоморфизмы верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, которые характеризуются условием, что

$$k(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{0<\operatorname{Im} z \le t} |\mu(z)| \to 0$$

при $t \to 0$ (см. [21, 206]).

Берлинг и Альфорс [61] доказали, что гомеоморфизм h вещественной оси $\mathbb{R}$ является квазисимметричным тогда и только тогда, когда существует его квазиконформное продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Подобная связь имеет место также между асимптотически симметричными автоморфизмами вещественной оси $\mathbb{R}$ и асимптотически конформными отображениями верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ на себя (см. [94], предложения 3.1 и 3.2).

Основная цель данного параграфа заключается в том, чтобы установить связь между понятиями асимптотической симметрии и асимптотической однородности.

Теорема 6.2. *Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – квазисимметричный гомеоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$h(x)$ асимптотически симметричен на $\mathbb{R}$.*

2. *Для любого $\tau \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(x+\tau t) - h(x)}{h(x+t) - h(x)} = \tau$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

3. *Существует асимптотически конформное продолжение $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ гомеоморфизма h.*

4. *Существует квазиконформное продолжение функции h до автоморфизма верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \iint\limits_{\substack{|z-x|\le t \\ z\in\mathbb{H}}} |\mu(z) - \nu_x(e^{i\theta})| dm_z = 0 \tag{6.88}$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, где $\theta = \arg(z-x)$ и выполняется соотношение

$$\operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{1 - \nu(e^{i\theta})e^{-2i\theta}}{1 + \nu(e^{i\theta})e^{-2i\theta}} d\theta = 0.$$

5. *Существует квазиконформное продолжение функции h до автоморфизма f комплексной плоскости $\mathbb{C}$, сохраняющее инфинитезимальные окружности с центрами на $\mathbb{R}$, причем*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\max_{|z-x|=t} |f(z) - f(x)|}{\min_{|z-x|=t} |f(z) - f(x)|} = 1$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

6. *Существует квазиконформное продолжение функции h до автоморфизма f комплексной плоскости $\mathbb{C}$, который асимптотически однороден на $\mathbb{R}$, то есть*

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}^*}} \frac{f(x-\zeta z)-f(x)}{f(x-z)-f(x)} = \zeta$$

для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

Пункт 4 теоремы 6.2 содержит ряд эффективных критериев симметрии. Отметим некоторые из них.

Следствие 6.2.1. *Пусть h допускает квазиконформное продолжение f в верхнюю полуплоскость с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что ее существенный модуль непрерывности*

$$k(t,x) = \operatorname*{ess\,sup}_{0\le \operatorname{Im} z\le t} |\mu(z)-\mu(x)|$$

стремится к нулю при $t \to 0$, равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место условие асимптотической симметрии (6.87).

В частности, при $\mu(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, квазиконформное продолжение f является асимптотически конформным (ср. [94], предложение 3.1).

Следствие 6.2.2. *Пусть в* (6.88) $\nu_x(e^{i\theta}) = \mathcal{A}_x(e^{-2i\theta})$, *где* $\mathcal{A}_x(e^{i\alpha})$, $x \in \mathbb{R}$, *представляют собой радиальные граничные значения семейства ограниченных аналитических функций $\mathcal{A}_x(\zeta)$ в круге D. Тогда имеет место условие* (6.87) *асимптотической симметрии.*

Действительно, по лемме Фату

$$\int_0^\pi \frac{1-\mathcal{A}_x(e^{-2i\theta})e^{-2i\theta}}{1+\mathcal{A}_x(e^{-2i\theta})e^{-2i\theta}}\,d\theta = \pi$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Замечание. Теорема 6.2 остается в силе, если $\mathbb{R}$ заменить на произвольное открытое множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, а условие равномерности на $\mathbb{R}$ по x – на условие локально равномерной сходимости на $\mathcal{X}$, включая определение асимптотической конформности.

Прежде чем приступить к доказательству сформулированного утверждения, приведем известную лемму Берлинга–Альфорса с необходимыми для дальнейших рассуждений комментариями, и докажем лемму об асимптотической конформности.

Лемма 6.2 (см. [16], с. 64). *Если* $h \in H_0(M)$, *то*

$$\frac{1}{M+1} \le \int\limits_0^1 h(x)dx \le \frac{M}{M+1}\,. \tag{6.89}$$

Обозначим через $H_0(M,N)$ подкласс $H_0(M)$ таких h, для которых

$$\frac{1}{N} \le \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \le N$$

для всех троек $x-t$, x и $x+t$ из $[0,1]$. Повторяя рассуждения Берлинга–Альфорса (см. [16], с. 63–64), можно показать, что, если $h \in H_0(M,N)$, то в неравенстве (6.89) M можно заменить на N.

Лемма 6.3. *Пусть* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– квазисимметрический гомеоморфизм, такой, что*

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} = 1$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. *Тогда продолжение* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *Берлинга – Альфорса имеет комплексную характеристику* $\mu(z) \to 0$ *при* $y = \operatorname{Im} z \to 0$ *равномерно относительно* $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжение квазисимметричного гомеоморфизма h по Берлингу–Альфорсу до квазиконформного отображения комплексной плоскости $\mathbb{C}$ имеет вид

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где

$$u(x,y) = \frac{1}{2y} \int\limits_{x-y}^{x+y} h(t)\,dt,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2y}\left(\int\limits_{x}^{x+y} h(t)dt - \int\limits_{x-y}^{x} h(t)\,dt \right).$$

Отметим, что частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ существуют и непрерывны в верхней полуплоскости.

Зафиксируем произвольную точку $z = x + iy \in \mathbb{H}$ и наряду с h рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{h(x+ty)-h(x)}{h(x+y)-h(x)},$$

которая нормирована условиями $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, и также является квазисимметричным гомеоморфизмом вещественной оси $\mathbb{R}$. Обозначая через $F(\zeta) = U(\xi, \eta) + iV(\xi, \eta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, продолжение Берлинга–Альфорса для g, легко увидеть, что f и F связаны соотношением

$$F(\zeta) = \frac{f(x + \zeta y) - h(x)}{h(x + y) - h(x)}\,.$$

Поэтому, значение комплексной характеристики μ отображения f в точке $z = x + iy$ совпадает со значением комплексной характеристики отображения F в точке $\zeta = i$.

Как в [16], с. 68, вычисляем значения частных производных в точке $\zeta = i$:

$$\begin{aligned} U_\xi &= \frac{1}{2}(1 + \beta) \qquad U_\eta = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \\ V_\xi &= \frac{1}{2}(1 - \beta) \qquad V_\eta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma), \end{aligned} \tag{6.90}$$

где

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 - \int\limits_0^1 g(t)dt, \quad \beta = -g(-1), \\ &\gamma = \beta + \int\limits_{-1}^0 g(t)dt. \end{aligned} \tag{6.91}$$

По лемме 6.2, с учетом сделанного замечания, получаем (см. [16], с. 63–66), что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N+1} \leq \alpha \leq \dfrac{N}{N+1}, \quad \dfrac{1}{N} \leq \beta \leq N, \\ \dfrac{1}{N^2+N} \leq \gamma \leq \dfrac{N^2}{N+1}, \end{cases} \tag{6.92}$$

где $N = N(x, y) \leq M$ – коэффициент квазисимметричности функции g на отрезке $[-1, 1]$, который совпадает с коэффициентом квазисимметричности функции h на отрезке $[x - y, x + y]$.

Из (6.87) следует, что указанный коэффициент $N(x, y)$ стремится к единице при $y \to 0$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Поэтому, из (6.90) – (6.92) следует, что $U_\xi \to 1$, $U_\eta \to 0$, $V_\xi \to 0$, $V_\eta \to 1$ при $y \to 0$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\mu(z) \to 0$ при $y \to 0$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$ и мы завершаем доказательство леммы 6.3. $\square$

Замечание. Если предел (6.87) имеет место только на некотором открытом множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ локально равномерно относительно $x \in \mathcal{X}$, то $\mu(z) \to 0$ при $y \to 0$ локально равномерно относительно $x \in \mathcal{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6.2. Импликации $6 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ являются очевидными. Импликация $1 \Rightarrow 3$ получается из леммы 6.3. Далее, импликация $3 \Rightarrow 6$ извлекается из леммы 6.2. Таким образом, нами установлены эквивалентности $1 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6$.

Импликация $4 \Rightarrow 1$ следует из леммы 6.2 и предложения 6.4. Обратное утверждение $1 \Rightarrow 4$ следует из леммы 6.3.

В последовательности импликаций $6 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 6$ две первые являются очевидными, а последняя уже установлена нами выше. Отсюда имеем эквивалентность $6 \Leftrightarrow 2$. Тем самым установлена эквивалентность всех шести условий, сформулированных в теореме 6.2.

По поводу доказательства эквивалентности условий 1 и 3 сравни [94]. Отметим, что импликация $3 \Rightarrow 1$ может быть выведена из леммы 6.2, также как это было сделано для доказательства импликации $3 \Rightarrow 6$. $\square$

6.3.3 Мы завершим этот раздел аналогичной теоремой для квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности S^1, включив в ее содержание лишь те критерии асимптотической симметрии, которые потребуются нам в следующем параграфе.

Теорема 6.3. *Пусть $g(e^{i\alpha}) = e^{i\Omega(\alpha)}$ – квазисимметричный автоморфизм единичной окружности S^1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *g асимптотически симметричен на S^1, то есть*

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{\Omega(\alpha + \phi) - \Omega(\alpha)}{\Omega(\alpha) - \Omega(\alpha - \phi)} = 1$$

равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *Существует асимптотически конформное продолжение $F : D \to D$ гомеоморфизма g.*

3. *Существует квазиконформное продолжение $F : D \to D$ гомеоморфизма g с комплексной характеристикой $\kappa(\zeta)$ такой, что*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \iint\limits_{\substack{|\zeta - \eta| \le t \\ \zeta \in D}} |\kappa(\zeta) - \rho_\eta(e^{i\alpha})| \, dm_\zeta = 0 \tag{6.93}$$

равномерно относительно $\eta \in S^1$, *где* $\alpha = \arg(\zeta - \eta)$ *и выполняется соотношение*

$$\operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{1 - \rho_\eta(e^{i\alpha})e^{-2i\alpha}}{1 + \rho_\eta(e^{i\alpha})e^{-2i\alpha}} d\alpha = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Редуцируем задачу, поставленную для круга D к соответствующей проблеме для верхней полуплоскости $\mathbb{H}$.

Пусть

$$h(x) = -i \ln g(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R},$$

и

$$f(z) = -i \ln F(e^{iz}), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Здесь для $0 \le x = \operatorname{Re} z < 2\pi$ выбрана произвольная непрерывная ветвь логарифма, а далее логарифм продолжен по непрерывности так, что

$$h(x + 2\pi) = h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и

$$f(z + 2\pi) = f(z), \quad z \in \mathbb{H}.$$

По построению очевидно, что условие 1 теоремы 6.3 для функции g эквивалентно условию 1 теоремы 6.3 для функции h, а условие 2 для F – условию 3 для f.

Поскольку $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Psi$, где $\Psi(z) = e^{iz}$ – аналитическая функция, то прямые вычисления показывают, что

$$\mu(z) = -e^{-i(\bar{z}+z)} \kappa(e^{iz}).$$

Поэтому условие 3 теоремы 6.3 эквивалентно условию 4 теоремы 6.3 с

$$\nu_x(e^{i\theta}) = -e^{-2ix} \rho_{e^{ix}}(e^{i\theta}).$$

Действительно, квазиконформный гомеоморфизм f можно продолжить по симметрии из $\mathbb{H}$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением всех перечисленных выше соотношений. Интегральные условия (6.88) и (6.93) эквивалентны сходимости по мере

$$\mu(x + t(z - x)) \xrightarrow{mes} \nu_x(e^{i\theta}) \tag{6.94}$$

и

$$\xi(\eta + t(\zeta - \eta)) \xrightarrow{mes} \rho_\eta(e^{i\alpha}) \tag{6.95}$$

при $t \to 0$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$ и $\eta \in S^1$, соответственно. Далее, поскольку якобиан отображения Ψ

$$J_\Psi(z) = e^{2\operatorname{Im} z} \to 1$$

при $z \to x$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, то условия (6.94) и (6.95) также эквивалентны. Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 6.3. $\square$

6.4. Асимптотически конформные кривые

6.4.1. Кривая Жордана $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется квазиконформной кривой или квазиокружностью, если она является образом единичной окружности S^1 при квазиконформном автоморфизме комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Альфорс доказал, что кривая Γ является квазиконформной тогда и только тогда, когда отношение

$$\frac{|w_1 - w| + |w - w_2|}{|w_1 - w_2|}$$

ограничено для всех $w_1, w_2 \in \Gamma$ и $w \in \Gamma(w_1, w_2)$, где $\Gamma(w_1, w_2)$ обозначает дугу кривой Γ с концами в w_1, w_2, имеющую наименьший диаметр.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – квазиконформная кривая и f – конформное отображение единичного круга D на ее внутренность. Тогда f допускает квазиконформное продолжение через S^1 до квазиконформного гомеоморфизма комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см. [16], с. 71), причем такое продолжение не единственно. Если среди них существует квазиконформное продолжение с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{1 \le |z| \le t} |\mu(z)| \to 0, \quad t \to 1 + 0,$$

тогда кривая Γ называется асимптотически конформной (см., также работы Агарда и Геринга [2] и Карлесона [206]). Беккер и Поммеренке [33] установили критерий асимптотической конформности жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, который заключается в существовании предела

$$\lim_{|w_1 - w_2| \to 0} \frac{|w_1 - w| + |w - w_2|}{|w_1 - w_2|} = 1, \tag{6.96}$$

равномерного относительно $w \in \Gamma(w_1, w_2)$.

Хорошо известно, что квазиокружности могут быть неспрямляемыми (см. [48], с. 42, [270], с. 104). Несмотря на кажущуюся простоту, асимптотически конформные кривые сохраняют за собой это свойство.

Асимптотически конформные кривые и их связи с различными величинами в терминах внутренних и граничных свойств конформного отображения и его квазиконформного продолжения исследовались многими авторами (см. например, [21, 33] и цитируемую там литературу). Описание асимптотически конформных кривых в терминах асимптотической однородности квазиконформного отображения было дано в работах [156, 157]. Вопросы спрямляемости и гладкости квазиконформных кривых рассмотрены в работах [72] и [158].

В настоящем параграфе мы приводим новые критерии асимптотической конформности и связываем это понятие с понятием асимптотической симметрии.

6.4.2. Начнем с формулировки критерия асимптотической конформности кривой в терминах существования квазиконформного продолжения с комплексной характеристикой, равномерно аппроксимативно непрерывной на S^1.

Теорема 6.4. *Жорданова кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ является асимптотически конформной, если существует квазиконформное отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Gamma = f(S^1)$, с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что для некоторого $\alpha > 0$*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \iint\limits_{\substack{|z-\eta|\le t \\ z\in D}} |\mu(z) - \mu(\eta)|^\alpha dm_z = 0 \tag{6.97}$$

равномерно относительно $\eta \in S^1$.

Отметим, что частный случай теоремы 6.4, когда $\mu(\eta) \equiv 0$ на S^1, был установлен ранее в работе [157] на основе сочетания понятия асимптотической однородности и геометрического критерия (6.96). Предлагаемое ниже доказательство теоремы 6.4 не использует упомянутый выше критерий асимптотической конформности кривой Γ.

Переходя к анализу сформулированного результата, заметим, что принадлежность комплексной характеристики $\mu(z)$ классу C^α, $0 < \alpha \le 1$, гарантирует принадлежность кривой Γ классу $C^{1+\alpha}$. Однако, непрерывность $\mu(z)$ не влечет, в общем случае, гладкость кривой Γ. В этой связи следующий критерий представляет самостоятельный интерес.

Следствие 6.4.1 *Если квазиконформный автоморфизм $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ имеет непрерывную комплексную характеристику в окрестности S^1, то квазиокружность $\Gamma = f(S^1)$ является асимптотически конформной кривой.*

Действительно, в этом случае $\mu(z)$ является равномерно непрерывной в достаточно малой окрестности единичной окружности S^1 и поэтому выполнено условие (6.97).

Обозначим через $\delta(t, \eta)$ существенный модуль непрерывности комплексной характеристики $\mu(z)$ в фиксированной точке $\eta \in S^1$, то есть

$$\delta(t, \eta) = \operatorname*{ess\,sup}_{|z-\eta|\le t} |\mu(z) - \mu(\eta)|.$$

Следствие 6.4.2. *Пусть для некоторого $\alpha > 0$ условие Дини*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\delta^{\alpha}(t, \eta)}{t} dt = 0$$

выполняется равномерно относительно $\eta \in S^1$. Тогда Γ – асимптотически конформна.

Для доказательства следствия 6.4.2 достаточно заметить, что

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{|z-\eta|\le\varepsilon} |\mu(z) - \mu(\eta)|^{\alpha} dm_z \le 2\pi \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\delta^{\alpha}(t, \eta)}{t}\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6.4. Пусть f – квазиконформный автоморфизм $\mathbb{C}$ с комплексной характеристикой $\mu(z)$, удовлетворяющей условию (6.97). Тогда

$$f(z) = \begin{cases} \varphi \circ \omega(z), & \text{для } z \in \overline{D}, \\ \Phi \circ \Omega(z), & \text{для } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D, \end{cases}$$

где φ и Φ – конформные отображения круга D и его внешности на внутренность и внешность кривой $\Gamma = f(S^1)$, а ω и Ω – квазиконформные автоморфизмы $\overline{D}$ и $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ с комплексной характеристикой $\mu(z)$. По теореме 6.2 автоморфизмы ω и Ω можно заменить на асимптотически конформные автоморфизмы ω^* и Ω^* с сохранением граничных соответствий, то есть $\omega|_{S^1} \equiv \omega^*|_{S^1}$ и $\Omega|_{S^1} \equiv \Omega^*|_{S^1}$. Далее, рассмотрим гомеоморфизм комплексной плоскости $\mathbb{C}$

$$F(z) = \begin{cases} \varphi \circ \omega^*(z), & \text{для } z \in \overline{D}, \\ \Phi \circ \Omega^*(z), & \text{для } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D, \end{cases}$$

который является квазиконформным в D и $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}$. По теореме об устранимости аналитических дуг (см. [270], с. 45), примененной к гомеоморфизму $f^{-1}\circ F$, заключаем, что $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – квазиконформный автоморфизм.

Положим

$$G(z)=\begin{cases}\varphi(z), & \text{для } z\in\overline{D},\\ \bar{F}\circ j\circ F^{-1}\circ\varphi\circ j(z), & \text{для } z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus D,\end{cases}$$

где j означает отражение $z\to 1/\bar{z}$ относительно S^1. Применяя еще раз теорему об устранимости, и привлекая асимптотическую конформность автоморфизмов ω^* и Ω^*, приходим к заключению, что G дает асимптотически конформное продолжение конформного отображения φ.

Таким образом, $\Gamma=f(S^1)=\varphi(S^1)$ – асимптотически конформная кривая. Теорема доказана. □

6.4.3. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$ и $\varphi_k(z)$, $k=1,2$ – конформные отображения круга D и его внешности, соответственно, на внутренность и внешность кривой Γ. Хорошо известно, что кривая Γ является квазиконформной тогда и только тогда, когда гомеоморфизм $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ окружности S^1 является квазисимметричным (см. [270], с. 100). Мы завершим данный параграф аналогичным критерием для асимптотически конформных кривых.

Теорема 6.5. *Пусть Γ – квазиконформная кривая в $\mathbb{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Γ – асимптотически конформная кривая.*

2. *$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ – равномерно асимптотически симметричный автоморфизм окружности S^1.*

При выполнении одного из этих условий, конформные отображения φ_k, $k=1,2$, удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi_k(e^{i(\theta+\alpha)})-\varphi_k(e^{i\theta})}{\varphi_k(e^{i\theta})-\varphi_k(e^{i(\theta-\alpha)})}=1 \tag{6.98}$$

равномерно относительно $\theta\in\mathbb{R}$.

Доказательство. $2\Rightarrow 1$. По теореме 6.3 функция $g=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ допускает асимптотически конформное продолжение F на всю плоскость $\mathbb{C}$. Тогда

$$f(z)=\begin{cases}\varphi_1(z), & \text{для } z\in\overline{D},\\ \varphi_2\circ F(z), & \text{для } z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus D,\end{cases}$$

представляет собой искомое асимптотически конформное продолжение φ_1 и, следовательно, кривая $\Gamma = \varphi_1(S^1)$ – асимптотически конформна.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть Γ – асимптотически конформная кривая. Обозначим через f асимптотически конформное продолжение φ_1 на всю плоскость. Тогда

$$F(z) = \begin{cases} \varphi_2^{-1}(z) \circ f(z), & \text{для } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D, \\ z, & \text{для } z \in D, \end{cases}$$

доставляет асимптотически конформное продолжение гомеоморфизма $g = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ на всю плоскость и по теореме 6.6 g равномерно асимптотически симметричен на S^1.

Поскольку $1 \Leftrightarrow 2$, то отображения φ_k допускают асимптотически конформные продолжения f_k на всю комплексную плоскость. По лемме 6.1 и предложению 6.1 отсюда следует соотношение (6.98). Теорема доказана. □

6.5. К проблеме Райха–Вальчака.

В работе [322] была высказана гипотеза, что, каков бы ни был модуль комплексной характеристики $q(z) = |\mu(z)| \le q < 1$, всегда можно так подобрать ее аргумент $\arg \mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в нуле. В той же работе было дано частичное решение этой проблемы, когда $q(z) = \phi(|z|)$ зависит только от $|z|$ (см. также [270], с. 248–249).

Указанное частичное решение проблемы можно получить из следующего утверждения.

Предложение 6.12. *Пусть $k(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция с $|k(t)| \le q < 1$ и $h \in \mathfrak{F}_Q$ – квазиконформное отображение с комплексной характеристикой $\mu(z) = k(|z|)z/\bar{z}$. Тогда для конформности h в нуле необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел*

$$\lim_{z \to 0} \int\limits_{|z|}^{1} \frac{k(t)}{1 - k(t)} \frac{dt}{t} \ne \infty. \tag{6.99}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из предложения 6.5 имеем явную формулу

$$h(z) = z \exp\left\{ 2 \int_1^{|z|} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right\} \neq \infty.$$

Поэтому, для существования предела

$$\lim_{z \to 0} \frac{h(z)}{z} \neq 0, \infty$$

как раз необходимо и достаточно выполнение условия (6.99).

Далее, каков бы ни был модуль $q(t) = |k(t)|$, этого всегда можно добиться за счет знака $k(t)$. Точнее, полагая

$$r(t) = (-1)^n q(t)$$

при $t \in (1/n, 1/(n-1))$, $n = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\left| \int_{1/n}^{1/(n-1)} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{Q}{n} \ .$$

При этом знак указанного интеграла совпадает с $(-1)^n$. Таким образом, мы имеем дело со знакопеременным рядом, общий член которого стремится к нулю при $n \to \infty$. Такой ряд всегда сходится. С другой стороны,

$$\left| \int_{|z|}^1 \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} - \int_{1/N}^1 \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq Q|z|,$$

где N – целая часть числа $1/|z|$ и

$$\int_{1/N}^1 \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} = \sum_{n=2}^{N} \int_{1/n}^{1/(n-1)} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \ ,$$

то есть интеграл сходится к тому же пределу, что и указанный ряд. □

Мы еще вернемся к обсуждению этой проблемы в главе 9 при обсуждении новой теоремы о конформной дифференцируемости квазиконформных отображений. В заключительной части III данной книги, заменив условие конформности на более слабое условие конформности по Белинскому, мы дадим решение проблемы при произвольном измеримом $k(z)$.

В заключение отметим, что описанные выше подходы к исследованию локального поведения квазиконформных отображений на плоскости нашли свое дальнейшее развитие, применительно к случаю квазиконформных и квазирегулярных отображений в пространстве, в работах [133, 134, 147–150].

Глава 7

ВАРИАЦИЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Развитие вариационного исчисления в различных классах квазиконформных и более общих отображений и решение на этой основе актуальных экстремальных проблем представляет собой интенсивно развивающееся направление современного анализа и теории функций. Фундаментальные результаты в этом направлении получены, прежде всего, в работах П.П. Белинского, С.Л. Крушкаля, Шиффера, Шиффера и Шобера, см. [48, 223, 403, 404] и цитируемую там литературу.

Основная цель данной главы, представить достаточно общую вариационную процедуру исследования экстремальных задач в компактных классах квазиконформных отображений, предложенную нами в [129] и развитую в работах [125, 151, 153, 359].

7.1. Вариационные формулы

Для иллюстрации общей вариационной процедуры мы введем в рассмотрение один специальный класс квазиконформных автоморфизмов комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Пусть $Q : \mathbb{C} \to [1, \infty]$ – измеримая функция, такая, что норма

$$\|Q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{C}} Q(z)$$

конечна и пусть μ – измеримая функция в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям:

$$|\mu(z)| \le (Q(z) - 1)(Q(z) + 1)^{-1}$$

для почти всех $z \in \mathbb{C}\setminus\{\bigcup_{n=1}^{P} K(z_n, \rho_n) \cup \Delta_R\}$, где $K(z_n, \rho_n) = \{z : |z - z_n| < \rho_n\}$, $\Delta_R = \{z : |z| > R\}$, и $\mu = 0$ в остальных точках комплексной плоскости. Множество всех таких функций $\mu(z)$ мы обозначим через M. Мы также предполагаем, что круги $\overline{K(z_n, \rho_n)}$ и $\overline{\Delta_R}$ не имеют общих точек.

Для любой такой μ мы обозначим через $f(z)$ $Q(z)$ – квазиконформный автоморфизм плоскости, удовлетворяющий уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z$ и нормированный условиями $f(\infty) = \infty$ и $f'(\infty) = 1$. В силу леммы Вейля, отображение $f(z)$ будет конформно в областях $K(z_n, \rho_n)$ и Δ_R. Изменяя μ, мы получаем класс N всех таких отображений.

В классе N имеет место следующая вариационная формула.

Теорема 7.1. *Пусть $f \in N$ и имеет комплексную характеристику $\mu \in M$. Тогда для любой функции $\nu \in M$ и всех достаточно малых значениях параметра $t, t > 0$ функция*

$$f^*(z) = f(z) + t\,\frac{1}{\pi}\int\!\!\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(\mu(\zeta) - \nu(\zeta)) f_\zeta^2(\zeta)\, d\xi d\eta}{f(\zeta) - f(z)} + o\,(z,t), \tag{7.1}$$

также принадлежит классу N. Здесь $t^{-1}o(z,t) \to 0$ при $t \to 0$ равномерно на компактных множествах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество M выпукло, то функции

$$\mu(z,t) = \mu(z) + t(\nu(z) - \mu(z))$$

также принадлежат классу M для всех $t, 0 \le t \le 1$. Обозначим через $f^*(z)$ надлежащее решение уравнения Бельтрами с коэффициентом $\mu(z,t)$, принадлежащее классу N. По теореме о зависимости решений уравнения Бельтрами от параметров, см., например, [16], с. 95, 96, это решение при малых значениях параметра $t, t > 0$ приобретает вид (7.1). □

7.2. Необходимые условия экстремума

Вариационные формулы вида (7.1) служат эффективным инструментом при исследовании экстремальных проблем. Они позволяют редуцировать широкий класс нелинейных экстремальных задач на компактных классах квазиконформных отображений к линейным экстремальным задачам на выпуклых классах их комплексных характеристик. В качестве иллюстрации метода мы вновь обратимся к классу N.

Пусть $\chi : N \to \mathbb{R}$ – полунепрерывный сверху функционал, определенный на классе N. Класс N является компактным относительно топологии локально равномерной сходимости и, следовательно, существует

функция $f \in N$, такая что

$$\chi(f) = \max_N \chi. \tag{7.2}$$

Мы будем предполагать также, что χ дифференцируем по Гато, то есть,

$$\chi(f^*) = \chi(f) + t\mathrm{Re} \iint_{\mathbb{C}} g d\kappa + o(t)$$

для любой допустимой вариации $f^* = f + tg + o(t)$ в классе N. Здесь κ – конечная комплексная борелевская мера с компактным носителем. Более того, мы предполагаем, что ядро $(w - f(z))^{-1}$ локально интегрируемо относительно произведения мер $dm \bigotimes d\kappa$, где m – мера Лебега на плоскости, и

$$\mathcal{A}(w) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{d\kappa}{(w - f(z))} \neq 0$$

почти всюду.

Следующее теорема содержит необходимые условия экстремума в терминах комплексной дилатации μ экстремального отображения $f \in N$, реализующего $\max_N \chi$.

Теорема 7.2. *Пусть μ – комплексная характеристика экстремального отображения $f \in N$. Тогда, при сформулированных выше условиях на функционал, экстремальная функция f существует и удовлетворяет уравнению Бельтрами*

$$f_{\bar{z}}(z) = -k(z) \frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z)|} \overline{f_z(z)} \tag{7.3}$$

для почти всех $z \in \mathbb{C}$, где $k(z) = (Q(z) - 1)(Q(z) + 1)^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть μ - комплексная характеристика экстремального отображения f. Применим вариационную формулу (7.1) и вычислим соответствующую вариацию функционала:

$$\delta\chi = \chi(f^*) - \chi(f) = \ = \mathrm{Re}\, \frac{t}{\pi} \iint_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \frac{(\mu(\zeta) - \nu(\zeta)) f_\zeta^2 \, dm_\zeta \, d\kappa_z}{(f(\zeta) - f(z))} + o(t) \leq 0,$$

где $dm_\zeta = d\xi \, d\eta$. Разделим обе части неравенства на t и затем выполним предельный переход при $t \to 0$. Меняя, по теореме Фубини порядок интегрирования, запишем необходимое условие экстремума в виде

$$\mathrm{Re} \iint_{\mathbb{C}} (\mu(\zeta) - \nu(\zeta)) \mathcal{A}(f(\zeta)) f_\zeta^2 \, d\xi \, d\eta \leq 0. \tag{7.4}$$

Из этого неравенства, в силу произвола в выборе функции $\nu \in M$, следует, что комплексная характеристика μ экстремального отображения f, реализующего $\max_N \chi(f)$, одновременно доставляет экстремум функционалу

$$\min_{\nu\in M} \operatorname{Re} \iint_{\mathbb{C}} \nu(\zeta)\mathcal{A}(f(\zeta))f_\zeta^2\, d\xi\, d\eta$$

на классе измеримых функций M. Таким образом, мы свели первоначальную экстремальную задачу на классе N квазиконформных отображений к линейной экстремальной задаче на выпуклом классе M их комплексных характеристик. Из (7.4) следует, что комплексная характеристика экстремального отображения имеет вид

$$\mu(z) = -k(z)\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z)}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\frac{\overline{f_z}}{f_z}$$

для почти всех z. Таким образом, экстремальная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.3). □

В следующем параграфе, для иллюстрации метода, мы дадим решение одной конкретной экстремальной задачи, непосредственно связанной с известной проблемой М.А. Лаврентьева об оценках произведения конформных радиусов неналегающих областей.

7.3. Произведение конформных радиусов неналегающих областей

Пусть μ – измеримая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям: $|\mu| \le k < 1$ для почти всех $z \in K(R,1) = \{z : R < |z| < 1\}$, и $\mu = 0$ для почти всех $z \in D_R \cup \Delta$, где $D_R = \{z : |z| < R\}$ и $\Delta = \{z : |z| > 1\}$. Множество всех таких функций обозначим через $M_{R,1}$.

Обозначим через $w = f(z)$ гомеоморфное обобщенное решение уравнения Бельтрами $w_{\bar z} = \mu(z)w_z$, нормированное условиями: $f(0) = a_1$, $f(\infty) = a_2$. Это решение осуществляет $Q = (1+k)/(1-k)$ – квазиконформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя, причем в областях D_R и Δ отображение конформно. Изменяя μ, мы получим класс $N_{R,1}(a_1, a_2; Q)$ всех таких отображений.

Следуя Н.А. Лебедеву [258], обозначим через $\mathfrak{M}(a_1, a_2)$ множество пар $\{f_1(z),\ f_2(z)\}$ функций, конформно и однолистно отображающих единичный круг D на области B_l, $a_l \in B_l$, $l = 1, 2$, не имеющие общих точек, причем так, что $f_l(0) = a_l$. Очевидно, если $f \in N_{R,1}(a_1, a_2; Q)$,

то $\{f(Rz),\ f(1/z)\} \in \mathfrak{M}(a_1, a_2)$. Отметим, что в этом случае области B_l ограничены квазиконформными кривыми. Множество всех таких пар функций, когда $f \in N_{R,1}(a_1, a_2; Q)$, образуют подкласс класса $\mathfrak{M}(a_1, a_2)$, который мы обозначим $\mathfrak{M}_R(a_1, a_2; Q)$.

М.А. Лаврентьев [245] доказал, что если $\{f_1(z),\ f_2(z)\} \in \mathfrak{M}(a_1, a_2)$, $a_1 \neq \infty$, $a_2 \neq \infty$, и функции $f_l(z)$, $l = 1, 2$, регулярны в круге D, то

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \leq |a_2 - a_1|^2. \tag{7.5}$$

Знак равенства имеет место только для функций, отображающих круг D на полуплоскости, общая граница которых перпендикулярна отрезку, соединяющему точки a_1 и a_2, и делит его на две равные части. Задача об оценке произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей изучалась многими авторами (более подробно см. [258], с. 32).

Сформулированная теорема М.А. Лаврентьева содержит в себе, как частный случай, классическую теорему Кёбе об $1/4$. Действительно, пусть $f(z)$ – однолистная аналитическая функция из класса S. Предположим, что $f(z) \neq w$ в единичном круге D. Тогда пара функций

$$f_k(z) = \pm\sqrt{f(z) - w},\ \ k = 1, 2,$$

удовлетворяет всем условиям теоремы М.А. Лаврентьева. Так как

$$|f_k'(0)| = \frac{f'(0)}{2\sqrt{|w|}} = \frac{1}{2\sqrt{|w|}},$$

то в силу (7.5),

$$\frac{1}{4|w|} \leq 4|w|.$$

Таким образом, если точка w не принадлежит множеству $f(D)$, то $|w| \geq 1/4$.

Мы вариационным методом доказываем теорему 7.3, которая, в частности, содержит в себе упомянутую выше теорему М.А. Лаврентьева.

Теорема 7.3. *В классе $N_{R,1}(a, \infty; Q)$ Q - квазиконформных отображений $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = a$, $f(\infty) = \infty$, конформных в круге D_R и в области Δ, справедливы точные оценки*

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\gamma} I(f)\} \equiv \operatorname{Re}\left\{e^{-i\gamma} \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - a}{z f'(\infty)}\right\} \leq \frac{2k(k\cos\gamma - 1)}{1 - k^2} \ln R, \tag{7.6}$$

где

$$k = \frac{Q-1}{Q+1},\ \ 0 \leq \gamma < 2\pi,$$

и под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при z стремящемся к бесконечности. Знак равенства имеет место только для функций вида

$$f(z)=\begin{cases} a+\alpha z R^{\frac{2k(k-e^{i\gamma})}{1-k^2}} \ \textit{при} \ |z|<R, \\ a+\alpha z|z|^{\frac{2k(k-e^{i\gamma})}{1-k^2}} \ \textit{при} \ R\le|z|\le 1, \\ a+\alpha z \ \textit{при} \ |z|>1, \end{cases} \tag{7.7}$$

где α – произвольное комплексное число.

Непосредственно из этой теоремы следует, что если $\{f_1(z), f_2(z)\}\in\mathfrak{M}_R(a_1,a_2;Q)$, $a_l\neq\infty$, то

$$R^Q|a_2-a_1|^2\le|f_1'(0)|\cdot|f_2'(0)|\le R^{1/Q}|a_2-a_1|^2. \tag{7.8}$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая вариационная лемма.

Лемма. *Пусть $f\in N_{R,1}(a,\infty;Q)$ и ν – произвольный элемент из $M_{R.1}$. Тогда при всех достаточно малых значениях параметра t, $t>0$, классу $N_{R,1}(a,\infty;Q)$ принадлежит функция*

$$f^*(z)=f(z)+t\iint\limits_{K(R,1)}(\mu(\zeta)-\nu(\zeta))\frac{(f(z)-a)f_\zeta^2(\zeta)\,dx\,dy}{(f(\zeta)-a)(f(\zeta)-f(z))}+o(t), \tag{7.9}$$

где $o(t)/t\to 0$ при $t\to 0$ равномерно на компактных множествах.

Доказательство. Если μ и ν принадлежат $M_{R,1}$, то, в силу выпуклости класса $M_{R,1}$, и функция

$$\mu(z,t)=\mu(z)+t(\nu(z)-\mu(z))$$

входит в класс $M_{R,1}$ при всех $0\le t\le 1$. Обозначим через $f^*(z)$ решение уравнения Бельтрами с коэффициентом $\mu(z,t)$, принадлежащее классу $N_{R,1}(a,\infty;Q)$. По теореме о дифференцируемости по параметру, см. [16], с. 95, 96, представим это решение в виде (7.9). □

Доказательство теоремы 7.3. Существование экстремальных функций следует из компактности класса $N_{R,1}(a,\infty;Q)$ и непрерывности функционала. Пусть f - одна из них. Применяя вариационную формулу (7.9), вычислим вариацию функционала:

$$\delta(\operatorname{Re}\{e^{-i\gamma}I(f)\})=\iint\limits_{K(R,1)}\operatorname{Re}\left\{e^{-i\gamma}\frac{\mu(\zeta)-\nu(\zeta)}{(f(\zeta)-a)^2}f_\zeta^2(\zeta)\right\}dx\,dy.$$

Из условия максимума и произвола в выборе $\nu \in M_{R,1}$ следует, что комплексная характеристика μ экстремального отображения имеет

$$\mu(z) = -ke^{i\gamma}\frac{f(z)-a}{\overline{f(z)}-\bar{a}}\cdot\frac{\bar{f}_z}{f_z},\ \ k=\frac{Q-1}{Q+1}$$

для почти всех $z \in K(R,1)$. Отсюда обычным образом, с использованием леммы Вейля, заключаем, что функция

$$g(z) = e^{-i\gamma/2}\ln(f(z)-a) + ke^{i\gamma/2}\ln(\overline{f(z)}-\bar{a})$$

является аналитической в кольце $K(R,1)$. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ однозначную непрерывную функцию

$$h(z) = \ln\frac{f(z)-a}{zf'(\infty)},$$

где под логарифмом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z\to\infty$. Эта функция аналитична в областях D_R и Δ и является гармонической в кольце $K(R,1)$. Положим

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n z^{-n}$$

в Δ и

$$h(z) = I(f) + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n z^n$$

в D_R. Тогда гармоническая в кольце $K(R,1)$ функция $h(z)$ представима в виде

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n R^{2n}}{1-R^{2n}}\left(\frac{1}{\bar{z}^n}-z^n\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{1-R^{2n}}\left(\bar{z}^n-\frac{R^{2n}}{z^n}\right) + \frac{I(f)}{\ln R}\ln|z|.$$

Замечая связь между функциями $h(z)$ и $g(z)$ и учитывая аналитичность $g(z)$, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} e^{-i\gamma}I(f) + k(\overline{I(f)} + 2\ln R) = 0, \\ \beta_n - ke^{i\gamma}\bar{\omega}_n R^{2n} = 0, \\ \omega_n - ke^{i\gamma}\bar{\beta}_n = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что в экстремальном случае

$$I(f) = \frac{2k(r-e^{i\gamma})}{1-k^2}\ln R.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} e^{-i\gamma} I(f) = \frac{2k(k\cos\gamma - 1)}{1-k^2} \ln R.$$

Далее находим, что все $\omega_n = \beta_n = 0$. Отсюда определяем все экстремальные функции. □

Приведем некоторые утверждения, вытекающие из теоремы 7.3.

Следствие 7.3.1. *Множество значений комплекснозначного функционала*

$$I(f) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - a}{z f'(\infty)}, \tag{7.10}$$

определенного на классе $N_{R,1}(a, \infty; Q)$, где ветвь логарифма выбирается как и раньше, представляет собой замкнутый круг с центром в точке $\frac{2k^2}{1-k^2} \ln R$ и радиусом $\frac{2k}{1-k^2} \ln R$. Граничные функции определяются по формуле (7.7).

Следствие 7.3.2. *В классе $N_{R,1}(a, \infty; Q)$ справедливы точные оценки*

$$R^{Q-1} \le \frac{|f'(0)|}{|f'(\infty)|} \le R^{\frac{1}{Q}-1}. \tag{7.11}$$

Знак равенства имеет место только для функций вида (7.7) *при $\gamma = 0$, в случае максимума и при $\gamma = \pi$, в случае минимума.*

Следствие 7.3.3. *Если пара функций $\{f_(z), f_2(z)\}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_R(\infty, a; Q)$, то*

$$R^Q \le \frac{|f_2'(0)|}{|f_1'(0)|} \le R^{\frac{1}{Q}}, \tag{7.12}$$

где $f_1'(0) = \lim_{z\to 0} z f_1(z)$. Экстремальные функции имеют вид

$$f_1(z) = a + \frac{\alpha}{z}, \;\; f_2(z) = a + \alpha z R^{\frac{1}{Q}}, \;\; f_2(z) = a + \alpha z R^Q. \tag{7.13}$$

Следствие 7.3.4. *Если $\{f_(z), f_2(z)\} \in \mathfrak{M}_R(a_1, a_2; Q)$, то*

$$R^Q |a_2 - a_1|^2 \le |f_1'(0)||f_2'(0)| \le R^{\frac{1}{Q}} |a_2 - a_1|. \tag{7.14}$$

Знак равенства имеет место только для функций

$$f_1(z) = (a_1 - \alpha a_2 z)/(1 - \alpha z), \;\; f_2(z) = (a_2 - \beta a_1 z)/(1 - \beta z),$$

причем $\alpha\beta = R^{1/Q}$ *в случае максимума и* $\alpha\beta = R^{Q}$ *- в случае минимума.*

Неравенство (7.14) получается из (7.12), если заметить, что из принадлежности пары $\{f_(z), f_2(z)\}$ классу $\mathfrak{M}_R(a_1, a_2; Q)$ следует, что

$$\left\{ \frac{1}{f_1(z) - a_1},\ \frac{1}{f_2(z) - a_1} \right\} \in \mathfrak{M}_R \left(\infty, \frac{1}{a_2 - a_1}; Q \right).$$

Осуществляя в (7.14) предельный переход при $Q \to \infty$, приходим к оценке (7.5) М.А. Лаврентьева, справедливой для класса $\mathfrak{M}(a_1, a_2)$.

Аналогичная задача в классе, состоящем из пар $\{f_1,\ f_2\}$, соответственно, Q_1 и Q_2 квазиконформных гомеоморфизмов круга $U_R : |z| < R$, $R > 1$, конформных в U_1 и отображающих U_R на взаимно неналегающие области, исследована в работе [232].

Следствие 7.3.5. *Если* $f \in N_{R,1}(a, \infty; Q)$, *то*

$$\left| \lim_{z \to 0} \arg \frac{f(z) - a}{z f'(\infty)} \right| \leq \frac{1 - q^2}{2Q} \ln R, \tag{7.15}$$

где под аргументом понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z \to \infty$. *Знак равенства имеет место только для функций вида* (7.7) *при* $\gamma = \pm\phi/2$.

Отметим, что если пара функций $\{f_1(z), f_2(z)\}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(a_1, a_2)$, но не входит в класс $\mathfrak{M}_R(a_1, a_2; Q)$, то существует последовательность $\mu_n(z) \in M_{R,1}$, $\lim_{n\to\infty} |\mu(z)| = 1$ для почти всех $z \in K(R, 1)$ такая, что пара

$$\{f_n(Rz),\ f_n(1/z)\} \in \mathfrak{M}_R(a_1, a_2; Q_n),\ \ f_n(z) \in N_{R,1}(a_1, a_2; Q_n),$$

будет локально равномерно в круге D сходится к $\{f_1(z), f_2(z)\}$. Это позволяет уже рассмотренным путем изучать свойства всего класса $\mathfrak{M}(a_1, a_2)$.

7.4. Обобщенная система Коши–Римана

В данном разделе, на примере исследования обобщенной системы Коши–Римана, мы рассмотрим приложение вариационного метода к доказательству теорем существования надлежащих решений и их представления через квазиконформные гомеоморфизмы, см. также [154, 155].

Пусть $Q : \mathbb{C} \to [1, \infty)$ – измеримая функция такая, что $\|Q\|_\infty = \operatorname{esssup}_{\mathbb{C}} Q$ конечна. Рассмотрим следующее эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных

$$\operatorname{div}(Q(z)\nabla U) = 0. \tag{7.16}$$

Это уравнение естественно возникает при исследовании различных физических полей в неоднородных средах.

Под слабым решением уравнения $\operatorname{div}(Q(z)\nabla U) = 0$ с особенностями в точках $z_1, \ldots, z_P$ и ∞ мы будем понимать вещественнозначную функцию $U \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_P\})$, для которой существует сопряженная функция

$$V \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_P\})$$

в том смысле, что U и V удовлетворяют обобщенной системе Коши–Римана

$$V_x = -QU_y, \quad V_y = QU_x. \tag{7.17}$$

Если ввести в рассмотрение комплексный потенциал по формуле $F(z) = U + iV$, то система (7.17) эквивалентна следующему уравнению Бельтрами

$$F_{\bar{z}} = -k(z)\overline{F_z}. \tag{7.18}$$

с измеримой функцией $k(z) = (Q(z) - 1)(Q(z) + 1)^{-1}$.

Теорема 7.4. *Пусть $Q : \overline{\mathbb{C}} \to [1, \infty)$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию $\|Q\|_\infty < \infty$. Тогда для всех $x_1, \ldots, x_P \in \mathbb{R}$ существует $Q(z)$-квазиконформный гомеоморфизм $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, сохраняющий точки $0, 1$ и ∞ неподвижными, и такой что*

$$U(z) + iV(z) = \sum_{n=1}^{P} x_n \ln[f(z) - f(z_n)]$$

представляет собой слабое решение системы (7.17) *с логарифмическими особенностями в точках $z_1, ...z_P$ и ∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$\max_N \operatorname{Re} \sum_{n,l=1}^{P} x_n x_l \ln \frac{\varphi(z_n) - \varphi(z_l)}{z_n - z_l}$$

на классе N квазиконформных отображений комплексной плоскости, введенного в рассмотрение ранее, полагая, для простоты, $\rho_n = \rho$, $n = 1, ..., P$. Из теоремы 7.2 следует, что экстремальная функция $\varphi(z)$ существует, принадлежит классу N и удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{\bar{z}}(z) = -k(z) \cdot \frac{\overline{\sum_{n=1}^{P} x_n/(\varphi(z) - \varphi(z_n))}}{\sum_{n=1}^{P} x_n/(\varphi(z) - \varphi(z_n))} \overline{\varphi_z(z)} \tag{7.19}$$

для почти всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{\bigcup_{n=1}^{P} K(z_n, \rho) \cup \Delta_R\}$. Легко проверить, что функция

$$f_{\rho,R}(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)}$$

также удовлетворяет уравнению (7.19) и принадлежит компактному классу $\mathfrak{F}_{Q(z)}$, см., например, [407], с. 135, и теорему 12.2 настоящей книги, состоящему из $Q(z)$ - квазиконформных отображений комплексной плоскости, сохраняющих неподвижными точки 0, 1 и ∞. А тогда существуют последовательности $\rho_k \to 0$ и $R_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такие, что $f_{\rho_k,R_k}(z) \to f(z) \in \mathfrak{F}_{Q(z)}$ локально равномерно относительно $z \in \mathbb{C}$. Поскольку соответствующие комплексные характеристики $\mu_{f_{\rho_k,R_k}} \to \mu(z)$ почти всюду, то предельная функция f, по теореме Берса - Боярского [53], [71], лемма 4.2, примененной к уравнению Бельтрами вида $f_{\bar{z}} = \mu(z)\overline{f_z}$, удовлетворяет уравнению (7.19) для почти всех $z \in \mathbb{C}$. Остается заметить, что функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{P} x_n \ln \frac{1}{f(z) - f(z_n)}$$

удовлетворяет локально уравнению (7.18) для $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_N\}$. Следовательно, $F(z)$ является требуемым слабым решением системы (7.17) с логарифмическими особенностями в точках $z_1, \ldots, z_P$ и ∞. □

Теорема 7.4 вместе с результатами о локальном поведении квазиконформных отображений позволяет исследовать регулярность полученных выше фундаментальных решений обобщенной системы Коши–Римана. Случай, когда $P = 1$, представляет особый интерес.

Теорема 7.5. *Пусть $Q : \mathbb{C} \to [1, \infty)$ – измеримая функция, такая что норма $\|Q\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{C}} Q$ конечна. Тогда существует слабое решение уравнения* (7.16) *с логарифмическими особенностями в точках $z_1 \in \mathbb{C}$ и ∞, представимое в виде*

$$U(z) = \log |f(z) - f(z_1)|,$$

где $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - $Q(z)$-квазиконформный гомеоморфизм, сохраняющий точки $0, 1$ и ∞ неподвижными. При этом, если $Q(z)$ аппроксимативно непрерывна в точке z_0, то

$$\lim_{r \to 0} \left\{ \max_{|z - z_1| = r} U(z) - \min_{|z - z_1| = r} U(z) \right\} = 0 \tag{7.20}$$

и

$$U(z) \le \frac{\alpha}{Q(z_1)} \log|z - z_1| + C_1 \tag{7.21}$$

в окрестности точки 0 *для любого* $0 < \alpha < 1$ *и некоторой постоянной* C_1. *Если, дополнительно,*

$$\int\int_{|z-z_1|\le\delta} \frac{|Q(z) - Q(z_1)|}{|z - z_1|^2}\, dx\, dy < \infty, \tag{7.22}$$

и

$$\int\int_{|z|\le\delta} \frac{|Q(1/z) - Q(\infty)|}{|z|^2}\, dx\, dy < \infty,$$

то существует конечные пределы

$$\lim_{z\to z_1} \left\{ U(z) - \frac{1}{Q(z_1)} \ln|z - z_1| \right\}, \tag{7.23}$$

$$\lim_{z\to\infty} \left\{ U(z) - \frac{1}{Q(\infty)} \ln|z| \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(z) = f(z + z_1) - f(z_1)$, $\phi(w) = w|w|^{Q(z_1)-1}$ и $\psi(z) = \phi \circ g(z)$. Так как

$$\mu_g(z) = -k(z + z_1) \cdot \frac{g(z)}{\overline{g(z)}} \cdot \frac{\overline{g_z(z)}}{g_z(z)},$$

$$\mu_\phi(w) = k(z_1) \cdot \frac{w}{\bar{w}}$$

и

$$\mu_\psi(z) = \frac{\mu_\phi(g(z))\frac{\overline{g_z(z)}}{g_z(z)} + \mu_g(z)}{1 + \mu_\phi(g(z)) \cdot \overline{\mu_g(z)}\frac{\overline{g_z(z)}}{g_z(z)}} = \frac{k(z_1) - k(z + z_1)}{1 - k(z_1)} \cdot \frac{g(z)}{\overline{g(z)}} \cdot \frac{\overline{g_z(z)}}{g_z(z)},$$

мы видим, что $\mu_\psi(z)$ аппроксимативно непрерывна при $z = 0$. В силу предложения 6.11, отображение ψ является асимптотически однородным в точке $z = 0$. А это означает, что ψ сохраняет инфинитезимальные окружности:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\max\limits_{|z|=r} |\psi(z)|}{\min\limits_{|z|=r} |\psi(z)|} = 1 \tag{7.24}$$

модули инфинитезимальных колец:

$$\lim_{|z|\to 0} \frac{|\psi(z\zeta)|}{|\psi(z)|} = |\zeta| \tag{7.25}$$

и углы между лучами, выходящими из начала:

$$\lim_{z\to 0}[\arg \psi(z\zeta) - \arg \psi(z)] = \arg \zeta \tag{7.26}$$

для каждого $\zeta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. И частности, соотношение (7.24) в терминах $U(z)$ читается следующим образом:

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \max_{|z-z_1|=r} U(z) - \min_{|z-z_1|=r} U(z) \right\} = 0$$

и мы получаем (7.20).

Далее, по теореме 4.2 из [162] отображение ψ слабо липшицево в точке 0, то есть, $|\psi(z)| \le C|z|^\alpha$ в окрестности 0 для любого $0 < \alpha < 1$ и некоторой постоянной $C > 0$. Следовательно, решение U удовлетворяет неравенству

$$U(z) \le \frac{\alpha}{Q(z_1)} \log |z - z_1| + C_1$$

в окрестности точки 0 для любого $0 < \alpha < 1$ и некоторой постоянной C_1.

Наконец, из (7.22) следует, что

$$\int\int_{|z|<1} \frac{|\mu_\psi(z)|dxdy}{|z|^2} < \infty.$$

По теореме Тейхмюллера–Виттиха–Белинского, см. §9.4, а также [270], с. 232, примененной к отображению $\phi \circ g(z)$, следует, что существует конечный предел

$$\lim_{z\to 0} \log \frac{|\phi \circ g(z)|}{|z|} =$$

$$Q(z_1) \lim_{z\to z_1} \left(\log |f(z) - f(z_1)| - \frac{1}{Q(z_1)} \log |z - z_1| \right).$$

Случай, когда $z = \infty$, исследуется аналогично.

Отметим, что если функция Q удовлетворяет более сильному условию Дини

$$\int_0 \frac{\omega(r)}{r} dr < \infty, \quad \omega(r) = \operatorname{ess\,sup}_{|z-z_n|\le r} |Q(z) - Q(z_n)|,$$

то соотношение (7.23) было доказано Шиффером и Шобером в работе [403]. Пример, который мы приводим ниже, показывает, что условие (7.22) слабее условия Дини.

Пусть $z_n = 0$ и $Q(z) = 1 + \alpha(|z|)$ для $z \neq 0$ и $Q(0) = 1$, где $\alpha(r) = 1$ для $r \in [1/n, 1/n + 1/n^3]$, $n = 1, 2, ...$, и $\alpha(r) = 0$ для остальных $r > 0$. Тогда $\omega(r) \equiv 1$ и условие Дини не выполняется. Однако

$$\int\int_{|z|\leq\delta} \frac{|Q(z) - Q(0)|}{|z|^2}\, dx\, dy = 2\pi \int_0^\delta \frac{\alpha(r)}{r} dr$$

$$\leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

□

Глава 8

ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ С КВАЗИКОНФОРМНЫМ ПРОДОЛЖЕНИЕМ

В главе 8, на основе принципа площадей и принципа Дирихле, выводится коэффициентное неравенство для квазиконформных гомеоморфизмов $f(z)$ расширенной комплексной плоскости, конформных в области $|z| > 1$ и нормированных условиями $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$. Это неравенство содержит в себе, в качестве предельного случая классическую теорему площадей Гронуолла, а также неравенства площадей Н.А. Лебедева [257], Гарабедяна и Шиффера [93], Педерсона и Шиффера [307] и И.Е. Базилевича [29].

8.1 Неравенство площадей

Обозначим через Σ_Q класс Q – квазиконформных гомеоморфизмов f комплексной плоскости $\mathbb{C}$ таких, что их сужение на область $|z| > 1$ принадлежит классу Σ.

Теорема 8.1. *Пусть $f \in \Sigma_Q$ и $\Omega(w)$ – произвольная, отличная от постоянной однозначная аналитическая в области $\overline{f(D)}$ функция. Пусть разложение функции $F(z) = \Omega(f(z))$ в ряд Лорана в некотором кольце $1 < |z| < \rho$ имеет вид*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n. \tag{8.1}$$

Тогда справедливо неравенство площадей

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\omega_n|^2 \le k^2 \sum_{n=1}^{\infty} n|\gamma_n|^2. \tag{8.2}$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если

$$\Omega(f(z)) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n = \begin{cases} ke^{i\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n z^{-n}, & |z| > 1, \\ ke^{i\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n \bar{z}^n, & |z| \le 1, \end{cases} \tag{8.3}$$

где $0 \le \tau < 2\pi$.

Сформулированный в теореме 8.1 принцип площадей для функций класса Σ_Q первоначально был доказан нами в работе [123], а ее частный случай, когда $\Omega(w) = w$, в работе [268].

Заметим, что если в теореме 8.1 выполнить предельный переход при $k \to 1$, то получим теорему площадей Н.А. Лебедева [257]. Полагая $\Omega(w) = w$ и выполняя предельный переход при $k \to 1$, получим классическое неравенство площадей Гронуолла. По поводу развития этой тематики см., например, работу [164].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\sigma(\rho)$ площадь образа круга $|z| < \rho$, $\rho > 1$, при отображении квазирегулярной функцией $F(z)$. Тогда

$$\sigma(\rho) = \iint\limits_{f(|z|<\rho)} |\Omega'(w)|^2 dm_w. \tag{8.4}$$

По формуле Грина

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &= \frac{1}{2i} \int\limits_{|z|=\rho} \overline{F(z)} dF(z) \\ &= \pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n\rho^{2n} |\gamma_n|^2 - n\rho^{-2n} |\omega_n|^2) \right]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

С другой стороны

$$\sigma(\rho) = \iint\limits_{|z|<\rho} \left(|F_z(z)|^2 - |F_{\bar{z}}(z)|^2 \right) dm_z. \tag{8.6}$$

Если $\mu(z)$ – комплексная характеристика отображения $f(z)$, то квазирегулярная функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$F_{\bar{z}} = \mu(z) F_z$$

почти всюду в круге $|z| < \rho$ и соотношение (8.6) можно записать в виде

$$\sigma(\rho) = \iint\limits_{|z|<\rho} \frac{1-|\mu(z)|^2}{1+|\mu(z)|^2}(|F_z(z)|^2 + |F_{\bar{z}}(z)|^2)\, dm_z. \tag{8.7}$$

Используя неравенство $|\mu(z)| \le k$, справедливое для почти всех $|z| < \rho$, и принцип Дирихле, из (8.7) получаем, ср. [398], что

$$\sigma(\rho) \ge \frac{1-k^2}{1+k^2}\mathcal{D}_{|z|<\rho}[F] \ge \frac{1-k^2}{1+k^2}\mathcal{D}_{|z|<\rho}[G]. \tag{8.8}$$

Здесь $\mathcal{D}_{|z|<\rho}[\varphi]$ – интеграл Дирихле функции φ в области $|z| < \rho$, а G – гармоническая функция в $|z| < \rho$, совпадающая на границе области с функцией $F(z)$.

Очевидно,

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \rho^{-2n} \bar{z}^n + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n \tag{8.9}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{|z|<\rho}[G] &= \iint\limits_{|z|<\rho} (|G_z(z)|^2 + |G_{\bar{z}}(z)|^2)\, dm_z \\ &= \pi\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n\rho^{2n}|\gamma_n|^2 + n\rho^{-2n}|\omega_n|^2)\right]. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$n\rho^{2n}|\gamma_n|^2 - n\rho^{-2n}|\omega_n|^2 \ge \frac{1-k^2}{1+k^2}(n\rho^{2n}|\gamma_n|^2 + n\rho^{-2n}|\omega_n|^2).$$

Неравенство (8.2) получается в результате предельного перехода при $\rho \to 1$.

Если $F(z) = G(z)$ в $|z| < 1$ и имеет комплексную характеристику $\mu(z)$ такую, что $|\mu(z)| = k$ почти всюду в $|z| < 1$, то во всех приведенных выше неравенствах будет иметь место знак равенства. В этом случае аналитическая в круге функция $\overline{G}_{\bar{z}}/G_z$ для почти всех $|z| < 1$ удовлетворяет условию $|G_{\bar{z}}/G_z| = k$ и, в силу принципа максимума модуля,

$$\overline{G}_{\bar{z}} = ke^{i\tau}G_z \tag{8.11}$$

для $|z| < 1$. Из (8.11) следует соотношение (8.3).

8.2. Приложения

Выбирая надлежащим образом функцию $\Omega(w)$, можно получить различные оценки в классе Σ_Q, связанные с геометрическими свойствами гомеоморфизмов рассматриваемых классов. Ограничимся формулировкой лишь нескольких результатов, отметив при этом, что многочисленные другие приложения могут быть выведены из соображений, аналогичных тем, которые изложены, например, в работах [256, 258, 260, 289].

Рассмотрим регулярные в области $|\zeta| > 1$, $|z| > 1$, функции

$$\ln \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(\zeta) z^{-m} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{n,m} \zeta^{-n} z^{-m},$$

где $F \in \Sigma_Q$, и

$$\ln \frac{[F_*(\zeta) - F_*(z)](\zeta + z)}{[F_*(\zeta) + F_*(z)](\zeta - z)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \omega^*_{2m-1}(\zeta) z^{-(2m-1)}, \tag{8.12}$$

где F_* принадлежит подклассу нечетных функций из Σ_Q. Здесь выбраны ветви логарифмов, которые обращаются в нуль при $\zeta = \infty$.

Следствие 8.1.1. *Пусть* $F(\zeta) \in \Sigma_Q$ *и* x_p, x'_p, $p = 1, 2, ...,$ - *постоянные такие, что* $0 < \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2/p < \infty$, $0 < \sum_{p=1}^{\infty} |x'_p|^2/p < \infty$. *Тогда*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q \left| \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p \right|^2 \le k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 \tag{8.13}$$

и

$$\left| \sum_{p,q=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p x'_q \right|^2 \le k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} |x'_q|^2. \tag{8.14}$$

Неравенство (8.13) представляет собой аналог известного для класса Σ неравенства Н.А. Лебедева (см. [256], с. 218, случай одной области), И.М. Милина [288], Поммеренке [310] и Дженкинса [171]. Это неравенство вытекает из теоремы 8.1, если положить

$$\Omega(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \ln \frac{F(z) - w}{z} \sum_{p=1}^{\infty} x_p z^p \frac{dz}{z}, \quad \rho > 1.$$

Из (8.13) и неравенства Коши получается неравенство (8.14). Если в неравенстве (8.14) положить $x'_q = x_q$ и k устремить к единице, то получим неравенство Грунского [115] для функций класса Σ. Распространению неравенства Дженкинса на класс, состоящий из пар квазиконформных гомеоморфизмов круга $U_R : |z| < R$, $R > 1$, конформных в круге $|z| < 1$ и отображающих U_R на взаимно неналегающие области, посвящена работа [142].

Опираясь на неравенство (8.14) и следуя работе Н.А. Лебедева [257], для функций класса Σ_Q можно вывести аналоги неравенств Гарабедяна и Шиффера [93], Педерсона и Шиффера [307] и И.Е. Базилевича [29].

Следствие 8.1.2. *Пусть $F(\zeta) \in \Sigma_Q$. Тогда при каждом $\nu = 0, 1, \ldots$ в области $|\zeta| > 1$ выполняется неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m|\omega_m^{(\nu)}(\zeta)|^2 \le k^2 \frac{\partial^{2\nu} \ln[1 - (\bar{z}\zeta)^{-1}]^{-1}}{\partial \bar{z}^\nu \partial \zeta^\nu}\bigg|_{z=\zeta}. \tag{8.15}$$

Следствие 8.1.3. *Пусть $F_*(\zeta) \in \Sigma_Q$. – нечетная функция Тогда при каждом $\nu = 0, 1, ...$ в области $|\zeta| > 1$ выполняются неравенства*

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)|\omega_{2m-1}^{*(\nu)}(\zeta)|^2 \le \frac{k^2}{2} \frac{\partial^{2\nu} \ln \frac{\bar{z}\zeta+1}{\bar{z}\zeta-1}}{\partial \bar{z}^\nu \partial \zeta^\nu}\bigg|_{z=\zeta}, \tag{8.16}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2m|\omega_{2m}^{*(\nu)}(\zeta)|^2 \le \frac{k^2}{2} \frac{\partial^{2\nu} \ln \frac{1}{1-(\bar{z}\zeta)^{-2}}}{\partial \bar{z}^\nu \partial \zeta^\nu}\bigg|_{z=\zeta}. \tag{8.17}$$

Заметим, например, что неравенство (8.15) следуют из (8.13) при надлежащем выборе постоянных x_p, а также могут быть выведено непосредственно из теоремы 8.1 при

$$\Omega(w) = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left[\ln \frac{F(z) - w}{z}\right].$$

Аналогично, для вывода неравенства (8.16), при любом конечном z, $|z| > 1$, выбирается функция

$$\Omega(w) = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left[\ln \frac{w + F_*(z)}{w - F_*(z)}\right],$$

а для вывода (8.17)

$$\Omega(w) = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left[\ln \frac{1}{(w - F_*(z))(w + F_*(z))}\right].$$

Следствие 8.1.4. *В классе* Σ_Q *для производной Шварца в любой точке* $|\zeta| > 1$ *справедливы точные оценки*

$$|\{F(\zeta),\, \zeta\}| \le \frac{6k}{|\zeta|^2 - 1}. \tag{8.18}$$

Следствие 8.1.5. *Если* $F(\zeta) \in \Sigma_Q$, *то в любой точке* ζ, $|\zeta| > 1$,

$$|\ln F'(\zeta)| \le k \ln \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - 1}, \tag{8.19}$$

где под логарифмом понимается ветвь, которая обращается в нуль при $\zeta = \infty$.

Последние две оценки следуют непосредственно из неравенства (8.15).

Следствие 8.1.6. *Пусть* $f(z)$ *– однолистная аналитическая функция класса* S *в единичном круге* D *с* Q*–квазиконформным продолжением на плоскость* $\mathbb{C}$. *Тогда*

$$\left| \ln \frac{zf'(z)}{f(z)} + \ln \frac{f(\infty)}{f(\infty) - f(z)} \right| \le k \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}\,, \tag{8.20}$$

где выбраны ветви логарифмов, обращающиеся в нуль при $z = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$\varphi(z) = \frac{f(\infty) f(z)}{f(\infty) - f(z)}$$

принадлежит классу S, допускает Q–квазиконформное продолжение на плоскость и нормирована условием $\varphi(\infty) = \infty$. Построим функцию

$$F_*(z) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(1/z^2)}}.$$

Это нечетная функция класса Σ_Q и имеет место тождество

$$\frac{z^2 \varphi'(z^2)}{\varphi(z^2)} = \frac{\zeta F_*'(\zeta)}{F_*(\zeta)}.$$

Положив в разложении (8.12) $z = \zeta$, получим

$$\ln \frac{\zeta F_*'(\zeta)}{F_*(\zeta)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n-1}^* \zeta^{-(2n-1)}. \tag{8.21}$$

Применяя неравенство Коши и оценку (8.16) при $\nu = 0$, из (8.21) получим

$$\begin{aligned}\left|\ln\frac{\zeta F_*'(\zeta)}{F_*(\zeta)}\right| &\leq 2k\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|\omega_{2n-1}^*(\zeta)|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1|\zeta|^{-2(2n-1)}}\right)^{1/2}\\ &\leq k\ln\frac{1+r^2}{1-r^2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left|\ln\frac{z^2f'(z^2)}{f(z^2)}+\ln\frac{f(\infty)}{f(\infty)-f(z^2)}\right|\leq k\ln\frac{1+r^2}{1-r^2}.$$

□

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.2. *В классе $S_Q(\infty)$, состоящим из однолистных аналитических функций класса S в единичном круге D с Q–квазиконформным продолжением на плоскость $\mathbb{C}$ и нормировкой $f(\infty)=\infty$, имеет место точная оценка*

$$\left|\ln\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leq k\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Отметим, что этот результат, имеющий важные приложения, был впервые установлен нами в 1972 году и опубликован в работе [123]. В частности, отсюда немедленно вытекает

Следствие 8.1.7. *В классе $S_Q(\infty)$ – радиус звездообразности $r^*(Q)$ равен* $\operatorname{th}\frac{\pi}{4k}$.

Глава 9

ВРАЩЕНИЕ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Глава 9 посвящена точному решению задачи вращения Джона из нелинейной теории упругости для произвольных билипшицевых отображений и их обобщений.

9.1. Задача вращения и класс BMO

В 1961 году Джон [172], изучая взаимосвязи между напряжением и вращением внутри упругого тела, доказал, что если $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^n$ осуществляет $(1+\varepsilon)$ – билипшицево отображение куба $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ объема $m(\mathcal{Q})$, то f' принадлежит классу $BMO(\mathcal{Q})$ функций с ограниченным средним колебанием. Другими словами, существует универсальная постоянная D, такая что для данного куба и любого параллельного вложенного куба $\mathcal{R}$

$$\frac{1}{m(\mathcal{R})} \int\limits_{\mathcal{R}} |f'(x) - {f_{\mathcal{R}}}'| dv \leq D\varepsilon,$$

где $f'_{\mathcal{R}}$ обозначает интегральное среднее f' по кубу $\mathcal{R}$. Применив к компонентам вектора $f' - f'_{\mathcal{R}}$ фундаментальную лемму о функциях класса BMO, доказанную совместно с Ниренбергом в работе [173], Джон показал, что для каждого M мера $\mu(M)$ тех x из $\mathcal{R}$, для которых $|f'(x) - f'_{\mathcal{R}}| \geq M\varepsilon$, удовлетворяет неравенству

$$\mu(M) \leq Ee^{-FM} m(\mathcal{R}) \tag{9.1}$$

с универсальными постоянными E и F. В качестве иллюстрации последнего результата, он установил следующую теорему вращения.

Теорема 9.1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – $(1+\varepsilon)$ – билипшицево отображение комплексной плоскости, такое что*

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{если } |z| > b, \\ ze^{i\theta}, & \text{если } |z| < a < b, \end{cases}$$

и $\theta \in [0, \pi]$. *Тогда*

$$\theta \leq O(1 + \log(b/a))\varepsilon.$$

Для полноты рассуждений, приведем оригинальное доказательство теоремы.

Пусть $\mathcal{R}$ – квадрат $|x_1| < 2b$, $|x_2| < 2b$, $z = x_1 + ix_2$, и пусть ${f_R}'$ обозначает интегральное среднее от f' по квадрату $\mathcal{R}$. Мы имеем $f' = 1$ for $|z| > b$, $f' = e^{i\theta}$ для $|z| < a$. Если

$$q = \max(|f'_{\mathcal{R}} - 1|, |f'_{\mathcal{R}} - e^{i\theta}|),$$

то

$$q \geq \frac{1}{2}|e^{i\theta} - 1| \geq \frac{1}{\pi}\,\theta.$$

Положим $M = q/\varepsilon$. Тогда, либо внутри меньшего круга, либо в области $\mathcal{R} \cap \{|z| > b\}$, выполняется неравенство $|f' - f'_{\mathcal{R}}| \geq M\varepsilon$. Следовательно, мера $\mu(M)$ части R, где $|f' - f'_{\mathcal{R}}| \geq M\varepsilon$ должна быть не меньше, чем

$$\min[(16 - \pi)b^2, \pi a^2] = \pi a^2.$$

С другой стороны, в силу неравенства (9.1),

$$\mu(M) \leq E e^{Fq/\varepsilon} 16\, b^2.$$

Отсюда следует, что

$$\theta \leq O(1 + \log \frac{b}{a})\, \varepsilon. \tag{9.2}$$

9.2. Точное решение задачи вращения Джона

Оценка (9.2) не является оптимальной. Оказывается, что точное решение задачи следует искать в классе квазиконформных отображений, который включает в себя билипшицевы отображения. Более того, такой подход ведет к точным интегральным оценкам вращения в терминах локальных коэффициентов искажения. Прежде чем привести формулировки результатов, напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть G – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Напомним, что сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ называется Q–квазиконформным, $Q \geq 1$, если $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(G)$ и если

$$||f'(z)||^2 \leq Q\, J_f(z) \;\text{ почти всюду в } G.$$

Здесь $J_f(z)$ – якобиан отображения $f(z)$ и $||f'(z)|| = |f_z(z)| + |f_{\bar z}(z)|$. Для почти всех $z \in G$ мы определим коэффициент искажения $K_f(z)$ отображения f в точке z и комплексную характеристику $\mu(z)$ по формулам

$$K_f(z) = \frac{||f'(z)||^2}{J_f(z)}, \quad \mu(z) = \frac{f_{\bar z}(z)}{f_z(z)}\,.$$

Гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ называется L–билипшицевым, если он удовлетворяет следующему двойному неравенству

$$\frac{1}{L}|z - z'| \le |f(z) - f(z')| \le L|z - z'|$$

для любых $z,\ z' \in G$. Наименьшее из $L \ge 1$, для которой это неравенство имеет место, называется изометрическим коэффициентом искажения отображения f. Заметим, что каждое L–билипшицево отображение f является L^2–квазиконформным.

Точное решение задачи Джона выводится из следующего результата, установленного нами совместно с Мартио в работе [143].

Теорема 9.2. *Пусть f представляет собой Q–квазиконформное отображение кругового кольца $R(a,b) : a \le |z| \le b$, с комплексной дилатацией $\mu(z)$ и такое, что $f(z) = z$ для $|z| = b$ и $f(z) = ze^{i\theta}$ для $|z| = a$. Тогда для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции Φ справедливы точные оценки*

$$\iint\limits_{R(a,b)} \Phi(K_f(z))\frac{dx\,dy}{|z|^2} \ge \iint\limits_{R(a,b)} \Phi(K_{f^*}(z))\frac{dx\,dy}{|z|^2}\,. \tag{9.3}$$

Экстремальное отображение f^* имеет вид

$$f^*(z) = ze^{-i\theta\frac{\ln(|z|/b)}{\ln(b/a)}}.$$

Действительно, полагая в неравенстве (9.3) $\Phi(u) = u$, мы получаем, что

$$|\theta|\left(\frac{|\theta|}{2\log(b/a)} + \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{4\log^2(b/a)}}\right) \le \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R(a,b)} \frac{K_f(z) - 1}{|z|^2}\,dx\,dy. \tag{9.4}$$

Оценка является точной и знак равенства реализуется для функции $f^*(z)$. Поскольку, как уже было отмечено выше, L–билипшицево отображение является одновременно L^2–квазиконформным, то мы приходим к точному неравенству в теореме Джона.

Теорема 9.3. [143]. *Пусть f – L–билипшицево отображение кругового кольца $R(a,b) : a \le |z| \le b$, такое, что $f(z) = z$ для $|z| = b$ и $f(z) = ze^{i\theta}$ для $|z| = a$. Тогда имеет место следующая точная оценка*

$$|\theta| \le (L - 1/L)\log(b/a).$$

В частности, если $L = 1 + \varepsilon$, то

$$|\theta| \le \varepsilon \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \log \frac{b}{a}\,.$$

9.3. Интегральные оценки углового смещения

Приведенные выше оценки углового смещения записаны либо в терминах максимальной дилатации отображения, либо в терминах интегральных средних, зависящих только от $|\mu(z)|$. Следующий результат позволяет учитывать влияние аргумента комплексной дилатации $\mu(z)$ на вращение при квазиконформных отображениях, см. также [146].

Пусть $\mu(z)$ – произвольная измеримая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $||\mu||_\infty \le k < 1$. Положим

$$D_\mu(z) = \frac{|1 - \mu(z)\bar{z}/z|^2}{1 - |\mu(z)|^2}$$

и заметим, что если через $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обозначить квазиконформный гомеоморфизм с комплексной дилатацией $\mu(z)$, то почти всюду справедливы соотношения

$$D_\mu(z) = \frac{|\partial_\theta f(te^{i\theta})|^2}{t^2 J_f(te^{i\theta})}, \;\; z = te^{i\theta},$$

и

$$D_{-\mu}(z) = \frac{|\partial_t f(te^{i\theta})|^2}{J_f(te^{i\theta})}\,.$$

Теорема 9.4. *Пусть f – квазиконформный автоморфизм кругового кольца $A(r,R)$ с комплексной дилатацией $\mu(z)$ и $h : A(r,R) \to A(r,R)$ — произвольный квазиконформный автоморфизм, сохраняющий*

объемы. Тогда справедливо следующее неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |d_{f\circ h}(re^{i\theta}) - d_{f\circ h}(Re^{i\theta})|d\theta \leq$$

$$\leq \log\frac{R}{r} + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{-\kappa}(z)/2-1}{|z|^2}\,dx\,dy. \quad (9.5)$$

Здесь через κ обозначена комплексная характеристика отображения $f\circ h$.

Доказательство. Фиксируем в кольце $A(r,R)$ радиальный сегмент $\gamma(t) = te^{i\theta}$, $r \leq t \leq R$, и сохраняющий объемы автоморфизм $h : A(r,R) \to A(r,R)$ и заметим, что

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma} \frac{|dw|}{|w|} \geq \left(\Delta^2_{f\circ h}(\theta) + \log^2\frac{R}{r}\right)^{1/2}. \quad (9.6)$$

Здесь

$$\Delta_{f\circ h}(\theta) = |d_{f\circ h}(Re^{i\theta}) - d_{f\circ h}(re^{i\theta})| \,-$$

угловое колебание отображения $\varphi(z) = f(h(z))$ в концевых точках сегмента $\gamma(t)$. В силу неравенства Минковского

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\Delta^2_{f\circ h}(\theta) + \log^2\frac{R}{r}\right)^{1/2} d\theta\right)^2 \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^{2\pi}\Delta_{f\circ h}(\theta)\,d\theta\right)^2 + \left(\int\limits_0^{2\pi}\log(R/r)\,d\theta\right)^2. \quad (9.7)$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma}\frac{|dw|}{|w|} = \int\limits_r^R \frac{|\varphi_t(te^{i\theta})|}{|\varphi(te^{i\theta})|}\,dt = \int\limits_r^R \frac{D^{1/2}_{-\kappa}(te^{i\theta})\cdot J^{1/2}_{\varphi}(te^{i\theta})}{|\varphi(te^{i\theta})|}\,dt$$

для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Здесь $\kappa(z)$ обозначают комплексную характеристику отображения $\varphi(z)$. Обозначая

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma}\frac{|dw|}{|w|} = \ell(\theta),$$

и применяя неравенство Шварца, мы получаем

$$\ell^2(\theta) \le \int\limits_r^R D_{-\kappa}(te^{i\theta})\frac{dt}{t} \cdot \int\limits_r^R \frac{J_\varphi(te^{i\theta})}{|\varphi(te^{i\theta})|^2}\, t\, dt,$$

и, следовательно,

$$\frac{\ell^2(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)} \le \int\limits_r^R \frac{J_\varphi(te^{i\theta})}{|\varphi(te^{i\theta})|^2}\, t\, dt$$

для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$, где функция $\psi_\kappa(\theta)$ определена формулой

$$\psi_\kappa(\theta) = \int\limits_r^R D_{-\kappa}(te^{i\theta})\, \frac{dt}{t}\,.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по θ от 0 до 2π и применяя теорему Фубини, мы приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\ell^2_{f\circ h}(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)}\, d\theta \le \iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_\varphi(z)}{|\varphi(z)|^2}\, dx\, dy.$$

Принимая во внимание тот факт, что $h(A(r,R) = A(r,R)$ и отображение h сохраняет объемы, то есть якобиан $J_h(z) = 1$ для почти всех $z \in A(r,R)$, мы видим, что

$$\iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_\varphi(z)}{|\varphi(z)|^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{A(r,R)} \frac{J_f(z)}{|f(z)|^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{A(r,R)} \frac{du\, dv}{|w|^2} = 2\pi \log(R/r). \quad (9.8)$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\ell^2(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)}\, d\theta \le 2\pi \log(R/r),$$

и в силу неравенства Шварца

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} \ell(\theta)\, d\theta\right)^2 \le \int\limits_0^{2\pi} \frac{\ell^2_{f\circ h}(\theta)}{\psi_\kappa(\theta)}\, d\theta \cdot \int\limits_0^{2\pi} \psi_\kappa(\theta) d\theta \le$$

$$\le 2\pi(\log(R/r)) \iint\limits_{A(r,R)} D_{-\kappa}(z) \frac{dx\, dy}{|z|^2}.$$

Объединяя последнее неравенство с неравенствами (9.6) и (9.7), мы получаем

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Delta_{f\circ h}(\theta)\,d\theta\right)^2+\log^2(R/r)\le\frac{\log(R/r)}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}D_{-\kappa}(z)\frac{dxdy}{|z|^2}.$$

Отсюда, в силу элементарного неравенства $a^2+b^2\ge 2ab$, следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Delta_{f\circ h}(\theta)d\theta\le\log(R/r)+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{D_{-\kappa}(z)/2-1}{|z|^2}\,dx\,dy.$$

Теорема доказана. □

Выбирая допустимый автоморфизм h надлежащим образом, можно получить различные следствия теоремы 9.4.

Следствие 9.4.1. *Пусть $f: A(r,R)\to A(r,R)$ – квазиконформный автоморфизм с комплексной характеристикой $\mu(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|d_f(h^+(re^{i\theta}))-d_f(Re^{i\theta})+\log(R/r)\right|d\theta\le$$

$$\le\log(R/r)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2-\operatorname{Im}\left(\mu(z)\bar z/z\right)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dxdy}{|z|^2}\,,\quad(9.9)$$

где

$$h^+(z)=ze^{i\log(R/|z|)}.$$

Доказательство. Положим $h(z)=h^+(z)$. Это отображение является билипшицевым, сохраняет объемы, отображает кольцо $A(r,R)$ на себя и тождественно на окружности $|z|=R$. Тогда

$$\Delta_{f\circ h^+}(\theta)=|d_f(h^+(re^{i\theta}))-d_f(Re^{i\theta})+\log(R/r)|.$$

Далее, вычисления

$$h_t^+(z)=h^+(z)(1-i)/t,\quad\bar h_t^+(z)=\bar h^+(z)(1+i)/t,\quad|h^+(z)|=t,$$

показывают, что

$$D_{-\kappa}(z)=\frac{|\frac{\partial}{\partial t}f(h^+(z))|^2}{J_{f\circ h^+}(z)}=$$
$$=\frac{2|f_z(h^+)+if_{\bar z}(h^+)\bar h^+/h^+|^2}{J_f(h^+)}=2D_{-i\mu}(h^+(z)),$$

где $z=te^{i\theta}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-\kappa}(z)/2-1}{|z|^2}\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-i\mu}(h^+(z))-1}{|z|^2}\,dx\,dy.$$

Выполняя под знаком интеграла замену переменных по формуле $z\mapsto h^+(z)$, и принимая во внимание тот факт, что $|h^+(z)|=|z|$ и $J_{h^+}(z)=1$, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-i\mu}(h^+(z))-1}{|z|^2}\,dxdy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{A(r,R)}\frac{D_{-i\mu}(z)-1}{|z|^2}\,dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2-\operatorname{Im}(\mu(z)\bar z/z)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dx\,dy}{|z|^2}.$$

Теперь неравенство (9.5) принимает вид (9.9) и мы завершаем доказательство следствия 9.1. □

Следствие 9.4.2. *Пусть $f:A(r,R)\to A(r,R)$ – квазиконформный автоморфизм с комплексной характеристикой $\mu(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|d_f(Re^{i\theta})-d_f(h^-(re^{i\theta}))+\log(R/r)\right|d\theta\le$$
$$\le\log(R/r)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2+\operatorname{Im}(\mu(z)\bar z/z)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dxdy}{|z|^2},\quad(9.10)$$

где

$$h^-(z)=ze^{-i\log(R/|z|)}.$$

Доказательство. Положим в теореме 9.2 $h = h^-(z)$. Тогда $\Delta_{f\circ h^-}(\theta) = |d_f(Re^{i\theta}) - d_f(h^-(re^{i\theta})) + \log(R/r)|$. Вычисления

$$h_t^-(z) = h^-(z)(1+i)/t, \;\; \bar{h}_t^-(z) = \bar{h}^-(z)(1-i)/t, \;\; |h^-(z)| = t,$$

показывают, что

$$D_{-\kappa}(z) = \frac{|\frac{\partial}{\partial t} f(h^-(z))|^2}{J_{f\circ h^-}(z)} = 2D_{i\mu}(h^-(z)),$$

где $z = te^{i\theta}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{-\kappa}(z)/2 - 1}{|z|^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{i\mu}(h^-(z)) - 1}{|z|^2}\, dx\, dy.$$

Выполняя замену переменных под знаком интеграла по формуле $z \mapsto h^-(z)$, и принимая во внимание соотношения $|h^-(z)| = |z|$ и $J_{h^-}(z) = 1$, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{i\mu}(h^-(z)) - 1}{|z|^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{A} \frac{D_{i\mu}(z) - 1}{|z|^2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{r<|z|<R} \frac{|\mu(z)|^2 + \operatorname{Im}(\mu(z)\bar{z}/z)}{1 - |\mu(z)|^2} \cdot \frac{dx\, dy}{|z|^2}$$

и, тем самым, завершаем доказательство. □

В задаче Джона $d_f(ae^{i\varphi}) = \theta$, $d_f(be^{i\varphi}) = 0$ для всех $0 \le \varphi \le 2\pi$ и мы приходим к следующим двусторонним оценкам вращения.

Следствие 9.4.3. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – квазиконформное отображение комплексной плоскости с комплексной характеристикой $\mu(z)$, такое что*

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{если } |z| \ge b, \\ ze^{i\theta}, & \text{если } |z| \le a < b. \end{cases} \tag{9.10}$$

Тогда

$$-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 + \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dx\, dy}{|z|^2} \le \theta \le \frac{1}{\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 - \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dx\, dy}{|z|^2}.$$

Таким образом,

$$|\theta| \le \max \left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 \pm \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{dx\,dy}{|z|^2} \right|.$$

Если еще заметить, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|^2 \pm \operatorname{Im}(\mu\bar{z}/z)}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{dx\,dy}{|z|^2} \right| \le \frac{1}{\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{|\mu|}{1-|\mu|} \frac{dx\,dy}{|z|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{K_f(z)-1}{|z|^2}\,dx\,dy,$$

тогда

$$|\theta| \le \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{A(a,b)} \frac{K_f(z)-1}{|z|^2}\,dx\,dy,$$

ср. с формулой (9.4).

Основные неравенства, доказанные в этом параграфе, не зависят от максимальной дилатации квазиконформных отображений и они остаются в силе для более общих гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ при надлежащих условиях на существование несобственных интегралов.

Теорема 9.4 допускает следующее обобщение, ср. [164].

Теорема 9.5. *Пусть $f : A(r,R) \to G$ представляет собой Q – квазиконформное отображение с комплексной характеристикой $\mu(z)$. Если G содержит кольцо $A(r(1+\varepsilon), R/(1+\varepsilon))$ и содержится в кольце $A(r/(1+\varepsilon), R(1+\varepsilon))$, то для любого сохраняющего объемы квазиконформного автоморфизма h кольца $A(r,R)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |d_{f\circ h}(re^{i\theta}) - d_{f\circ h}(Re^{i\theta})|\,d\theta \le \log(R/r) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{A(r,R)} \frac{D_{-\kappa}(z)/2-1}{|z|^2}\,dx\,dy + 2\varepsilon(1+Q). \quad (9.11)$$

Здесь κ обозначает комплексную характеристику отображения $f \circ h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 9.4, заметим что теперь неравенство (9.6) должно быть заменено неравенством

$$\int\limits_{f\circ h\circ\gamma}\frac{|dw|}{|w|}\geq\left(\Delta^2_{f\circ h}(\theta)+\log^2\frac{|f(Re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|}\right)^{1/2}\geq$$

$$\geq\left(\int\limits_0^{2\pi}\Delta_{f\circ h}(\theta)d\theta\right)^2+4\pi^2(\log(R/r)-2\varepsilon)^2,\quad(9.12)$$

поскольку $A(r(1+\varepsilon),R/(1+\varepsilon))\subset f(A(r,R))$, и значит

$$\log^2\frac{|f(Re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|}\geq(\log(R/r)-2\varepsilon)^2,$$

а соотношение (9.8) – неравенством

$$\iint\limits_{A(r,R)}\frac{J_\varphi(z)}{|\varphi(z)|^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{A(r,R)}\frac{J_f(z)}{|f(z)|^2}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{f(A(r,R))}\frac{du\,dv}{|w|^2}\leq2\pi(\log(R/r)+2\varepsilon),$$

так как $f(A(r,R))\subset A(r/(1+\varepsilon),R(1+\varepsilon))$. После элементарных преобразований мы получаем неравенство (9.11). □

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве следствий 9.1 и 9.2, приходим к следующему утверждению.

Следствие 9.4. *В условиях теоремы* 9.5 *справедливы оценки*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|d_f(h^+(re^{i\theta}))-d_f(Re^{i\theta})+\log(R/r)\right|d\theta\leq$$

$$\leq\log(R/r)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2-\operatorname{Im}(\mu(z)\bar z/z)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dx\,dy}{|z|^2}+2\varepsilon(1+Q),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|d_f(Re^{i\theta})-d_f(h^-(re^{i\theta}))+\log(R/r)\right|d\theta\le$$

$$\le\log(R/r)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r<|z|<R}\frac{|\mu(z)|^2+\operatorname{Im}\left(\mu(z)\bar z/z\right)}{1-|\mu(z)|^2}\cdot\frac{dx\,dy}{|z|^2}+2\varepsilon(1+Q),$$

где $h^{\pm}=ze^{\pm i\log(R/|z|)}$.

9.4. Конформная дифференцируемость

Пусть $f:G\to\mathbb{C}$ – квазиконформное отображение с комплексной характеристикой μ и пусть $z_0\in G$. Хорошо известно, что свойства регулярности отображения f в точке z_0 тесно связаны с регулярностью $\mu(z)$ в окрестности этой точки. В данном разделе мы исследуем конформность отображения f в точке z_0. Это означает, что комплексная производная

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

существует в точке z_0 и $f'(z_0)\ne 0$. Не теряя общности, мы будем предполагать, что $z_0=0$ и отображение нормировано условием $f(0)=0$.

Следующий результат, который принято называть теоремой о конформной дифференцируемости Тейхмюйлера–Виттиха–Белинского, является классическим, см. [270], с. 248.

Теорема (TWB). *Пусть* $f:D\to D$, $f(0)=0$, – *квазиконформное отображение. Если*

$$\int\limits_{|z|<1}\int\frac{|\mu|}{|z|^2}\,dx\,dy<\infty,\tag{9.13}$$

то $f(z)$ *является конформным в точке* $z=0$.

Доказательство этой теоремы имеет долгую историю. Тейхмюйлер [373] в начале показал, что из условия (9.13) следует, что $|f(z)|\sim C|z|$ при $z\to 0$ для квазиконформных диффеоморфизмов f. Затем Виттих [86] распространил этот результат на весь класс квазиконформных отображений. Наконец, П.П. Белинский [40, 48], см. также Лехто [262], доказал конформность отображения $f(z)$ при условии (9.13). Позднее, Райх и Вальчак [322], а также Бракалова и Дженкинс [75] несколько

ослабили условие (9.13) для поведения $|f(z)|$. И лишь спустя почти половину века, удалось значительно ослабить условие (9.13) конформной дифференцируемости квазиконформных отображений.

9.5. Усиление теоремы Тейхмюллера–Виттиха–Белинского

Начнем непосредственно с формулировки основного результата.

Теорема 9.6. (см. [144, 145]). *Если*

$$\iint\limits_{|z|<1} \frac{|\mu|^2}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{dx\,dy}{|z|^2} < \infty \tag{9.14}$$

и если сингулярный интеграл

$$\iint\limits_{|z|<1} \frac{\mu}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{dx\,dy}{z^2} \tag{9.15}$$

существует в смысле главного значения по Коши, тогда отображение $f(z)$ конформно в точке $z=0$.

Нетрудно видеть, что для K–квазиконформных отображений, удовлетворяющих условию (9.14), второе условие (9.15) эквивалентно более простому условию существования интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\varepsilon<|z|<1} \frac{\mu}{z^2}\,dx\,dy. \tag{9.16}$$

С другой стороны, условие (9.14) теперь может быть заменено на эквивалентное условие

$$\iint\limits_{|z|<1} \frac{|\mu|^2}{|z|^2}\,dx\,dy < \infty. \tag{9.17}$$

Простые рассуждения показывают, что условие (9.13) влечет одновременно сходимость интеграла (9.14) и сингулярного интеграла (9.15). Обратное заключение не имеет места. Заметим, что одно условие (9.14) не гарантирует конформности отображения $f(z)$. Билипшицево отображение

$$f(z) = ze^{i\log\log(e/|z|)},\ \ z\in D,$$

которое, очевидно, не является конформным в точке 0, имеет комплексную характеристику

$$\mu(z) = \frac{1}{1 + 2i \log(e/|z|)} \frac{z}{\overline{z}} \tag{9.18}$$

и эта μ удовлетворяет (9.14) и не удовлетворяет условию (9.15).

Теорема 9.7. *Для каждой измеримой функции $\mu(z)$, $||\mu||_\infty < 1$, удовлетворяющей условию* (9.14) *в круге D, существует квазиконформное отображение $f : D \to D$, $f(0) = 0$, конформное в точке $z = 0$ и такое, что комплексная характеристика μ_f этого отображения f удовлетворяет условию*

$$|\mu_f(z)| = |\mu(z)| \tag{9.19}$$

для почти всех $z \in D$.

Таким образом, теорема 9.6 содержит теорему Тейхмюллера–Виттиха–Белинского как частный случай. Недавно Бракалова распространила теорему 9.6 на класс μ - гомеоморфизмов, см. [73] и [74].

Замечание. Теорема 9.7 решает задачу Райха–Вальчака, рассмотренную в главе 6, в случае комплексной характеристики, удовлетворяющей условию (9.14).

Мы завершим данный раздел следующим результатом.

Теорема 9.8. *Если*

$$\int\int_{|z|<1} \frac{|\mu|^2}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dx\, dy}{|z|^2} < \infty \tag{9.20}$$

и если сингулярный интеграл

$$\mathrm{Re} \int\int_{|z|<1} \frac{\mu}{1 - |\mu|^2} \cdot \frac{dx\, dy}{z^2} \tag{9.21}$$

существует в смысле главного значения по Коши, то существует предел

$$\lim_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \neq 0, \infty.$$

Доказательства сформулированных теорем основаны на надлежащих оценках искажения модулей колец при квазиконформных отображениях и оценках углового смещения, рассмотренных в предыдущем разделе. Заинтересованному читателю мы рекомендуем познакомиться с подробными доказательствами в оригинальной работе [164].

Глава 10

ВАРИАЦИЯ ОДНОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Основная цель главы 10, познакомить читателя с "квазиконформной" версией доказательства фундаментальной вариационной теоремы Шиффера–Голузина, предложенной нами в 1980 году, см. [126]. Подход к построению вариаций, который мы изложим ниже, допускает далеко идущие обобщения и, в частности, применим к однолистным функциям, заданным в многосвязных областях и на римановых поверхностях.

10.1. Квазиконформные деформации

Следующая вариационная лемма, которую мы используем при доказательстве основного результата, имеет, на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

Лемма 10.1. *Пусть ω – квазиконформный автоморфизм единичного круга D, конформный в окрестности начала координат, с комплексной характеристикой вида $\mu = tza(z) + o(z,t)$, где t - вещественный параметр, $za(z) \in L^\infty$ и $\|o(z,t)/t\|_\infty \to 0$ при $t \to 0$, нормированный условиями $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$. Тогда ω представим в виде*

$$\omega(z) = z\left\{1 + t\,Ta(z) - t\,\overline{Ta(1/\bar{z})} + i\,t\gamma\right\} + o(z,t), \tag{10.1}$$

где $Ta(z)$ обозначает преобразование Коши на плоскости,

$$Ta(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{a(\zeta)d\xi\,d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

$$\gamma = \frac{2}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\int \operatorname{Im}\,\frac{a(\zeta)}{\zeta - 1}\,d\xi\,d\eta$$

и $o(z,t)/t \to 0$ при $t \to 0$ равномерно на D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжим $\omega(z)$ по симметрии во внешность круга D. Тогда

$$f(z)=\begin{cases}\omega(z), & |z|<1,\\ 1/\overline{\omega(1/\bar z)}, & |z|>1\end{cases} \tag{10.2}$$

представляет собой квазиконформный автоморфизм комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, сохраняющий точки 0 и ∞ неподвижными. Вычисления показывают, что комплексная характеристика отображения f имеет вид

$$\mu_f(z)=\begin{cases}\mu(z), & |z|<1,\\ \frac{z^2}{\bar z^2}\overline{\mu(1/\bar z)}, & |z|>1\end{cases} \tag{10.3}$$

и, следовательно, имеет компактный носитель. По теореме 1 из [223], с учетом того, что $\mu_f(z)=tza(z)+o(z,t)$, $z\in D$, и $\mu_f(z)=tz\overline{a(1/\bar z)}/\bar z^2+o(z,t)$ для $|z|>1$, где $o(z,t)/t\to 0$ при $t\to 0$ равномерно на компактных множествах, имеем

$$\begin{aligned}f(z)&=z-t\frac{z(z-1)}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{a(\zeta)}{(\zeta-1)(\zeta-z)}-\frac{\overline{a(\zeta)}}{(\bar\zeta-1)(1-z\bar\zeta)}\right]d\xi\,d\eta\\ &+o(z,t)=z-t\frac{z}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{a(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta-z}-t\frac{z}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{z\overline{a(\zeta)}\,d\xi\,d\eta}{1-z\bar\zeta}+itz\gamma+o(z,t)\\ &=z+tz[Ta(z)-\overline{Ta(1/\bar z)}+i\gamma]+o(z,t).\end{aligned} \tag{10.4}$$

Здесь

$$\gamma=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\operatorname{Im}\,\frac{a(\zeta)}{\zeta-1}\,d\xi\,d\eta$$

и $o(z,t)/t\to 0$ при $t\to 0$ равномерно на D. Остается заметить, что $f|_D=\omega$. □

10.2. Теорема Шиффера–Голузина

Покажем, что фундаментальная вариационная теорема Шиффера – Голузина, см. [105], глава 3.4, может быть получена с применением техники квазиконформных отображений.

Теорема 10.1. *Пусть f – однолистная аналитическая функция в единичном круге D, нормированная условиями $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Предположим, что*

$$F(z,t) = f(z) + t\, z f'(z) p\,(z) + o(z,t),$$

где $o(z,t)/t \to 0$ при $t \to 0$ локально равномерно в D, представляет собой однолистную аналитическую функцию в кольце $R(r,1) = \{r \le |z| < 1\}$ при всех значениях параметра t, $|t| < t_0$. Пусть G_t означает объединение множества $F(R(r,1),t)$ с ограниченной компонентой множества $\mathbb{C} \setminus F(R(r,1),t)$. Если $f^*(z,t)$, $f^*(0,t) = 0$, $f^{*\prime}(0,t) > 0$, отображает D на G_t, то

$$f^*(z,t) = f(z) + tzf'(z)\left\{L(z) + \overline{S(1/\bar z)} + i\delta\right\} + o(z,t).$$

Здесь $L(z)$ и $S(z)$ – правильная и главная части разложения функции $p(z)$ в ряд Лорана в кольце $r \le |z| < 1$, δ – подходящий вещественный параметр и $o(z,t)/t \to 0$ при $t \to 0$ локально равномерно в D.

Доказательство. При достаточно малых t функцию F можно продолжить до квазиконформного отображения круга D на G_t с комплексной характеристикой $\mu = 0$ при $r \le |z| < 1$ и $|z| < r_0 < r$, и

$$\mu(z,t) = \frac{F_{\bar z}}{F_z} = tzp_{\bar z}(z) + o(z,t)$$

для остальных точек круга D. В силу леммы 10.1, квазиконформный автоморфизм $\omega(z,t)$ круга D, сохраняющий точки 0 и 1 неподвижными, с той же самой комплексной характеристикой, имеет представление (10.1), где $a(z) = p_{\bar z}(z)$. В силу обобщенной формулы Коши

$$Tp_{\bar\zeta}(z) = p\,(z) - L(z)$$

для $z \in D$ и

$$Tp_{\bar\zeta}(z) = S(z)$$

для $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Таким образом,

$$\omega(z,t) = z(1 + t(p\,(z) - L(z) - \overline{S(1/\bar z)} + i\,\gamma)) + o(z,t).$$

Следовательно, в силу теоремы единственности для квазиконформных отображений,

$$f^*(z,t) = F \circ \omega^{-1} \circ \phi = f(z) + tzf'(z)(L(z) + \overline{S(1/\bar z)} + i\,\delta) + o(z,t),$$

где ϕ представляет собой инфинитезимальное вращение единичного круга, обеспечивающее необходимую нормировку $f^{*\prime}(0,t) > 0$. □

Часть III
Топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений

ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной части рассматриваются топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений – различные проблемы сходимости, компактности и замыкания – с приложениями к теории вариационного метода, уравнениям математической физики и исследованиям поведения отображений в точке. Все эти вопросы, как мы увидим, очень тесно взаимосвязаны между собой. Часть III написана на основе работ [151–161, 338–359].

Теорема существования и единственности для уравнения Бельтрами, полученная Давидом [165] в 1988 году, придала сильнейший импульс дальнейшим исследованиям общих гемеоморфизмов плоскости. При этом ключевую роль играет известная лемма Геринга–Лехто–Меньшова о дифференцируемости [16, 100, 270, 286]. Вопросы компактности классов Давида начали изучаться в работе Тукиа [380].

Как мы уже отмечали ранее, аналитический подход к исследованию топологических отображений связан с изучением эллиптических систем уравнений. В этом отношении уникальное положение в геометрической теории дифференциальных уравнений занимает комплексное уравнение Бельтрами, которому удовлетворяет любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм плоскости с обобщенными производными. Поэтому многие свойства квазиконформных отображений и их обобщений могут быть получены, исходя из теории дифференциальных уравнений.

В случае классических квазиконформных отображений мы имеем дело с равномерно эллиптическими системами дифференциальных уравнений. Находясь же в условиях теоремы существования Давида, мы сталкиваемся с вырождением эллиптичности. При этом, вырождение может

наблюдаться сразу во всех окрестностях любой точки из области определения, а не только при подходе к границе. Специалистам по дифференциальным уравнениям известно с какого рода трудностями связано исследование таких систем.

Вопросы сходимости и компактности всегда занимали одно из центральных мест в теории квазиконформных отображений. Среди наиболее известных результатов в этом направлении следует отметить теоремы сходимости Штребеля и Берса–Боярского, а также теоремы компактности Шиффера–Шобера и Песина (см. [53, 71, 87, 210, 270, 309, 404, 409]). Более подробный комментарий по этому поводу приводится ниже в сравнительном анализе.

Одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в секвенциально компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе, нелинейных функционалов. Иначе, как отмечалось в сравнительно недавно вышедшей монографии [226], вопрос о существовании экстремали становится чрезвычайно трудным. Поэтому масса интересных необходимых условий экстремума, которые могли быть использованы для доказательства теорем существования и представления решений различных уравнений, повисает в воздухе. Кроме того, как будет видно из дальнейшего, в компактных классах множества комплексных характеристик оказываются выпуклыми, что значительно облегчает построение вариаций и получение необходимых условий экстремума.

Вариационный метод исследования экстремальных задач для квазиконформных отображений был впервые применен П.П. Белинским. Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах Шиффера, Шобера, Кюнау, С.Л. Крушкаля, и многих других (см., например, [41, 42, 44, 47, 48, 66–68, 124, 125, 151, 153, 216–219, 222–226, 239–241, 243, 244, 323–325, 402–405, 407]).

Другим, довольно неожиданным, приложением теорем сходимости и компактности оказались исследования локального поведения квазиконформных отображений. В связи с этим напомним, что различные вопросы дифференцируемости изучались в работах Альфорса, Берса, Геринга, Лехто, Тейхмюллера, Виттиха, Райха, Вальчака, Б.В. Боярского, П.П. Белинского, Б.В. Шабата, Ю.Ю. Трохимчука и других авторов (см., напр. [17, 38, 40, 48, 71, 86, 100, 166, 167, 262, 266, 322, 373, 376, 377]). Некоторые из относящихся сюда результатов приводятся позже в сравнительном анализе.

Таким образом, вырисовывается широкий круг взаимосвязанных во-

просов:

1) теоремы сходимости,
2) теоремы компактности,
3) теоремы замыкания,
4) теория вариационного метода,
5) локальное поведение отображений.

При этом следует отметить, что теоремы сходимости служат базой для получения теорем компактности и замыкания, которые являются центральными результатами данной части книги. Следствия же к теории вариационного метода и исследованию локального поведения отображений демонстрируют широкие возможности приложений этих результатов. Основные результаты перечислены в конце данного введения.

Часть III книги содержит 4 главы. В главе 11 собраны все теоремы сходимости. Глава 12 посвящена изучению классов отображений с ограничениями теоретико-множественного типа. Она включает критерий компактности, теорему замыкания и приложения к теории вариационного метода. Аналогична структура главы 13, в которой изучаются классы отображений с интегральными ограничениями на характеристики. Наконец, в главе 14 мы продолжаем исследование локального поведение квазиконформных отображений, начатое в главе 6.

В части III также имеется 4 приложения, в которых сосредоточены большие блоки однородного вспомогательного материала.

Перейдем к обзору основных результатов.

В главе 11 изучается поведение дилатации и комплексной характеристики при локально равномерной сходимости квазиконформных отображений и их обобщений. Полученные в ней теоремы сходимости служат базой для решения проблем компактности в последующих двух главах.

Как известно, любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса $\mathcal{ACL}(D)$, заданный в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяет почти всюду (п.в.) в D уравнению Бельтрами

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z,$$

где $\mu : D \to \mathbb{C}$ – некоторая измеримая функция с

$$|\mu(z)| \leq 1,$$

и, как обычно, $f_{\overline{z}} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$. Полагая $\mu(z) = 0$ при $f_z = f_{\overline{z}} = 0$, мы устраняем связанную с этим случаем

неопределенность. Функцию $\mu(z)$ принято называть комплексной характеристикой или просто характеристикой, а величину

$$p(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$$

– дилатацией или деформацией отображения f в точке z.

В §11.1 доказана теорема 11.1 о полунепрерывности в среднем дилатации общих гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$. Именно, пусть f и $f_n : D \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots,$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса $\mathcal{ACL}$ и пусть $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно. Тогда на любом открытом множестве $\Omega \subseteq D$:

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p(z))\, dx\, dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(z))\, dx\, dy$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty.$$

Заметим, что если $Q < \infty$, то последнее условие выполняется автоматически. Кроме того, в условиях теоремы 11.1 на некотором полуоткрытом интервале $[1,\ Q)$ функция Φ является обычной (конечной) непрерывной неубывающей выпуклой функцией, $\Phi(Q) = \Phi(Q - 0)$ и $\Phi(t) \equiv \infty$ при $t > Q$.

В частности, как отмечено в следствии 11.1, если отклонения дилатации от единицы $[p_n(z) - 1]$ принадлежат классу Орлича $L_\varphi(\Omega)$ для некоторой N-функции φ равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$, то отклонение $[p(z) - 1]$ принадлежит тому же классу Орлича.

Напомним, что функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ называется $N-$функцией, если она строго возрастает на $\mathbb{R}^+$, выпукла, четна, удовлетворяет предыдущему выносному условию и

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0.$$

Здесь мы доопределяем $\varphi(\infty) = \infty$. Функция $\Psi(z) : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Орлича $L_\varphi(\Omega)$, если

$$\iint\limits_{\Omega} \varphi\left(\Psi(z)\right) dx\, dy \le M < \infty.$$

Тогда для любого $\alpha > 1$:

$$\iint\limits_{\Omega} p^{\alpha}(z)\,dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} p_n^{\alpha}(z)\,dx\,dy,$$

и для любого $\gamma > 0$:

$$\iint\limits_{\Omega} e^{\gamma p(z)}dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} e^{\gamma p_n(z)}dx\,dy.$$

Далее, пусть функция $p_0(z) : D \to I = [1, \infty]$ локально суммируема и п.в.

$$p_n(z) \le p_0(z), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда п.в.

$$p(z) \le \limsup_{n\to\infty} p_n(z).$$

В частности, отсюда следует, что дилатация предельного отображения также локально суммируема.

Последнее неравенство хорошо известно в теории квазиконформных отображений. Оно было доказано Штребелем [409] в предположении, что п.в.

$$p_n(z) \le K < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Как видим, здесь неравенство Штребеля удается доказать для дилатаций с локально суммируемой мажорантой.

В параграфе 11.2 доказана теорема об области значений и множестве хорошей аппроксимации предельной комплексной характеристики для гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$ с локально суммируемой верхней границей дилатаций.

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса $\mathcal{ACL}$, заданный в некоторой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, будем называть $Q(z)$ - квазиконформным ($Q(z)-$к.к.) отображением, если его дилатация

$$p(z) \le Q(z) \qquad \text{п.в.},$$

где $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ – произвольная функция.

Отметим, что понятие $Q(z)-$к.к. отображения, по-видимому, впервые было введено в статье Шиффера и Шобера [403] для случая, когда $Q(z) \in L^{\infty}$, т.е. фактически для $Q-$к.к. отображений, где $Q = ||Q(z)||_{\infty}$. На экстремальные проблемы в классах подобного рода впервые обратил внимание еще Тейхмюллер (1939), а затем и Л.И. Волковыский. Первый

пример такой экстремальной проблемы был рассмотрен Кюнау. Подобные классы рассматривались также в работах С.Л. Крушкаля, Андриян–Казаку, М.С. Иоффе, Ренельта, Мак Ливи, Летинена и других (см., напр., [22,184,223,226,239–241,243,244,261,279,323,374,399,403–405,407]).

Перейдем к описанию области значений комплексной характеристики предельного отображения. Для этого на потребуются элементы выпуклого анализа, связанные с понятием инвариантно–выпуклых множеств, которые можно найти в приложении А.

Пусть $\Delta = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| < 1\}$ – единичный круг и G – группа всех дробно-линейных отображений Δ на себя. Множество M из Δ назовем *инвариантно-выпуклым*, если все множества $g(M)$, $g \in G$, являются выпуклыми. Имеется простой геометрический критерий: замкнутое множество M из Δ инвариантно-выпукло тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой точек μ_1, $\mu_2 \in M$ этому множеству принадлежит и вся совокупность дуг $[\mu_1, \mu_2](\eta)$, $|\eta| = 1$. Здесь через $[\mu_1, \mu_2](\eta)$ обозначена дуга, соединяющая точки μ_1 и μ_2 внутри Δ, той единственной окружности, которая проходит через тройку точек μ_1, $\mu_2 \in \Delta$ и $\eta \in \partial\Delta$.

Инвариантно-выпуклой оболочкой inv co M множества M из Δ, $\overline{M} \subseteq \Delta$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M. Согласно теореме А2:

$$\text{inv co } M = \bigcap_{|\eta|=1} K_M(\eta),$$

где через $K_M(\eta)$ обозначен единственный *опорный круг*, касающийся $\partial\Delta$ в точке η. Здесь замкнутый круг K из $\overline{\Delta}$, касающийся $\partial\Delta$, называется опорным к множеству M, если $M \subseteq K$ и $\partial K \bigcap \partial M \neq \varnothing$. Теорема А3 содержит еще одно описание inv co M в терминах так называемого дугового замыкания.

В силу предложения А1, см. приложение А, инвариантно-выпуклые множества являются строго выпуклыми множествами, т.е. их границы не могут содержать отрезков прямых. Таким образом, все граничные точки таких множеств являются крайними.

Граничную точку произвольного множества M, $\overline{M} \subseteq \Delta$, назовем *инвариантно-крайней*, если на некоторой опорной окружности $\partial K_M(\eta)$, $|\eta| = 1$, она является ближайшей из ∂M к η по или против часовой стрелки. Множество всех инвариантно-крайних точек M в дальнейшем обозначается через inv ext M.

Роль множества inv ext M определяется тем обстоятельством, что оно является минимальным по включению замкнутым подмножеством $\overline{M}$, по которому еще восстанавливается inv co M (теорема А4). При этом

имеют место аналоги классических теорем Крейна–Мильмана и Каратеодори–Минковского (теоремы A5 и A6).

Следующий результат, сформулированный в теореме 2, является одним из центральных в теории сходимости $Q(z)$ – квазиконформных отображений. Пусть $f_n : D \to \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность $Q(z)$ – к.к. отображений с локально суммируемой $Q(z)$ и $f_n \to f$ локально равномерно (л.р.), где $f : D \to \mathbb{C}$ – некоторый гомеоморфизм. Тогда f также является $Q(z)-$к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1_{\rm loc}$. Кроме того, для почти всех $z \in E'$

$$\mu(z) \in \text{inv co } M(z)$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на множестве

$$E_0 := \{z \in E' : \mu(z) \in \text{inv ext } M(z)\},$$

где $E'-$ множество всех регуляторных точек отображения f и

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\mu_n(z)\}.$$

Здесь, как обычно, через $\text{Ls}\{\mu_n(z)\}$ обозначен верхний топологический предел последовательности одноточечных множеств $M_n(z) = \{\mu_n(z)\}$, т.е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots,$ (см. [229], с. 334). Условие регулярности в точке z означает, что f дифференцируемо в этой точке и якобиан $J(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см. [270], с. 10).

Для сравнения, в работе [409] Штребель установил, что при локально равномерной сходимости $Q-$к.к. отображений, когда $Q(z) \equiv Q < \infty$:

$$|\mu(z)| \leq \limsup_{n\to\infty} |\mu_n(z)| \quad \text{п.в.}$$

и на множестве

$$\mathcal{E}_0 = \{z : |\mu(z)| = \limsup_{n\to\infty} |\mu_n(z)|\}$$

можно выбрать подпоследовательность $\mu_n(z)$, которая сходится п.в. к $\mu(z)$.

Из нашей теоремы получится следующее усиление теоремы сходимости Штребеля: в условиях теоремы имеет место неравенство Штребеля и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на множестве $\mathcal{E}_0$.

В случае одноточечных множеств $M(z)$ из нашей теоремы также следует обобщение известной теоремы сходимости Берса–Боярского (см.,

напр., [53, 71, 270]): Если, в условиях нашей теоремы, $\mu_n(z) \to \varkappa(z)$ п.в. при $n \to \infty$, то $\mu(z) = \varkappa(z)$ п.в. на E'.

Наша теорема позволяет проводить и более тонкий поточечный анализ: если $\mu_n(z) \to \mu(z)$ при $n \to \infty$ на некотором измеримом множестве $E \subseteq E'$ по норме L^p, $1 \le p \le \infty$, просто по мере или п.в., то $\mu(z) = \varkappa(z)$ п.в. на E.

Аналогично [270] будем говорить, что f_n *хорошо аппроксимирует* f на множестве E, если $f_n \to f$ л.р. и $\mu_n \to \mu$ по мере на E. Здесь, как обычно, если $\operatorname{mes} E = \infty$, под сходимостью по мере на множестве E понимается таковая на любом подмножестве $\mathcal{E} \subseteq E$, $\operatorname{mes} \mathcal{E} < \infty$ (см., например, [202], с. 57)

Как видим из нашей теоремы, f_n хорошо аппроксимирует f на множестве E_0. Можно показать (см., например, [353]), что это – наиболее широкое множество, на котором гарантируется хорошая аппроксимация.

Наконец, в параграфе 11.3, в терминах преобразования Фурье комплексных характеристик, найдены необходимые и достаточные условия сходимости нормированных гомеоморфизмов, верхняя граница дилатаций которых экспоненциально ограничена по мере.

Будем говорить, что измеримая функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ *экспоненциально ограничена по мере*, если существуют постоянные $T \ge 1$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что для всех $t \ge T$:

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : Q(z) > t\} \le ce^{-\gamma t}.$$

Обозначим через $H(Q(z))$ множество всех $Q(z)-$к.к. отображений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$, а через $\mathfrak{M}(Q(z))$ – множество всех измеримых функций $\mu(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с

$$p(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \le Q(z) \quad \text{п.в.}$$

В сравнительно недавней работе (1988) Давид доказал теорему существования и единственности нормированных указанным образом гомеоморфных решений уравнений Бельтрами класса $\mathcal{ACL}$ с ограничениями на комплексные характеристики вида

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\} \le c_0 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}$$

для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, $\alpha > 0$, $c_0 > 0$. При этом, решение автоматически принадлежит всем классам Соболева $W^{1,s}_{\text{loc}}$ для любых $s < 2$. Там же были установлены равностепенные непрерывность и локальная абсолютная непрерывность совокупности всех таких гомеоморфизмов вместе с их обратными при фиксированных ε_0, α и c_0 (см. [165], с. 27, 55).

Условие Давида может быть переписано в эквивалентной форме Тукиа

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t\} \le ce^{-\gamma t}$$

для всех $t \ge T$; $T = -1 + 2/\varepsilon_0 \ge 1$, $\gamma = \alpha/2 > 0$, $c = c_0 e^{-\gamma} > 0$, где $p(z)$ – дилатация, см. [380].

Таким образом, если верхняя граница дилатации $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере, то для каждой функции $\mu \in \mathfrak{M}(Q(z))$ существует и единственно отображение f_μ класса $H(Q(z))$ с комплексной характеристикой μ.

Если $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере, то $Q(z)$ локально интегрируема и потому к классу $H(Q(z))$ применима вся теория, развитая в предыдущем параграфе. В частности, по нашей второй теореме сходимости, теореме Давида, а также известной теореме Арцела–Асколи получаем секвенциальную компактность класса $H(Q(z))$ относительно локально равномерной сходимости. Поэтому из нашего обобщения теоремы сходимости Берса–Боярского, см. выше, имеем: Если f и $f_n \in H(Q(z))$, $n = 1, 2, \ldots$, где $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере, то для сходимости $f_n \to f$ л.р. достаточно выполнения любого из следующих условий:

1. $\mu_n \to \mu$ п.в.,
2. $\mu_n \to \mu$ по мере,
3. $\mu_n \to \mu$ в $L^p_{\rm loc}$, $1 \le p \le \infty$.

Как будет следовать из результатов двенадцатой главы, ни одно из этих условий не является необходимым. Более того, как будет явствовать из теоремы 12.1, необходимым условием не является даже слабая сходимость ни в одном из пространств $L^p_{\rm loc}$, $1 \le p \le \infty$ (следствие 12.1).

Обозначим через $B^\infty(\mathbb{C})$ – открытый единичный шар в пространстве $L^\infty(\mathbb{C})$. Определим для любой функции $\mu \in B^\infty \cap L^2$ нелинейное преобразование:

$$F(\mu) = m\widehat{\mu} + m\left(\widehat{\mu} * (m\widehat{\mu})\right) + \ldots,$$

где $*$ обозначает свертку функций,

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \mu(\zeta) e^{-i\operatorname{Re} z\bar{\zeta}} d\xi d\eta$$

– преобразование Фурье и $m(z) = z/\overline{z} \in L^\infty(\mathbb{C})$ – мультипликатор. Пусть функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и пусть E_j, $j \in J$, – некоторое покрытие плоскости $\mathbb{C}$ по мере ограниченными измеримыми множествами, на каждом из которых $Q(z)$ ограничена.

Тогда для сходимости $f_n \to f$ л.р. в $H(Q(z))$ необходимо и достаточно, чтобы $F(\widetilde{\mu}_n) \to F(\widetilde{\mu})$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$ для срезок комплексных характеристик μ и μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, на каждом из множеств $E_j,\ j \in J$, см. теорему 11.3.

Здесь под срезкой функции $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на множестве $E \subseteq \mathbb{C}$ понимается функция $\widetilde{\mu} = \mu\chi_E$, где через χ_E обозначена характеристическая функция множества E. Семейство множеств $E_j,\ j \in J$, называется покрытием плоскости $\mathbb{C}$ по мере, если

$$\operatorname{mes} \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j \in J} E_j = 0.$$

В частности, если f и $f_n \in H(Q)$, $Q < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют носители комплексных характеристик μ и μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, сосредоточенные в некотором компакте $K \subseteq \mathbb{C}$, то для сходимости $f_n \to f$ л.р. необходимо и достаточно, чтобы $F(\mu_n) \to F(\mu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.

Теорема 11.3 позволяет строить различные метрики, которые генерируют локально равномерную сходимость нормированных $Q(z)-$к.к. отображений (следствие 11.11).

В главе 2 рассматриваются классы гомеоморфизмов с ограничениями на комплексные характеристики теоретико-множественного типа.

В работах Тейхмюллера, Л.И. Волковыского, Шиффера, Шобера, Кюнау, С.Л. Крушкаля, Андриян-Казаку, Ренельта, Мак Ливи, Летинена, М.С. Иоффе и других авторов начались исследования классов $Q(z)$-к.к. отображений, для которых

$$\mu(z) \in \Delta_{q(z)} \quad \text{п.в.},$$

где

$$\Delta_{q(z)} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le q(z)\}, \quad z \in \mathbb{C},$$
$$q(z) = (Q(z) - 1) \,/\, (Q(z) + 1)\,,$$

а также классов с дополнительными ограничениями вида:

$$\mathcal{F}(\mu(z), z) \le 0 \quad \text{п.в.},$$

где $\mathcal{F}(\mu, z) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (см., напр., [22, 223, 226, 239–241, 243, 244, 261, 279, 323, 374, 399, 403–405, 407]). Наконец, последняя из постановок Шиффера-Шобера в [404] привела к рассмотрению классов с ограничениями общего теоретико–множественного вида:

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \quad \text{п.в.}$$

Однако, все это развитие происходило, фактически, в рамках $Q-$к.к. отображений, поскольку предполагалось, что

$$\operatorname{ess\,sup} Q(z) = Q < \infty.$$

Теорема существования и единственности Давида [165] позволяет продвинуться много дальше в указанном направлении. Именно, обозначим $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих указанному включению, где, вообще говоря, $Q \notin L^\infty$. Через H_M в дальнейшем обозначается совокупность всех гомеоморфизмов плоскости $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса $\mathcal{ACL}$ с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$.

В параграфе 12.1 доказана теорема 12.1 о замыкании классов H_M в топологии локально равномерной сходимости: пусть функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – произвольное семейство непустых замкнутых множеств из $\Delta_{q(z)}$, измеримое по параметру z, тогда

$$\overline{H_M} = H_{\text{inv co } M},$$

где inv co $M(z), z \in \mathbb{C}$, – семейство инвариантно-выпуклых оболочек множеств $M(z),\ z \in \mathbb{C}$. При этом, класс $H_{\text{inv co } M}$ является секвенциально компактным.

Здесь условие измеримости семейства множеств $M(z)$ по параметру z является существенным. Можно привести пример, когда для неизмеримого $M(z)$ класс H_M пуст, а класс $H_{\text{inv co } M}$ не пуст. Если $\varphi(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ – какая-либо неизмеримая функция, $\varphi(z) \le q < 1$, то в качестве примера можно взять семейство двуточечных множеств $M(z) = \{-\varphi(z), \varphi(z)\}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $H_M = \oslash$, а $H_{\text{inv co } M} \ne \oslash$, поскольку содержит тождественное отображение.

В случае измеримого семейства множеств $M(z) \ne \oslash$ п.в., по теореме об измеримых сечениях (теорема Б3),

$$\mathfrak{M}_M \ne \oslash$$

и, следовательно, по теореме существования Давида

$$H_M \ne \oslash$$

в условиях теоремы 12.1.

Семейство непустых замкнутых множеств плоскости $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, здесь называется измеримым по параметру z, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ измеримо по Лебегу множество точек

$$E_0 = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \subseteq M_0\}.$$

Указанное понятие восходит к работе Шоке [408].

Отметим, что понятие измеримого семейства множеств первоначально появилось в теории вероятностей и теории оптимального управления под названиями "случайное множество" и "измеримое многозначное отображение", соответственно (см., например, [169, 184, 194, 207, 231, 283, 305, 335, 362]). Здесь мы используем классический термин Бурбаки [77] "семейство множеств".

Теория измеримых семейств во многом аналогична теории измеримых функций. Основные моменты этой теории изложены в приложении Б. В частности, теорема Б1 содержит целый ряд критериев измеримости семейств.

Из теоремы 12.1 следует важное заключение: для любого $1 < Q < \infty$ существует последовательность $Q-$к.к. отображений $f_n : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, которая сходится л.р. к $Q-$к.к. отображению $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такая, что μ_n не сходится к μ слабо ни в одном из пространств $L^p_{\rm loc},\ 1 \le p < \infty$.

Необходимые и достаточные условия компактности классов H_M установлены в теореме 12.2. А именно, если функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и семейство непустых замкнутых множеств $M(z) \subseteq \Delta_{q(z)},\ z \in \mathbb{C}$, измеримо по параметру z, то следующие утверждения эквиваленты:

1) класс H_M секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;

2) множества $M(z)$ инвариантно-выпуклы для п.в. $z \in \mathbb{C}$.

При этом, условие 2) остается достаточным для компактности класса H_M и при отсутствии измеримости $M(z)$ по z, как это видно непосредственно из теоремы 11.2. Однако в этом случае данное условие перестает быть необходимым, как показывает пример, приведенный в предыдущем параграфе. В этом случае также нет гарантий непустоты класса.

Для сравнения, в упомянутой выше работе Шиффера и Шобера [404] были получены следующие *достаточные* условия компактности классов $Q-$к.к. отображений:

1) $\mathcal{F}(\mu, z)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. непрерывна по μ при почти всех z и измерима по z при всех μ;

2) для почти всех $z \in \mathbb{C}$ множества

$$M(z) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mathcal{F}(\mu, z) \le 0\}$$

являются Δ_q – выпуклыми, т.е. предоставляют собой пересечения замкнутых кругов из

$$\Delta_q = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le q\}, \quad 0 < q < 1.$$

В параграфе 12.3 приведены основные следствия для теории вариационного метода на классах H_M. В частности, доказан вариационный принцип максимума (теорема 12.3).

Обозначим через H множество всех гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса $\mathcal{ACL}$ с нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Из теоремы 12.1 о замыкании классов H_M получается следующий *принцип редукции* экстремальных задач из некомпактных классов в компактные: в условиях теоремы 12.1 для любого непрерывного функционала $\Omega : H \to \mathbb{R}$

$$\sup_{f \in H_M} \Omega(f) = \max_{f \in H_{\text{inv co } M}} \Omega(f).$$

В силу принципа редукции, мы можем ограничиться в дальнейшем рассмотрением экстремальных задач только на компактных классах H_M.

Компактные классы обладают тем основным преимуществом, что в них всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе, нелинейных функционалов. Поэтому необходимые условия экстремума в таких классах могут быть использованы для доказательства существования и представления решений различных дифференциальных уравнений, возникающих при этом.

Наоборот, в некоторых некомпактных классах необходимые условия экстремума относятся, вообще говоря, к пустому множеству отображений и они в значительной степени обесцениваются.

Кроме того, как показывает теорема 12.2, в компактных классах H_M множество комплексных характеристик $\mathfrak{M}_M$ является выпуклым. Последнее обстоятельство имеет исключительно важное значение для теории вариационного метода. Действительно, если μ и $\nu \in \mathfrak{M}_M$, то

$$\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon(\nu - \mu)$$

также принадлежит $\mathfrak{M}_M$ при всех $\varepsilon \in [0, 1]$.

Функционал $\Omega : H_M \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато*, если

$$\Omega(f_\varepsilon) = \Omega(f) + \varepsilon Re \iint\limits_{\mathbb{C}} g \, d\varkappa + o(\varepsilon)$$

для любой вариации $f_\varepsilon = f + \varepsilon g + o(\varepsilon)$ в классе H_M, где $\varkappa = \varkappa_f$ – некоторая конечная борелевская комплексная мера с компактным носителем.

Для вариации f_ε, соответствующей μ_ε,

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} (\nu(z) - \mu(z)) \, \varphi\left(f(z), f(\zeta)\right) f_z^2 dx \, dy$$

где

$$\varphi(w,w')=\frac{1}{(w-w')}\frac{w'}{w}\frac{w'-1}{w-1}.$$

Далее говорим, что Ω дифференцируем по Гато *без вырождения* на классе H_M, если $\varphi(w,f(\zeta))$ локально интегрируемо для любого $f\in H_M$ относительно произведения мер $dm_w\otimes d\varkappa(\zeta)$, где m – мера Лебега, и п.в.

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\varphi\left(w,f(\zeta)\right)d\varkappa(\zeta)\neq 0.$$

В указанных терминах имеет место *вариационный принцип максимума*, установленный в теореме 12.3. Пусть измеримое по z семейство непустых замкнутых инвариантно-выпуклых множеств $M(z),\ z\in\mathbb{C}$, удовлетворяет включению $M(z)\subseteq\Delta_{q(z)},\ q(z)=(Q(z)-1)/(Q(z)+1)$, с $Q(z)$ экспоненциально ограниченной по мере, а функционал $\Omega: H_M\to\mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения на H_M. Если на отображении $f\in H_M$ достигается $\max\Omega$ по классу H_M, то его комплексная характеристика удовлетворяет включению

$$\mu(z)\in\partial M(z)$$

для п.в. $z\in\mathbb{C}$.

Для формулировки других необходимых условий экстремума нам потребуется еще одно понятие. Именно, пусть $\mu\in\mathfrak{M}_M$. Тогда через $\omega_\mu(z)$ обозначим *конус допустимых направлений* для множества $M(z)$ в точке $\mu(z)$, т.е. множество всех $\omega\in\mathbb{C},\omega\neq 0$, таких, что $\mu+\varepsilon\omega\in M$ при всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ для некоторого $\varepsilon_0>0$ (см., напр., [278], с. 12). Отметим, что для строго выпуклых множеств, каковыми являются инвариантно-выпуклые множества, конус допустимых направлений является открытым выпуклым конусом.

А тогда, в условиях теоремы 12.3, экстремаль f в задаче о $\max\Omega$ на классе H_M удовлетворяет неравенствам:

$$\operatorname{Re}\omega\mathcal{B}(z)\geq 0$$

для п.в. $z\in\mathbb{C}$ при всех ω из конуса допустимых направлений $\omega_\mu(z)$, где

$$\mathcal{B}(z)=\mathcal{A}(f(z))f_z^2\,.$$

Здесь $\mathcal{A}$ задано соотношением (III).

Если дополнительно для п.в. $z \in \mathbb{C}$ граница $\partial M(z)$ регулярна, т.е. в каждой своей точке имеет касательную, то

$$n(z)\mathcal{B}(z) \geq 0$$

для п.в. $z \in \mathbb{C}$, где $n(z)$ – единичный вектор внутренней нормали к $\partial M(z)$ в точке $\mu(z)$.

В частности, если $M(z)$ представляет собой семейство кругов:

$$M(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - c(z)| \leq k(z)\}$$

для некоторых измеримых функций $c(z)$ и $k(z)$, то

$$n(z) = \frac{c(z) - \mu(z)}{k(z)}\,,$$

а тогда

$$\frac{c(z) - \mu(z)}{k(z)} = \frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|},$$

т.е.

$$\mu(z) = c(z) - k(z)\frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|}.$$

Таким образом, в условиях теоремы 12.3, если $M(z)$ – семейство кругов (III), то экстремаль задачи о $\max \Omega$ на классе H_M существует и удовлетворяет уравнению

$$f_{\overline{z}} = c(z) f_z - k(z)\,\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{\mathcal{A}(f(z))}\,\overline{f_z}.$$

При $c(z) = 0$ получаем уравнение

$$f_{\overline{z}} = -k(z)\,\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{\mathcal{A}(f(z))}\,\overline{f_z}.$$

Отметим, что уже простейшее из подобных уравнений

$$f_{\overline{z}} = -k(z)\overline{f}_z$$

эквивалентно обобщенной системе Коши–Римана

$$v_x = -K(z)\,u_y, \qquad v_y = K(z)\,u_x,$$

где $f = u + iv$, $z = x + iy$, $K(z) = (1 + k(z))/(1 - k(z))$. Обобщенные решения (III) можно рассматривать как слабые решения уравнения

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) = 0,$$

которое является основным уравнением стационарных тепловых потоков, гидродинамики, магнито– и электростатики неоднородных сред.

Таким образом, при соответствующем выборе функционала Ω и класса H_M из необходимых условий экстремума на компактных классах можно получать теоремы существования и представления решений различных уравнений математической физики. Один из примеров такого их использования приводится в последней главе (предложение 14.3).

В главе 13 рассмотрены гомеоморфизмы класса $\mathcal{ACL}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа.

Различные классы отображений, квазиконформных в среднем, изучались в работах Альфорса, И.Н. Песина, Кюнау, С.Л. Крушкаля и других авторов (см., напр., [13, 66, 67, 214–216, 219, 226, 227, 286, 287, 309]). Одним из основных достижений последнего времени в этой области стала уже упоминавшаяся нами теорема существования и единственности Давида [165].

Действительно, в силу эквивалентности условий Давида и Тукиа, результаты Давида относятся, в частности, к отображениям, дилатации которых удовлетворяют интегральному ограничению:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))dx\,dy \le M$$

для функций $\Phi \ge 0$ с *экспоненциальным ростом на бесконечности:*

$$\Phi(t) \ge \beta e^{\gamma t}, \quad t \ge T; \quad \gamma > 0, \quad \beta > 0.$$

Отметим, что в гораздо более ранней работе И.Н. Песина [309] были сформулированы теоремы существования, равностепенной непрерывности и замкнутости классов с интегральными ограничениями вида:

$$\iint e^{[p(z)]^{1+\delta}} dx\,dy \le M$$

для любого $\delta > 0$. Там же было замечено, что для любого $n = 1, 2, \ldots$, ограничения вида

$$\iint p^n(z)\,dx\,dy \le M$$

не дают равностепенно непрерывных классов отображений (см. также [165]).

Незамкнутость классов Давида впервые была обнаружена в работе [315], см. также [380], с. 63.

Обозначим через H^{Φ} совокупность всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса $\mathcal{ACL}$ с нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$, и с интегральным ограничением на дилатацию $p(z)$ вида:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))\, dx\, dy \leq 1,$$

где $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+},\ I = [1, \infty]$, – произвольная функция.

Заметим, что если $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – произвольная функция с $\Phi(\infty) = \infty$, то для непустоты класса H^{Φ} необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{t \in I} \Phi(t) = 0.$$

В §13.1 доказана центральная теорема 13.1 о замыкании некомпактных классов H^{Φ}: Если $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет экспоненциальный рост на ∞, то в топологии локально равномерной сходимости

$$\overline{H^{\Phi}} = H^{\Phi_0},$$

где $\Phi_0 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – нижняя огибающая функции Φ. При этом, класс H^{Φ_0} является секвенциально компактным.

Под *нижней огибающей* функции Φ здесь понимается функция

$$\Phi_0(t) = \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(t), \quad t \in I,$$

где Ψ – семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых функций $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\varphi(t) \leq \Phi(t),\ t \in I$. Нижняя огибающая функции $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ представляет собой наибольшую неубывающую выпуклую функцию $\Phi_0 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t) < \infty} t$$

и график которой лежит ниже графика Φ. При этом, $\Phi_0(t) \equiv \infty$ для $t > Q$ и $\Phi_0(t) < \infty$ при $t < Q$.

В §13.2, в теореме 13.2, найдены необходимые и достаточные условия компактности классов H^{Φ}. Именно, если $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+},\ I = [1, \infty]$, имеет

экспоненциальный рост на ∞ и $\inf \Phi = 0$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) H^Φ секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;

2) Φ не убывает, выпукла и непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке Q из (III).

Если $Q < \infty$, то условие экспоненциального роста на ∞ выполнено автоматически и, таким образом, мы приходим к следующему заключению. Пусть $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – произвольная функция с $\inf \Phi = 0$ и $Q < \infty$. Тогда для секвенциальной компактности класса H^Φ необходимо и достаточно, чтобы Φ была непрерывной, неубывающей и выпуклой функцией на отрезке $[1, Q]$. Здесь непрерывность Φ, по-прежнему, понимается в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Наконец, приведем наиболее интересный пример некомпактного класса. Таковым является класс всех $Q-$к.к. отображений с интегральным ограничением

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} |\mu(z)| dx\, dy \leq 1.$$

Действительно, в наших обозначениях это есть класс H^Φ с

$$\Phi(t) = \begin{cases} (t-1)/(t+1), & 1 \leq t \leq Q, \\ \infty, & t > Q. \end{cases}$$

Как легко видеть, функция $\varphi(t) = (t-1)/(t+1)$ не является выпуклой, поскольку $\varphi''(t) = -4/(t+1)^3 < 0$. Таким образом, не выполнено одно из условий компактности.

В §13.3 собраны следствия для теории вариационного метода на классах H^Φ. Теорема 13.1 имеет следствием принцип редукции (следствие 13.4), а теорема 13.2 – выпуклость множества комплексных характеристик $\mathfrak{M}^\Phi$ в компактных классах H^Φ (следствие 13.5). Вариационный принцип максимума сформулирован в теореме 13.3. Пусть неубывающая, выпуклая функция $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $\Phi(1) = 0, \Phi(Q) \neq 0$, имеет экспоненциальный рост на ∞ и функционал $\Omega : H^\Phi \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Тогда для любого отображения $f \in H^\Phi$, на котором достигается $\max \Omega$ по классу H^Φ, дилатация $p(z)$ удовлетворяет равенству:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z)) dx\, dy = 1.$$

Более полно необходимые условия экстремума отражены в предложении 13.5.

Глава 14 посвящена исследованию поведения квазиконформных отображений в точке.

Различные вопросы дифференцируемости квазиконформных отображений изучались в работах Лехто, Б.В. Боярского, Тейхмюллера, Виттиха, Райха, Вальчака, П.П. Белинского, Ю.Ю. Трохимчука, Б.В Шабата и других авторов (см., напр., [38, 40, 48, 71, 86, 88, 166, 167, 262, 266, 322, 371, 373, 376, 377]).

Напомним, что отображение f называется конформным в точке z_0, если оно дифференцируемо в этой точке в смысле Дарбу–Штольца:

$$f(z) - f(z_0) = f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|)$$

и если $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, а $f_z(z_0) \neq 0$.

Как показывает пример Шабата ([48], с. 40)

$$w = z(1 - \ln|z|),$$

при непрерывной комплексной характеристике $\mu(z)$ отображение $w = f(z)$ может быть недифференцируемым в этом смысле.

Как, по-видимому, впервые установлено П.П. Белинским, если μ непрерывна в точке z_0, то $w = f(z)$ дифференцируемо в следующем смысле (см. [48], с.41)

$$\Delta w = A(\rho)[\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z} + o(\rho)],$$

где $\mu_0 = \mu(z_0), \rho = |\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z}|$, $A(\rho)$ зависит только от ρ и $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$.

Отметим, что здесь $A(\rho)$ может не иметь определенного конечного предела при $\rho \to 0$, но при этом, как мы покажем, обладает дополнительным свойством

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1$$

для любого $t > 0$.

Дифференцируемость отображений f в смысле (III) с дополнительным условием (III) в дальнейшем именуется как *дифференцируемость по Белинскому*. При этом, в случае отсутствия непрерывности $\mu(z)$, в соотношении (III) не обязательно $\mu_0 = \mu(z_0)$. Если $\mu_0 = 0$, то говорим также, что f *конформно по Белинскому* в точке z_0.

В параграфе 14.1, в теореме 14.1, найдены необходимые и достаточные условия конформности по Белинскому. Именно, пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ –

квазиконформное отображение с $f(0) = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) f конформно по Белинскому в нуле;

2) для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ при $\tau > 0$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(\tau\zeta)}{f(\tau)} = \zeta,$$

3) для любого $\delta > 0$ при $|z'| < \delta|z|$ и $z,\ z' \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{f(z')}{f(z)} - \frac{z'}{z} \right\} = 0,$$

4) для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ при $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z\zeta)}{f(\zeta)} = \zeta.$$

При этом, последний предел является локально равномерным относительно ζ.

В частности, при $|z'| = |z|$ из условия 3) получаем, что существует

$$\lim_{r \to 0} \frac{\max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\min\limits_{|z|=r} |f(z)|} = 1,$$

т.е. что характеристика Лаврентьева $p(0) = 1$. В этом случае естественно говорить, что отображение f конформно по Лаврентьеву в нуле. Как мы видим, из обычной конформности следует конформность по Белинскому, а из последней – конформность по Лаврентьеву, означающей геометрически, что инфинитезимальный круг с центром в нуле переходит в инфинитезимальный круг.

Однако последнее условие теоремы 14.1 гораздо сильнее условия конформности по Лаврентьеву. Из (III) мы получаем также асимптотическое *сохранение углов* между лучами, исходящими из начала в направлении соответствующих точек:

$$\lim_{z \to 0} [\arg f(z\zeta) - \arg f(z)] = \arg \zeta$$

и *сохранение модулей* инфинитезимальных колец

$$\lim_{z \to 0} \frac{|f(\zeta z)|}{|f(z)|} = |\zeta|.$$

Отметим, что последние два геометрических свойства являются *характеристическими для конформности по Белинскому.*

Как показывают пример Б.В. Шабата и

$$f(z) = ze^{i\sqrt{-\ln|z|}},$$

при конформности по Белинскому, в отличии от обычной конформности, допускаются бесконечно большие растяжения и сжатия в точке, а также переход радиальных линий в бесконечно накручивающиеся спирали.

Из пункта 2) теоремы 14.1, в частности вытекает: если $Q-$к.к. отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ имеет комплексную характеристику $\mu(z)$, аппроксимативно непрерывную в точке z_0, то f дифференцируемо по Белинскому в этой точке с $\mu_0 = \mu(z_0)$.

Напомним, что функция $\mu(z)$ *аппроксимативно непрерывна* в точке z_0, если $\mu(z) \to \mu(z_0)$ при $z \to z_0$ по некоторому измеримому множеству E, для которого $z_0 \in E$ является точкой плотности, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{mes} E \cap D(z_0; \varepsilon)}{\operatorname{mes} D(z_0; \varepsilon)} = 1,$$

где $D(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \varepsilon\}$. Как легко видеть, условие аппроксимативной непрерывности эквивалентно сходимости по мере $\mu_\tau(z) \to \mu_0 = \mu(z_0)$ при $\tau \to 0$, где

$$\mu_\tau(z) = \mu(z_0 + \tau z), \quad \tau > 0.$$

Поэтому, в силу следствия 11.9, аппроксимативная непрерывность характеристики является достаточным условием дифференцируемости отображения по Белинскому.

Учитывая то обстоятельство, что для функций из L^∞ точки аппроксимативной непрерывности совпадают с точками Лебега, предыдущее следствие можно сформулировать и по другому: если $Q-$к.к. отображение f имеет комплексную характеристику μ, удовлетворяющую условию

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \iint\limits_{|z - z_0| \le r} |\mu(z) - \mu(z_0)| \, dx \, dy = 0,$$

то f дифференцируема по Белинскому в точке z_0 с $\mu_0 = \mu(z_0)$.

Для сравнения, согласно известному результату Тейхмюллера–Виттиха–Белинского (см. [48, 86, 262, 373]), если μ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{|z - z_0| \le r} \frac{|\mu(z) - \mu_0|}{|z - z_0|^2} \, dx \, dy < \infty,$$

то f дифференцируемо в точке z_0 по Дарбу–Штольцу и $\mu(z_0) = \mu_0$. Отметим, что (III) эквивалентно условию

$$\lim_{r\to 0} \iint\limits_{|z-z_0|\le r} \frac{|\mu(z)-\mu_0|}{|z-z_0|^2}\,dx\,dy = 0.$$

Таким образом, последнее условие является достаточным условием обычной дифференцируемости квазиконформного отображения f с характеристикой μ. Необходимые и достаточные условия такой дифференцируемости не найдены до сих пор. Дальнейшие комментарии по этому поводу смотри в следующем параграфе.

Благодаря теореме 11.3, а также пункту 2) теоремы 14.1, мы можем здесь привести необходимые и достаточные условия дифференцируемости по Белинскому: для дифференцируемости по Белинскому $Q-$к.к. отображения f в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы $F(\chi\mu_\tau) \to F(\chi\mu_0)$ при $\tau \to 0$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$, где μ_0 не обязательно равно $\mu(z_0)$. Здесь через χ обозначена характеристическая функция единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mu_\tau(z) = \mu(z_0+\tau z)$, а нелинейное преобразование F задано в теореме 11.3.

В частности, отсюда имеем: для конформности по Белинскому $Q-$к.к. отображения f в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы $F(\chi\mu_\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.

В параграфе 14.2 положительно разрешен аналог проблемы Райха–Вальчака относительно конформности по Белинскому (теорема 14.2).

В силу теоремы единственности, дифференциальные свойства квазиконформного отображения f в точке полностью определяются комплексной характеристикой μ этого отображения в окрестности данной точки.

В работе [322] была высказана гипотеза, что, каков бы ни был модуль комплексной характеристики $k(z) = |\mu(z)|$, всегда можно так подобрать ее аргумент $\arg\mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в любой наперед заданной точке плоскости $z_0 \in \mathbb{C}$. В той же работе было дано частичное решение этой проблемы. Именно, Райх и Вальчак показали, что для любой измеримой функции $\varphi(r) : (0,1) \to [0,q]$, $q < 1$, существует $Q-$к.к. отображение ($Q = (1+q)/(1-q)$) единичного круга на себя, которое конформно в нуле и комплексная характеристика которого по модулю равна $\varphi(|z|)$ п.в. (см. также [270], с. 248–249).

Полное решение указанной проблемы до сих пор не найдено. Проблема естественным образом переформулируется для конформности по

Белинскому. Поскольку при этом сохраняются многие геометрические свойства конформных отображений, перечисленные в предыдущем параграфе, следующую теорему можно также рассматривать как частичное решение и самой исходной проблемы Райха–Вальчака: если $k(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция такая, что $0 \leq k(z) \leq q < 1$, и $z_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная точка плоскости, то существует $Q-$к.к. отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с комплексной характеристикой $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $|\mu(z)| = k(z)$ п.в., которое является конформным по Белинскому в точке z_0.

Наконец, в параграфе 14.3 получена теорема 14.3, которая гласит: если квазиконформное отображение f конформно по Белинскому в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, где $f(z_0) \neq \infty$, то

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ln |f(z) - f(z_0)|}{\ln |z - z_0|} = 1.$$

В частности, если комплексная характеристика $\mu(z)$ квазиконформного отображения $f(z)$ аппроксимативно непрерывна в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, где $f(z_0) \neq \infty$, и $\mu(z_0) = 0$, то имеет место последнее соотношение.

На основе теоремы 14.3 доказывается, к примеру, теорема существования и представления решений с особенностями логарифмического типа для одного из основных уравнений математической физики (предложение 14.3).

Кроме того, часть III книги содержит несколько приложений. Их функциональное назначение различно. Если вспомогательный материал приложений А и Б используется при доказательстве основных результатов, то приложения В и Г предназначены для распространения этих результатов на более общие классы отображений.

В приложении А вкратце изложена теория инвариантно-выпуклых множеств, о которой уже шла речь перед формулировкой теоремы 11.2.

В приложении Б приводится теория так называемых измеримых семейств множеств $M(z)$. Автору третьей части монографии принадлежит только специальные результаты этой теории, связанные с теорией инвариантно-выпуклых множеств, такие как измеримость inv со $M(z)$ и inv ext $M(z)$.

В приложении В излагается теория абстрактных пространств со сходимостями, восходящая к Фреше (1906) и Урысону (1924). Основная часть этого приложения посвящена так называемому ядерному пространству, состоящему из открытых множеств произвольного топологического пространства и наделенному сходимостью к ядру. При весьма общих предположениях доказана секвенциальная компактность этого про-

странства. В частности, доказана секвенциальная компактность ядерных пространств произвольных топологических многообразий.

В приложении Г введено понятие голоморфного оператора, которое позволяет переносить доказанные в диссертации теоремы на отображения, внутренние по Стоилову. Главное внимание здесь уделено анализу поведения точек ветвления, а также радиусов листности и инъективности при локально равномерной сходимости отображений. Отметим также, что предыдущее приложение и известная теория униформизации позволяют переносить эти теоремы на отображения с переменными областями определения, которые заданы на произвольных римановых поверхностях.

Глава 11

ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ

Данная глава является базовой для всей третьей части книги. Именно на основе теорем сходимости, полученных в ней, в последующих главах будут исследованы проблемы компактности различных классов квазиконформных отображений и их обобщений.

В §11.1 доказан один из основных результатов данной части книги – теорема 11.1 о полунепрерывности дилатации гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$. Главное следствие этой теоремы – обобщение неравенства Штребеля на случай локально суммируемой верхней границы дилатации (следствие 11.5).

На этой основе в §11.2 получена вторая теорема сходимости об области значений и множестве хорошей аппроксимации предельной комплексной характеристики для $Q(z)-$квазиконформных отображений с локально суммируемой границей $Q(z)$. В качестве следствий приведены усиления и распространения известных теорем сходимости Штребеля и Берса – Боярского на локально суммируемый случай (следствия 11.6–11.8).

Наконец, в §11.3, в терминах преобразования Фурье комплексных характеристик найдены необходимые и достаточные условия сходимости нормированных $Q(z)-$квазиконформных отображений плоскости в случае, когда $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере (теорема 3). Наиболее просто этот критерий формулируется для $Q-$квазиконформных отображений, комплексные характеристики которых имеют компактный носитель (следствие 11.12). Приведены также достаточные условия локально равномерной сходимости отображений, которые сводятся к сходимости характеристик по мере (следствие 11.9). Построены различные метрики, генерирующие локально равномерную сходимость.

11.1. О полунепрерывности деформации гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$

Основной целью данного параграфа является доказательство полунепрерывности дилатации (теорема 11.1).

С этой целью в пункте 1 приведены общие свойства гомеоморфизмов класса Соболева. В частности, сформулирована знаменитая лемма Геринга–Лехто–Меньшова. Здесь же доказаны утверждения о предельном переходе (предложение 11.1) и эквивалентности гомеоморфизмов класса Соболева и класса $\mathcal{ACL}$ (предложение 11.2) при локальной суммируемости дилатаций.

Основной результат – теорема о полунепрерывности в среднем дилатации гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$ – сформулирован в пункте 2. Приводятся также следствия этой теоремы (следствия 11.1–11.5). Отметим, что последнее следствие распространяет известное неравенство Штребеля из теории квазиконформных отображений на локально суммируемый случай. Это следствие лежит в основе дальнейших рассмотрений §§11.2–11.3.

Пункт 3 содержит основную лемму (лемма 11.1) и следствия из нее (предложения 11.3, 11.4). В этих теоремах приводятся некоторые неравенства для комплексных характеристик и дилатаций, которые имеют место в любой точке дифференцируемости предельного отображения и, в силу леммы Геринга–Лехто–Меньшова, почти всюду.

Наконец, используя эти неравенства, в пункте 4 мы проводим доказательство теоремы 11.1. При этом, основная идея доказательства базируется на применении покрытий Витали.

1. О гомеоморфизмах класса Соболева. Пусть D – некоторая область комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ принадлежит классу Соболева, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$. Как известно, функции f класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ абсолютно непрерывны на линиях ($f \in \mathcal{ACL}$), то есть на почти всех горизонтальных и вертикальных линиях f абсолютно непрерывны по x и y, соответственно. Такие функции f – имеют почти всюду обычные частные производные f_x и f_y, которые п.в. совпадают с их обобщенными производными (см., напр., [296], с. 41, [16], с.31).

Всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f, который п.в. обладает частными производными, удовлетворяет уравнению Бельтрами:

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{11.1}$$

где $\mu : D \to \mathbb{C}$ – некоторая измеримая функция с

$$|\mu(z)| \leq 1 \quad \text{п.в.} \tag{11.2}$$

и, как обычно, $f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2,\ f_z = (f_x - if_y)/2,\ z = x + iy$ (см. [270], с. 10). Полагая $\mu(z) = 0$ при $f_z = f_{\overline{z}} = 0$, мы устраняем связанную с этим случаем неопределенность. Функцию $\mu(z)$ принято назвать комплексной характеристикой отображения f.

В силу леммы Геринга–Лехто–Меньшова (см., напр., [285] и [16], с.28) любой гомеоморфизм f, обладающий п.в. частными производными, является п.в. дифференцируемым в смысле Дарбу–Штольца:

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\overline{z}} \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|). \tag{11.3}$$

Отметим, что в случае отсутствия гомеоморфности $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ обладает п.в. дифференциалом, вообще говоря, только при $p > 2$ (см. [71], теорема 1.3). Доказательство этого факта базируется на известном критерии Радамахера–Степанова о дифференцируемости функции п.в.

В точках дифференцируемости существуют производные по любому направлению α:

$$\partial_\alpha f = f_z + f_{\overline{z}} e^{-2i\alpha}. \tag{11.4}$$

Как легко видеть,

$$\max_{\alpha \in [0,2\pi)} |\partial_\alpha f| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|, \tag{11.5}$$

$$\min_{\alpha \in [0,2\pi)} |\partial_\alpha f| = |f_z| - |f_{\overline{z}}|. \tag{11.6}$$

Поэтому величину

$$p(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{11.7}$$

принято именовать дилатацией или деформацией отображения f в точке z (см. [48], с.7).

Точка дифференцируемости называется регулярной точкой отображения f, если его якобиан в этой точке отличен от нуля:

$$J(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0. \tag{11.8}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием того, что гомеоморфизм, обладающий хотя бы одной регулярной точкой, сохраняет ориентацию, является положительность якобиана во всех регулярных точках ([270], с. 10).

Нерегулярные точки могут быть трех видов. Если f недифференцируемо в точке z_0, то эту точку мы будем называть нерегулярной точкой 1-го рода. Если же f дифференцируемо в точке z_0, но $|f_z| = |f_{\overline{z}}| \neq 0$, то точку z_0 назовем нерегулярной точкой 2-го рода. Наконец, если f дифференцируемо в точке z_0 и $|f_z| = |f_{\overline{z}}| = 0$, то z_0 называется нерегулярной точкой 3-го рода.

Во всякой регулярной точке z бесконечно малый эллипс с отношением полуосей (11.7) и углом

$$\Theta(z) = \frac{1}{2}\arg\mu(z) + \frac{\pi}{2} \tag{11.9}$$

между большой его осью и действительной осью переходит в бесконечно малую окружность (при $\mu(z) = 0$ полагаем для определенности $\Theta(z) = \frac{\pi}{2}$). Величины $p(z)$ и $\Theta(z)$ принято называть первой и, соответственно, второй характеристиками Лаврентьева, который в работе [246] впервые ввел для квазиконформных отображений термин "характеристики".

Условимся считать соотношения (11.7) и (11.9) определяющими для $p(z)$ и $\Theta(z)$ и в нерегулярных точках дифференцируемости отображения f. Таким образом, если $f_z = f_{\overline{z}} = 0$, то $\mu(z) = 0,\ p(z) = 1, \Theta(z) = \frac{\pi}{2}$. Если же $|f_z| = |f_{\overline{z}}| \neq 0$, то $|\mu(z)| = 1$ и $p(z) = \infty$, соответственно. Итак, по определению значения величины $p(z)$ лежат на отрезке $I = [1, \infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Отметим также, что гомеоморфизмы f класса Соболева могут не быть абсолютно непрерывными и потому

$$\iint\limits_B J(z)\,dx\,dy \leq S(f(B)), \tag{11.10}$$

где равенство может не достигаться на некоторых борелевских множествах B (см. [270], с. 137). Но это имеет место локально, если $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ ([270], с.158).

Предложение 11.1. *Пусть $f_n : D \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots,$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и пусть $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно, где $f : D \to \mathbb{C}$. Если неопределенные интегралы их дилатаций $p_n(z)$ локально равностепенно абсолютно непрерывны, то $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и $(f_n)_z \to f_z,\ (f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо в L^1_{loc}. В частности, это выполнено, когда $p_n(z),\ n = 1, 2, \ldots,$ имеют локально суммируемую мажоранту $p_0(z)$.*

Доказательство. Обобщенные производные f_z и $f_{\overline{z}}$ единственны (см., напр., теорему 2.3.1 в [296]). В силу определения обобщенных производных и критерия слабой компактности в L^1 (см., напр., следствие IV.8.11 в [168]), достаточно показать, что неопределенные интегралы функций $(f_n)_z$ и $(f_n)_{\overline{z}}$ локально равностепенно абсолютно непрерывны. Пусть C – компакт в D и пусть U – открытое множество, такое, что $C \subset U$ и $\overline{U} \subset D$ – компакт. Заметим, что п.в.

$$|(f_n)_z| \leq |(f_n)_z| + |(f_n)_{\overline{z}}| = p_n^{1/2}(z) J_n^{1/2}(z) \tag{11.11}$$

и по неравенству Шварца (см. [387], с. 161):

$$\left(\iint\limits_C |(f_n)_z| dx\, dy\right)^2 \leq \iint\limits_C p_n(z) dx\, dy \iint\limits_C J_n(z) dx\, dy.$$

Кроме того, в силу (11.10)

$$\limsup_{n\to\infty} \iint\limits_C J_n(z) dx\, dy \leq S(f(U)).$$

Сопоставляя два последних неравенства, получим нужную оценку. □

Замечание 11.1. *В частности, если неопределенные интегралы от* $\Phi(p_n(z))$ *локально равностепенно абсолютно непрерывны для некоторой неубывающей выпуклой функции* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $\Phi \not\equiv const$, *то* $p_n(z)$ *также локально равностепенно абсолютно непрерывны.*

Действительно, для такой функции Φ при $t > T : t/\Phi(t) < C < \infty$ (см. [78], с. 63, [213], с. 15). Поэтому, если на некотором измеримом множестве E,

$$\iint\limits_E \Phi(p_n(z)) dx\, dy \leq M < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\iint\limits_E p_n(z) dx\, dy \leq C\, M + T \operatorname{mes} E, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Предложение 11.2. *Пусть* f *– сохраняющий ориентацию гомеоморфизм класса* $\mathcal{ACL}$ *с локально суммируемой дилатацией* $p(z)$. *Тогда* f *принадлежит классу Соболева.*

Действительно, в силу неравенств (11.10), (11.11) и неравенства Шварца

$$\iint\limits_\Omega |f_z| dx\, dy \leq S^{1/2}(f(\Omega)) \left(\iint\limits_\Omega p(z)\, dx\, dy\right)^{1/2} \tag{11.12}$$

для любого достаточно малого круга Ω с центром в данной точке $z_0 \in D$. Следовательно, $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ (см. [296], с. 42).

Как уже отмечалось в начале этого пункта, верно и обратное заключение. Таким образом, в случае локальной суммируемости дилатации гомеоморфизма, $f \in \mathcal{ACL} \Longleftrightarrow f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.

2. О полунепрерывности дилатации. Функцию $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем называть выпуклой, если для любых $t_1,\ t_2 \in I = [1, \infty],\ \lambda \in [0, 1]$,

$$\Phi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \le \lambda\Phi(t_1) + (1 - \lambda)\Phi(t_2). \tag{11.13}$$

При этом, мы условимся в соответствии с теорией интеграла, что $0 \cdot \infty = 0$ (см., напр., [360], с. 18).

Теорема 11.1. *Пусть f и $f_n : D \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots,$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса $\mathcal{ACL}$ и пусть $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно. Тогда на любом открытом множестве $\Omega \subseteq D$:*

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p(z))\, dx\, dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(z))\, dx\, dy \tag{11.14}$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t \tag{11.15}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty. \tag{11.16}$$

Отметим, что при $Q < \infty$ условие (11.16) автоматически выполняется. Кроме того, в силу (11.13), функция Φ в условиях теоремы является обычной (конечной) выпуклой функцией на полуоткрытом интервале $[1, Q)$ и $\Phi(t) \equiv \infty$ при $t > Q$.

Замечание 11.2. *Выпуклая на $[1, Q)$ функция $\Phi(t)$ непрерывна на $(1, Q)$ и $\Phi(1 + o) \le \Phi(1)$ (см., [78], с. 60, 66). Таким образом, в условиях теоремы, $\Phi(t)$ непрерывна на $[1, Q)$. Более того, она непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ на отрезке $[1, Q]$ и $\Phi(t) \equiv \infty$ при $t > Q$.*

Следствие 11.1. *В частности, если отклонения деформации от единицы $[p_n(z) - 1]$ принадлежит классу Орлича $L_\varphi(\Omega)$ для некоторой $N-$функции φ равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots,$ то отклонение $[p(z) - 1]$ принадлежит тому же классу Орлича.*

Напомним, что функция $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ называется $N-$функцией, если она строго возрастает на $\mathbb{R}^+$, выпукла, четна, удовлетворяет (11.16) и

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0. \tag{11.17}$$

Здесь мы доопределяем $\Phi(+\infty) = +\infty$. Функция $\Psi(z) : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Орлича $L_\Phi(\Omega)$, если

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(\Psi(z))dx\,dy \le M < \infty \tag{11.18}$$

(см. [213], с. 16–19, 76.)

Следствие 11.2. *Для любого $\gamma > 0$:*

$$\iint\limits_{\Omega} e^{\gamma p(z)}dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint e^{\gamma p_n(z)}dx\,dy. \tag{11.19}$$

Следствие 11.3. *Для любого $\alpha > 1$:*

$$\iint\limits_{\Omega} p^{\alpha}(z)dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} p_n^{\alpha}(z)dx\,dy. \tag{11.20}$$

Следствие 11.4. *Пусть функция $p_0(z) : \mathbb{C} \to I$ такова, что $p_0(z) - 1$ принадлежит некоторому классу Орлича $L_\varphi(\Omega)$. Если $p_n(z) \le p_0(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $p(z) \le \limsup\limits_{n\to\infty} p_n(z)$ п.в.*

Этот факт следует из (11.14) для $\Phi(t) = \varphi(t-1),\ t \in I = [1, \infty]$. Действительно, по теореме Лебега о почленном интегрировании (см. [360], с. 50):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{E} \Phi(p_n(z))dx\,dy \le \iint\limits_{E} \overline{\lim_{n\to\infty}} \Phi(p_n(z))\,dx\,dy$$

и из (11.14) получаем

$$\iint\limits_{E} \Phi(p(z))dx\,dy \le \iint\limits_{E} \Phi(\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n(z))\,dx\,dy$$

для любого открытого подмножества $E \subseteq \Omega$. По теореме о дифференцировании неопределенного интеграла имеем

$$\Phi(p(z)) \le \Phi\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n(z)\right)$$

для п.в. $z \in \Omega$ (см. [360], с. 180). Отсюда приходим к заключению следствия 11.4.

Следствие 11.5. *Пусть функция $p_0(z) : \mathbb{C} \to I$ локально суммируема и п.в.*

$$p_n(z) \le p_0(z), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{11.21}$$

Тогда

$$p(z) \le \limsup_{n\to\infty} p_n(z) \quad \text{п.в.} \tag{11.22}$$

В частности, отсюда следует, что деформация предельного отображения также локально суммируема.

Последнее следствие получается из предыдущего, если учесть, что каждая суммируемая на каком-либо круге Ω функция $\psi(z)$ принадлежит некоторому классу Орлича $L_\varphi(\Omega)$ (см. [213], с. 76–77).

Неравенство (11.22) хорошо известно в теории квазиконформных отображений. Оно было доказано Штребелем [409] в предположении, что п.в.

$$p_n(z) \le K < \infty, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{11.23}$$

Как видим, здесь неравенство Штребеля обобщается на деформации с локально суммируемой мажорантой.

3. Основная лемма. Доказательство теоремы 1 базируется на следующей лемме и следствиях из нее.

Лемма 11.1. *В условиях теоремы 1 п.в.*

$$p(z) \le \varlimsup_{h\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta) d\xi\, d\eta, \tag{11.24}$$

где $K(z;h)$ – квадрат с центром в точке z и длиной стороны h, одна из сторон которого повернута под углом $\Theta(z)$ – второй характеристики Лаврентьева отображения f в точке z. Неравенство (11.24) имеет место по крайней мере во всех точках дифференцируемости отображения f.

Предложение 11.3. *В условиях и обозначениях леммы 1.1. п.в.*

$$\Phi(p(z)) \le \varlimsup_{h\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p_n(z)) d\xi\, d\eta \tag{11.25}$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке Q из (11.15).

Предложение 11.4. *Пусть в условиях и обозначениях предыдущего предложения* $\Phi \not\equiv const$ *и*

$$\liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta = M < \infty \tag{11.26}$$

на некотором открытом множестве $\Omega \subseteq D$. *Тогда функция* $p(z)$ *п.в. конечна на* Ω *и* $p(z) \le Q$ *для п.в.* $z \in \Omega$.

В дальнейшем мы используем интегральное неравенство Иенсена для выпуклых функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi\left(\int t\, d\nu(t)\right) \le \int \varphi(t)d\nu(t), \tag{11.27}$$

где ν – произвольная вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Эта формула естественным образом распространяется на выпуклые функции $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$. Далее, если $g(z) : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – произвольная измеримая по Лебегу функция, а $E \subseteq \mathbb{C}$ – измеримое множество с $0 < \operatorname{mes} E < \infty$, то отсюда по известной теореме о замене переменной (см. [385], с. 161) получаем неравенство

$$\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint\limits_{E} g(z)dx\, dy\right) \le \frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint\limits_{E} \varphi(g(z))dx\, dy, \tag{11.28}$$

которое также принято называть интегральным неравенством Иенсена (см., напр., [213], с. 78).

Приведем также еще одну простенькую лемму, которая фактически является переформулировкой леммы Фату (см., [360], с. 50) для рядов.

Лемма 11.2. *Пусть* $a_{mn} \ge 0,\ m, n = 1, 2, \ldots,$ – *двойная последовательность неотрицательных чисел. Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{mn} \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{11.29}$$

Если a_{mn} *могут быть отрицательными, то для выполнения* (11.29) *достаточно дополнительно потребовать, чтобы* $|a_{mn}| \le b_m$, *где* $\sum b_m < \infty$.

Действительно, случай рядов редуцируется к интегральному случаю через ступенчатые функции

$$\varphi_n(t) = 2^m a_{mn}, \quad \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k} \le t < \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}, \quad m = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots,$$

заданные на отрезке $[0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.1. Итак, пусть во всех точках дифференцируемости $\varphi(z;dz)=f_z dz+f_{\overline{z}}\overline{dz}$ и $\varphi_n(z;dz)=(f_n)_z dz+(f_n)_{\overline{z}}\overline{dz},\ dz\in\mathbb{C}$. Обозначим через E множество всех точек дифференцируемости f, в которых $|f_z|+|f_{\overline{z}}|>0$. Отметим, что $p(z)=1$ и неравенство (11.24) автоматически выполняется, если $f_z=f_{\overline{z}}=0$.

По определению дифференциала, в каждой точке $z\in E$ для любого $\varepsilon>0$ при $h<\delta=\delta(\varepsilon,z)$ и всех $\zeta\in K(z;h)$:

$$|f(\zeta)-f(z)-\varphi(z;\zeta-z)|<h\varepsilon$$

и при $n>N=N(h)$:

$$|f_n(\zeta)-f(z)-\varphi(z;\zeta-z)|<h\varepsilon, \tag{11.30}$$

т.е. $f_n(\zeta)$ находится в прямоугольнике с центром в точке $f(z)$ и длинами сторон $(|f_z|+|f_{\overline{z}}|+2\varepsilon)\,h$ и $(|f_z|-|f_{\overline{z}}|+2\varepsilon)\,h$, соответственно. Таким образом, площадь образов квадратов $f_n(K(z;h))$ при $n>N$ не превышает $(|f_z|+|f_{\overline{z}}|+2\varepsilon)\cdot(|f_z|-|f_{\overline{z}}|+2\varepsilon)\,h^2$. В силу (11.10) отсюда имеем при $h<\delta(\varepsilon,z)$ и $n>N(h)$:

$$\iint\limits_{K(z;h)} J_n(\zeta)d\xi\,d\eta\le\left[J(z)+4\varepsilon\left(|f_z|+\varepsilon\right)\right]h^2. \tag{11.31}$$

Обозначим через $l_n(v),\ -h/2\le v\le h/2$, длину образа отрезка из квадрата $K(z;h)$ при отображении f_n, заданного параметрически $z+ie^{i\Theta}(u+iv),\ -h/2\le u\le h/2$, где $\Theta(z)$ – вторая характеристика Лаврентьева для отображения f в точке z. Поскольку $f_n\in\mathcal{ACL},\ n=1,2,\ldots$, то для п.в. $v\in[-h/2,h/2]$ и всех $n=1,2,\ldots$,

$$l_n(v)=\int\limits_{-h/2}^{h/2}|\varphi_n\left(z+ie^{i\Theta(z)}(u+iv);ie^{i\Theta(z)}\right)|\,du.$$

В силу (11.30) имеем оценку снизу:

$$l_n(v)\ge|\varphi(z;i\,h\,e^{i\Theta(z)})|-2h\varepsilon=(|f_z|+|f_{\overline{z}}|-2\varepsilon)\,h.$$

Интегрируя последнее неравенство по v, из теоремы Фубини (см., [360], с. 120), получаем:

$$(|f_z|+|f_{\overline{z}}|-2\varepsilon)\,h^2\le\iint\limits_{K(z;h)}|\varphi_n\left(\zeta;ie^{i\Theta(z)}\right)|d\xi\,d\eta.$$

Если $p_n(\zeta)$ п.в. конечна в квадрате $K(z;h)$ и суммируема на нем, то отсюда, в силу неравенства треугольника, соотношений (11.11) и (11.31), а также неравенства Шварца заключаем, что

$$\frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|-2\varepsilon}{\{J(z)+4\varepsilon(|f_z|+\varepsilon)\}^{1/2}} \le \frac{1}{h}\left\{\iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)d\xi\,d\eta\right\}^{1/2}. \tag{11.32}$$

Если же интеграл справа бесконечен, то последнее неравенство становится очевидным.

Переходя в неравенстве (11.32) к пределу сначала по $n\to\infty$, затем по $h\to 0$ и, наконец, по $\varepsilon\to 0$, приходим к неравенству (11.24). □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 11.3. В силу замечания 11.2 из (11.24) имеем:

$$\Phi(p(z)) \le \varlimsup_{h\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{1}{h^2}\iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)d\xi\,d\eta\right).$$

Отсюда и из интегрального неравенства Иенсена (11.28) немедленно получаем (11.25). □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 11.4. В силу предыдущего предложения при почти всех $z\in\Omega$ для любого $\varepsilon>0$ и любого $h<\delta=\delta(\varepsilon,z)$:

$$\Phi(p(z)) < \frac{M}{h^2}+\varepsilon<\infty. \tag{11.33}$$

Следовательно, $p(z)\le Q$ для почти всех $z\in\Omega$. Если $Q=\infty$, то $\Phi(Q)=\infty$, поскольку $\Phi\not\equiv const$. Но тогда $p(z)<Q=\infty$ п.в. Если $Q<\infty$, то тем более $p(z)<\infty$ п.в. □

4. Доказательство теоремы 11.1. Если правая часть в (11.14) бесконечна, то доказывать нечего. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем (11.26).

1) При $\Phi(Q)<\infty$ функция $\Phi(p(z))$ по предложению 11.4 локально суммируема в Ω. Тогда по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\iint\limits_{K(z;h)}\Phi(p(\zeta))d\xi\,d\eta=\Phi(p(z))\quad\text{п.в.}$$

(см. [360], с. 180) и по предложению 11.3 имеет место (11.25) для $z \in E$, где $\operatorname{mes}\Omega \setminus E = 0$. Таким образом, в каждой точке $z \in E$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$

$$\iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p(\zeta))d\xi\, d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta + \varepsilon h^2,$$

где $K(z;h) \subseteq \Omega$ из предложения 11.3.

Система квадратов $K(z;h),\ z \in E,\ h < \min(\rho(z,\partial\Omega)/\sqrt{2}, \delta(\varepsilon,z))$, образует покрытие множества E в смысле Витали и по теореме Витали (см. [360], с. 167) можно выбрать не более чем счетную последовательность непересекающихся квадратов $E_m = K(z_m; h_m)$ из указанного покрытия такую,что $\operatorname{mes}(E \setminus \cup E_m) = 0$. По построению $E_m \subseteq \Omega$ и, следовательно, $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \cup E_m) = 0$, $\operatorname{mes}\Omega = \sum \operatorname{mes} E_m$.

Из счетной аддитивности интеграла (см. [360], с. 49), а также леммы 11.2. применительно к

$$a_{mn} = \iint\limits_{E_m} \Phi(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta, \quad m,\, n = 1,\, 2,\, \dots\,,$$

получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p(\zeta))d\xi\, d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta + \varepsilon \operatorname{mes}\Omega$$

и в силу произвола $\varepsilon > 0$ приходим к (11.14) для ограниченных Ω.

2) При $\Phi(Q) = \infty$ найдется монотонно возрастающая последовательность $t_m \in (1, Q),\ m = 1,\, 2,\, \dots$, такая, что $t_m \to Q$ при $m \to \infty$ и $\Phi(t)$ дифференцируема в каждой точке t_m, $\Phi'(t_m) > 0$ (см. [78], с. 61). Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \le t_m, \\ \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m), & t \ge t_m; \end{cases}$$

и

$$\varphi_m(\tau) = \begin{cases} \tau, & \tau \le \Phi(t_m), \\ \Phi(\alpha_m + \beta_m\tau), & \tau \ge \Phi(t_m); \end{cases}$$

где коэффициенты

$$\begin{cases} \alpha_m = t_m - \Phi(t_m)/\Phi'(t_m) \\ \beta_m = 1/\Phi'(t_m) \end{cases}$$

находятся из условия

$$\alpha_m + \beta_m \left[\Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m)\right] \equiv t$$

и, таким образом, по построению:

$$\varphi_m(\Phi_m(t)) \equiv \Phi(t), \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{11.34}$$

Как легко видеть, все функции Φ_m и φ_m являются выпуклыми и неубывающими (см. [78], с. 63) и в силу (11.16)

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\varphi_m(\tau)}{\tau} = \infty. \tag{11.35}$$

Кроме того, последовательность Φ_m монотонно возрастает и стремится к Φ при $m \to \infty$ поточечно.

Легко доказать суммируемость функций $\Phi_m(p\,(z))$, $m = 1, 2, \ldots$, для ограниченных Ω. Действительно, в силу (11.26), (11.28) и (11.34) для любого $E \subseteq \Omega$ с $\operatorname{mes} E > 0$ можно считать, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $M_* = M + \varepsilon$:

$$\varphi_m\left(\frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint\limits_E \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi\,d\eta\right) \le \frac{M_*}{\operatorname{mes} E} < \infty. \tag{11.36}$$

Если $Q < \infty$, то из (11.35) и (11.36) получаем, что

$$\frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint\limits_E \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi\,d\eta \le Q_m = \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(Q - t_m)$$

и по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла $\Phi_m(p_n(z)) \le Q_m$, m, $n = 1, 2, \ldots$, для п.в. $z \in \Omega$. В силу предложения 11.3, таким образом, $\Phi_m(p\,(z)) \le Q_m$ и суммируемость $\Phi_m(p(z))$ становится очевидной.

Если $Q = \infty$, то в силу (11.35) и (11.36)

$$\iint\limits_E \Phi_m(p_n(\zeta))\,d\xi\,d\eta \le M_*\frac{\tau}{\varphi_m(\tau)} \to 0,$$

где $\tau = \varphi_m^{-1}(M_*/\operatorname{mes} E) \to \infty$ при $\operatorname{mes} E \to 0$. Кроме того,

$$\|\Phi_m(p_n)\|_{L^1(\Omega)} \le \operatorname{mes}\Omega\,\varphi_m^{-1}(M_*/\operatorname{mes}\Omega).$$

Таким образом, последовательность $\Phi_m(p_n),\ n = 1, 2, \ldots$, слабо компактна в $L^1(\Omega)$ (см. [168], с. 317, 377). Поэтому можно считать, что $\Phi_m \to \Psi_m \in L^1(\Omega)$ слабо в $L^1(\Omega)$ при $n \to \infty$. По предложению 11.3 и теореме о дифференцировании неопределенного интеграла $\Phi_m(p(z)) \le \Psi_m(z)$ для п.в. $z \in \Omega$ и, следовательно, $\Phi_m(p) \in L^1(\Omega)$.

Поэтому, в точности повторяя рассуждения первого пункта доказательства применительно к каждой из функций $\Phi_m,\ m = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi_m(p(\zeta))d\xi\, d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta.$$

По теореме Лебега об интегрировании монотонной последовательности функций (см. [360], с. 48):

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi_m(p\,(\zeta))d\xi\, d\eta = \iint\limits_{\Omega} \Phi(p\,(\zeta))d\xi\, d\eta,$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta = \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta.$$

Остается только заметить, что двойная последовательность чисел

$$a_{mn} = \iint\limits_{\Omega} \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi\, d\eta$$

монотонно возрастает по m и потому, см. лемму 11.2,

$$\lim_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} a_{mn} \le \varlimsup_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}. \tag{11.37}$$

Это приводит нас к соотношению (11.14) в случае ограниченных Ω.

3) Наконец, устраивая исчерпание $\Omega_m = \{z \in \Omega : |z| < m\},\ m = 1, 2, \ldots$, и применяя неравенство (11.37) к другой двойной последовательности

$$a_{mn} = \iint\limits_{\Omega_m} \Phi(p_n(\zeta))d\zeta\, d\eta = \iint\limits_{\Omega} \chi_m(\zeta)\Phi(p_n(\zeta))\ d\zeta\, d\eta, \tag{11.38}$$

где χ_m – характеристические функции множеств Ω_m, по упомянутой теореме Лебега получаем (11.14) в общем случае. □

11.2. Об области значений предельной комплексной характеристики.

Параграф содержит теорему 11.2 об области значений и множестве хорошей аппроксимации предельной комплексной характеристики для гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$ с локально суммируемой верхней границей дилатаций.

Пункт 1 включает формулировку теоремы и следствий из нее, которые усиливают и обобщают известные теоремы сходимости Штребеля и Берса–Боярского (следствия 11.6–11.8).

Пункт 2 содержит доказательство первой части теоремы 11.2 об области значений.

В пункт 3 вошли так называемые основные леммы.

Наконец, в пункте 4 проведено доказательство второй части теоремы 11.2 о множестве хорошей аппроксимации.

1. Теоремы сходимости для $Q(z)$-квазиконформных отображений. Аналогично работе [403], сохраняющий ориентацию гомеоморфизм класс $\mathcal{ACL}$ будем называть $Q(z)-$квазиконформным ($Q(z)-$к.к.) отображением, если его деформация $p(z) \le Q(z)$ п.в., где $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ – произвольная функция.

Теорема 11.2. *Пусть $f_n : D \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность $Q(z)-$к.к. отображений с локально суммируемой $Q(z)$ и $f_n \to f$ л.р., где $f : D \to \mathbb{C}$ – некоторый гомеоморфизм. Тогда f также является $Q(z)-$к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1_{\rm loc}$. Кроме того, для почти всех $z \in E'$*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv} \operatorname{co} M(z) \tag{11.39}$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на

$$E_0 = \{z \in E' : \mu(z) \in \operatorname{inv} \operatorname{ext} M(z)\}, \tag{11.40}$$

где E' – множество всех регулярных точек отображения f и

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\mu_n(z)\}. \tag{11.41}$$

Здесь, как обычно, через $\operatorname{Ls}\{\mu_n(z)\}$ обозначен верхний топологический предел одноточечных множеств $\{\mu_n(z)\}$, т.е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$ (см. [229], с. 344).

В работе [409] Штребель установил, что при локально равномерной сходимости $Q(z)-$к.к. отображений, когда $Q(z) \equiv Q < \infty$:

$$|\mu(z)| \le \limsup_{n\to\infty} |\mu_n(z)| \quad \text{п.в.} \tag{11.42}$$

и на множестве

$$\mathcal{E}_0 = \{z : |\mu(z)| = \limsup_{n\to\infty} |\mu_n(z)|\} \tag{11.43}$$

можно выбрать подпоследовательность $\mu_n(z)$, которая сходится п.в. к $\mu(z)$.

Из теоремы 11.2 мы получаем обобщение теоремы сходимости Штребеля:

Следствие 11.6. *В условиях теоремы 11.2 имеет место (11.42) и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на множестве $\mathcal{E}_0$.*

В случае одноточечных множеств $M(z)$ из теоремы 11.2 также получается обобщение теоремы сходимости Берса–Боярского (см., напр., [57, 71, 270]).

Следствие 11.7. *Пусть в условиях теоремы 11.2 $\mu_n(z) \to \varkappa(z)$ п.в. при $n \to \infty$. Тогда $\mu_n(z) = \varkappa(z)$ п.в. на E'.*

Следствие 11.8. *Пусть в условиях теоремы 11.2 $\mu_n(z) \to \varkappa(z)$ при $n \to \infty$ на некотором измеримом множестве $E \subseteq E'$ по норме L_p, $1 \le p \le \infty$, просто по мере или п.в. Тогда $\mu(z) = \varkappa(z)$ п.в. на E.*

Аналогично [270] будем говорить, что f_n *хорошо аппроксимирует* f на множестве E, если $f_n \to f$ л.р. и $\mu_n \to \mu$ по мере на E. Здесь, как обычно, если $\operatorname{mes} E = \infty$, под сходимостью по мере на множестве E понимается таковая на любом подмножестве $\mathcal{E} \subseteq E$ с $\operatorname{mes}\mathcal{E} < \infty$ (см., напр., [202], с. 57).

Как видим из теоремы 11.2, f_n хорошо аппроксимирует f на множестве E_0. Можно показать (см., напр., [353]), что это – наиболее широкое множество, на котором гарантируется хорошая аппроксимация.

2. Доказательство первой части теоремы 11.2. Все утверждения теоремы за исключением утверждений о хорошей аппроксимации на множестве E_0 доказываются легко.

Действительно, непосредственно по предложениям 11.1 и 11.2 и следствию 11.5 f является $Q(z)-$к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$ и $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ слабо в L^1_{loc}. Остается доказать (11.39).

В силу следствия A2 п.в.

$$\operatorname{inv\,co}\, M(z) = \bigcap_{m\in N(z)} K_m, \tag{11.44}$$

где K_m, $m = 1, 2, \ldots,$ – некоторая перенумерация всех замкнутых кругов из Δ, координаты центров и радиусы которых являются рациональными числами, а $N(z)$ – множество всех натуральных чисел $m = 1, 2, \ldots,$

для которых $M(z) \subseteq K_m$. Поэтому достаточно показать, что $\mu(z) \in K_m$ при всех $m \in N(z)$ для почти всех $z \in E'$.

Пусть c_m и k_m – центр и радиус круга K_m в гиперболической метрике Δ (см., напр., [316], с. 128–129). Тогда при помощи дробно-линейного отображения Δ на себя

$$\gamma_m(\mu) = \frac{\mu - c_m}{1 - \mu\overline{c_m}} \tag{11.45}$$

круг K_m преобразуется в некоторый круг с центром в нуле. Евклидов радиус этого круга обозначим через r_m.

Рассмотрим теперь аффинные преобразования плоскости:

$$z_m(\zeta) = \zeta - c_m\overline{\zeta}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

которые одновременно являются Q_m−квазиконформными отображениями $\mathbb{C}$ на себя, где $Q_m = (1 + |c_m|)/(1 - |c_m|)$.

Пусть $\mu^{(m)}$ и $\mu_n^{(m)}$ – комплексные характеристики отображений $f^{(m)} = f \circ z_m$ и $f_n^{(m)} = f_n \circ z_m$, $m, n = 1, 2, \ldots$, соответственно. Поскольку для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$, очевидно, что $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ л.р. при $n \to \infty$, то по следствию 1.5

$$|\mu^{(m)}(\zeta)| \le \overline{\lim_{n\to\infty}} |\mu_n^{(m)}(\zeta)| \le r_m$$

для всех $\zeta \in E^{(m)} \setminus e^{(m)}$, где $e^{(m)}$ – некоторое подмножество нулевой меры множества $E^{(m)} = z_m^{-1}(E_m)$, а E_m – множество всех точек $z \in D$, для которых $M(z) \subseteq K_m$.

Таким образом, при каждом $m = 1, 2, \ldots$,

$$|\gamma_m(\mu(z))| \le r_m \tag{11.46}$$

для всех $z \in E' \cap E_m \setminus e_m$, где $e_m = z_m(e^{(m)})$ – множество нулевой меры (см. [16], с. 36). Пусть $E = \cup e_m$. Тогда E – множество нулевой меры и для любого $z \in E' \setminus E$ неравенство (11.46) имеет место сразу при всех $m \in N(z)$. Однако (11.46) эквивалентно при $z \in E'$ включению $\mu(z) \in K_m$ и тем самым включение (11.39) доказано для почти всех $z \in E'$.

Доказательство второй части теоремы 11.2 технически гораздо сложнее. Поэтому мы отнесем его в конец данного параграфа (пункт 5).

3. Основные леммы. Здесь мы приведем серию лемм, на которых будет базироваться доказательство второй части теоремы 11.2 о множестве хорошей аппроксимации.

Лемма 11.3. *В условиях теоремы* 11.2 *для всех регулярных точек* E' *отображения* f *выполняется неравенство*

$$\beta(\mu(z)) \le \varlimsup_{h\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \beta(\mu_n(\zeta))\, d\xi\, d\eta\,, \tag{11.47}$$

где

$$\beta(\nu) = \frac{|\nu|^2 - \operatorname{Re}\nu}{1-|\nu|^2}, \tag{11.48}$$

а $K(z;h)$ *– осепараллельный квадрат с центром в точке* z *и длиной стороны* h*.*

Замечание. Отметим, что здесь нельзя заменить выражение $\beta(\nu)$ на более простое $|\nu|^2 - \operatorname{Re}\nu$. Имеется соответствующий контрпример. Отметим также, что неравенство (11.47) равносильно неравенству

$$\frac{|1-\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2} \le \varlimsup_{h\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \frac{|1-\mu_n(\zeta)|^2}{1-|\mu_n(\zeta)|^2}\, d\xi\, d\eta\,, \tag{11.49}$$

см. тождество (11.63) ниже в доказательстве леммы 11.3.

Наконец, заметим, что неравенство (11.49), а следовательно, и неравенство (11.47), очевидно в нерегулярных точках z отображения f третьего рода.

Лемма 11.4. *В условиях теоремы 11.2*

$$\iint\limits_E \beta(\gamma(\mu(z)))dx\, dy \le \varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta(\gamma(\mu_n(z)))\, dx\, dy\,, \tag{11.50}$$

где $\gamma(\varkappa) : \Delta \to \Delta$ *– произвольное дробно-линейное отображение единичного круга* Δ *на себя,* $E \subseteq E'$ *– произвольное ограниченное измеримое множество.*

Лемма 11.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.2 *и пусть* $E \subseteq E'$ *– произвольное ограниченное измеримое множество, на котором* $Q(z) \le Q_0 < \infty$*. Тогда для функции* β *из* (11.48)

$$\varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta(\gamma_n(z)e^{-\Theta(z)})dx\, dy \ge 0, \tag{11.51}$$

где $\Theta(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *– произвольная измеримая функция,*

$$\gamma_n(z) = \gamma(z, \mu_n(z)) \tag{11.52}$$

и

$$\gamma(z,\varkappa)=\frac{\varkappa-\mu(z)}{1-\varkappa\overline{\mu(z)}} \tag{11.53}$$

– семейство дробно-линейных отображений Δ *на себя, зависящее от* z *как от параметра.*

Отсюда в качестве следствия получаем:

Предложение 11.5. *Пусть в условиях и обозначениях леммы 1.5* $E\subseteq\mathcal{E}$*, где*

$$\mathcal{E}=\{z\in D: N(z)\subseteq K(z)\}, \tag{11.54}$$

$$N(z)=\operatorname*{Ls}_{n\to\infty}\{\gamma_n(z)\}, \tag{11.55}$$

$$K(z)=\left\{\varkappa\in\mathbb{C}:\left|\varkappa-\frac{1}{2}\,e^{i\Theta(z)}\right|\le\frac{1}{2}\right\}. \tag{11.56}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_E\beta(\gamma_n(z)e^{-i\Theta(z)})\,dx\,dy=0\,. \tag{11.57}$$

В свою очередь, в силу ограниченности последовательности подынтегральных функций в (11.57), из предложения 11.5 имеем (см. [168], с. 316):

Предложение 11.6. *В условиях теоремы 2 подынтегральные функции в* (11.57) *сходятся к нулю слабо в пространстве* $L^1(E)$*.*

Прежде чем переходить к другим следствиям, мы приведем еще одну лемму, которая, с учетом критерия слабой сходимости в $L^1(E)$ (см. [168], с. 320) и критерия сходимости по мере (следствие BI), фактически является переформулировкой известной леммы из вещественного анализа (см., например, [271], с. 34):

Лемма 11.6. *Пусть* $E\subseteq\mathbb{C}$ *– произвольное измеримое множество и* φ_n, $n=1,2,\ldots,$ *– последовательность вещественнозначных функций из* $L^1(E)$*, которая сходится к функции* φ *слабо в* $L^1(E)$*. Тогда п.в. на* E

$$\liminf_{n\to\infty}\varphi_n(z)\le\varphi(z)\le\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(z). \tag{11.58}$$

При этом, если на некотором измеримом множестве в (11.58) хотя бы с одной стороны достигается равенство, то на нем $\varphi_n\to\varphi$ *по мере.*

Отсюда и из предыдущего предложения немедленно получаем:

Предложение 11.7. *В условиях теоремы 11.2 и обозначениях леммы 11.5*

$$\alpha_n(z) = |\gamma_n(z)|^2 - \operatorname{Re}\gamma_n(z)\, e^{-i\,\Theta(z)} \to 0 \tag{11.59}$$

при $n \to \infty$ по мере на множестве E из предложения 11.5. В частности, найдется подпоследовательность $\alpha_{n_k}(z) \to 0$ п.в. на E.

Это основано на следующем простом наблюдении:

Замечание 11.3. *Принадлежность $z \in \mathcal{E}$ равносильна неравенству:*

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(z) \le 0. \tag{11.60}$$

Отметим также, что $\alpha_n \to 0$ по норме $L^p(E)$, $1 < p < \infty$, в силу следствия В2. Однако, в дальнейшем мы этого не используем.

Доказательство леммы 11.3. Итак, пусть $\varphi_n(z;dz) = (f_n)_z dz + (f_n)_{\bar z}\overline{dz}$ и $\varphi(z;dz) = f_z dz + f_{\bar z}\overline{dz}$ во всех точках дифференцируемости отображений f и f_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно.

По определению дифференциала, в каждой точке $z \in E'$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$ и всех $\zeta \in K(z;h)$:

$$|f(\zeta) - f(z) - \varphi(z;\zeta - z)| < h\varepsilon$$

и, следовательно, при $n > N = N(h)$:

$$|f_n(\zeta) - f(z) - \varphi(z;\zeta - z)| < h\varepsilon. \tag{11.61}$$

Последнее означает, что точка $f_n(\zeta)/h$ находится в $\varepsilon-$окрестности параллелограмма, являющегося образом квадрата $K(z;h)$ при аффинном (по переменной ζ) отображении $(f(z)+\varphi(z;\zeta-z))/h$. Отметим, что площадь указанного параллелограмма не зависит от h и равна якобиану $J(z)$ отображения f в точке z. Площадь его $\varepsilon-$окрестности равна $J(z) + \alpha(z;\varepsilon)$, где α – бесконечно малая величина по переменной ε. В силу неравенства (11.10)

$$\iint\limits_{K(z;h)} J_n(\zeta)\, d\xi\, d\eta \le (J(z) + \alpha(z;\varepsilon))\, h^2. \tag{11.62}$$

Обозначим через $l_n(u)$, $-h/2 \le u \le h/2$, длину образа вертикального отрезка из квадрата $K(z;h)$ при отображении f_n, заданного параметрически $z+(u+iv)$, $-h/2 \le v \le h/2$. Поскольку $f_n \in \mathcal{ACL}$, $n = 1, 2, \ldots$,

то для почти всех $u \in [-h/2, h/2]$ и всех $n = 1, 2, \ldots,$

$$l_n(u) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} |\varphi_n(z + (u + iv); i)|\, dv.$$

В силу неравенства (11.61) имеем оценку этой длины снизу:

$$l_n(u) \geq \{|\varphi(z; i)| - 2\varepsilon\}h.$$

Интегрируя последнее неравенство по u, из теоремы Фубини (см. [360], с. 120), получаем:

$$\iint\limits_{K(z;h)} |\varphi_n(\zeta; i)| d\xi\, d\eta \geq \{|f_z - f_{\overline{z}}| - 2\varepsilon\}\, h^2.$$

При $\varepsilon < \varepsilon_0(z),\ z \in E'$, выражение справа положительно. Поэтому отсюда, используя неравенство (11.62), а также неравенство Шварца, для достаточно малых ε в любой фиксированной точке $z \in E'$ имеем:

$$\frac{(|f_z - f_{\overline{z}}| - 2\varepsilon)^2}{J(z) + \alpha(z; \varepsilon)} \leq \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \frac{|1 - \mu_n(\zeta)|^2}{1 - |\mu_n(\zeta)|^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Переходя здесь к пределу по $n \to \infty$, затем по $h \to 0$ и, наконец, по $\varepsilon \to 0$ приходим к неравенству

$$\frac{|1 - \mu(z)|^2}{1 - |\mu(z)|^2} \leq \varlimsup_{h \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \frac{|1 - \mu_n(\zeta)|^2}{1 - |\mu_n(\zeta)|^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Поскольку

$$\frac{|1 - \nu|^2}{1 - |\nu|^2} = 1 + 2\beta(\nu) \tag{11.63}$$

из последнего неравенства немедленно получаем (11.47). □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.4. Общий вид дробно-линейного отображения Δ на себя:

$$\gamma(\varkappa) = \frac{\varkappa - \nu}{1 - \varkappa\overline{\nu}}\, e^{i\Theta},$$

где $\nu \in \Delta \subseteq \mathbb{C}$ и $\Theta \in \mathbb{R}$ – произвольные (см., напр., [396], с. 197).

Пусть $w = A(z) = e^{i\vartheta}z + \nu e^{-i\vartheta}\overline{z}$ – аффинные $N-$к.к. отображения, где $N = (1+|\nu|)/(1-|\nu|)$, $\vartheta = \Theta/2$. Далее, пусть $g = f \circ A^{-1}$ и $g_n = f_n \circ A^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Как легко видеть, g и g_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются $B(w)-$к.к. отображениями с локально суммируемой $B(w) = NQ\left(A^{-1}(w)\right)$ и $g_n \to g$ л.р. При этом, их комплексные характеристики имеют следующий вид: $\omega = (\chi\gamma(\mu)) \circ A^{-1}$ и $\omega_n = (\chi_n\gamma(\mu_n)) \circ A^{-1}$, где χ и χ_n – характеристические функции множеств E' и E'_n.

По лемме 11.3, примененной к последовательности g_n, имеем

$$\beta(\omega(w)) \leq \varlimsup_{h\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega_n(\zeta))\, d\xi\, d\eta$$

для любой точки $w \in A(E)$, где $\zeta = \xi + i\eta$. Отметим, что $|\beta(\omega(w))| \leq B(w)$. Следовательно, по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [360], с. 180):

$$\beta(\omega(w)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega(\zeta))\, d\xi\, d\eta \quad \text{п.в.}$$

Таким образом, для почти всех $w \in A(E)$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(w, \varepsilon)$

$$\iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega(\zeta)) d\xi\, d\eta \leq \varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega_n(\zeta))\, d\xi\, d\eta + \varepsilon h^2.$$

В силу регулярности меры Лебега (см. [360], с. 108), $\mathcal{E} = A(E)$ можно погрузить в открытое ограниченное множество Ω с $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \mathcal{E}) < \varepsilon$. Система квадратов $K(w;h) \subseteq \Omega$, $w \in \mathcal{E}$, $h < \min(\delta(w,\varepsilon),\, \rho\,(w, \partial\Omega)/\sqrt{2})$, образует покрытие множества $\mathcal{E}$ в смысле Витали и по теореме Витали (см. [360], с. 167) найдется не более чем счетная последовательность непересекающихся квадратов $\mathcal{E}_m = K(w_m; h_m)$ из указанной системы такая, что $\operatorname{mes}\left(\mathcal{E} \setminus \cup\mathcal{E}_m\right) = 0$.

Поскольку $|\beta(\omega_n(w))| \leq B(w) \in L^1_{\text{loc}}$, то по лемме 11.2, примененной к двойной последовательности

$$a_{mn} = \iint\limits_{\mathcal{E}_m} \beta(\omega_n(\zeta)) d\xi\, d\eta, \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

а также в силу счетной аддитивности интеграла ([360], с. 49)

$$\iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega(\zeta))\, d\xi\, d\eta \leq \varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega_n(\zeta))\, d\xi\, d\eta + \varepsilon \operatorname{mes}\Omega + \alpha(\varepsilon),$$

где

$$\alpha(\varepsilon) = 2 \iint\limits_{\Omega\setminus\mathcal{E}} B(\zeta) d\xi\, d\eta.$$

Ввиду абсолютной непрерывности интеграла, величина $\alpha(\varepsilon)$ является бесконечно малой. Поэтому в силу произвола $\varepsilon > 0$ приходим к неравенству

$$\iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega(\zeta))\, d\xi\, d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega_n(\zeta))\, d\xi\, d\eta.$$

Наконец, после обратной замены переменной $\zeta = A(z)$ получаем (11.50).

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.5. Пусть $\mu(z) = \rho(z)e^{i\alpha(z)}$. Рассмотрим последовательность покрытий множества E непересекающимися системами множеств:

$$E_m^{k\,l\,r} = \left\{ z \in E : \rho(z) \in T_m^k, \Theta(z) \in T_m^l, \alpha(z) \in T_m^r \right\},$$

$k,\ l,\ r = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ m = 1,\ 2,\ \ldots$, где

$$T_m^l = \left\{ t \in \mathbb{R} : l2^{-m} \le t < (l+1)2^{-m} \right\}$$

$l = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ m = 1,\ 2,\ \ldots$ – последовательность сетей, покрывающих $\mathbb{R}$. Полагаем на каждом из множеств $E_m^{k\,l\,r}$

$$\begin{cases} \rho_m(z) = k2^{-m}, \\ \Theta_m(z) = l2^{-m}, \\ \alpha_m(z) = r2^{-m} \end{cases}$$

и, соответственно, на всем E:

$$\mu^{(m)}(z) = \rho_m(z) e^{i\alpha_m(z)},$$

$m = 1,\ 2,\ \ldots$. По построению $|\mu^{(m)}(z)| \le |\mu(z)|$ и, кроме того,

$$|\mu^{(m)}(z) - \mu(z)| < 2^{-(m-1)},$$

$$|\Theta_m(z) - \Theta(z)| < 2^{-m},$$

т.е. $\mu^{(m)}(z) \to \mu(z)$ и $\Theta_m(z) \to \Theta(z)$ равномерно на множестве E.

Множество упорядоченных троек чисел $(k,\ l,\ r),\ k,\ l,\ r = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, счетно. Перенумеруем все такие тройки чисел рядом натуральных чисел $p = 1,\ 2,\ \ldots$, и обозначим через $\mathcal{E}_m^p,\ p,\ m = 1,\ 2,\ \ldots$, – соответствующие множества $E_m^{k\,l\,r}$. По построению при каждом фиксированном $m = 1,\ 2,\ \ldots$, множества $\mathcal{E}_m^p,\ p = 1,\ 2,\ \ldots$, образуют дизъюнктное

покрытие множества E. На каждом из множеств $\mathcal{E}_m^p,\ p = 1, 2, \ldots$ функции $\mu^{(m)}(z)$ и $\Theta_m(z)$ являются постоянными. Применяя леммы 1.2 и 1.4, а также используя счетную аддитивность интеграла, имеем:

$$\iint\limits_E \beta^{(m)}(z)dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta_n^{(m)}(z)dx\,dy, \tag{11.64}$$

где

$$\beta^{(m)}(z) = \beta\left(\gamma^{(m)}(z)e^{-i\Theta_m(z)}\right),$$
$$\beta_n^{(m)}(z) = \beta\left(\gamma_n^{(m)}(z)e^{-i\Theta_m(z)}\right),$$
$$\gamma^{(m)}(z) = \frac{\mu(z) - \mu^{(m)}(z)}{1 - \mu(z)\overline{\mu^{(m)}(z)}},$$
$$\gamma_n^{(m)}(z) = \frac{\mu_n(z) - \mu^{(m)}(z)}{1 - \mu_n(z)\overline{\mu^{(m)}(z)}}.$$

Применение леммы 11.2 здесь корректно, благодаря тому, что $|\beta^{(m)}(z)|$ и $|\beta_n^{(m)}(z)| \le Q_0 < \infty$ п.в. на E и $\operatorname{mes} E < \infty$.

Функции

$$\frac{\varkappa - \nu}{1 - \varkappa\overline{\nu}}\, e^{i\Theta}$$

и $\beta(\gamma)$ бесконечно дифференцируемы по совокупности своих переменных и их производные равномерно ограничены для $(\varkappa, \nu, \Theta) \in \Delta_k \times \Delta_k \times \mathbb{R}$ и $\gamma \in \Delta_{k'}$ для любых k и $k' < 1$, где $\Delta_k = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le k\}$. Поэтому

$$|\beta^{(m)}(z) - \beta_0(z)| \le c\,2^{-m},$$
$$|\beta_n^{(m)}(z) - \beta_n(z)| \le c\,2^{-m},$$

где $\beta_0(z) \equiv 0,\ \beta_n(z) = \beta(\gamma_n(z)e^{-i\Theta})$. Следовательно, из (11.64) следует (11.51). □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 11.5. По теореме Лебега о почленном интегрировании (см. [360], с. 50)

$$\limsup_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta_n(z)dx\,dy \le \iint\limits_E \limsup_{n\to\infty} \beta_n(z)dx\,dy$$

и по замечанию 11.3 имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta_n(z)dx\,dy \le 0,$$

где $\beta_n(z) = \beta(\gamma_n(z)e^{-i\Theta(z)})$. Сопоставляя последнее неравенство с (11.51), приходим к (11.57). □

4. Доказательство второй части теоремы 11.2. Напомним, нам оставалось доказать, что $\mu_n \to \mu$ по мере на множестве E_0 из (11.40).

Последовательность множеств

$$E_m = \{z \in E_0 : |z| \le m, Q(z) \le m\},\ m = 1, 2, \ldots,$$

образует исчерпание множества E_0 по мере, т.е. $\operatorname{mes}(E_0 \setminus \bigcup E_m) = 0$. Поэтому в силу следствия В1 нам достаточно убедиться, что последовательность функций $\mu_n(z)$ компактна относительно сходимости по мере и что функция $\mu(z)$ является единственной точкой накопления этой последовательности на каждом из множеств $E_m,\ m = 1, 2, \ldots$ (см. также [202], с. 63–64). Как видно из очевидного неравенства $|\mu_n(z) - \mu(z)| \le 2|\gamma_n(z)|$, для этого в свою очередь, достаточно показать, что последовательность функций $\gamma_n(z)$ из леммы 11.5 компактна относительно сходимости по мере и что тождественно нулевая функция $\gamma_0(z) \equiv 0$ является единственной точкой накопления этой последовательности на каждом из множеств $E = E_m,\ m = 1, 2, \ldots$.

По следствию Б3 семейство множеств $N(z) = \operatorname{Ls}\{\gamma_n(z)\}$ является семейством непустых замкнутых множеств, измеримым по параметру z и $0 \in \operatorname{inv\,ext} N(z)$ для $z \in E_0$. Пусть $K(z;\eta),\ z \in E_m,\ \eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$ – семейство опорных кругов для $N(z),\ z \in E_m$. Тогда по лемме Б6

$$H(z) := \{\eta \in \partial\Delta : 0 \in \partial K(z;\eta)\}, \quad z \in E_m, \tag{11.65}$$

также представляет собой семейство непустых замкнутых множеств, измеримое по параметру z. По следствию Б5 при этом найдется измеримая функция $\Theta(z) : E_m \to \mathbb{R}$ такая, что $\eta(z) = e^{i\theta(z)} \in H(z)$ или, что то же самое, $N(z) \subseteq K(z)$ п.в. на E_m, где

$$K(z) = \left\{\varkappa \in \mathbb{C} : \left|\varkappa - \frac{1}{2}\, e^{i\Theta(z)}\right| \le \frac{1}{2}\right\}.$$

Рассмотрим последовательность функций:

$$\nu_n(z) = \frac{\gamma_n(z)}{1 - |\gamma_n(z)|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $|\nu_n(z)| \le m$ на E_m, то ν_n слабо компактна в $L^1(E_m)$ (см. [168], с. 317). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\nu_n \to \nu$ при $n \to \infty$ слабо, где ν – некоторая функция из $L^1(E_m)$.

Из леммы 11.5 и предложения 11.5 получаем, что для любой измеримой функции $\vartheta(z) : E_m \to \mathbb{R}$ на любом измеримом множестве $E \subseteq E_m$

$$\liminf_{n\to\infty} \iint\limits_E \operatorname{Re} \nu_n(z)[e^{-i\Theta(z)} - e^{-i\vartheta(z)}]\, dx\, dy \geq 0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_E (p\, r_\Theta \nu - p\, r_\vartheta \nu)\, dx\, dy \geq 0,$$

где через $p\, r_\vartheta \nu$ обозначена проекция вектора ν на направление ϑ. В силу произвола $E \subseteq E_m$ по теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [360], с. 180):

$$p\, r_{\Theta(z)} \nu(z) \geq p\, r_{\vartheta(z)} \nu(z)$$

для п.в. $z \in E_m$. В частности, полагая последовательно $\vartheta(z) \equiv \vartheta_l$, где $\vartheta_l,\ l = 1, 2, \ldots,$ – некоторая перенумерация всех рациональных чисел, получаем равенство

$$p\, r_{\Theta(z)} \nu(z) = \max_{\vartheta\in\mathbb{R}} p\, r_\vartheta \nu(z) \tag{11.66}$$

п.в. на E_m. Это означает, что п.в. на E_m

$$\nu(z) = |\nu(z)| e^{i\Theta(z)}. \tag{11.67}$$

С другой стороны, по предложению 11.7 из последовательности γ_n можно выделить подпоследовательность γ_{n_k}, для которой $\alpha_{n_k} = |\gamma_{n_k}|^2 - \operatorname{Re}\, \gamma_{n_k} e^{-i\Theta}$ будет сходиться к нулю п.в. на E_m. Последнее означает, что точки накопления этой подпоследовательности $\gamma_n(z)$ сосредоточены на окружностях

$$C(z) = \left\{ \varkappa \in \mathbb{C} : \left| \varkappa - \frac{1}{2}\, e^{i\Theta(z)} \right| = \frac{1}{2} \right\} \tag{11.68}$$

для почти всех $z \in E_m$.

Далее, $E_m = E_m^+ \cup E_m^- \cup E_m^0$, где $E_m^+,\ E_m^-$ и E_m^0 – измеримые дизъюнктные множества, определенные в следствии Б6 и отвечающие функциям $\gamma_0(z) \equiv 0,\ \eta(z) = e^{i\Theta(z)},\ z \in E_m$. При этом, γ_{n_k} может накапливаться только к 0 для $z \in E_m^0$ и только к одной дуге окружности $C(z)$, расположенной внутри $\Delta_{q_m} = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq q_m\},\ q_m = (m-1)/(m+1)$, по или против часовой стрелки от 0 на $C(z)$, для $z \in E_m^+$ или E_m^-, соответственно. Эти дуги лежат внутри острых углов с вершиной в нуле между

направлениями $\{\Theta(z)+\frac{\pi}{2}\}$ и $\{\Theta(z)+\arccos q_m\}$ при $z \in E_m^+$, а также между $\{\Theta(z)-\frac{\pi}{2}\}$ и $\{\Theta(z)-\arccos q_m\}$ при $z \in E_m^-$, соответственно. Обратим внимание, что точки накопления $\nu_{n_k}(z)$ лежат внутри тех же углов.

По лемме 11.6, примененной к соответствующим последовательностям $\varphi_k(z) = \operatorname{Re}\nu_{n_k}(z)$ и $\psi_k(z) = \operatorname{Im}\nu_{n_k}(z)$, $z \in E_m^0$, получаем, что $\nu(z) = 0$ п.в. на E_m^0 и, что $\nu_{n_k}(z) \to 0$ по мере на E_m^0. Аналогично, применив лемму 11.6 к последовательности $\operatorname{Re}\nu_{n_k}(z)\, e^{-i\vartheta(z)}$, где $\vartheta(z) = \Theta(z) + \frac{\pi}{2} + \arccos q_m$, получаем, что $\operatorname{Re}\nu(z)\, e^{-i\vartheta(z)} \geq 0$ п.в. на E_m^+. Это совместимо с (11.67) только при $\nu(z) = 0$ п.в. на E_m^+. Тогда, применив вторую часть леммы 11.6 к последовательностям функций $\varphi_K(z) = \operatorname{Re}\nu_{n_k}(z)e^{-i\vartheta(z)}$ и $\Psi_k(z) = \operatorname{Im}\nu_{n_k}(z)e^{-i\vartheta(z)} = -\operatorname{Re}\nu_{n_k}(z)e^{-i(\vartheta(z)-\frac{\pi}{2})}$, получаем, что $\nu_{n_k}(z) \to 0$ по мере на E_m^+.

Точно также это доказывается и для множества E_m^-. Таким образом, $\gamma_{n_k} \to 0$ по мере на E_m и тем самым теорема полностью доказана. $\square$

Мы завершаем данный параграф следующим важным дополнением к теореме 11.1.

Предложение 11.8. *В условиях теоремы 11.2*

$$\iint\limits_E p(z)dx\,dy \leq \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_E p_n(z)dx\,dy$$

для любого ограниченного измеримого множества $E \subseteq D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 11.8. По условию теоремы 11.2 $Q(z)$ локально суммируема. Поэтому по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [360], с. 180):

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} p(\zeta)d\xi\,d\eta = p(z)$$

и по лемме 11.1 имеет место неравенство (11.24) для $z \in D \setminus E_0$, где $\operatorname{mes} E_0 = 0$. Таким образом для всех $z \in D \setminus E_0$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$:

$$\iint\limits_{K(z;h)} p(\zeta)d\xi\,d\eta \leq \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)d\xi\,d\eta + \varepsilon h^2.$$

В силу регулярности меры Лебега ограниченное измеримое множество E можно погрузить в ограниченное открытое множество $\Omega \subseteq D$

такое, что $\operatorname{mes}\Omega \setminus E < \varepsilon$ (см. [360], с. 108). Система квадратов $K(z;h) \subseteq \Omega,\ z \in \Omega \setminus E_0,\ h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$ образует покрытие множества $\Omega \setminus E_0$ в смысле Витали и по теореме Витали (см. [360], с. 167) можно выбрать не более чем счетную последовательность непересекающихся квадратов $E_m = K(z_m; h_m)$ из указанного покрытия такую, что $\operatorname{mes}\Omega \setminus \cup E_m = 0$.

Из счетной аддитивности интеграла, а также леммы 11.2, примененной к

$$a_{mn} = \iint\limits_{E_m} p_n(\zeta)d\xi\, d\eta, \quad m,\, n = 1,\, 2,\, \ldots,$$

получаем

$$\iint\limits_{\Omega} p(\zeta)d\xi\, d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} p_n(\zeta)d\xi\, d\eta + \varepsilon \operatorname{mes}\Omega.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{E} p(\zeta)d\xi\, d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{E} p_n(\zeta)d\xi\, d\eta + \varepsilon \operatorname{mes}\Omega + \iint\limits_{\Omega\setminus E} Q(\zeta)d\xi\, d\eta.$$

Наконец, в силу произвола $\varepsilon > 0$ и абсолютной непрерывности интеграла приходим к заключению предложения 11.8. □

11.3 Критерии сходимости квазиконформных отображений.

В данном параграфе найдены необходимые и достаточные условия сходимости нормированных гомеоморфизмов плоскости.

Пункт 1 содержит предложение 11.10 о секвенциальной компактности нормированных $Q(z)-$квазиконформных отображений с экспоненциально ограниченной по мере $Q(z)$, следствие 11.9 о достаточных условиях сходимости, а также следствие 11.10, которое показывает эквивалентность секвенциальной компактности, компактности (бикомпактности) и замкнутости классов таких отображений.

В пункте 2, в терминах преобразования Фурье комплексных характеристик, сформулирован основной результат о необходимых и достаточных условиях локально равномерной сходимости нормированных $Q(z)$–квазиконформных отображений (теорема 11.3). Наиболее просто критерий формулируется для $Q(z)$–квазиконформных отображений с компактным носителем (следствие 11.12). В тех же терминах здесь построены различные метрики, генерирующие локально равномерную сходимость.

Пункты 3 и 4 включают в себя лемму сравнения и леммы о нормальных решениях уравнения Бельтрами (леммы 11.7–11.11).

Наконец, в пункте 5 приводится доказательство теоремы 11.3.

1. О пространствах нормированных гомеоморфизмов. В работе [165] Давид доказал теорему существования и единственности нормированных гомеоморфных решений уравнения Бельтрами (11.1) класса $\mathcal{ACL}$ с ограничениями по мере на комплексные характеристики вида

$$\operatorname{mes}\{z\in\mathbb{C}: |\mu(z)|>1-\varepsilon\}\leq c_0 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}} \tag{11.69}$$

для всех $\varepsilon\leq\varepsilon_0;\ \varepsilon_0\in(0,1],\ \alpha>0,\ c_0>0$. При этом решение автоматически принадлежит всем классам Соболева $W^{1,s}_{\rm loc}$ для любых $s<2$. Там же были установлены равностепенная непрерывность и локальная абсолютная непрерывность совокупности всех таких гомеоморфизмов вместе с их обратными при фиксированных ε_0, α и c_0 (см. [165], с. 27, 55).

Соотношение (11.69) может быть переписано в эквивалентной форме:

$$\operatorname{mes}\{z\in\mathbb{C}: p(z)>t\}\leq ce^{-\gamma t} \tag{11.70}$$

для всех $t\geq T$; $T=-1+2/\varepsilon_0\geq 1$, $\gamma=\alpha/2>0$, $c=c_0e^{-\gamma}>0$, где $p(z)=(1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|)$ – дилатация.

Будем говорить, что измеримая функция $Q(z):\mathbb{C}\to I=[1,\infty]$ *экспоненциально ограничена по мере*, если существуют постоянные $T\geq 1$, $\gamma>0$ и $c>0$ такие, что для всех $t\geq T$:

$$\operatorname{mes}\{z\in\mathbb{C}: Q(z)>t\}\leq c\,e^{-\gamma t}. \tag{11.71}$$

Обозначим через $H(Q(z))$ множество всех $Q(z)-$к.к. отображений $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f(\infty)=\infty$. Через $\mathfrak{M}(Q(z))$ в дальнейшем обозначается множество всех измеримых функций $\mu(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ с

$$p(z)=(1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|)\leq Q(z)\quad\text{п.в.}, \tag{11.72}$$

а через f_μ – гомеоморфизм класса $H(Q(z))$ с комплексной характеристикой μ.

Если $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере, то $Q(z)$ локально интегрируема и потому к классу $H(Q(z))$ применима вся теория, развитая в предыдущем параграфе. В частности, по теореме 11.2 с привлечением результата Давида, а также на основе теоремы Арцела–Асколи (см., напр., [168], с. 289) получаем секвенциальную компактность класса $H(Q(z))$ относительно локальной равномерной сходимости. Отметим,

(см. п. B1), что указанная сходимость на $H(Q(z))$ порождается метрикой

$$\rho(f,g)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{\rho_j(f,g)}{1+\rho_j(f,g)}\,, \tag{11.73}$$

где ρ_j, $j=1,\,2,\,\ldots,$ – псевдометрики:

$$\rho_j(f,g)=\max_{|z|\le j}|f(z)-g(z)|. \tag{11.74}$$

Итак, мы имеем:

Предложение 11.9 *Пусть функция $Q(z):\mathbb{C}\to I=[1,\infty]$ экспоненциально ограничена по мере. Тогда класс гомеоморфизмов $H(Q(z))$ является метризуемым секвенциально компактным L^*- пространством относительно локальной равномерной сходимости.*

Далее, в силу локальной абсолютной непрерывности прямых и обратных гомеоморфизмов Давида, почти все точки плоскости являются регулярными точками отображений класса $H(Q(z))$ (см. [270], с. 137). Поэтому из предложения 11.9, следствия 11.7 и аксиомы Урысона (см. п. B1) немедленно получаем:

Следствие 11.9. *Пусть f и $f_n\in H(Q(z))$ с экспоненциально ограниченной по мере $Q(z)$. Тогда для сходимости $f_n\to f$ л.р. достаточно выполнения любого из следующих условий:*

1. $\mu_n\to\mu$ п.в.;

2. $\mu_n\to\mu$ по мере;

3. $\mu_n\to\mu$ в $L^p_{\rm loc}, 1\le p\le\infty$.

Как будет показано в главе 12, ни одно из этих условий не является необходимым для сходимости $f_n\to f$ л.р. Необходимое и достаточное условие такой сходимости носит гораздо более сложный характер и будет сформулировано в следующем пункте в виде теоремы 11.3 и следствий 11.11 и 11.12 из нее.

Предложение 11.9 имеет массу других интересных следствий. Для нас будет важным (см. [229], с. 227; [230], с. 7–9; [80], с. 129):

Следствие 11.10 *Пусть H' – произвольный подкласс $H(Q(z))$ с экспоненциально ограниченной по мере $Q(z)$. Тогда следующее утверждения эквивалентны:*

1. H' замкнут;

2. H' компактен (бикомпактен);

3. H' секвенциально компактен.

Это следствие лишний раз подчеркивает роль теорем замыкания в проблеме компактификации классов $Q(z)-$к.к. отображений, которые

будут излагаться в главе второй. Вообще в дальнейшем термины "замыкание" и "компактификация" неразличимы по указанной причине. По той же причине для нас будут неразличимы термины "компактный" и "секвенциально компактный".

Среди прочих следствий предложения 11.10 можно отметить, что пространство гомеоморфизмов $H(Q(z))$ полно, вполне ограничено, сепарабельно и обладает счетной открытой базой (см. [230], с. 27 и [229], с. 227). Любое подпространство $H' \subseteq H(Q(z))$ также является сепарабельным ([229], с. 215).

2. Преобразование Фурье и сходимость квазиконформных отображений. Обозначим через B^∞ – открытый единичный шар в пространстве $L^\infty(\mathbb{C})$ ограниченных измеримых функций $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Определим для любой $\mu \in B^\infty(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ нелинейное преобразование

$$F(\mu) = m\widehat{\mu} + m(\widehat{\mu} * (m\widehat{\mu})) + \dots, \tag{11.75}$$

где через $*$ обозначена свертка функций,

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \mu(\zeta) e^{-i\mathrm{Re}\, z\overline{\zeta}} d\xi\, d\eta \tag{11.76}$$

– преобразование Фурье и $m(z) = z/\overline{z} \in L^\infty(\mathbb{C})$ – мультипликатор, $\zeta = \xi + i\eta$. Более подробно о свертке и преобразовании Фурье смотри пункт 4.

Теорема 11.3. *Пусть функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и пусть E_j, $j \in J$, – некоторое покрытие плоскости по мере ограниченными измеримыми множествами, на каждом из которых $Q(z)$ ограничена.*

Тогда для сходимости $f_n \to f$ л.р. в $H(Q(z))$ необходимо и достаточно, чтобы $F(\mu_n^*) \to F(\mu^*)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$ для срезок комплексных характеристик μ и μ_n, $n = 1, 2, \dots$, на каждом множестве E_j, $j \in J$.

Здесь под срезкой функции $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на множестве $E \subseteq \mathbb{C}$ понимается функция $\mu^* = \mu\chi_E$, где через χ_E обозначена характеристическая функция множества E. Семейство E_j, $j \in J$, называется покрытием плоскости $\mathbb{C}$ по мере, если

$$\mathrm{mes}\, \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j \in J} E_j = 0. \tag{11.77}$$

При этом множество индексов J не предполагается, вообще говоря, счетным.

Замечание 11.5. *Как будет видно из доказательства теоремы 3, из любого покрытия плоскости* $\mathbb{C}$ *по мере ограниченными измеримыми множествами* E_j, $j \in J$, *всегда можно выделить счетное подпокрытие* $\mathcal{E}_k = E_{j_k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Это позволяет строить различные метрики в пространстве $H(Q(z))$. Действительно, пусть φ_l, $l = 1, 2, \ldots$, – произвольное счетное фундаментальное множество функций из пространства $L^2(\mathbb{C})$ (см. [168], с. 63) и пусть

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \iint\limits_{\mathbb{C}} \varphi(z)\overline{\psi(z)}dx\,dy \tag{11.78}$$

– скалярное произведение в $L^2(\mathbb{C})$. Тогда следующая метрика порождает на $H(Q(z))$ локально равномерную сходимость

$$d(f_\mu, f_\nu) = \sum_{k,l=1}^{\infty} 2^{-(k+l)} \frac{d_{k\,l}(\mu, \nu)}{1 + d_{k\,l}(\mu, \nu)}, \tag{11.79}$$

где $d_{k\,l}$ – псевдометрики:

$$d_{k\,l}(\mu, \nu) = \left| \langle \varphi_l, F(\mu^{(k)}) - F(\nu^{(k)}) \rangle \right|, \tag{11.80}$$

$\mu^{(k)}$, $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, – срезки комплексных характеристик μ и ν на множествах $\mathcal{E}_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

В частности, если $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере, то последовательность

$$E^k = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le k, Q(z) \le k\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

дает нам счетное покрытие плоскости $\mathbb{C}$ по мере ограниченными измеримыми множествами, на каждом из которых функция $Q(z)$ ограничена. Пусть P_l, $l = 1, 2, \ldots$, – некоторая перенумерация всех квадратов плоскости $\mathbb{C}$ со сторонами параллельными осям координат, координаты центров и длин сторон которых являются рациональными числами. Выбирая в качестве фундаментального множества функций φ_l пространства $L^2(\mathbb{C})$ множество характеристических функций χ_l указанных квадратов P_l, получаем метрику (11.79) с

$$d_{kl} = \left| \iint\limits_{P_l} \left\{ F(\mu^{(k)}) - F(\nu^{(k)}) \right\} dx\,dy \right|.$$

Следствие 11.11. *В условиях теоремы 3 для сходимости* $f_n \to f$ *л.р. в* $H(Q(z))$ *необходимо и достаточно, чтобы* $d(f_n, f) \to 0$.

Наиболее просто теорема 11.3 формулируется для $Q-$к.к. отображений в случае компактных носителей:

Следствие 11.12. *Пусть f и $f_n \in H(Q)$, $n = 1, 2, \ldots,$ – $Q-$к.к. отображения с носителями комплексных характеристик μ и μ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ сосредоточенными в некотором компакте $K \subseteq \mathbb{C}$. Тогда для сходимости $f_n \to f$ л.р. необходимо и достаточно, чтобы $F(\mu_n) \to F(\mu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.*

3. Одна лемма сравнения. При доказательстве теоремы 3 будет полезной:

Лемма 11.7. *Пусть $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и пусть h и h_n, g и g_n, $n = 1, 2, \ldots,$ являются $Q(z)-$к.к. отображениями с комплексными характеристиками μ и μ_n, ν и ν_n, $n = 1, 2, \ldots,$ соответственно. Если $h_n \to h$ и $g_n \to g$ л.р. и при этом $\mu_n(z) - \nu_n(z) \to 0$ по мере на некотором измеримом множестве E, то $\mu(z) = \nu(z)$ п.в. на E.*

Для доказательства, в свою очередь, потребуется:

Лемма 11.8. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ – произвольное измеримое множество, f и f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – $Q-$к.к. отображения и пусть $f_n \to f$ л.р. Тогда на множестве $\mathcal{E} = f(E)$ имеет место сходимость по мере характеристических функций $\chi_{\mathcal{E}_n}(w) \to 1$, где $\mathcal{E}_n = f_n(E)$. Другими словами, мера множества $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_n$ стремится к нулю при $n \to 0$.*

Лемму 11.8 можно рассматривать как обобщение известной теоремы о сходимости к ядру (см. [270], с. 79–80).

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.8. 1) Пусть сначала E – область. Тогда по теореме о сходимости к ядру область $\mathcal{E} = f(E)$ является связной компонентой ядра последовательности областей

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} \mathcal{E}_n \right)^0, \quad \mathcal{E}_n = f_n(E),$$

и, в частности, любая точка $w \in \mathcal{E}$ принадлежит $\mathcal{E}_n$ для всех достаточно больших n, т.е. $\chi_{\mathcal{E}_n}(w) \to 1$ поточечно на $\mathcal{E}$.

2) Если E – произвольное открытое множество, то E распадается на не более чем счетное число связных компонент и, следовательно, $\chi_{\mathcal{E}_n}(w) \to 1$ поточечно на $\mathcal{E}$ по предыдущему пункту.

3) Пусть теперь $E \subseteq \mathbb{C}$ – произвольное измеримое множество с $\operatorname{mes} f(E) < \infty$. Тогда в силу регулярности меры Лебега (см. [360], с. 108) $\mathcal{E} = f(E)$ можно погрузить в открытое множество $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathbb{C}$ с $\operatorname{mes} \mathcal{E}_0 \setminus \mathcal{E} < \varepsilon$.

Отсюда, в частности, имеем $\operatorname{mes}\mathcal{E}_0 < \infty$.

Введем сокращения записи $\chi_n(w) = \chi_{f_n(E)}(w)$ и $\chi_n^0(w) = \chi_{f_n(E_0)}(w)$, $w \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $E_0 = f^{-1}(\mathcal{E}_0)$. Ясно,что $\chi_n \le \chi_n^0$ всюду. Из неравенства треугольника для нормы $L^1(\mathcal{E})$ получаем:

$$\|\chi_n - 1\| \le \|\chi_n - \chi_n^0\| + \|\chi_n^0 - 1\|.$$

Далее

$$\begin{aligned}\|\chi_n^0 - \chi_n\| &= \iint\limits_{\mathcal{E}} (\chi_n^0(w) - \chi_n(w))du\,dv \\ &= \operatorname{mes}\{[f_n(E_0 \setminus E)] \cap \mathcal{E}\} \le \operatorname{mes} f_n(E_0 \setminus E).\end{aligned}$$

В силу известного результата о слабой сходимости якобианов Q-к.к. отображений (см. [271], с. 15, [325], с. 38) имеем, что

$$\operatorname{mes} f_n(E_0 \setminus E) \to \operatorname{mes} f(E_0 \setminus E) = \operatorname{mes}\mathcal{E}_0 \setminus \mathcal{E} < \varepsilon.$$

Таким образом

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi_n^0 - \chi_n\| < \varepsilon. \tag{11.81}$$

С другой стороны, $\|\chi_n^0 - 1\| \le \|\chi_n^0 - 1\|_0$, где через $\|\ \|_0$ обозначена норма $L^1(\mathcal{E}_0)$. По пункту 2) доказательства и по теореме Лебега о почленном интегрировании (см. [360], с. 50–51) $\|\chi_n^0 - 1\|_0 \to 0$. Тем более $\|\chi_n^0 - 1\| \to 0$. Отсюда и из неравенства (11.81) получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \|\chi_n - 1\| < \varepsilon$$

и, в силу произвола $\varepsilon > 0$, $\|\chi_n - 1\| \to 0$. Поэтому $\chi_n \to 1$ по мере на $\mathcal{E}$.

4) Случай, когда $\operatorname{mes}\mathcal{E} = \infty$, сводится к предыдущему случаю, когда $\operatorname{mes}\mathcal{E} < \infty$ (см. [202], с. 57–58).

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.7. Без ограничения общности можно считать, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in E} Q(z) = Q_0 < \infty. \tag{11.82}$$

Действительно, утверждение леммы достаточно проверить на множествах

$$E_m = \{z \in E : |z| \le m, Q(z) \le m\}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

поскольку $\operatorname{mes} E \setminus \cup E_m = 0$ (см. [202], с. 63–64).

Пусть f_n, $n = 1, 2, \ldots$, – гомеоморфизмы класса $H(Q(z))$ с комплексными характеристиками $\varkappa_n(z) = \mu_n(z)\chi_E(z)$, где χ_E – характеристическая функция множества E. В силу секвенциальной компактности

класса $H(Q(z))$ можно считать, что $f_n \to f$ л.р. к некоторому гомеоморфизму f того же класса. Обозначим через $\varkappa(z)$ комплексную характеристику отображения f и покажем, что $\nu(z) = \varkappa(z) = \mu(z)$ п.в. на E.

Для определенности докажем первое равенство. Второе доказывается аналогично. Прежде всего отметим, что в силу (11.82), а также предложения 1.10, f и $f_n \in H(Q_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, то есть f и f_n являются Q_0-к.к. отображениями, к которым применима лемма 11.8.

По лемме 11.8, без ограничения общности, можно считать, что $\chi_{\mathcal{E}_n}(w) \to 1$ п.в. на $\mathcal{E} = f(E)$, $\mathcal{E}_n = f_n(E)$, $n = 1, 2, \ldots$, и что $\nu_n(z) - \varkappa_n(z) \to 0$ п.в. на E (см. [202], с. 58). Первое утверждение означает, что для п.в. $w \in \mathcal{E}$, начиная с некоторого $N = N(w)$, $\chi_{\mathcal{E}_n}(w) = 1$, т.е. $f_n^{-1}(w) \in E$ при $n \geq N$. Далее, ввиду счетной аддитивности меры и теоремы Егорова (см. [360], с. 35), можно считать, что множество E ограничено и $\nu_n(z) - \varkappa_n(z) \to 0$ равномерно на E.

Рассмотрим последовательность отображений $\varphi_n = g_n \circ f_n^{-1} \to g \circ f^{-1} = \varphi$. По теореме Ги Давида g и $g_n \in W^{1,\alpha}_{\rm loc}$ для любого $\alpha < 2$ (см. [165], с. 27, 55), а f^{-1} и $f_n^{-1} \in W^{1,\beta}_{\rm loc}$ для некоторого $\beta = \beta(Q_0) > 2$ (см., напр., [270], с. 226). Следовательно, φ и $\varphi_n \in W^{1,1}_{\rm loc}$ (см. [270], с. 159) и, таким образом, φ и φ_n являются $K(z)-$к.к. отображениями с локально суммируемой $K(z) = Q_0 \cdot Q(z)$. Их комплексные характеристики имеют вид:

$$\omega_n(w) = \left\{ \frac{\nu_n(z) - \varkappa_n(z)}{1 - \nu_n(z)\overline{\varkappa_n(z)}} \cdot \frac{(f_n)_z}{\overline{(f_n)_z}} \right\} \circ f_n^{-1}(w),$$

$$\omega(w) = \left\{ \frac{\nu(z) - \varkappa(z)}{1 - \nu(z)\overline{\varkappa(z)}} \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}} \right\} \circ f^{-1}(w).$$

Таким образом, $\omega_n(w) \to 0$ п.в. на $\mathcal{E}$. Но тогда по следствию 11.5 или 11.6 $\omega(w) = 0$ п.в. на $\mathcal{E}$, т.е.

$$\{\nu(z) - \varkappa(z)\} \circ f^{-1}(w) = 0$$

п.в. на $f(E)$. Следовательно, действительно $\nu(z) = \varkappa(z)$ п.в. на E (см. [16], с. 36). □

4. Леммы о нормальных решениях уравнения Бельтрами. Обозначим через T комплексное преобразование Гильберта, $T : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$,

$$T\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta, \tag{11.83}$$

а через c_p – его норму в пространствах $L^p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$. Как известно, $c_2 = 1$ и по теореме Рисса-Торина $\log c_p$ является выпуклой функцией от $1/p$, так что $c_p \to 1$ при $p \to 2$ (см. [16], с. 102). Следовательно, $qc_p < 1$ для p достаточно близких к 2 и $q \in [0, 1)$. Зафиксируем некоторое такое $p > 2$.

Оказывается, что для любой функции $\mu(z) \in L^\infty(\mathbb{C})$ с компактным носителем и $|\mu(z)| \le q < 1$ существует и единственно решение f уравнения Бельтрами (11.1) такое, что $f(0) = 0$ и $f_z - 1 \in L^p(\mathbb{C})$. Такие f называются *нормальными решениями*. Всякое нормальное решение уравнения Бельтрами является $Q-$к.к. гомеоморфизмом, $Q = (1+q)/(1-q)$ (см. [16], с. 84–89).

Пусть $P : L^p(\mathbb{C}) \to C_\alpha,\ \alpha = 1 - 2/p$, – линейный ограниченный оператор, определяемый равенством

$$P\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\xi\, d\eta. \tag{11.84}$$

Тогда нормальное решение запишется в виде

$$f(z) = z + P(\mu) + P(\mu N(\mu)), \tag{11.85}$$

где

$$N(\mu) = T_\mu + T(\mu T\mu) + \dots \tag{11.86}$$

– нелинейное преобразование характеристики.

Отметим, что ряд (11.86) сходится по норме любого из пространств $L^p(\mathbb{C}),\ 1 < p < \infty$, для которого $qc_p < 1$. В частности, это имеет место в $L^2(\mathbb{C})$.

Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ – ограниченное измеримое множество. Обозначим через $\mathfrak{N}_q(E)$ класс всех нормальных решений уравнения Бельтрами с комплексными характеристиками $\mu(z)$ такими, что:

$$|\mu(z)| \le q < 1,\ z \in E; \quad \mu(z) = 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{11.87}$$

Лемма 11.9. *Для любого ограниченного измеримого множества $E \subseteq \mathbb{C}$ и $q < 1$ класс $\mathfrak{N}_q(E)$ секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости.*

На основе этой леммы мы докажем:

Лемма 11.10. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ – произвольное ограниченное измеримое множество, $0 < q < 1$, и $f,\ f_n \in \mathfrak{N}_q(E),\ n = 1, 2, \dots$. Тогда для сходимости $f_n \to f$ л.р. необходимо и достаточно, чтобы $N(\mu_n) \to N(\mu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.*

На самом деле лемма 11.10 позволяет также получить описание сходимости нормальных решений уравнения Бельтрами в терминах преобразования Фурье.

К сингулярным интегралам преобразования Фурье впервые применил А. Кальдерон и Л. Зигмунд в статье [197]. Интегральный оператор типа свертки в $\mathbb{R}^n$

$$S\varphi(x) = k * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\varphi(y)dy \tag{11.88}$$

корректно определен и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p \le \infty$, если $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (см. [365], с. 9). Однако часто и в случае несуммируемого ядра k можно корректно определить интеграл (11.88) в смысле главного значения по Коши как предел в $L^p(\mathbb{R}^n)$ или п.в.

$$S\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\varphi(y)dy. \tag{11.89}$$

Типичным примером является двумерное преобразование Гильберта (11.83). Операторы такого типа принято называть сингулярными интегральными операторами или сингулярными интегралами.

Основная проблема, которой были посвящены работы Кальдерона–Зигмунда, это – проблема ограниченности многомерных сингулярных интегральных операторов в пространствах $L^p(\mathbb{R}^n),\ p > 1$. В статье [197] рассмотрены интегралы вида (11.88) с

$$k(x) = \frac{\psi(x/|x|)}{|x|^n}. \tag{11.90}$$

Для их исследования применено преобразование Фурье. Установлено, что сингулярный оператор ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$, если ограничено преобразование Фурье его ядра, а также, что

$$\widehat{S\varphi} = \widehat{k}\cdot\widehat{\varphi} \tag{11.91}$$

(см. также [295], с. 99–103). С.Г. Михлиным в работе [293] установлено, что преобразование Фурье ядра $\widehat{k}$ совпадает с так называемым символом Ф сингулярного интегрального оператора (см. также [295], с. 106). Символ оператора (11.83) весьма прост, $\Phi(\Theta) = e^{2i\Theta} = \widehat{k}(z)$, где $\Theta = \arg z$ (см. [295], с. 76–78). Таким образом,

$$\widehat{T\varphi}(z) = m(z)\widehat{\varphi}(z), \tag{11.92}$$

где

$$m(z) = \frac{z}{\overline{z}}. \tag{11.93}$$

По теореме Планшереля (см., напр., [301], с. 255-256), для каждой функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ существуют ее преобразования Фурье $\widehat{\varphi}$ и $\widetilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{\varphi}(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} \varphi(u) e^{-ivu} du, \tag{11.94}$$

$$\widetilde{\varphi}(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} \varphi(u) e^{ivu} du, \tag{11.95}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n),\ v = (v_1, \ldots, v_n),\ uv = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j v_j,$

$$\Delta_N = \{u \in \mathbb{R}^n : |u_j| \le N,\ j = 1, \ldots, n\}$$

и сходимость понимается в смысле $L^2(\mathbb{R}^n)$. При этом, преобразования Фурье$\widehat{\ }$и$\widetilde{\ }$отображают $L^2(\mathbb{R}^n)$ на себя взаимооднозначно,$\widehat{\ }$и$\widetilde{\ }$– взаимно обратные, $\widetilde{\widehat{\varphi}} = \widehat{\widetilde{\varphi}} = \varphi$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$, сохраняют скалярное произведение $(\varphi, \psi) = (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}),\ \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, и, таким образом, изометричны $\|\varphi\|_2 = \|\widehat{\varphi}\|_2 = \|\widetilde{\varphi}\|_2$. Другими словами, преобразование Фурье$\widehat{\ }$является унитарным оператором, а$\widetilde{\ }$– обратный к нему оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Покажем, что для $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $b \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{b \cdot \varphi} = \widehat{b} * \widehat{\varphi}. \tag{11.96}$$

Действительно, пусть C_0^∞ – совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ и пусть $B : C_0^\infty \to L^2(\mathbb{R}^n)$ – оператор, определенный равенством $B\varphi = \widetilde{b} * \varphi$. Тогда норма оператора B равна $\|b\|_\infty$ и

$$\widehat{B\varphi} = (\widetilde{b} * \varphi)\widehat{\ } = b\widehat{\varphi} \tag{11.97}$$

(см. [365], с. 38). Таким образом, оператор B и формула (11.97) могут быть распространены на все $L^2(\mathbb{R}^n)$. Полагая $\varphi = \widetilde{\psi},\ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, будем иметь

$$(\widetilde{b} * \psi)\widehat{\ } = b \cdot \psi \tag{11.98}$$

или, применяя к обеим частям (11.98) обратное преобразование Фурье$\widetilde{\ }$, получим

$$\widetilde{b \cdot \varphi} = \widetilde{b} * \widetilde{\psi}. \tag{11.99}$$

Поскольку для любого $\varkappa \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{\varkappa}(x) = \widetilde{\varkappa}(-x), \tag{11.100}$$

то приходим к (11.96). $\Box$

Обозначим через $\mathfrak{M}_q(E)$ множество всех комплексных характеристик отображений f класса $\mathfrak{N}_q(E)$. Тогда $\mathfrak{M}_q(E) \subseteq L^\infty(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ и из унитарности преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{C})$ в соответствии с формулами (11.75), (11.76), (11.86), (11.92), (11.93) и (11.96) получаем равенство

$$\widehat{N(\mu)} = F(\mu) \tag{11.101}$$

для любого $\mu \in \mathfrak{M}_q(E)$. Еще раз привлекая унитарность оператора Фурье $\widehat{\ }$, из леммы 11.10 получаем:

Лемма 11.11. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ – произвольное ограниченное измеримое множество, $0 < q < 1$, и f, $f_n \in \mathfrak{N}_q(E)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда для сходимости $f_n \to f$ л.р. необходимо и достаточно, чтобы $F(\mu_n) \to F(\mu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.9. Поскольку нормальные решения Бельтрами класса $\mathfrak{N}_q(E)$ являются Q–к.к. отображениями, нормированными условиями $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$ (см. [16], с. 89), то они образуют нормальное семейство (см. [270], с. 76). Поэтому из любой последовательности $f_n \in \mathfrak{N}_q(E)$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность $g_m = f_{n_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, которая сходится л.р. в сферической метрике. При этом, предельная функция g является либо Q–к.к. отображением $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, либо $g(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C}$ и $g(\infty) = \infty$, либо $g(0) = 0$ и $g(z) \equiv \infty$, при $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ (см. [270], с. 76–77). Покажем, что два последних случая на самом деле исключаются.

В первом из этих случаев $g_m \to 0$ л.р. в $\mathbb{C}$. Но тогда по формуле Грина (см. [270], с. 156):

$$\iint\limits_R (g_m)_z dx\, dy = \frac{i}{2} \int\limits_{\partial R} g_m d\overline{z} \to 0 \tag{11.102}$$

на любом прямоугольнике R. Однако это противоречит оценке (см. [16], с. 86)

$$\|g_z - 1\|_p \le \frac{qc_p}{1 - qc_p} (\operatorname{mes} E)^{1/p} = C(p, q, E). \tag{11.103}$$

Действительно, в силу (11.102) для любого прямоугольника R из неравенств Гельдера и треугольника имеем:

$$\begin{aligned}\|(g_m)_z - 1\|_p &\geq \|(g_m)_z - 1\|_{L^p(R)} \geq \\ &\geq (\operatorname{mes} R)^{-(p-1)/p}\|(g_m)_z - 1\|_{L^1(R)} \geq \\ &\geq (\operatorname{mes} R)^{-\frac{(p-1)}{p}}\left|\left|\iint\limits_R (g_m)_z dx\,dy\right| - \operatorname{mes} R\right| \to (\operatorname{mes} R)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

при $m \to \infty$ и ввиду произвола R, норма $\|(g_m)_z - 1\|_p$ становится бесконечно большой в противоречии с оценкой (11.103). Тем самым рассматриваемый случай исключен.

Во втором случае $g_m \to \infty$ л.р. в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ относительно сферической метрики. Ввиду гомеоморфности отображений и нормировки $g_m(0) = 0$ это приводит к тому, что площадь образа $g_m(\Delta_r)$ круга $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ стремится к ∞ при $m \to \infty$ для любого $r > 0$. Однако это противоречит следующей оценке в классе $\mathfrak{N}_q(E)$:

$$\begin{aligned}[S(g(\Delta_r))]^{1/2} &= \left(\iint\limits_{|z|\leq r}(1 - |\mu|^2)|g_z|^2 dx\,dy\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|g_z\|_{L^2(\Delta_r)} \leq \|g_z - 1\|_{L^2(\Delta_r)} + r\pi^{1/2} \leq \\ &\leq \|g_z - 1\|_{L^2(\mathbb{C})} + r\pi^{1/2} \leq \frac{q}{1-q}(\operatorname{mes} E)^{1/2} + r\pi^{1/2}\end{aligned}$$

(см. [16], с. 36, 85–86). Здесь мы воспользовались также изометричностью оператора Гильберта в пространстве $L^2(\mathbb{C})$ (см. [16], с. 81). Таким образом, второй случай также исключается.

В случае $g_m \to g$ л.р., где g – некоторое $Q-$к.к. отображение, имеем (см. [270], с. 196):

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_R [(g_m)_z - 1]dx\,dy = \iint\limits_R [g_z - 1]dx\,dy \tag{11.104}$$

для любого осепараллельного прямоугольника R. Характеристические функции таких прямоугольников образуют фундаментальное множество в пространстве $L^{p'}$, где $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ (см. [168], с. 63). В силу оценки (11.103) $[(g_m)_z - 1] \to [g_z - 1]$ слабо в L^p (см. [168], с. 316). Ввиду слабой замкнутости шара в нормированных пространствах (см. [168], с. 81) из (11.104)

имеем $\|g_z - 1\|_p \le C(p, q, E)$, т.е. $g_z - 1 \in L^p(\mathbb{C})$. Нормировка $g(0) = 0$ очевидна. Кроме того, из следствия 11.5 вытекает, что комплексная характеристика $\mu(z)$ отображения $g(z)$ удовлетворяет (11.87), т.е $g \in \mathfrak{N}_q(E)$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.10. 1). *Необходимость.* Итак, пусть $f_n \to f$ л.р. Но тогда (см. [270], с. 196):

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_R (f_n)_z dx\, dy = \iint\limits_R f_z dx\, dy$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_R N(\mu_n) dx\, dy = \iint\limits_R N(\mu) dx\, dy$$

для любого осепараллельного прямоугольника $R \subseteq \mathbb{C}$ (см. [16], с. 85–86). Характеристические функции таких прямоугольников образуют фундаментальное множество в $L^2(\mathbb{C})$. Ввиду соотношения изометрии для преобразования Гильберта (см. [16], с. 81), $N(\mu_n),\ n = 1, 2, \ldots$, ограничено в $L^2(\mathbb{C})$ и потому $N(\mu_n) \to N(\mu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$ (см. [168], с. 316).

2). *Достаточность.* Пусть $N(\mu_n) \to N(\mu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$. По лемме 11.9 пространство $\mathfrak{N}_q(E)$ секвенциально компактно. Поэтому по аксиоме Урысона (см. п. B1) достаточно рассмотреть произвольную сходящуюся подпоследовательность $g_m = f_{n_m} \to g \in \mathfrak{N}_q(E)$ и убедиться, что $g = f$. В силу теоремы существования и единственности нормального решения для этого достаточно проверить, что комплексная характеристика $\nu(z)$ отображения g совпадает с $\mu(z)$ п.в.

Действительно, из необходимости условия заключаем, что $N(\nu_m) \to N(\nu)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$, где $\nu_m = \mu_{n_m}$, а в силу единственности слабого предела имеем $N(\mu) = N(\nu)$ (см. [168], с. 80). Пусть $\varphi = N(\mu) = N(\nu)$. Применяя к обеим частям равенства $1 + \varphi = 1 + N(\mu)$ оператор $P_\mu(\psi) = \psi - T(\mu\psi)$ получаем равенство $\varphi = T(\mu(1 + \varphi))$. Аналогично, применяя к равенству $1 + \varphi = 1 + N(\nu)$ оператор $P_\nu(\psi) = \psi - T(\nu\psi)$, имеем: $\varphi = T(\nu(1 + \varphi))$. Следовательно, $T((\mu - \nu)(1 + \varphi)) = 0$. Но тогда из соотношения изометрии для оператора T получаем $(\mu - \nu)(1 + \varphi) = 0$ п.в. Однако, $1 + \varphi = g_z \ne 0$ п.в. (см. [16], с. 37, 85–86). Таким образом, $\mu(z) = \nu(z)$ п.в., что и завершает доказательство леммы. $\square$

5. Доказательство теоремы 11.3. 1). *Необходимость.* Итак, пусть пусть $f_n \to f$ л.р. и пусть μ^* и $\mu_n^*,\ n = 1, 2, \ldots$, – срезки комплексных

характеристик μ и $\mu_n,\ n = 1, 2, \ldots$, соответственно, на некотором множестве E из покрытия $E_j,\ j \in J$. Тогда по аксиоме Урысона (см. п. B1), леммам 11.7, 11.9 и 11.11 немедленно получаем, что $F(\mu_n^*) \to F(\mu^*)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.

2). *Достаточность.* Пусть, наоборот, $F(\mu_n^*) \to F(\mu^*)$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$ на каждом из множеств $E_j,\ j \in J$.

Отметим одно важное обстоятельство. Обозначим через M L^*-пространство всех измеримых и п.в. конечных по Лебегу функций $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ со сходимостью по мере. Это пространство метризуемо и сепарабельно (см. [202], с. 63–67). Но тогда и его подпространство $X \subseteq M$, состоящее из характеристических функций χ_j множеств $E_j,\ j \in J$, также сепарабельно (см. [229], с. 215). Следовательно, можно выделить счетное подпокрытие $\mathcal{E}_m = E_{j_m},\ m = 1, 2, \ldots$, плоскости $\mathbb{C}$ по мере.

Таким образом, по аксиоме Урысона, предложению 11.10, леммам 11.7 и 11.11 получаем, что $f_n \to f$ л.р. $\square$

Глава 12

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ТИПА

В данной главе исследуются классы $Q(z)-$к.к. отображений с ограничениями теоретико-множественного типа на их комплексные характеристики общего вида. При этом $Q(z)$ предполагается экспоненциально ограниченной по мере.

В §12.1 получена теорема 12.1 о замыкании таких классов. В качестве следствия показано, что при локально равномерной сходимости $Q(z)-$к.к. отображений их комплексные характеристики могут не сходиться даже слабо ни в одном из пространств $L^p,\ 1 \le p < \infty$ (следствия 12.1–12.2). Отметим также, что теорема 12.1 позволит нам в главе 14 дать частичное решение проблемы Райха–Вальчака о конформности в точке (теорема 14.2).

В §12.2, опять же на основе теоремы 12.1, доказана теорема 12.2 о необходимых и достаточных условиях компактности классов с указанными ограничениями. Эта теорема усиливает и обобщает известный результат Шиффера–Шобера о достаточных условиях компактности.

Наконец, в §12.3 собраны фундаментальные следствия к теории вариационного метода – принцип редукции (следствие 12.4), построение вариаций (лемма 12.2) и один из основных результатов – вариационный принцип максимума (теорема 12.3). Приводятся также другие необходимые условия экстремума.

12.1. Теорема замыкания

Главной целью параграфа является теорема 12.1 о замыкании $Q(z)-$к.к. отображений с ограничениями общего теоретико-множественного типа.

В пункте 1 приводится точная формулировка этого результата. В качестве следствия обнаружен тот интересный факт, что при локально равномерной сходимости $Q(z)-$к.к. отображений их комплексные ха-

рактеристики, вообще говоря, не сходятся даже слабо ни в одном из пространств $L^p,\ 1 \le p < \infty$ (следствия 12.1, 12.2).

Пункт 2 содержит доказательства основной леммы (лемма 12.1). На ее базе с привлечением теоремы 11.2 в пункте 3 проведено доказательство теоремы 12.1.

1. Формулировка основных результатов. Обозначим через H_M класс всех $Q(z)-$к.к. отображений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$, комплексные характеристики которых удовлетворяют условию

$$\mu(z) \in M(z) \quad \text{п.в.} \tag{12.1}$$

с

$$M(z) \subseteq \Delta_q(z) = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le q(z)\}, \tag{12.2}$$

где

$$q(z) = (Q(z) - 1) \,/\, (Q(z) + 1)\,. \tag{12.3}$$

При этом, если $Q(z) = \infty$ в некоторой точке $z \in \mathbb{C}$, то по определению $q(z) = 1$. Через $\mathfrak{M}_M$ в дальнейшем обозначается класс всех измеримых функций μ, удовлетворяющих (12.1).

Теорема 12.1. *Пусть функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и $M(z),\ z \in \mathbb{C}$, – произвольное семейство непустых замкнутых множеств из $\Delta_{q(z)}$, измеримое по параметру z.*

Тогда в топологии локально равномерной сходимости:

$$\overline{H_M} = H_{\operatorname{inv co} M}, \tag{12.4}$$

где $\operatorname{inv co} M(z),\ z \in \mathbb{C}$, – семейство инвариантно-выпуклых оболочек множеств $M(z),\ z \in \mathbb{C}$. При этом, класс $H_{\operatorname{inv co} M}$ является секвенциально компактным.

Отметим также, что класс $\mathfrak{M}_{\operatorname{inv co} M}$ всех комплексных характеристик отображений из $H_{\operatorname{inv co} M}$ образует выпуклое множество, что имеет важное значение для теории вариационного метода.

Здесь условие измеримости семейства множеств $M(z)$ по параметру z является существенным. Можно привести пример, когда для неизмеримого $M(z)$ класс H_M пуст, а класс $H_{\operatorname{inv co} M}$ не пуст. Именно, если $\varphi(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ – какая-либо неизмеримая функция с $\varphi(z) \le q < 1$, то в качестве примера можно взять семейство двуточечных множеств $M(z) = \{-\varphi(z), \varphi(z)\}$. Тогда ясно, что $\mathfrak{M}_M = \oslash$, а $\mathfrak{M}_{\operatorname{inv co} M} \ne \oslash$ включает по крайней мере тождественно нулевую функцию $\mu(z) \equiv 0$. Следовательно, заведомо класс H_M пуст, а класс $H_{\operatorname{inv co} M}$ не пуст, поскольку содержит тождественное отображение.

Наоборот, в случае измеримого семейства непустых замкнутых множеств $M(z)$, по теореме Б3 об измеримых сечениях, класс $\mathfrak{M}_M$ не пуст. Следовательно, в условиях теоремы 12.1, по теореме Давида [165] класс H_M также не пуст.

Приведем еще одно интересное следствие теоремы 12.1. В связи с этим заметим,что в соответствии с известными критериями (см. [202], с. 290), слабая сходимость в любом из пространств $L^p_{\rm loc}(\mathbb{C}),\ 1 < p < \infty$, для последовательности равностепенно ограниченных функций, эквивалентна слабой сходимости в $L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Таким образом, в силу леммы 11.6, если $\mu_n \to \nu$ слабо в каком-либо из пространств $L^p_{\rm loc}(\mathbb{C}),\ 1 \le p < \infty$, то

$$\nu(z) \in \operatorname{co} M(z) \quad \text{п.в.}, \tag{12.5}$$

где $\operatorname{co} M$ – семейство выпуклых оболочек множеств

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\mu_n(z)\}. \tag{12.6}$$

Отметим, что соотношение (12.5) является аналогом соотношения (11.39) из теоремы 11.2 и что всегда:

$$\operatorname{co}\ M(z) \subseteq \operatorname{inv}\operatorname{co} M(z). \tag{12.7}$$

Однако ясно, что обратное включение имеет место не всегда. На этом основано:

Следствие 12.1. *Для любого $1 < Q < \infty$ существует последовательность $Q-$к.к. отображений $f_n : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ которая сходится л.р. к $Q-$к.к. отображению $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такая, что μ_n не сходится к μ слабо ни в одном из пространств $L^p_{\rm loc},\ 1 \le p < \infty$.*

Действительно, если в теореме 12.1 выбрать $M = M(z) \equiv \{0, q\},\ z \in \mathbb{C},\ q = (Q-1)/(Q+1)$, то $\operatorname{inv}\operatorname{co} M \setminus \operatorname{co} M \ne \oslash$. Тогда функция $\mu(z) \equiv \mu_0 \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M \setminus \operatorname{co} M$ принадлежит $\mathfrak{M}_{\operatorname{inv}\operatorname{co} M}$ и имеется единственное отображение $f \in H_{\operatorname{inv}\operatorname{co} M}$:

$$f(z) = \frac{z + \mu_0 \overline{z}}{1 + \mu_0}$$

с комплексной характеристикой μ. Согласно теореме 12.1 найдется последовательность отображений $f_n \in H_M,\ n = 1, 2, \ldots$, такая, что $f_n \to f$ л.р. Пусть $\mu_n \in \mathfrak{M}_M$ – комплексные характеристики отображений f_n. По построению для $\mu_n(z)$ заведомо не выполнено необходимое условие (12.5) слабой сходимости $\mu_n(z) \to \mu(z)$.

При этом, согласно критерию слабой компактности (см. [168], с. 317) можно дополнительно предполагать, что $\mu_n(z)$ сходится слабо в пространстве $L^p_{\rm loc}$ к некоторой функции $\nu(z) \ne \mu(z)$ п.в. Напомним, что

в силу известного представления линейных функционалов (см. [202], с. 252) это влечет за собой слабую сходимость $\mu_n(z) \to \nu(z)$ одновременно во всех пространствах $L^p,\ 1 \le p < \infty$. Таким образом, получаем усиление следствия 12.1:

Следствие 12.2. *Для любого $1 < Q < \infty$ существует последовательность $Q-$к.к. отображений $f_n : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, которая сходится л.р. к $Q-$к.к. отображению $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, такая, что $\mu_n(z) \to \nu(z)$ слабо одновременно во всех пространствах $L^p_{\rm loc},\ 1 \le p < \infty$, но $\mu(z) \ne \nu(z)$ п.в.*

2. Основная лемма. Здесь мы докажем лемму, которая является центральной для решения проблем замыкания различных классов квазиконформных отображений и их обобщений. Конструкция этой леммы восходит к работам [343, 357]. В явном виде она впервые была сформулирована автором в работе [153].

Лемма 12.1. *Пусть ν_1, ν_2, η – произвольные комплексные числа с $|\nu_1|$ и $|\nu_2| \le k < 1,\ |\eta| = 1$ и пусть $\lambda \in [0, 1]$. Тогда существует последовательность $K-$к.к. отображений $F_n : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ K = (1+k)/(1-k)$, с комплексными характеристиками $\mu_n(z),\ n = 1, 2, \ldots$, принимающими только два значения ν_1 и ν_2, которая сходится локально равномерно к некоторому аффинному $K-$к.к. отображению $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с комплексной характеристикой $\mu(z) \equiv \nu_0$, где ν_0 однозначно определяется из соотношения*

$$\frac{\eta + \nu_0}{\eta - \nu_0} = \lambda \frac{\eta + \nu_1}{\eta - \nu_1} + (1 - \lambda) \frac{\eta + \nu_2}{\eta - \nu_2}. \tag{12.8}$$

Кроме того, для любой функции $\psi(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ на каждом измеримом множестве $\mathcal{E}$ с $\operatorname{mes} \mathcal{E} < \infty$ существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{\mathcal{E}} \psi(\mu_n(z))\, dx\, dy \ &= \qquad\qquad (12.9) \\ &= \ \{\lambda \psi(\nu_1) + (1 - \lambda)\psi(\nu_2)\} \operatorname{mes} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

При этом, выбор последовательности измеримых множеств

$$E_n = \{z \in \mathbb{C} : \mu_n(z) = \nu_1\} \tag{12.10}$$

зависит только от чисел η и λ, но не зависит от конкретных значений ν_1 и ν_2.

Здесь, в силу секвенциальной компактности класса $H(K)$ (см. п. 11.3.1), леммы сравнения 11.7 (п. 11.3.3), а также аксиомы Урысона

(п. B1) можно дополнительно предполагать, что F и $F_n \in H(K)$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е. что отображения нормированы: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha = (\vartheta + \pi)/2$, где $\vartheta = \arg \eta$. Рассмотрим аффинные $K-$квазиконформные отображения

$$g_l(z) = (z + \nu_l \overline{z})/(e^{i\alpha} + \nu_l e^{-i\alpha}),\ l = 0,\ 1,\ 2.$$

При этих отображениях растяжение в направлении $e^{i\alpha}$ равно единице, а прямые, параллельные $e^{i\alpha}$, переходят в прямые, параллельные вещественной оси. Далее, $\Delta g_l = ih\varkappa_l$ при $\Delta z = ihe^{i\alpha}$, где $\varkappa_l = (\eta + \nu_l)/(\eta - \nu_l), \operatorname{Re} \varkappa_l > 0,\ l = 0,\ 1,\ 2$. Таким образом, указанные отображения можно склеивать непрерывным образом с сохранением ориентации и однолистности вдоль любых прямых, параллельных вектору $e^{i\alpha}$, простым сдвигом на комплексную постоянную. В силу устранимости аналитических дуг (см. [270], с. 47) получаемые отображения будут $K-$квазиконформными.

Зафиксируем $n = 1, 2, \ldots$, и разобьем плоскость на полосы, параллельные вектору $e^{i\alpha}$, прямыми $z_{mn}(t) = e^{i\alpha}t + ie^{i\alpha}m2^{-n},\ t \in \mathbb{R},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Каждую такую полосу, в свою очередь, разобьем на две полоски промежуточной прямой $\widetilde{z}_{mn}(t) = e^{i\alpha}t + ie^{i\alpha}(m2^{-n} + \lambda 2^{-n})$. Между прямыми $z_{0n}(t)$ и $\widetilde{z}_{0n}(t)$ полагаем $F_n(z) \equiv g_1(z)$. Во всех остальных полосах принимаем по определению $F_n(z) \equiv g_l(z) + c^l_{mn}$, где $l = 1$ между прямыми $z_{mn}(t)$ и $\widetilde{z}_{mn}(t)$ и $l = 2$ между $\widetilde{z}_{mn}(t)$ и $z_{(m+1)n}(t)$, а постоянные c^l_{mn} находятся индукцией по $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в обе стороны от нуля из условия склеивания.

По построению $\Delta F_n = i\{\lambda\varkappa_1 + (1 - \lambda)\varkappa_2\}2^{-n} = i\varkappa_0 2^{-n} = \Delta g_0$ при $\Delta z = ie^{i\alpha}2^{-n}$ и $F_n(z) \equiv g_1(z) \equiv g_0(z)$ на прямой $z_{0n}(t)$. Следовательно, $F_n(z) \equiv g_0(z)$ на всех прямых $z_{mn}(t),\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Так как $z_{mn}(t) \equiv z_{(2m)(n+1)}(t)$, то при увеличении n происходит лишь добавление указанных прямых дробления. Таким образом, на множестве всех точек прямых $z_{mn}(t),\ t \in \mathbb{R},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots$, которое всюду плотно в $\mathbb{C}$, последовательность $F_n(z)$ сходится при $n \to \infty$ к $K-$квазиконформному отображению $F(z) \equiv g_0(z)$, а потому сходится к нему и локально равномерно (см. [270], с. 76). Соотношение (12.9) следует непосредственно из распределения мер между значениями ν_1 и ν_2 в комплексных характеристиках $\mu_n(z),\ n = 1, 2, \ldots$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 12.1. 1) Секвенциальная компактность класса $H_{\text{inv co } M} \subseteq H(Q(z))$ вытекает непосредственно из теоремы 11.2, предложения 11.10 и замечания, следующего за ним.

2) Включение $H_M \subseteq H_{\text{inv co } M}$ очевидно и потому в силу предыдущего пункта доказательства:

$$\overline{H_M} \subseteq H_{\text{inv co } M}. \tag{12.11}$$

3) Докажем обратное включение

$$H_{\text{inv co } M} \subseteq \overline{H_M}. \tag{12.12}$$

Поскольку (см. [229], с. 44)

$$\overline{\overline{H_M}} \subseteq \overline{H_M}, \tag{12.13}$$

то в силу теоремы А3 для этого достаточно показать, что

$$H_{\widehat{M}} \subseteq \overline{H_M}, \tag{12.14}$$

где $\widehat{M}$ – дуговое замыкание M.

Итак, пусть отображение $f \in H_{\widehat{M}}$ и $\mu \in \mathfrak{M}_{\widehat{M}}$ – его комплексная характеристика. Тогда, по лемме Б5 об измеримых опорах, найдется пара функций $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}_M$ таких, что для почти всех $z \in \mathbb{C}$:

$$\mu(z) = \omega(\eta(z), \lambda(z); \varphi(z), \psi(z))$$

при некоторых измеримых функциях $\eta(z) = e^{i\vartheta(z)},\ \vartheta(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ и $\lambda(z) : \mathbb{C} \to [0, 1]$.

Пусть

$$T_m^l = \{t \in \mathbb{R} : l2^{-m} \le t < (l+1)2^{-m}\},$$

$l = 0, \pm1, \pm2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность сетей, покрывающих $\mathbb{R}$, и

$$\mathcal{E}_m = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \le m\}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

При каждом фиксированном $m = 1, 2, \ldots$, совокупность множеств точек плоскости $z \in \mathcal{E}_m$, для которых $\vartheta(z) \in T_m^{k_1},\ \lambda(z) \in T_m^{k_2}$, $\operatorname{Re} \varphi(z) \in T_m^{k_3}$, $\operatorname{Im} \varphi(z) \in T_m^{k_4},\ \operatorname{Re} \psi(z) \in T_m^{k_5}$ и $\operatorname{Im} \psi(z) \in T_m^{k_6}$ образуют счетное дизъюнктное покрытие $\mathcal{E}_m^k,\ k = (k_1, k_2, \ldots, k_6)$, множества $\mathcal{E}_m$.

Полагая $\vartheta_m(z) \equiv \vartheta_m^k = k_1 2^{-m},\ \lambda_m(z) \equiv \lambda_m^k = k_2 2^{-m},\ \varphi(z) \equiv \varphi_m^k = (k_3 + ik_4)2^{-m}, \psi_m(z) \equiv \psi_m^k = (k_5 + ik_6)2^{-m}$ на каждом из множеств $\mathcal{E}_m^k$ и $\vartheta_m(z) \equiv 0,\ \lambda_m(z) \equiv 0,\ \varphi_m(z) \equiv \psi_m(z) \equiv \varphi(z)$ на множестве $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_m$, мы можем определить последовательность функций

$$\mu_m(z) = \omega\left(\eta_m(z), \lambda_m(z); \varphi_m(z), \psi_m(z)\right)$$

такую, что на каждом $\mathcal{E}_m^k$

$$\mu_m(z) \equiv \mu_m^k \stackrel{def}{=} \omega\left(\eta_m^k, \lambda_m^k; \varphi_m^k, \psi_m^k\right)$$

и $\mu_m(z) \equiv \varphi(z)$ на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_m$. При этом, как видно из построения и условия Липшица (A12), $\mu_m(z) \to \mu(z)$ при $m \to \infty$ и

$$p_m(z) = \frac{1 + |\mu_m(z)|}{1 - |\mu_m(z)|} \le Q(z)$$

п.в. на $\mathbb{C}$, и, в частности, $p_m(z) \le m$ п.в. на $\mathcal{E}_m$. В дальнейшем $f_m \in H(Q(z))$ – отображение с характеристикой μ_m.

По лемме 12.1 при каждом фиксированном k и m найдется последовательность множеств плоскости $E^l_{mn},\ n = 1, 2, \ldots$, такая, что для

$$\mu^k_{mn}(z) = \begin{cases} \varphi^k_m, & z \in E^k_{mn}, \\ \psi^k_m, & z \in \mathbb{C} \setminus E^k_{mn}. \end{cases}$$

соответствующие нормированные $m-$к.к. отображения f^k_{mn} сходятся л.р. к аффинному $m-$к.к отображению f^k_m с характеристикой $\mu^k_m(z) \equiv \mu^k_m,\ z \in \mathbb{C}$.

Пусть при любом фиксированном m, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\mu_{mn}(z) \equiv \mu^k_{mn}(z)$$

на каждом из множеств $\mathcal{E}^k_m$ и $\mu_{mn}(z) \equiv \varphi(z)$ на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_m$. Обозначим через f_{mn} и f_m отображения класса $H(m)$ с характеристиками μ_{mn} и μ_m, соответственно. Тогда по построению, в силу леммы сравнения (лемма 11.7), секвенциальной компактности $H(m)$ и аксиомы Урысона (п. B1) $f_{mn} \to f_m$ л.р. при $n \to \infty$.

Пусть теперь ρ – какая-либо метрика в пространстве $H(Q(z))$ (см. п. 11.3.1). Тогда для каждого $m = 1, 2, \ldots$, найдется индекс n_m такой, что

$$\rho(f^{(m)}, f_m) < 1/m,$$

где $f^{(m)} \in H(Q(z))$ – отображение с характеристикой

$$\mu^{(m)}(z) = \mu_{mn_m}(z).$$

Поскольку $\mu_m(z) \to \mu(z)$ п.в. при $m \to \infty$, то по следствию 11.9 (см. п. 11.3.1) $f_m \to f$ л.р. и потому $\rho(f_m, f) \to 0$ при $m \to \infty$. Но тогда и $\rho(f^{(m)}, f) \to 0$, т.е. $f^{(m)} \to f$ л.р. при $m \to \infty$.

Далее, пусть для любых m, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\widetilde{\mu}_{mn}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in \mathcal{E}^k_m \cap E^k_{mn}, \\ \psi(z), & z \in \mathcal{E}^k_m \cap \left(\mathbb{C} \setminus E^k_{mn}\right), \\ \varphi(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_m, \end{cases}$$

где в мультииндиксе $k = (k_1, k_2, \ldots, k_6),\ k_l,\ l = 1, 2, \ldots, 6$, пробегают значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Полагая $\widetilde{\mu}_m(z) \equiv \widetilde{\mu}_{mn_m}(z),\ E_m^k = E_{mn_m}^k$, по построению имеем, что

$$\widetilde{\mu}^{(m)}(z) - \widetilde{\mu}_m(z) = \begin{cases} \varphi_m(z) - \varphi(z), & z \in \mathcal{E}_m^k \cap E_m^k, \\ \psi_m(z) - \psi(z), & z \in \mathcal{E}_m^k \cap \left(\mathbb{C} \setminus E_m^k\right), \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_m. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|\mu^{(m)}(z) - \widetilde{\mu}_m(z)| \le \max\{|\varphi_m(z) - \varphi(z)|, |\psi_m(z) - \psi(z)|\}$$

для почти всех $z \in \mathbb{C}$ и, поскольку $\varphi_m \to \varphi,\ \psi_m(z) \to \psi$ п.в., то и $\mu^{(m)}(z) - \widetilde{\mu}_m(z) \to 0$ п.в. при $m \to \infty$. Обозначим через $\widetilde{f}_m \in H(Q(z))$ – отображения с характеристиками $\widetilde{\mu}_m,\ m = 1, 2, \ldots$. Тогда опять же по лемме сравнения 11.7, предположению 11.10 и аксиоме Урысона $\widetilde{f}_m \to f$ л.р. Остается только заметить, что $\widetilde{f}_m \in H_M,\ m = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $f \in \overline{H_M}$. □

12.2. Критерий компактности

В параграфе доказаны необходимые и достаточные условия компактности $Q(z)-$к.к. отображений с ограничениями общего теоретико-множественного типа (теорема 12.2). Эта теорема усиливает и обобщает известный результат Шиффера-Шобера о достаточных условиях компактности.

1. Необходимые и достаточные условия компактности. В обозначениях пункта 12.1.1 имеет место:

Теорема 12.2. *Пусть функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена и семейство непустых замкнутых множеств $M(z) \subseteq \Delta_{q(z)},\ z \in \mathbb{C}$, измеримо по параметру z. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) класс H_M секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;

2) множества $M(z)$ инвариантно-выпуклы для п.в. $z \in \mathbb{C}$.

При этом, условие 2) остается достаточным для компактности класса H_M и при отсутствии измеримости $M(z)$. Однако в этом случае данное

условие перестает быть необходимым, как показывает пример, приведенный в п. 12.1.1. В этом случае также нет гарантий непустоты класса H_M.

Отметим также, что в компактных классах H_M множество комплексных характеристик $\mathfrak{M}_M$ является выпуклым. Это имеет важное значение для теории вариационного метода.

Следствие 12.3. *Пусть*

$$K(z) = \{z \in \mathbb{C} : |\nu - c(z)| \le r(z)\}$$

– семейство кругов из Δ с измеримой комплексной координатой центра $c(z)$ и измеримым радиусом $r(z)$. Если при этом функция $Q(z) = (1 + q(z))/(1-q(z))$, $q(z) = r(z)+|c(z)|$, экспоненциально ограничена по мере, то класс H_K секвенциально компактен и не пуст.

В качестве примера некомпактного класса можно привести H_M, где

$$M(z) \equiv \{\nu \in \mathbb{R} : 0 \le \nu \le q\}, \quad 0 < q < 1,$$

состоит из отрезка прямой. Это множество не является инвариантно-выпуклым, хотя и выпукло. Любое инвариантно-выпуклое множество M из Δ является строго выпуклым множеством, т.е. его граница не может содержать отрезков прямых.

Вообще инвариантно-выпуклые множества могут быть охарактеризованы в терминах кривизны границы. Именно, пусть Ω – выпуклое множество из Δ. Тогда $\partial\Omega$ является спрямляемой кривой. Пусть $\omega(s)$ – ее естественная параметризация. В силу выпуклости $\partial\Omega$ в каждой ее точке существуют односторонние производные $d\omega(s)/ds$, которые определяют единичные векторы $\tau^{\pm}(s)$ односторонних касательных к этой кривой. Обозначим через $n^{\pm}(s)$ единичные векторы соответствующих "внутренних" нормалей к $\partial\Omega$. Далее, опять же в силу выпуклости $\partial\Omega$, единичные векторы $\tau^{\pm}(s)$ монотонно вращаются при изменении s и потому существуют вторые, конечные или бесконечные, односторонние производные $d^2\omega(s)/ds^2 = d\tau^{\pm}(s)/ds$, модули которых определяют односторонние кривизны $k^{\pm}(s)$ кривой $\partial\Omega$. Как показывают элементарные выкладки, в случае границы $\partial\Omega$ инвариантно-выпуклого множества Ω имеют место характеристические неравенства (см. теорему A1):

$$k^{\pm}(s) \ge 2\,\frac{1 + (n^{\pm}(s), \omega(s))}{1 - |\omega(s)|^2}, \tag{12.15}$$

где через (n, ω) обозначено скалярное произведение векторов n и ω. Если кривая $\partial\Omega$ при этом принадлежит классу C^2, то (12.15) переходит в

неравенство:

$$k(s) \geq 2\,\frac{1+(n(s),\omega(s))}{1-|\omega(s)|^2}, \tag{12.16}$$

где $k(s)$ – кривизна, а $n(s)$ – единичный вектор внутренней нормали кривой $\partial\Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 12.2. 2) $\Longrightarrow$ 1). При указанных условиях $M = \text{inv co } M$, следовательно, $H_M = H_{\text{inv co } M}$ и по теореме 12.1 класс секвенциально компактен.

1) $\Longrightarrow$ 2). По следствию 11.10 секвенциальная компактность класса H_M эквивалентна его замкнутости, т.е.

$$\overline{H_M} = H_M.$$

Но тогда по теореме 12.1

$$H_{\text{inv co } M} = H_M.$$

Отсюда, в силу результата Давида (см. п. 11.3.1),

$$\mathfrak{M}_{\text{inv co } M} = \mathfrak{M}_M$$

и по теореме Б5 для п.в. $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{inv co } M(z) = M(z),$$

т.е. $M(z)$ являются инвариантно-выпуклыми множествами для п.в. $z \in \mathbb{C}$. □

12.3. К теории вариационного метода.

В данном параграфе собраны основные следствия теорем замыкания и компактности для теории вариационного метода.

В пункте 1 сформулирован принцип редукции экстремальных задач из некомпактных классов в компактные (следствия 12.4). Главное преимущество компактных классов заключается в том, что для любых непрерывных, в том числе нелинейных, функционалов гарантировано существование экстремальных отображений.

Кроме того, в компактных классах множество комплексных характеристик оказывается выпуклым множеством. На этой основе в пункте 2 проведено построение вариаций (лемма 12.2).

Главный результат параграфа – вариационный принцип максимума – сформулирован и доказан в пункте 3 (теорема 12.3).

В пункте 4 приводятся также и другие необходимые условия экстремума (предложение 12.1, следствия 12.5, 12.6).

1. Принцип редукции. Пусть H – множество всех гомеоморфизмов расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя класса $\mathcal{ACL}$ с нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Непосредственно из теоремы 12.1 о замыкании классов H_M получаем:

Следствие 12.4. *Пусть выполнены условия теоремы 12.1. Тогда для любого непрерывного функционала* $\Omega : H \to \mathbb{R}$

$$\sup_{f \in H_M} \Omega(f) = \max_{f \in H_{\text{inv co } M}} \Omega(f). \tag{12.17}$$

Заметим, что в силу теоремы 12.1 класс $H_{\text{inv co } M}$ компактен. Таким образом, экстремальная задача о $\sup \Omega$, первоначальна заданная, вообще говоря, на некомпактном классе H_M, сводится к экстремальной задаче о $\max \Omega$ на компактном классе того же вида. Поэтому в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением экстремальных задач на компактных классах H_M.

Подчеркнем, что компактные классы обладают тем основным преимуществом, что в них всегда гарантируется существование экстремального отображения. Поэтому необходимые условия экстремума в таких классах могут быть использованы для доказательства теорем существования и представления решений различных уравнений, возникающих при этом.

Наоборот, в некомпактных классах необходимые условия экстремума относятся, вообще говоря, к пустому множеству отображений и они в значительной степени обесцениваются.

Кроме того, как мы увидим, в компактных классах гораздо проще построение вариаций.

2. Построение вариаций в компактных классах. В силу теоремы 12.2 в компактных классах H_M множество комплексных характеристик $\mathfrak{M}_M$ является выпуклым. Поэтому, если μ и $\nu \in \mathfrak{M}_M$, то

$$\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon(\nu - \mu) \tag{12.18}$$

также принадлежит $\mathfrak{M}_M$ при всех $\varepsilon \in [0, 1]$. Таким образом, вариация $\mu_\varepsilon,\ \varepsilon \in [0, 1]$, характеристики μ порождает соответствующую вариацию $f_\varepsilon,\ \varepsilon \in [0, 1]$, отображения f в классе H_M.

Лемма 12.2. *Пусть $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и пусть $M(z),\ z \in \mathbb{C}$, – произвольное семейство выпуклых множеств из $\Delta_{q(z)} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \le q(z)\},\ q(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$. Далее, пусть $\mu \in \mathfrak{M}_M$ – комплексная характеристика отображения $f \in H_M$, а $\nu \in \mathfrak{M}_M$ такова, что*

$$\varkappa = (\nu - \mu)/(1 - |\mu|^2) \tag{12.19}$$

принадлежит открытому единичному шару в $L^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует вариация f_ε отображения f в классе H_M вида

$$f_\varepsilon(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\varepsilon}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} (\nu(z) - \mu(z))\varphi(f(z), f(\zeta)) f_z^2 \, dx \, dy + o(\varepsilon), \tag{12.20}$$

где

$$\varphi(w, w') = \frac{1}{w - w'} \frac{w'}{w} \frac{w' - 1}{w - 1}. \tag{12.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\varkappa_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon \varkappa(z)}{1 - \varepsilon \varkappa(z) \overline{\mu(z)}} = \varepsilon \varkappa(z) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon \varkappa(z) \overline{\mu(z)} \right]^n. \tag{12.22}$$

Поскольку $\|\varkappa\|_\infty = k < 1$, то при $\varepsilon \in [0, 1/2]$:

$$\|\varkappa_\varepsilon\|_\infty \le \frac{\varepsilon k}{1 - \varepsilon k} \le \frac{k}{2 - k} = q < 1. \tag{12.23}$$

Далее, пусть

$$\gamma_\varepsilon = \left(\varkappa_\varepsilon \frac{f_z}{\overline{f_z}} \right) \circ f^{-1}(w). \tag{12.24}$$

В силу теоремы Давида, f является локально абсолютно непрерывным гомеоморфизмом вместе со своим обратным f^{-1} (см. [165], с. 27). Поэтому $\|\gamma_\varepsilon\|_\infty \le q < 1$ при $\varepsilon \in [0, 1/2]$.

Рассмотрим семейство $Q-$к.к. ($Q = (1 + q)/(1 - q)$) отображений $g_\varepsilon : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ \varepsilon \in [0, 1/2]$, с характеристиками γ_ε, которые оставляют неподвижными точки 0, 1, и ∞. Тогда по теореме о дифференцировании $Q-$к.к. отображений по параметру (см. [16], с. 96):

$$g_\varepsilon(w') = w' - \frac{\varepsilon}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \gamma(w) \varphi(w, w') du \, dv + o(\varepsilon, w'), \tag{12.25}$$

где

$$\gamma(w)=\left(\varkappa\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right)\circ f^{-1}(w) \tag{12.26}$$

и $o(\varepsilon,w')/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ л.р. относительно $w'\in\mathbb{C}$.

Как легко видеть, $f_\varepsilon=g_\varepsilon\circ f$, где через $f_\varepsilon\in H_M$ обозначены отображения с характеристиками μ_ε из (12.18). Следовательно,

$$f_\varepsilon(\zeta)=f(\zeta)-\frac{\varepsilon}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\gamma(w)\varphi(w,f(\zeta))\,du\,dv+o(\varepsilon,\zeta), \tag{12.27}$$

где $o(\varepsilon,\zeta)/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ л.р. относительно $\zeta\in\mathbb{C}$. Отсюда, опять же в силу локальной абсолютной непрерывности гомеоморфизма f, делая замену переменной (см. [270], с.126 и 136), после элементарных преобразований приходим к (12.20). □

3. Вариационный принцип максимума. Будем говорить, что функционал $\Omega: H_M\to\mathbb{R}$ является *дифференцируемым по Гато,* если

$$\Omega(f_\varepsilon)=\Omega(f)+\varepsilon\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathbb{C}}g\,d\varkappa+o(\varepsilon) \tag{12.28}$$

для любой вариации $f_\varepsilon=f+\varepsilon g+o(\varepsilon)$ в классе H_M, где $\varkappa=\varkappa_f$ – некоторая конечная комплексная борелевская мера с компактным носителем. Другими словами, существует непрерывный и линейный по первой переменной функционал $L(g;f)$ такой, что

$$\Omega(f_\varepsilon)=\Omega(f)+\varepsilon\,\mathrm{Re}\;L(g;f)+o(\varepsilon) \tag{12.29}$$

(см. [407], с. 138–139).

Ниже предполагается, что $\varphi(w,f(\zeta))$ локально интегрируемо для любого $f\in H_M$ относительно произведения мер $dm_w\otimes d\varkappa(\zeta)$, где φ – ядро из (12.21), m – плоская мера Лебега, и п.в.

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\varphi(w,f(\zeta))d\varkappa(\zeta)\neq 0. \tag{12.30}$$

В этом случае говорим, что Ω дифференцируем по Гато *без вырождения* на классе H_M.

В указанных терминах имеет место:

Теорема 12.3. (***Вариационный принцип максимума***) *Пусть измеримое по z семейство непустых компактных инвариантно - выпуклых множеств $M(z),\ z \in \mathbb{C}$, удовлетворяет включению (12.2) с $Q(z)$ экспоненциально ограниченной по мере, а функционал $\Omega : H_M \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Если на отображении $f \in H_M$ достигается $\max\Omega$ по классу H_M, то его комплексная характеристика удовлетворяет включению*

$$\mu(z) \in \partial M(z) \tag{12.31}$$

для п.в. $z \in \mathbb{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mu \in \mathfrak{M}_M$, то без ограничения общности можно считать, что $\mu(z) \in M(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Допустим, что множество

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \mu(z) \notin \partial M(z)\}$$

имеет положительную меру.

Введем обозначения

$$E_m = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \le m\}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и

$$K_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}, \quad z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0.$$

Обозначим через $\chi,\ \chi_m,\ \chi_{z_0,r}$ – характеристические функции множеств $E,\ E_m,\ K_{z_0,r}$. Далее, пусть $\alpha_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ – перенумерация всех рациональных чисел из $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\rho_n(z),\ n = 1, 2, \ldots,$ – расстояние от $\mu(z)$ до точек пересечения лучей $\mu(z) + te^{i\alpha_n},\ t > 0$, с $\partial M(z)$.

Покажем, что функции $\rho_n(z),\ n = 1, 2, \ldots$, являются измеримыми по z. Действительно, пусть

$$\Lambda_n(z) = \{\nu \in \mathbb{C} :\ \nu = \mu(z) + te^{i\alpha_n}, \quad 0 \le t \le 2\}$$

– отрезок луча, исходящего из точки $\mu(z)$ в направлении $e^{i\alpha_n}$ длины 2. Измеримость $\Lambda_n(z)$ по z следует, например, из критерия f) теоремы Б1 и общих свойств элементарных операций над измеримыми функциями (см., напр., [360], с. 29–31). Следовательно, измеримы также семейства множеств $M_n(z) = M(z) \cap \Lambda_n(z)$ и $\{\eta_n(z)\} = \partial\Delta \cap \Lambda_n(z)$, где $\partial\Delta = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| = 1\}$ – единичная окружность (см. лемму Б1). Таким образом, функции $\eta_n(z),\ n = 1, 2, \ldots,$ измеримы, например, в силу теоремы Б4. По критерию f) теоремы Б1 измеримы также функции расстояния

$$r_n(z) = \min_{\nu \in \Lambda_n(z)} |\nu - \eta_n(z)|.$$

После этого остается заметить, что

$$\rho_n(z) = |\mu(z) - \eta_n(z)| - r_n(z).$$

Рассмотрим функции

$$\mu_n(z) = \mu(z) + \rho_n(z)e^{i\alpha_n}.$$

Они очевидно принадлежат классу $\mathfrak{M}_M$. Поскольку указанный класс является выпуклым множеством, то и функции

$$\nu_n(z) = \mu(z) + \lambda(z)(\mu_n(z) - \mu(z)) = (1 - \mu(z))\mu(z) + \lambda(z)\mu_n(z)$$

принадлежат классу $\mathfrak{M}_M$ для произвольной измеримой функции $\lambda(z) : \mathbb{C} \to [0, 1]$. В частности, классу $\mathfrak{M}^{\Phi}$ принадлежат функции

$$\nu_{z_0,r}^{m,n}(z) = \mu(z) + \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)(\mu_n(z) - \mu(z)),$$

где

$$\lambda_m(z) = \frac{1 - |\mu(z)|^2}{2}\chi(z)\chi_m(z).$$

При этом, функции

$$\varkappa_{z_0,r}^{m,n} := \frac{\nu_{z_0,r}^{m,n}(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \frac{\mu_n(z) - \mu(z)}{2}\chi(z)\chi_m(z)\chi_{z_0,r}(z)$$

принадлежат замкнутому шару радиуса $q_m = (m-1)/(m+1) < 1$ в пространстве $L^{\infty}(\mathbb{C})$.

В силу экстремальности f, применяя лемму 2.2 с $\nu = \nu_{z_0,\,r}^{m,\,n}$, получаем, что

$$\operatorname{Re} \iint\limits_{\mathbb{C}} \left[\iint\limits_{|z-z_0|\le r} \varphi_{mn}(z,\zeta)\,dx\,dy \right] d\varkappa(\zeta) \ge 0,$$

где

$$\varphi_{m,n}(z,\zeta) = \lambda_m(z)(\mu_n(z) - \mu(z))f_z^2\varphi(f(z), f(\zeta)).$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$\psi_{z_0,r}^{m,n}(w,\zeta) = \left(\varkappa_{z_0,r}^{m,n}(z) \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1}(w)\,\varphi(w, f(\zeta)).$$

Они интегрируемы относительно произведения мер $dm_w \otimes d\varkappa(\zeta)$ (см. [79], с. 215) и по теореме Лебега-Фубини (см. [79], с. 353) после замен переменной (см. [270], с. 126, 136) в условии экстремальности можем поменять

порядок интегрирования:

$$\iint\limits_{|z-z_0|\le r}\left[\operatorname{Re}\iint\limits_{\mathbb{C}}\varphi_{mn}(z,\zeta)d\varkappa(\zeta)\right]dx\,dy\ge 0,$$

В силу теоремы Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [360], с. 180), $m,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$ для п.в. $z\in\mathbb{C}$ имеем неравенства

$$\lambda_m(z)\ \operatorname{Re}\ (\mu_n(z)-\mu(z))\mathcal{B}(z)\ge 0,$$

где $\mathcal{B}(z)=\mathcal{A}(f(z))f_z^2,\mathcal{A}(w)$ задано (12.30). Другими словами

$$\rho_n(z)\operatorname{Re}\ \mathcal{B}(z)e^{i\alpha_n}\ge 0,$$

$n=1,\ 2,\ \ldots,$ для п.в. $z\in E\cap E_m$. Поскольку же $E_m,\ m=1,\ 2,\ \ldots,$ образуют исчерпание плоскости $\mathbb{C}$ по мере, то последнее имеет место для п.в. $z\in\mathbb{C}$. С другой стороны, $\rho_n(z)>0,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$ на E и, таким образом, это равносильно неравенствам

$$\operatorname{Re}\ \mathcal{B}(z)e^{i\alpha_n}\ge 0$$

$n=1,\ 2,\ \ldots,$ для п.в. $z\in E$.

В силу произвола $\alpha_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$ отсюда имеем вообще:

$$\operatorname{Re}\ \mathcal{B}(z)e^{i\alpha}\ge 0$$

для п.в. $z\in E$ при любом $\alpha\in[0,2\pi)$. В частности, при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$ получаем

$$\pm\operatorname{Re}\ \mathcal{B}(z)\ge 0,$$

т.е.

$$\operatorname{Re}\ \mathcal{B}(z)=0,$$

а при $\alpha=\pi/2$ и $\alpha=3\pi/2$

$$\pm\operatorname{Im}\ \mathcal{B}(z)\ge 0,$$

т.е.

$$\operatorname{Im}\ \mathcal{B}(z)=0.$$

Таким образом,

$$\mathcal{B}(z)=0$$

для п.в. $z\in E$.

Однако это невозможно, т.к. $\mathcal{A}(w) \neq 0$ п.в. и по теореме Давида гомеоморфизмы f и f^{-1} являются абсолютно непрерывными (см. [165], с. 27). Полученное противоречие и показывает, что $\operatorname{mes} E = 0$, т.е. $\mu(z) \in \partial M(z)$ п.в. $\square$

4. Другие необходимые условия экстремума. Для формулировки необходимых условий экстремума нам потребуется еще одно понятие. Именно, пусть $\mu \in \mathfrak{M}_M$. Тогда через $\omega_\mu(z)$ обозначим *конус допустимых направлений* (см., например, [278], с. 12) для множества $M(z)$ в точке $\mu(z)$, т.е. множество всех $\omega \in \mathbb{C},\ \omega \neq 0$, таких, что $\mu(z)+\varepsilon\omega \in M(z)$ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Отметим, что для строго выпуклых множеств $M(z)$, каковыми являются инвариантно-выпуклые множества, конус допустимых направлений $\omega_\mu(z)$ при каждом z является открытым выпуклым конусом. Почти дословно повторяя доказательство предыдущей теоремы 12.3, получаем:

Предложение 12.1. *В условиях теоремы 12.3 экстремаль f в задаче о $\max \Omega$ на классе H_M удовлетворяет неравенствам*

$$\operatorname{Re}\ \omega\mathcal{B}(z) \geq 0 \tag{12.32}$$

для почти всех $z \in \mathbb{C}$ при всех ω из конуса допустимых направлений $\omega_\mu(z)$, где

$$\mathcal{B}(z) = \mathcal{A}(f(z))f_z^2. \tag{12.33}$$

Здесь $\mathcal{A}(w)$ задается соотношением (12.30).

Следствие 12.5. *Если дополнительно при п.в. $z \in E$ граница $\partial M(z)$ регулярна, т.е. в каждой своей точке имеет касательную, то (12.32) переходит в неравенство*

$$n(z)\mathcal{B}(z) \geq 0 \tag{12.34}$$

для п.в. $z \in E$, где $n(z)$ – единичный вектор внутренней нормали к $\partial M(z)$ в точке $\mu(z)$.

В частности, если функционал $\Omega : H_M \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения и

$$M(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - c(z)| \leq k(z)\} \tag{12.35}$$

– семейство замкнутых кругов в открытом единичном круге Δ в $\mathbb{C}$ при некоторых измеримых функциях $c(z)$ и $k(z)$, то по принципу максимума

$$n(z) = \frac{c(z) - \mu(z)}{k(z)} \tag{12.36}$$

и соотношение (12.34) п.в. эквивалентно тому, что

$$\frac{c(z)-\mu(z)}{k(z)}=\frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|}, \tag{12.37}$$

т.е.

$$\mu(z)=c(z)-k(z)\frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|}. \tag{12.38}$$

Таким образом, имеем:

Следствие 12.6. *Пусть $M(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – семейство кругов (12.35) измеримое по параметру z, $q(z):=k(z)+|c(z)|$ и функция $Q(z):=(1+q(z))/(1-q(z))$ экспоненциально ограничена по мере, а функционал $\Omega: H_M\to\mathbb{C}$ дифференцируем по Гато без вырождения.*

Тогда экстремаль задачи о $\max\Omega$ на классе H_M существует и удовлетворяет уравнению

$$f_{\overline{z}}=c(z)f_z-k(z)\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\overline{f_z}. \tag{12.39}$$

В частности, при $c(z)=0$ получаем решение уравнения

$$f_{\overline{z}}=-k(z)\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\overline{f_z} \tag{12.40}$$

в классе $H(K(z))$, где функция $K(z)=(1+k(z))/(1-k(z))$ экспоненциально ограничена по мере.

Глава 13

О КЛАССАХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

В главе исследуются классы гомеоморфизмов с ограничениями на дилатацию интегрального типа. В остальном, как легко заметить, структура этой главы совершенно аналогична предыдущей.

Единственным априорным условием здесь является экспоненциальный рост на ∞ подынтегральной функции, а какие-либо предварительные условия регулярности типа измеримости или, тем более, непрерывности отсутствуют. Таким образом, изучается предельно общая ситуация.

В §13.1 доказана теорема о замыкании указанных классов, сформулированная в терминах так называемой нижней огибающей (теорема 13.1).

В §13.2 получены необходимые и достаточные условия компактности таких классов (теорема 13.2).

Наконец, в §13.3 приведены основные следствия к теории вариационного метода в подобных классах, которые включают принцип редукции (следствие 13.4), выпуклость множества комплексных характеристик в компактных классах (следствие 13.5), построение вариаций (лемма 13.4). Главным результатом здесь является вариационный принцип максимума (теорема 13.3). Приведены и другие необходимые условия экстремума.

13.1. Теорема замыкания

Основной результат данного параграфа – теорема замыкания классов гомеоморфизмов с ограничениями на дилатацию интегрального типа (теорема 13.1).

В пункте 1 приведены определения и предварительные замечания. В частности, здесь содержится описание так называемой нижней огибающей (предложение 13.1), в терминах которой в пункте 2 сформулирован основной результат.

Доказательство теоремы 13.1 проведено на основе теоремы 11.1 в пункте 5 после того как в пункте 3 дано более конструктивное описание нижней огибающей, а в пункте 4 доказана "лемма о плотности".

1. Определения и предварительные замечания. Обозначим через H^{Φ} совокупность всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса $\mathcal{ACL}$ с нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$, и с интегральным ограничением на деформацию $p(z)$ вида:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))dx\,dy \le 1, \tag{13.1}$$

где $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – произвольная функция, где $I = [1, \infty]$, $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, \infty]$.

Нижней огибающей функции Φ будем называть функцию

$$\Phi_0(t) := \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(t),\ t \in I, \tag{13.2}$$

где Ψ – семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых (см. п. 11.1.2) функций $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\varphi(t) \le \Phi(t),\ t \in I$.

Из общих свойств выпуклых функций (см. [78], с. 56–66) получаем:

Предложение 13.1. *Нижняя огибающая функции $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ представляет собой наибольшую неубывающую выпуклую функцию $\Phi_0 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке*

$$Q = \sup_{\Phi(t) < \infty} t \tag{13.3}$$

и график которой лежит ниже графика Φ. При этом, $\Phi_0(t) \equiv \infty$ для $t > Q$ и $\Phi_0(t) < \infty$ для $t < Q$.

Более конструктивное описание нижней огибающей приведено ниже в пункте 3.

Будем говорить, что функция $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет *экспоненциальный рост на бесконечности*, если

$$\Phi(t) \ge \beta e^{\gamma t} \tag{13.4}$$

для всех $t \ge T$ при некоторых $T \ge 1,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$.

Предложение 13.2. *Пусть функция $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет экспоненциальный рост на ∞. Тогда ее нижняя огибающая $\Phi_0 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ также имеет экспоненциальный рост на ∞ и, при этом, для нее неравенство*

(13.4) выполняется при тех же $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что и для Φ, при всех $t \geq T^* = T + 1/\gamma$.

Действительно, при $t = T^* = T + 1/\gamma$ касательная к графику функции $\varphi_0(t) = \beta\, e^{\gamma t}$ проходит через точку $(\varphi, t) = (0, T)$, что эквивалентно равенству

$$\varphi_0(T^*) = \varphi_0'(T^*)(T^* - T)$$

и поэтому функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [1, T], \\ \varphi_0'(T^*)(t - T), & t \in [T, T^*], \\ \varphi_0(t), & t \in [T^*, \infty], \end{cases}$$

принадлежит классу Ψ, определяющему Φ_0.

Обозначим через $\mathfrak{M}^\Phi$ класс всех измеримых функций $\mu(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $|\mu(z)| \leq 1$, для которых $p(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$ удовлетворяет неравенству (13.1). Благодаря результату Давида [165] (см. п. 11.3.1), получаем:

Предложение 13.3. *Пусть $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет экспоненциальный рост на ∞. Тогда для любой функции $\mu \in \mathfrak{M}^\Phi$ существует и единственно отображение $f \in H^\Phi$ с комплексной характеристикой μ.*

Подчеркнем, что нигде в этом параграфе не предполагаются какие-либо дополнительные условия регулярности на $\Phi(t)$ типа измеримости или, тем более, непрерывности. При этом имеет место:

Предложение 13.4. *Пусть $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – произвольная функция с $\Phi(\infty) = \infty$. Тогда для непустоты класса H^Φ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{t \in I} \Phi(t) = 0. \tag{13.5}$$

Действительно, необходимость условия (13.5) очевидна. Достаточность проверяется непосредственно. Именно, пусть $t_n \in [1, \infty)$ – произвольная последовательность чисел таких, что $\Phi(t_n) \leq 2^{-n}/\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим отображение

$$f(z) = c_n z |z|^{t_n - 1},\ \sqrt{n-1} \leq |z| \leq \sqrt{n},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{13.6}$$

где $c_1 = 1$, а последующие c_n находятся по индукции из условия склеивания:

$$c_n n^{\frac{t_n}{2}} = c_{n+1} n^{\frac{t_{n+1}}{2}}.$$

Комплексная характеристика отображения f легко вычисляется:

$$\mu(z) = \frac{t_n - 1}{t_n + 1}\frac{z}{\overline{z}},\ \sqrt{n-1} < |z| < \sqrt{n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

т.е. деформация отображения f равна

$$p(z) = t_n,\ \sqrt{n-1} < |z| < \sqrt{n},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{13.7}$$

и по построению удовлетворяет (13.1). Как легко видеть, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Кроме того, отображение f переводит окружности с центром в нуле в такие же окружности, но с другими радиусами. Очевидно, что:

$$\frac{f(\sqrt{n+1})}{f(\sqrt{n})} = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{t_{n+1}} \geq \sqrt{\frac{n+1}{n}},\ n = 1, 2, \ldots,$$

и потому, рассуждая по индукции, имеем:

$$f(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n}, \tag{13.8}$$

т.е. $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ или $f(\infty) = \infty$. В силу устранимости аналитических дуг (см. [270], с. 47), f является локально квазиконформным.

2. Теорема замыкания. Как мы уже видели в пункте 11.3.1, локально равномерная сходимость метризуема, а потому порождает некоторую топологию в пространстве всех нормированных гомеоморфизмов плоскости.

Теорема 13.1. *Пусть $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет экспоненциальный рост на ∞. Тогда в топологии локально равномерной сходимости:*

$$\overline{H^\Phi} = H^{\Phi_0}, \tag{13.9}$$

где $\Phi_0 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – нижняя огибающая функции Φ. При этом, класс H^{Φ_0} является секвенциально компактным.

Отметим также одно обстоятельство, которое важно для теории вариационного метода:

Предложение 13.5. *Класс комплексных характеристик $\mathfrak{M}^{\Phi_0}$ является выпуклым множеством.*

Это следует из выпуклости и возрастания Φ_0 (предложение 13.1). Действительно, как непосредственно проверяется вычислением первой и второй производных, функция

$$\varkappa(\tau) = \frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{2}{1-\tau} - 1 \tag{13.10}$$

является возрастающей и выпуклой. Таким образом, привлекая еще неравенство треугольника, имеем:

$$\Phi_0\left(\varkappa\left(|\lambda\mu(z)+(1-\lambda)\nu(z)|\right)\right)\le\lambda\Phi_0\left(\varkappa\left(|\mu(z)|\right)+(1-\lambda)\Phi_0\left(\varkappa(|\nu(z)|\right)\right).$$

3. Конструктивное описание нижней огибающей. В порядке подготовки к доказательству и применению теоремы 13.1 приведем более детальное описание нижней огибающей. Пусть $I_0=[1,Q]$, где Q определено в (13.3). Как известно, (ср. [78], с. 56) выпуклость функции $\varphi: I_0\to\overline{\mathbb{R}^+}$ эквивалентна выпуклости ее надграфика, как двумерного множества:

$$\operatorname{epi}\varphi=\{(\alpha,t)\in\overline{\mathbb{R}^+}\times I_0:\alpha\ge\varphi(t)\}. \tag{13.11}$$

Если функция φ непрерывна, то ее надграфик является замкнутым множеством. Любое же замкнутое выпуклое множество можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полуплоскостей (ср. [336], с. 115). На этом основано следующее описание нижней огибающей:

Лемма 13.1. *График нижней огибающей Φ_0 на отрезке $I_0=[1,Q]$ функции $\Phi: I_0\to\overline{\mathbb{R}^+}$ состоит из замкнутых отрезков прямых, опорных к графику Φ с углами наклона $\vartheta\in[0,\pi/2]$. При этом концы этих отрезков, возможно вырождающихся в точку, принадлежат замыканию графика Φ по крайней мере для всех $\vartheta\in(0,\pi/2)$. При $\vartheta=\pi/2$ соответствующий отрезок всегда вырождается в точку*

$$\left(Q,\min\left\{\Phi(Q),\liminf_{t\to Q-0}\Phi(t)\right\}\right).$$

При $\vartheta=0$ левый конец такого отрезка есть точка $(1,\inf\Phi)$ которая, в отличии от правого конца, не всегда принадлежит замыканию графика Φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. График нижней огибающей Φ_0 представляет собой не что иное, как нижнюю часть границы ее надграфика $\operatorname{epi}\Phi_0$. Любая же точка τ границы выпуклого множества $\operatorname{epi}\Phi_0$ лежит на некоторой прямой, опорной к этому множеству (ср., напр., [336], с. 116). Обозначим через $\Pi_0(\vartheta)$ опорные полуплоскости к $\operatorname{epi}\Phi_0$ с углами наклона $\vartheta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Можно предполагать, что $\tau\in\partial\Pi_0(\vartheta)$ при некотором $\vartheta\in[0,\pi/2]$, т.к. опорные прямые $\partial\Pi_0(\vartheta)$ при $\vartheta\in[-\pi/2,0)$ содержат единственную точку графика $\operatorname{gr}\Phi_0$ неубывающей функции $\Phi_0(t)$ – его левый конец, который к тому же принадлежит $\partial\Pi_0(\vartheta)$ при $\vartheta=0$.

Поскольку функция Φ_0 непрерывна на отрезке I_0, то ее надграфик $\operatorname{epi}\Phi_0$ представляет собой замкнутое выпуклое множество и потому

$\operatorname{gr}(\vartheta) \stackrel{def}{=} \operatorname{gr}\Phi_0 \cap \partial\Pi_0(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, является замкнутым отрезком, который может, конечно, вырождаться в единственную точку.

Покажем, что опорные прямые $\partial\Pi_0(\vartheta)$ и $\partial\Pi(\vartheta)$ к надграфикам Φ_0 и Φ на I_0, соответственно, совпадают при $\vartheta \in [0, \pi/2]$. Действительно, поскольку $\Phi_0(t) \le \Phi(t)$, то

$$\Pi(\vartheta) \subseteq \Pi_0(\vartheta), \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Допустим, что хотя бы одна опорная прямая $\partial\Pi_0(\vartheta)$ лежит строго ниже $\partial\Pi(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Однако линейная функция φ отвечающая прямой $\partial\Pi(\vartheta)$ выпукла, непрерывна и не убывает, а также $\varphi(t) \le \Phi(t)$, $t \in I$. Следовательно, по определению нижней огибающей $\Phi_0(t) \ge \varphi(t)$, $t \in I$. С другой стороны, опорной прямой $\partial\Pi_0(\vartheta)$ принадлежит хотя бы одна точка графика Φ_0 и таким образом по предположению эта точка должна лежать строго ниже графика φ. Полученное противоречие и доказывает, что $\Pi(\vartheta) = \Pi_0(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Для $\vartheta = \pi/2$ это очевидно.

Итак,

$$\operatorname{gr}\Phi_0 = \bigcup_{\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]} \operatorname{gr}(\vartheta),$$

где

$$\operatorname{gr}(\vartheta) = \operatorname{gr}\Phi_0 \cap \partial\Pi(\vartheta), \ \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

действительно представляют собой замкнутые отрезки опорных к графику Φ прямых.

Докажем, что при $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$ концы этих отрезков принадлежат замыканию графика Φ. Предположим, что для некоторого $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$ для определенности правый конец $g_0 = (t_0, \Phi(t_0))$ отрезка $\operatorname{gr}(\vartheta_0)$ не принадлежит $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$. Тогда найдется круговая окрестность $U_\varepsilon = \{g : |g - g_0| \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, которая не содержит точек $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$. При этом плоскость графика Φ нам удобно представить как комплексную плоскость $\mathbb{C}$, $g = t + i\varphi$. Тогда ясно, что любая прямая, описываемая в параметрической форме $g(\rho) = g_0 + \rho e^{i\vartheta}$, $\rho \in \mathbb{R}$, для всех $\vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta + \delta]$ при достаточно малом $\delta > 0$, не содержит точек $\operatorname{gr}\Phi$. Иначе справа от g_0 на $\partial\Pi(\vartheta_0)$ нашлась бы точка из $\overline{\operatorname{gr}\Phi} \cap \partial\Pi(\vartheta_0) \subseteq \operatorname{epi}\Phi_0 \cap \partial\Pi(\vartheta_0) = \operatorname{gr}\Phi_0 \cap \partial\Pi(\vartheta_0) = \operatorname{gr}(\vartheta_0)$, что противоречит определению точки g_0. Отсюда заключаем, что $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$ лежит выше прямой, проходящей через точки $g_0 - \varepsilon e^{i\vartheta_0}$ и $g_0 + \varepsilon e^{i(\vartheta_0+\delta)}$:

$$(g_0 - \varepsilon e^{i\vartheta_0}) + \rho(e^{i(\vartheta_0+\delta)} + e^{i\vartheta_0}), \ \rho \in \mathbb{R},$$

в то время как точка g_0 лежит ниже этой прямой. Таким образом, g_0 не может принадлежать $\operatorname{gr}\Phi_0$ по определению Φ_0. Полученное противоре-

чие и показывает, что концы отрезков $\operatorname{gr}(\vartheta)$, $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$, действительно принадлежат $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$.

Приведенное рассуждение применимо также к правому концу отрезка $\operatorname{gr}(0)$. Очевидно, что левый конец этого отрезка есть $(1, \inf\Phi)$ и что он, вообще говоря, не принадлежит $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$. Но это так, если только

$$\inf_{t\in I}\Phi(t) = \min(\Phi(1), \liminf_{t\to 1+0}\Phi(t)).$$

Далее, по определению графика $\operatorname{gr}\Phi_0$ на отрезке I_0 ясно что $\operatorname{gr}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ всегда вырождается в точку $g_0 = (Q, \Phi_0(Q))$. Покажем, что эта точка принадлежит $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$. Итак, пусть t_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – произвольная последовательность чисел из полуоткрытого интервала $[1, Q)$, стремящаяся к Q. Так как $\Phi_0(t)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{R}^+}$ на отрезке I_0, то $\Phi_0(Q) = \lim\Phi_0(t_n)$. Как было показано выше, $(t_n, \Phi_0(t_n)) \in \operatorname{gr}(\vartheta_n)$ при некоторых $\vartheta_n \in [0, \frac{\pi}{2})$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $g_n = (\tau_n, \Phi_0(\tau_n))$ – правые концы отрезков $\operatorname{gr}(\vartheta_n)$. Поскольку $\Phi_0(t)$ – неубывающая функция, то $\lim g_n = g_0$. Как было показано выше, $g_n \in \overline{\operatorname{gr}\Phi}$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $g_0 \in \overline{\operatorname{gr}\Phi}$.

Ввиду включения $\overline{\operatorname{gr}\Phi} \subseteq \operatorname{epi}\Phi_0$, точка $g_0 = (Q, \Phi_0(Q))$ не может лежать выше точки

$$g = \left(Q, \min\left(\Phi(Q), \liminf_{t\to Q-0}\Phi(t)\right)\right).$$

С другой стороны, точка g является самой нижней точкой $\overline{\operatorname{gr}\Phi}$, расположенной на вертикальной прямой $t = Q$, и $g_0 \in \overline{\operatorname{gr}\Phi}$ не может лежать ниже g. Следовательно, $g_0 = g$. □

4. Лемма о плотности.

Лемма 13.2. *Пусть $s \in I = [1, \infty]$ и $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет экспоненциальный рост на ∞. Тогда класс $H(s) \cap H^{\Phi_0}$, наделенный топологией локально равномерной сходимости, содержит всюду плотное подмножество гомеоморфизмов со ступенчатыми комплексными характеристиками.*

Здесь измеримая функция $\mu(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *ступенчатой*, если она принимает не более чем счетное число значений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть отображение $f \in H(s) \cap H^{\Phi_0}$ имеет комплексную характеристику

$$\mu(z) = q(z)e^{i\vartheta(z)}.$$

Полагаем

$$\mu_m(z) = q_m(z)e^{i\vartheta_m(z)},$$

где

$$q_m(z) = k\,2^{-m}, \quad \vartheta_m(z) = l\,2^{-m}$$

на каждом из множеств

$$E_{kl}^m = \{z \in \mathbb{C} : k\,2^{-m} \le q(z) < (k+1)2^{-m},\ l\,2^{-m} \le \vartheta(z) < (l+1)2^{-m}\},$$

$k,\, l = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots; m = 1,\, 2,\, \ldots$. Отметим, что все множества E_{kl}^m также измеримы (см. [360], с. 28). Поэтому все функции $\mu(z), \Phi_0(p_m(z))$,

$$p_m(z) = (1 + q_m(z))/(1 - q_m(z)),\ m = 1,\, 2,\, \ldots,$$

также измеримы. Кроме того, $0 \le q_m(z) \le q(z)$, $|q(z) - q_m(z)| \le 2^{-m}$, $|\vartheta(z) - \vartheta_m(z)| \le 2^{-m}$. Следовательно, $\mu_m(z) \to \mu(z)$ при $m \to \infty$ равномерно по всей плоскости. По предложению 13.3 существует единственный гомеоморфизм f_m класса Соболева с комплексной характеристикой μ_m. По построению $f_m \in H(s) \cap H^{\Phi_0},\ m = 1,\, 2,\, \ldots$. Наконец, по следствию 11.9 (см. п. 11.3.1) $f_m \to f$ л.р. при $m \to \infty$.

5. Доказательство теоремы 13.1.

1) Секвенциальная компактность класса H^{Φ_0} следует непосредственно из теоремы 11.1 с учетом замечания 11.1, предложений 11.1, 13.1 и 13.2, а также теорем Давида (см. п. 11.3.1) и Арцела–Асколи (см. [168], с. 289).

2) Легко доказать включение

$$\overline{H^{\Phi}} \subseteq H^{\Phi_0}. \tag{13.12}$$

Действительно, по определению нижней огибающей $\Phi_0(t) \le \Phi(t),\ t \in I$. Кроме того, в силу предложения 3.1, функция Φ_0 измерима по Борелю, т.е. прообраз всякого борелевского множества есть борелевское множество. Следовательно, Φ_0 суперпозиционно измерима. Таким образом, если $p(z)$ – деформация отображения $f \in H^{\Phi}$, то суперпозиция $\Phi_0(p(z))$ является измеримой функцией и $0 \le \Phi_0(p(z)) \le \Phi(p(z))$, т.е. $f \in H^{\Phi_0}$. Другими словами, $H^{\Phi} \subseteq H^{\Phi_0}$, а потому и $\overline{H^{\Phi}} \subseteq \overline{H^{\Phi_0}}$. Наконец, в силу секвенциальной компактности, $\overline{H^{\Phi_0}} = H^{\Phi_0}$ и мы получаем (13.12).

3) Для доказательства обратного включения покажем сначала, что

$$H' \stackrel{def}{=} H(Q') \cap H^{\Phi_0} \subseteq \overline{H^{\Phi}} \tag{13.13}$$

для любого $Q' < Q$, где Q из (13.3). При этом мы будем предполагать, что $\inf \Phi = 0$, т.е. что $\Phi_0(1) = 0$, т.к. иначе по предложению 13.4 классы пусты и доказывать нечего.

По лемме 13.2. существует подмножество гомеоморфизмов $H_0 \subseteq H'$ со ступенчатыми характеристиками такое, что $H' \subseteq \overline{H_0}$. Поскольку (см. [229], с. 44):

$$\overline{\overline{H^\Phi}} = \overline{H^\Phi}, \tag{13.14}$$

то нам достаточно показать, что

$$H_0 \subseteq \overline{H^\Phi}. \tag{13.15}$$

Итак, пусть отображение $f \in H_0$ и, следовательно, его комплексная характеристика имеет вид:

$$\mu(z) = \nu_l,\ z \in \mathcal{E}_l,\ l = 1, 2, \ldots, \tag{13.16}$$

где $\cup \mathcal{E}_l = \mathbb{C},\ \nu_l = \tau_l\, \eta_l,\ \tau_l \in [0, q],\ q = (Q' - 1)/(Q' + 1),\ \eta_l \in \mathbb{C}, |\eta_l| = 1$. Обозначим

$$\varphi_l = \Phi_0(t_l),\ t_l = (1 + \tau_l)/(1 - \tau_l).$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi_0(p(z))dx\, dy < 1, \tag{13.17}$$

где $p(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$. Действительно, пусть $\mathfrak{M}_0$ – класс характеристик μ отображений f из H_0 и пусть H_Θ – класс нормированных гомеоморфизмов f_Θ с характеристиками $\mu_\Theta(z) = \Theta\mu(z),\ \mu \in \mathfrak{M}_0,\ \Theta \in (0, 1)$. В силу монотонности $\Phi_0,\ H_\Theta \subseteq H'$. При $\theta \to 1,\ \mu_\Theta(z) \to \mu(z)$ и по следствию 11.9 (п. 11.3.1) $f_\Theta \to f$ л.р. Таким образом,

$$H_0 \subseteq \overline{\bigcup_{\Theta \in (0,1)} H_\Theta},$$

и, следовательно,

$$\bigcup_{\Theta \in (0,1)} H_\Theta \subseteq H' \subseteq \overline{\bigcup_{\Theta \in (0,1)} H_\Theta}.$$

Это позволяет при необходимости заменить H_0 на $\cup H_\Theta,\ \Theta \in (0, 1)$. Однако, в классах $H_\Theta,\ \Theta \in (0, 1)$, заведомо имеет место (13.17).

Доопределим функции Φ и Φ_0 с отрезка $I_o = [1, Q]$ на отрезок $[Q^{-1}, 1]$ соотношениями $\Phi(t) = \Phi(t^{-1})$ и $\Phi_0(t) = \Phi_0(t^{-1})$. Согласно лемме 13.1

точки $(t_l, \varphi_l),\ l = 1, 2, \ldots,$ принадлежат отрезкам прямых, опорных к графику функции Φ. Пусть $(t_l^{(1)}, \varphi_l^{(1)})$ и $(t_l^{(2)}, \varphi_l^{(2)}),\ l = 1, 2, \ldots,$ – концы этих отрезков в графике функции Φ_0, а $\lambda_l \in [0, 1]$ – числа, определяемые из равенств

$$t_l = \lambda_l t_l^{(1)} + (1 - \lambda_l) t_l^{(2)},\ l = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\varphi_l = \lambda_l \varphi_l^{(1)} + (1 - \lambda_l) \varphi_l^{(2)},\ l = 1, 2, \ldots,$$

и, согласно той же лемме, существуют такие последовательности $t_{lm}^{(1)} \to t_l^{(1)}$ и $t_{lm}^{(2)} \to t_l^{(2)}$, что $\varphi_{lm}^{(1)} = \Phi\left(t_{lm}^{(1)}\right) \to \varphi_l^{(1)}$ и $\varphi_{lm}^{(2)} = \Phi\left(t_{lm}^{(2)}\right) \to \varphi_l^{(2)}$ при $m \to \infty$. Таким образом, при $m \to \infty$

$$t_{lm}^{(0)} \stackrel{def}{=} \lambda_l t_{lm}^{(1)} + (1 - \lambda_l) t_{lm}^{(2)} \to t_l \tag{13.18}$$

и

$$\varphi_{lm}^{(0)} \stackrel{def}{=} \lambda_l \varphi_{lm}^{(1)} + (1 - \lambda_l) \varphi_{lm}^{(2)} \to \varphi_l. \tag{13.19}$$

Для дальнейшего важно, что указанные последовательности, в силу предложений 13.1 и 13.2, всегда можно выбрать так, что

$$1 \le t_{lm}^{(j)} \le Q_0 < \infty, \quad 1 \le \varphi_{lm}^{(j)} \le \varphi_0 < \infty,$$

для всех $j = 0, 1, 2;\ l, m = 1, 2, \ldots,$ где выбор $Q_0 \le Q$ и φ_0 при заданной Φ зависит только от Q'.

За счет дополнительной сегментации плоскости всегда можно добиться, чтобы $\operatorname{mes} \mathcal{E}_l < \infty$ для всех $\mathcal{E}_l < \infty,\ l = 1, 2, \ldots$ из (13.16). При этом, прямо по построению можно предполагать, что

$$\left|\varphi_{lm}^{(0)} - \varphi_l\right| < 2^{-(l+m)} / \operatorname{mes} \mathcal{E}_l \tag{13.20}$$

для всех $l = 1, 2, \ldots$.

Полагаем

$$\nu_{lm}^{(j)} = \tau_{lm}^{(j)} \eta_l,$$

где η_l взяты из (13.16), $|\eta_l| = 1$, и

$$\tau_{lm}^{(j)} = \left(t_{lm}^{(j)} - 1\right) / \left(t_{lm}^{(j)} + 1\right)$$

$j = 0, 1, 2;\ l, m = 1, 2, \ldots$. Тогда по лемме 12.1 (при $\lambda = \lambda_l$ и $\eta = \eta_l$) найдется последовательность отображений $F_{lm}^{(n)} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ n = 1, 2, \ldots$ класса $H(Q_0)$ с характеристиками

$$\mu_{lm}^{(n)}(z) = \begin{cases} \nu_{lm}^{(1)}, & z \in E_l^{(n)}, \\ \nu_{lm}^{(2)}, & z \in \mathbb{C} \setminus E_l^{(n)}, \end{cases}$$

которая сходится к отображению $F_{lm} \in H(Q_0)$ с характеристикой

$$\mu_{lm}(z) \equiv \nu_{lm}^{(0)},\ z \in \mathbb{C}\,,$$

при этом, на любом измеримом множестве $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{C}$ с $\operatorname{mes}\mathcal{E} < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{E}} \Phi(p_{lm}^{(n)}(z))\,dx\,dy = \varphi_{lm}^{(0)} \operatorname{mes}\mathcal{E},$$

где $p_{lm}^{(n)}(z)$ – соответствующие деформации.

Пусть ρ – метрика на классе $H(Q_0)$, введенная в пункте 11.3.1 по формулам (11.73) и (11.74). Тогда по построению

$$\rho\left(F_{lm}^{(n)}, F_{lm}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому для любых фиксированных l и $m = 1, 2, \ldots$, найдется номер $k = n(l, m)$ такой, что

$$\rho\left(F_{lm}^{(n)}, F_{lm}\right) < 1/m,$$

где

$$F_{lm}^{(n)}(z) = F_{lm}^{(k)}(z),$$

и

$$\left| \iint\limits_{\mathcal{E}_l} \Phi(p^{lm}(z))dx\,dy - \varphi_{lm}^{(0)} \operatorname{mes}\mathcal{E}_l \right| < 2^{-(l+m)},$$

где p^{lm} – деформации отображений F^{lm}.

Пусть $F_l \in H(Q_0)$ – отображение с характеристикой $\mu_l(z) \equiv \nu_l,\ z \in \mathbb{C}$, и, соответственно, с деформацией $p_l(z) \equiv t_l,\ z \in \mathbb{C}$. Тогда в силу следствия 11.9 (п. 11.3.1) и соотношений (13.18) и (13.19)

$$\lim_{m\to\infty} \rho(F_{lm}, F_l) = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{lm}^{(0)} \operatorname{mes}\mathcal{E}_l = \iint\limits_{\mathcal{E}_l} \Phi_0(p_l(z))dx\,dy$$

и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \rho(F^{lm}, F_l) = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{E}_l} \Phi(p^{lm}(z))dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{E}_l} \Phi_0(p_l(z))dx\,dy.$$

Полагая

$$\mu^m(z) = \mu^{lm}(z),\ z \in \mathcal{E}_l, l = 1, 2, \ldots,$$

для соответствующих деформаций, в силу (13.20), получаем:

$$\left| \iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p^m(z))dx\,dy - \iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi_0(p(z))dx\,dy \right| \leq 2^{-m}.$$

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p^m(z))dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi_0(p(z))dx\,dy.$$

Пусть $F^m \in H(Q_0)$ – отображения с характеристиками μ^m, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда в силу (13.17) $F^m \in H^\Phi$ для достаточно больших m.

По предложению 11.10 $H(Q_0)$ – секвенциально компактный класс и по аксиоме Урысона (см. п. B1), а также по лемме 11.7 имеем, что $F^m \to f$ л.р. при $m \to \infty$.

4) Наконец, докажем обратное включение

$$H^{\Phi_0} \subseteq \overline{H^\Phi}. \tag{13.21}$$

Итак, пусть отображение $f \in H^{\Phi_0}$ и $\mu(z)$ – его комплексная характеристика, а $p\,(z)$ – деформация. Полагаем

$$\mu_m(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathcal{E}_m, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_m, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{E}_m = \{z \in \mathbb{C} : p(z) \leq m\}.$$

Обозначим через f_m отображение класса $H(m) \cap H^{\Phi_0}$ с характеристикой μ_m. Поскольку $\mu_m(z) \to \mu(z)$ по мере и деформации $p_m(z) \leq p(z)$, $m = 1, 2, \ldots$, т.е. $f_m \in H(p(z)), m = 1, 2, \ldots$, то по следствию 11.9 (п. 11.3.1) $f_m \to f$ л.р. Однако, в силу предыдущего пункта доказательства $f_m \in \overline{H^\Phi}$. С учетом (13.14), $f \in \overline{H^\Phi}$, что и завершает доказательство.

13.2. Критерий компактности.

Основной результат параграфа – необходимые и достаточные условия компактности классов гомеоморфизмов с ограничениями на дилатацию интегрального типа (теорема 13.2).

Пункт 1 содержит формулировку этой теоремы и некоторые следствия из нее для $Q-$к.к. отображений (следствия 13.1 и 13.2). Здесь же приведен довольно неожиданный пример некомпактного класса с интегральным ограничением (13.22).

Доказательство теоремы 13.2 проведено на основе теоремы 13.1 в пункте 4 после топологических замечаний пункта 2 (следствие 13.2) и леммы о равенстве пункта 3 (лемма 13.3).

1. Необходимые и достаточные условия компактности. В обозначениях пункта 13.1.1 имеет место:

Теорема 13.2. *Пусть* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$, *имеет экспоненциальный рост на* ∞ *и* $\inf \Phi = 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) H^Φ *секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;*

2) Φ *не убывает, выпукла и непрерывна в смысле* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *слева в точке* Q *из (13.3).*

Напомним, что условие $\inf \Phi = 0$ при $\Phi(\infty) = \infty$ является необходимым и достаточным для того, чтобы класс H^Φ был не пуст (предложение 3.4).

Если $Q < \infty$, где Q задано в (13.3), то условие экспоненциального роста на ∞ автоматически выполнено и, таким образом мы имеем:

Следствие 13.1. *Пусть* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – *произвольная функция с* $\inf \Phi = 0$ *и* $Q < \infty$. *Тогда для секвенциальной компактности класса* H^Φ *необходимо и достаточно, чтобы* Φ *была непрерывной, неубывающей и выпуклой функцией на отрезке* $I_0 = [1, Q]$.

Заметим, что непрерывность функции Φ здесь понимается в смысле топологии $\overline{\mathbb{R}^+}$, т.е., если $\Phi(Q) = \infty$, то $\Phi(Q - 0) = \infty$.

Обозначим $H^\Phi(K)$ подкласс H^Φ всех $K-$к.к. отображений, $K < \infty$, т.е.

$$H^\Phi(K) = H^\Phi \cap H(K).$$

Как легко видеть,

$$H^\Phi(K) = H^{\Phi_K},$$

где

$$\Phi_K(t) = \begin{cases} \Phi(t), & 1 \le t \le K, \\ \infty, & t > K. \end{cases}$$

Поэтому в силу предыдущего следствия имеем:

Следствие 13.2. *Пусть* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *и*

$$\inf_{1\le t\le K} \Phi(t) = 0, \tag{13.22}$$

где $K < Q$. *Тогда для секвенциальной компактности класса* $H^\Phi(K)$ *необходимо и достаточно, чтобы* Φ *была неубывающей, выпуклой и непрерывной в* $\mathbb{R}$ *функцией на отрезке* $I_K = [1, K]$.

Приведем несколько характерных примеров:

Пример 1. Пусть $\Phi(t) = c(e^{\gamma(t-1)} - 1)$, где c и $\gamma > 0$. Тогда класс H^Φ не пуст и секвенциально компактен.

Пример 2. Пусть $1 < K < \infty$ и $\Phi(t) = c(t-1)^\alpha$, где $c > 0$ и $\alpha \ge 1$. Тогда класс $H^\Phi(K)$ секвенциально компактен.

Пример 3. Пусть $1 < Q < \infty$ и

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{Q-t}, & 1 \le t < Q, \\ \infty, & t \ge Q. \end{cases}$$

Тогда класс H^Φ секвенциально компактен, поскольку $\Phi'(t)$ и $\Phi''(t) > 0$ для $t \in [1, Q)$ и $\Phi(Q-0) = \infty$.

Наконец, приведем пример некомпактного класса. Таковым является класс всех $Q-$к.к. отображений с интегральным ограничением на комплексную характеристику вида:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} |\mu(z)|dx\,dy \le 1. \tag{13.23}$$

Действительно, в наших обозначениях это есть класс H^Φ с

$$\Phi(t) = \begin{cases} (t-1)/(t+1), & 1 \le t \le Q, \\ \infty, & t > Q. \end{cases}$$

Как легко видеть, функция $\varphi(t) = (t-1)/(t+1)$ не является выпуклой, поскольку $\varphi''(t) = -4/(t+1)^3 < 0$. Таким образом, не выполнено одно из условий компактности.

2. Топологические замечания. Согласно теореме 13.1, для любой функции $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ с экспоненциальным ростом на ∞, класс H^{Φ_0} является секвенциально компактным относительно локально равномерной сходимости, где Φ_0 – нижняя огибающая Φ. Пространство гомеоморфизмов H^{Φ_0} метризуемо (см. п. 11.3.1). Поэтому имеет место аналог следствия 11.10:

Следствие 13.3. *Пусть* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$, *имеет экспоненциальный рост на* ∞ *и пусть* $\Phi_0 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – *нижняя огибающая функции* Φ. *Тогда для любого подкласса* $H' \subseteq H^{\Phi_0}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1. H' *замкнут;*

2. H' *компактен (бикомпактен);*

3. H' *секвенциально компактен.*

Благодаря этому, теорема 13.1 о замыкании классов H^Φ сыграет ключевую роль при доказательстве критерия компактности H^Φ, сформулированного в предыдущем пункте.

Отметим, что для пространства гомеоморфизмов H^{Φ_0} сохраняют также силу и все остальные топологические замечания, которые мы привели в конце пункта 11.3.1 относительно $H(Q(z))$.

3. Лемма о равенстве. В обозначениях пункта 13.1.1 имеет место:

Лемма 13.3. *Пусть* Φ_1 *и* $\Phi_2 : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$, – *произвольные функции с* $\inf \Phi_1 = \inf \Phi_2 = 0$ *и* $\Phi_1(\infty) = \Phi_2(\infty) = \infty$. *Тогда для выполнения равенства*

$$\mathfrak{M}^{\Phi_1} = \mathfrak{M}^{\Phi_2} \tag{13.24}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi_1(t) \equiv \Phi_2(t), \quad t \in I. \tag{13.25}$$

Эта лемма, наряду со следствием 13.3, позволит нам редуцировать доказательство теоремы 13.2 прямо к теореме 13.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условия (13.25) для равенства (13.24) самоочевидно.

Пусть теперь (13.25) не имеет место, т.е. пусть для определенности

$$\varphi_1 = \Phi_1(t_0) > \Phi_2(t_0) = \varphi_2$$

в некоторой точке $t_0 \in I \setminus \{\infty\}$. Пусть

$$0 < \varepsilon < \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}} - 1.$$

Тогда найдется r такое, что

$$\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi\varphi_1}} < r < \frac{1}{\sqrt{\pi\varphi_2}}$$

и, соответственно, c такое, что

$$\pi r^2(\varphi_2 + c) \le 1.$$

Поскольку $\inf \Phi_2 = 0$ и $\Phi_2(\infty) = \infty$, то найдется также последовательность $t_n \in I \setminus \{\infty\}$ такая, что

$$\Phi_2(t_n) \le c\, 2^{-n}.$$

Полагаем $\mu(z) \stackrel{def}{=} (t_n - 1)/(t_n + 1)$ при $r\sqrt{n} \le |z| \le r\sqrt{n+1}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеем, что

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi_1(p(z))dx\, dy \ge \pi r^2 \varphi_1 > (1+\varepsilon)^2 > 1,$$

т.е. $\mu \notin \mathfrak{M}^{\Phi_1}$. С другой стороны,

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi_2(p(z))dx\, dy \le \pi r^2 \varphi_2 + \pi r^2 c \le 1,$$

т.е. $\mu \in \mathfrak{M}^{\Phi_2}$. Таким образом, (13.24) заведомо не имеет место и необходимость условия (13.25) доказана. □

4. Доказательство теоремы 13.2. 2) $\Rightarrow$ 1). При указанных условиях на Φ по предложению 13.1 (п. 13.1.1) $\Phi_0 = \Phi$, следовательно, $H^{\Phi} = H^{\Phi_0}$ и по теореме 13.1 класс секвенциально компактен.

1) $\Rightarrow$ 2). По следствию 13.3 секвенциальная компактность класса H^{Φ} эквивалентна его замкнутости, т.е. тому, что

$$\overline{H^{\Phi}} = H^{\Phi}.$$

Тогда по теореме 13.1 имеем:

$$H^{\Phi_0} = H^{\Phi}.$$

Отсюда, в силу предложений 13.2 и 13.3 (п. 13.1.1) получаем равенство

$$\mathfrak{M}^{\Phi_0} = \mathfrak{M}^{\Phi}$$

и по лемме 13.3

$$\Phi(t) \equiv \Phi_0(t).$$

Однако, по предположению 13.1 функция Φ_0 удовлетворяет условиям 2) в теореме 13.2. □

13.3. К теории вариационного метода.

В этом параграфе собраны основные следствия к теории вариационного метода для классов гомеоморфизмов с ограничениями на дилатацию интегрального типа. Структура результатов этого параграфа полностью аналогична §2.3.

В пункте 1 сформулирован принцип редукции экстремальных задач из некомпактных классов в компактные (следствие 13.4).

Пункт 2 содержит построение вариаций в компактных классах (лемма 13.4). При этом мы используем выпуклость множества комплексных характеристик в компактных классах (следствие 13.5).

В пункте 3 сформулирован и доказан один из основных результатов – вариационный принцип максимума (теорема 13.3).

Наконец, в пункте 4 приведены другие необходимые условия экстремума (предложение 13.5).

1. Принцип редукции экстремальных задач. Пусть H – множество всех гомеоморфизмов расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя класса $\mathcal{AC}\mathcal{L}$ с нормировками $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(\infty)=\infty$, и пусть $\Omega : H \to \mathbb{R}$ – вещественнозначный функционал. Будем говорить, что *функционал* Ω *непрерывен*, если $\Omega(f_n) \to \Omega(f)$ при $f_n \to f$ л.р.

Непосредственно из теоремы замыкания (теорема 13.1) получаем:

Следствие 13.4. (Принцип редукции) *Пусть* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+},\ I = [1,\infty]$, – *произвольная функция с экспоненциальным ростом на* ∞.

Тогда для любого непрерывного функционала $\Omega : H \to \mathbb{R}$

$$\sup_{f\in H^{\Phi}} \Omega(f) = \max_{f\in H^{\Phi_0}} \Omega(f), \tag{13.26}$$

где через Φ_0 *обозначена нижняя огибающая функции* Φ.

Заметим, что в силу теоремы 13.1 класс H^{Φ_0} компактен. Таким образом, экстремальная задача о $\sup\Omega$, первоначально заданная, вообще говоря, на некомпактном классе H^{Φ}, сводится к экстремальной задаче на компактном классе. Поэтому в дальнейшем все экстремальные задачи рассматриваются только в компактных классах H^{Φ}.

Отметим,что принцип редукции сохраняет свою силу и для функционалов Ω, заданных только на $\overline{H^{\Phi}}$. Кроме того, условие непрерывности Ω можно заменить на более слабое *условие полунепрерывности снизу*, состоящее в том, что

$$\Omega(f) \le \liminf_{n\to\infty} \Omega(f_n) \tag{13.27}$$

для любой последовательности $f_n \to f$ л.р.

2. Построение вариаций в компактных классах.

Пусть функция $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$, имеет экспоненциальный рост на ∞. Согласно предложению 13.4 для непустоты класса H^Φ необходимо и достаточно, чтобы $\inf \Phi = 0$. Тогда по теореме 13.2 для компактности класса H^Φ необходимо и достаточно, чтобы Φ не убывала, была выпуклой и непрерывной слева в точке Q из (13.3) в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$. В силу предложений 13.1 и 13.5 для таких Φ множество комплексных характеристик $\mathfrak{M}^\Phi$ является выпуклым. Таким образом, имеет место:

Следствие 13.5. *Пусть $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$ – произвольная функция с экспоненциальным ростом на ∞. Если класс отображений H^Φ секвенциально компактен, то класс комплексных характеристик $\mathfrak{M}^\Phi$ является выпуклым множеством.*

Поэтому, если μ и $\nu \in \mathfrak{M}^\Phi$, то

$$\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon(\nu - \mu) \tag{13.28}$$

также принадлежит $\mathfrak{M}^\Phi$ при всех $\varepsilon \in [0, 1]$. По предложению 13.3 вариация μ_ε, $\varepsilon \in [0, 1]$, характеристики μ порождает соответствующую вариацию f_ε, $\varepsilon \in [0, 1]$, отображения f в классе H^Φ.

Лемма 13.4. *Пусть неубывающая выпуклая функция $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$, имеет экспоненциальный рост на ∞ и пусть $\mu \in \mathfrak{M}^\Phi$ – комплексная характеристика отображения $f \in H^\Phi$, а $\nu \in \mathfrak{M}^\Phi$ такова, что функция*

$$\varkappa = (\nu - \mu)/(1 - |\mu|^2) \tag{13.29}$$

принадлежит открытому единичному шару в $L^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует вариация f_ε, $\varepsilon \in [0, 1]$, отображения f в классе H^Φ вида:

$$f_\varepsilon(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\varepsilon}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} (\nu(z) - \mu(z))\varphi(f(z), f(\zeta)) f_z^2 \, dx \, dy + o(\varepsilon; z), \tag{13.30}$$

где

$$\varphi(w, w') = \frac{1}{w - w'} \frac{w'}{w} \frac{w' - 1}{w - 1}. \tag{13.31}$$

Эта лемма доказывается совершенно аналогично лемме 12.2.

3. Вариационный принцип максимума. В терминах пункта 12.3.3 имеет место:

Теорема 13.3. *Пусть неубывающая выпуклая функция* $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, *с* $\Phi(1) = 0$ *и* $\Phi(Q) \neq 0$ *имеет экспоненциальный рост на* ∞, *а функционал* $\Omega : H^\Phi \to \mathbb{R}$ *дифференцируем по Гато без вырождения. Тогда для любого отображения* $f \in H^\Phi$, *на котором достигается* $\max \Omega$ *по классу* H^Φ, *деформация* $p(z)$ *удовлетворяет равенству:*

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))dx\,dy = 1. \tag{13.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))dx\,dy = \Lambda < 1.$$

Пусть Q из (13.3). Тогда $p(z) \leq Q$ п.в. Если $\Phi(Q) = \infty$, то найдется монотонно возрастающая последовательность $Q_m < Q,\ m = 1, 2, \ldots$, такая, что $Q_m \to Q$ при $m \to \infty$. Если же $\Phi(Q) < \infty$, то полагаем $Q_m = Q,\ m = 1, 2, \ldots$.

Характеристика μ отображения f имеет вид $\mu(z) = k(z)e^{i\vartheta(z)}$, где $k(z) = (p(z)-1)/(p(z)+1)$, $\vartheta(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ – некоторая измеримая функция. Рассмотрим функции

$$\mu_m^{\pm}(z) = \mu(z) \pm \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z),$$

$$\lambda_m(z) = \lambda_0(q_m - k(z))e^{i\vartheta(z)}\chi_m(z).$$

Здесь $q_m = (Q_m - 1)/(Q_m + 1)$, $\chi_m(z)$ – характеристическая функция множества

$$E_m = \{z \in \mathbb{C} : p(z) \leq Q_m\},$$

а $\chi_{z_0,r}(z)$ – характеристическая функция круга

$$K_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\},$$

$z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0,\ \lambda_0 \in (0, 1),\ m = 1, 2, \ldots$.

Пусть $p_m^{\pm}(z) = (1 + |\mu_m^{\pm}(z)|)/(1 - |\mu_m^{\pm}(z)|)$. Тогда в силу монотонности функций $\Phi(t) : I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ и $t(\tau) = (1 + \tau)/(1 - \tau) : [0, 1] \to I$, получаем неравенство

$$\Phi(p_m^{\pm}(z)) \leq \Phi(Q_m)$$

для $z \in E_m \cap K_{z_0,r}$ и равенство

$$\Phi(p_m^{\pm}(z)) = \Phi(p(z))$$

для $z \in \mathbb{C} \setminus E_m \cap K_{z_0,r}$. Поэтому при

$$r \le \sqrt{\frac{(1-\Lambda)}{\pi\Phi(Q_m)}}$$

функция $\mu_m^{\pm}(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}^{\Phi}$.

При $0 < \lambda_0 < 1 - q_m^2$ функции

$$\varkappa_m^{\pm}(z) = \frac{\mu_m^{\pm}(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \pm\frac{\lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)}{1 - |\mu(z)|^2}$$

принадлежат открытому единичному шару в $L^{\infty}(\mathbb{C})$.

Следовательно, в силу вариационной формулы (13.30), дифференцирования функционала Ω по Гато (12.28) и условия экстремальности отображения f немедленно получаем, что

$$\pm\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathbb{C}}\left[\iint\limits_{|z-z_0|\le r}\varphi_m(z,\zeta)dx\,dy\right]d\varkappa(\zeta) \ge 0,$$

т.е.

$$\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathbb{C}}\left[\iint\limits_{|z-z_0|\le r}\varphi_m(z,\zeta)dx\,dy\right]d\varkappa(\zeta) = 0,$$

где

$$\varphi_m(z,\zeta) = \lambda_m(z)f_z^2\varphi(f(z),f(\zeta)).$$

Рассмотрим также функции

$$\psi_m(w,\zeta) = \left(\varkappa_m^{+}(z)\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right)\circ f^{-1}(w)\,\varphi(w,f(\zeta)).$$

Они интегрируемы относительно произведения мер $dm_w \otimes d\varkappa(\zeta)$. Поэтому по теории Лебега-Фубини (см. [79], с. 353)

$$\iint\limits_{\mathbb{C}}\left[\iint\limits_{\mathbb{C}}\psi_m(w,\zeta)\,dm_w\right]d\varkappa(\zeta) = \iint\limits_{\mathbb{C}}\left[\iint\limits_{\mathbb{C}}\psi_m(w,\zeta)\,d\varkappa(\zeta)\right]dm_w$$

и, делая замену переменной (см. [270], с. 126 и 136), из предыдущего получаем:

$$\iint\limits_{|z-z_0|\le r}\left[\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathbb{C}}\varphi_m(z,\zeta)d\varkappa(\zeta)\right]dx\,dy = 0.$$

Отсюда по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [360], с. 180)

$$\lambda_m(z) f_z^2 \mathcal{A}(f(z)) = 0 \quad \text{п.в.}$$

В силу (12.30) и абсолютной непрерывности гомеоморфизмов f и f^{-1} в случае Давида (см. [165], с. 27)

$$f_z^2 \mathcal{A}(f(z)) \neq 0 \quad \text{п.в.}$$

Следовательно, $\lambda_m(z) = 0$ п.в. и потому $k(z) = q_m$ п.в. на E_m, $m = 1, 2, \ldots$.

Заметим теперь, что множества E_m расширяются при увеличении m. Кроме того, E_m исчерпывают всю плоскость по мере, $q_m \to q$ при $m \to \infty$. Поэтому $k(z) = q$ п.в. на $\mathbb{C}$. Однако это противоречит принадлежности $\mu(z)$ классу $\mathfrak{M}^{\Phi}$, т.к. $\Phi(Q) \neq 0$ по условию. Полученное противоречие и доказывает (13.32). $\square$

4. Необходимые условия экстремума. Пусть

$$\mathcal{D}(\tau) = \Phi\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right), \ \tau \in [0,1]. \tag{13.33}$$

Предложение 13.5. *В условиях теоремы 13.3 отображение f удовлетворяет уравнению*

$$f_{\overline{z}} = \nu(z)\, \overline{f_z}, \tag{13.34}$$

где

$$\nu(z) = -k(z)\, \frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{\mathcal{A}(f(z))}, \tag{13.35}$$

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{D}(k(z))dx\, dy = 1. \tag{13.36}$$

Здесь $\mathcal{A}$ задано соотношением (12.30).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (13.36) составляет принцип максимума, доказанный в предыдущем пункте. Соотношение (13.35) эквивалентно неравенству

$$\nu(z)\mathcal{A}(f(z)) \leq 0 \quad \text{п.в.} \tag{13.37}$$

или

$$\mu(z)\mathcal{B}(z) \leq 0 \quad \text{п.в.}, \tag{13.38}$$

где μ – комплексная характеристика f, а

$$\mathcal{B}(z) = \mathcal{A}(f(z))f_z^2\,. \tag{13.39}$$

В дальнейшем мы используем обозначения Q_m, q_m, E_m, χ_m, $K_{z_0,r}$ и $\chi_{z_0,r}$, введенные при доказательстве предыдущей теоремы 13.3. Пусть

$$\mu(z) = k(z)e^{i\vartheta(z)}.$$

Тогда классу $\mathfrak{M}^\Phi$ принадлежат также

$$\nu_0(z) = k(z)e^{i\vartheta_0(z)},$$

где $\vartheta_0(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция. Поскольку любой круг является выпуклым множеством, то и $\mu + \lambda(\nu_0 - \mu) \in \mathfrak{M}^\Phi$ для любой измеримой функции $\lambda(z) : \mathbb{C} \to [0,1]$. В частности, классу $\mathfrak{M}^\Phi$ принадлежат функции

$$\nu_{z_0,r}^{(m)}(z) = \mu(z) + \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)(\nu_0(z) - \mu(z)),$$

где

$$\lambda_m(z) = \frac{1 - |\mu(z)|^2}{2}\chi_m(z).$$

При этом, функция

$$\varkappa_{z_0,r}^{(m)} = \frac{\nu_{z_0,r}^{(m)}(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \frac{\nu_0(z) - \mu(z)}{2}\chi_m(z)\chi_{z_0,r}(z)$$

принадлежит замкнутому шару радиуса $q_m < 1$ в пространстве $L^\infty(\mathbb{C})$.

Поэтому, в силу вариационной формулы (13.30), дифференцирования функционала Ω по Гато (12.28) и условия экстремальности отображения f, получаем неравенство:

$$\operatorname{Re} \iint\limits_{\mathbb{C}} \left[\iint\limits_{|z-z_0|\le r} \varphi_m(z,\zeta)\,dx\,dy \right] d\varkappa(\zeta) \ge 0,$$

где

$$\varphi_m(z,\zeta) = \lambda_m(z)(\nu_0(z) - \mu(z))f_z^2\,\varphi(f(z), f(\zeta)).$$

Повторяя рассуждения, которые уже использовались нами при доказательстве предыдущей теоремы 13.3, по теореме Фубини можем здесь изменить порядок интегрирования:

$$\iint\limits_{|z-z_0|\le r} \left[\operatorname{Re} \iint\limits_{\mathbb{C}} \varphi_m(z,\zeta)\,d\varkappa(\zeta) \right] dx\,dy \ge 0.$$

В силу теоремы Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [360], с. 180), имеем для п.в. $z \in \mathbb{C}$ неравенство

$$\lambda_m(z)\,\mathrm{Re}\,(\nu_0(z)-\mu(z))\mathcal{B}(z)\geq 0,$$

где $\mathcal{B}(z)$ задано (13.39). По другому:

$$\mathrm{Re}\,\mu(z)\mathcal{B}(z)\leq \mathrm{Re}\,\nu_0(z)\mathcal{B}(z)$$

для п.в. $z\in E_m$. Поскольку же $E_m,\ m=1,\,2,\,\ldots$, образуют исчерпание плоскости $\mathbb{C}$ по мере, то для п.в. $z\in\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}\,\mu(z)\mathcal{B}(z)\leq k(z)\mathrm{Re}\,e^{i\vartheta_0(z)}\mathcal{B}(z).$$

При $k(z)\,\mathcal{B}(z)\neq 0$ только для

$$e^{i\vartheta_0(z)}=-\frac{\overline{\mathcal{B}(z)}}{|\mathcal{B}(z)|}$$

достигается абсолютный минимум выражения, стоящего справа. Следовательно, имеет место (13.38). □

Глава 14

О ПОВЕДЕНИИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТОЧКЕ

Данная глава посвящена изучению вопроса о конформности и дифференцируемости квазиконформных отображений в точке по Белинскому.

Основным результатом §14.1 является теорема 14.1 о критериях конформности по Белинскому. Один из критериев сводится к асимптотической однородности отображения в точке. Условия имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Отсюда, в качестве следствий теоремы 11.3, в терминах преобразования Фурье комплексных характеристик, получены и другие необходимые и достаточные условия (следствия 14.3, 14.4). Приводятся также эффективные достаточные условия дифференцируемости по Белинскому, которые состоят в том, что данная точка должна быть точкой аппроксимативной непрерывности или точкой Лебега комплексной характеристики (следствия 14.1, 14.2).

§14.2 посвящен обсуждению проблемы Райха–Вальчака о конформности квазиконформных отображений в точке. На основе теорем 12.1 и 14.1 здесь дается положительный ответ на аналогичный вопрос для конформности по Белинскому (теорема 14.2). Поскольку при конформности по Белинскому сохраняются многие геометрические свойства обычной конформности, этот результат можно рассматривать как частичное решение исходной проблемы Райха–Вальчака.

Главным результатом §14.3 является теорема 14.3 о поведении логарифма модуля квазиконформного отображения, конформного по Белинскому в данной точке. В качестве иллюстрации возможных приложений этой теоремы приведено предложение 14.3 о существовании решений с особенностями логарифмического типа одного из основных уравнений математической физики.

14.1. Критерии конформности по Белинскому.

Главной целью параграфа являются критерии конформности и дифференцируемости по Белинскому квазиконформных отображений в точке.

В пункте 1 содержатся все необходимые определения и предварительные замечания.

В пункте 2 приведена формулировка основного результата – теоремы 14.1 о необходимых и достаточных условиях конформности по Белинскому. Дана геометрическая интерпретация условий. В качестве следствий сформулированы эффективные достаточные условия дифференцируемости по Белинскому (следствия 14.1, 14.2).

Доказательство теоремы 14.1 проведено в пункте 3.

1. Определения и предварительные замечания. Напомним, что отображение f называется конформным в точке z_0, если оно дифференцируемо в этой точке в смысле Дарбу-Штольца

$$f(z) - f(z_0) = f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|), \tag{14.1}$$

и если $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, а $f_z(z_0) \neq 0$.

Как показывает пример $w = z(1 - \ln|z|)$ Б.В. Шабата (см. [48], с. 40), при непрерывной комплексной характеристике $\mu(z)$ отображение $w = f(z)$ может быть недифференцируемым в этом смысле.

Если характеристика $\mu(z)$ непрерывна в точке z_0, то, как по-видимому впервые установлено П.П. Белинским (см. [48], с. 41), отображения $w = f(z)$ дифференцируемо в z_0 в следующем смысле:

$$\Delta w = A(\rho)\left[\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z} + o(\rho)\right], \tag{14.2}$$

где $\mu_0 = \mu(z_0)$, $\rho = |\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z}|$, $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$ и

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \qquad \forall\ t > 0\ . \tag{14.3}$$

Дифференцируемость отображения f в смысле (14.2) с дополнительным условием (14.3) будет в дальнейшем именоваться как *дифференцируемость по Белинскому*. При этом, в случае отсутствия непрерывности $\mu(z)$, в соотношении (14.2) не обязательно $\mu_0 = \mu(z_0)$. Если $\mu_0 = 0$, то говорим также, что f *конформно по Белинскому* в точке z_0.

Как будет видно из дальнейшего, аппроксимативная непрерывность характеристики остается достаточным условием дифференцируемости f по Белинскому с $\mu_0 = \mu(z_0)$. Заметим также, что условие аппроксимативной непрерывности характеристики μ в точке z_0 эквивалентно сходимости по мере $\mu_\tau(z) \to \mu_0 = \mu(z_0)$ при $\tau \to 0$, где

$$\mu_\tau(z) = \mu(z_0 + \tau z),\ \tau > 0. \tag{14.4}$$

В дальнейшем для краткости будем говорить, что $\mu_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к $\mu(z)$ в смысле характеристик и писать $\mu_n \overset{ch.}{\to} \mu$, если $f_n \to f$ л.р. для соответствующих отображений класса $H(Q)$ всех $Q-$квазиконформных отображений плоскости с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. Как мы покажем, условие $\mu_\tau \overset{ch.}{\to} \mu_0$ при $\tau \to 0$ как раз является необходимым и достаточным для дифференцируемости отображения f в точке z_0 по Белинскому. В данной главе везде $Q < \infty$.

2. Критерии конформности по Белинскому.

Теорема 14.1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – квазиконформное отображение с $f(0) = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) f конформно по Белинскому в нуле;

2) для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ при $\tau > 0$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(\tau\zeta)}{f(\tau)} = \zeta; \tag{14.5}$$

3) для любого $\delta > 0$ при $|z'| < \delta|z|$ и $z,\ z' \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{f(z')}{f(z)} - \frac{z'}{z} \right\} = 0; \tag{14.6}$$

4) для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ при $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta. \tag{14.7}$$

При этом, предел в (14.7) *является локально равномерным относительно ζ.*

В частности, при $|z'| = |z|$ из (14.6) получаем, что

$$\lim_{r \to 0} \frac{\max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\min\limits_{|z|=r} |f(z)|} = 1, \tag{14.8}$$

т.е. что характеристика Лаврентьева $p\,(0) = 1$. В этом случае естественно говорить, что отображение f конформно в нуле в смысле Лаврентьева. Как мы видим, из обычной конформности следует конформность по Белинскому, а из последней – конформность по Ларентьеву, означающей геометрически, что инфинитезимальный круг с центром в нуле переходит в инфинитезимальный круг.

Однако условие (14.7) гораздо сильнее условия (14.8). Из (14.7) мы получаем также асимптотическое сохранение углов между лучами, исходящими из начала в направлении соответствующих точек:

$$\lim_{z\to 0}\left[\arg f(z\,\zeta)-\arg f(z)\right]=\arg\zeta \tag{14.9}$$

и сохранение модулей инфинитезимальных колец

$$\lim_{z\to 0}\frac{|f(z\,\zeta)|}{|f(z)|}=|\zeta|. \tag{14.10}$$

Последние два геометрические свойства являются характеристиками для конформности по Белинскому.

Как показывает пример $f(z)=ze^{i\sqrt{-\ln|z|}}$ (см. [48], с. 41) и пример Б.В. Шабата из предыдущего пункта, при конформности по Белинскому, в отличии от обычной конформности, допускается переход радиальных линий в бесконечно накручивающиеся спирали, а также бесконечно большие растяжение и сжатие в точке.

Приведем наиболее интересное следствие теоремы 14.1, вытекающее из пункта 2):

Следствие 14.1. *Пусть $Q-$к.к. отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ имеет комплексную характеристику $\mu(z)$, аппроксимативно непрерывную в точке z_0. Тогда f дифференцируемо по Белинскому в этой точке с $\mu_0=\mu(z_0)$.*

Действительно, f дифференцируемо по Белинскому в точке z_0 в том и только в том случае, когда $g=h\circ\varphi^{-1}$ конформно по Белинскому в нуле, где

$$h(z)=f(z_0+z)-f(z_0)$$

и

$$\varphi(z)=z+\mu_0\overline{z}.$$

Здесь подразумевается, что $\mu_0\in\mathbb{C}$ взято из (14.2).

По пункту 2) теоремы 14.1 это эквивалентно тому, что $g_\tau(\zeta)\to g_0(\zeta)$ при $\tau\to 0,\ \tau>0$, для любого $\zeta\in\mathbb{C}$, где

$$g_\tau(\zeta)=\frac{g(\tau\zeta)}{g(\tau)},\ g_0(\zeta)=\zeta.$$

Последнее в свою очередь эквивалентно тому, что $h_\tau(z)\to h_0(z)$ при $\tau\to 0,\ \tau>0$, для любого $\zeta\in\mathbb{C}$, где

$$h_\tau(z)=\frac{g_\tau(\varphi(z))}{g_\tau(\varphi(1))}=\frac{h(\tau z)}{h(\tau)},\ h_0(z)=\frac{\varphi(z)}{\varphi(1)}.$$

В силу замечаний предыдущего пункта относительно $\mu_\tau(z)$ из (14.4), по следствию 11.9 (п. 11.3.1) получаем следствие 14.1.

Учитывая то обстоятельство, что для функций из L^∞ точки аппроксимативной непрерывности совпадают с точками Лебега, предыдущее следствие можно сформулировать и по другому:

Следствие 14.2. *Пусть $Q-$к.к. отображение f имеет комплексную характеристику μ, удовлетворяющую условию:*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{|z-z_0|\le r}|\mu(z)-\mu(z_0)|\,dx\,dy=0. \tag{14.11}$$

Тогда f дифференцируема по Белинскому в точке z_0 с $\mu_0=\mu(z_0)$.

Из теорем 11.3 и 6.2 части II получаем новые критерии дифференцируемости по Белинскому.

Следствие 14.3. *Для дифференцируемости по Белинскому $Q-$к.к. отображения f в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы $F(\chi\mu_\tau)\to F(\chi\mu_0)$ при $\tau\to 0$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$, где μ_0 из (14.2) не обязательно равно $\mu(z_0)$.*

Здесь через χ обозначена характеристическая функция единичного круга $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, μ_τ задано (14.4), а $F(\nu)$ – нелинейное преобразование, введенное в пункте 11.3.2, см. (11.75):

$$F(\nu)=m\widehat{\nu}+m(\widehat{\nu}*(m\widehat{\nu}))+\dots, \tag{14.12}$$

где $*$ обозначает свертку функций,

$$\widehat{\nu}(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\nu(\zeta)e^{-i\operatorname{Re}z\overline{\zeta}}d\xi\,d\eta \tag{14.13}$$

– преобразование Фурье, $m(z)=z/\overline{z}\in L^\infty(\mathbb{C})$ – мультипликатор.

Из следствия 14.3 в частности имеем:

Следствие 14.4. *Для конформности по Белинскому $Q-$к.к. отображения f в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы $F(\chi\mu_\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.*

3. Доказательство теоремы 14.1. Мы будем придерживаться схемы 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1). При этом используем следующие обозначения:

$$f_z(\zeta)\equiv f(\zeta\,z)/f(z),\ z\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\},\ f_0(\zeta)\equiv\zeta$$

для всех $\zeta \in \mathbb{C}$.

1) $\Rightarrow$ 2). Непосредственно из (14.2), (14.3) следует, что $f_\tau(\zeta) \to f_0(\zeta)$ при $\tau \to 0,\ \tau > 0$, для любого фиксированного $\zeta \in \mathbb{C}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Утверждение 2) влечет,что $f_\tau \to f_0$ л.р. (см. [270], с. 76). Заметим также, что

$$f_z(\zeta) = \frac{f_{|z|}(\zeta z/|z|)}{f_{|z|}(z/|z|)} = \frac{f(z')}{f(z)},$$

когда $\zeta = z'/z$.

Покажем, что $f_z(\zeta) - f_0(\zeta) \to 0$ при $z \to 0,\ z \in \mathbb{C}^*$, равномерно относительно $\zeta \in D_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\zeta| \le \delta\}$ для любого $\delta > 0$.

Действительно, предположим обратное. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ и последовательности $\zeta_n \in D_\delta,\ z_n \to 0,\ z_n \in \mathbb{C}^*$, такие, что $|g_n(\zeta_n) - \zeta_n| \ge \varepsilon$, где $g_n(\zeta) = f_{z_n}(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{C}$. Поскольку круг D_δ и единичная окружность ∂D_1 являются компактами, то без ограничения общности можно дополнительно предполагать, что $\zeta_n \to \zeta_0 \in D_\delta$ и $\eta_n = z_n/|z_n| \to \eta_0 \in \partial D_1$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $\varphi_n(\zeta)$ отображения $f_{|z_n|}(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$. Тогда, используя приведенные выше замечания, мы заключаем, что $\varphi_n(\zeta) \to \zeta$ при $n \to \infty$ равномерно на $D_\delta \cup \partial D_1$ и, кроме того, $g_n(\zeta) = \varphi_n(\eta_n\zeta)/\varphi_n(\eta_n)$. Следовательно, $g_n(\zeta) \to \zeta$ при $n \to \infty$ равномерно на D_δ. Таким образом, $g_n(\zeta_n) \to \zeta_0$ при $n \to \infty$. Это противоречит сделанному выше предположению.

3) $\Rightarrow$ 4). Полагая в (14.6) $z' = z\zeta$ и $\delta = 2|\zeta|$, немедленно получаем (14.7).

Последнее означает, что $f_z(\zeta) \to f_0(\zeta)$ при $z \to 0,\ z \in \mathbb{C}^*$, поточечно, а потому и локально равномерно относительно $z \in \mathbb{C}$ (см. [270], с. 76).

4) $\Rightarrow$ 1). Из (14.7) для $z = \rho > 0,\ \zeta = e^{i\Theta},\ \Theta \in \mathbb{R}$, и $w = \zeta z = \rho\, e^{i\Theta}$ получаем, что $f(w) = f(\rho)(\zeta + \alpha(\rho))$, где $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом,

$$f(w) = A(\rho)(w + o(\rho)),$$

где

$$A(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho}$$

и $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, т.е. имеет место (14.2). Кроме того, из (14.7) с $z = \rho > 0$ и $\zeta = t > 0$ получаем, что A удовлетворяет (14.3).

14.2. К проблеме Райха–Вальчака.

Основной результат параграфа – положительное решение проблемы Райха–Вальчака относительно конформности по Белинскому (теорема 14.2).

В пункте 1 приведены постановка проблемы и формулировка основного результата.

Пункт 2 содержит некоторые предварительные замечания (предложения 14.1, 14.2).

Доказательство теоремы 14.2 проведено в пункте 3 на основе теорем 12.1 и 14.1.

1. Постановка проблемы. Формулировка теоремы. Если два $Q-$к.к. отображения f и g имеют одинаковую комплексную характеристику μ в окрестностях точки z_0, то в этой окрестности $f = \mathcal{A} \circ g$, где $\mathcal{A}$ – некоторая аналитическая функция. Таким образом, дифференциальные свойства квазиконформного отображения в точке полностью определяются комплексной характеристикой этого отображения в окрестности данной точки.

В работе [322] была высказана гипотеза, что, каков бы ни был модуль комплексной характеристики $k(z) = |\mu(z)|$, всегда можно так подобрать ее аргумент $\arg \mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в любой наперед заданной точке плоскости $z_0 \in \mathbb{C}$. В той же работе было дано частичное решение этой проблемы. Именно, Райх и Вальчак показали, что для любой измеримой функции $\varphi(r) : (0,1) \to [0,q],\ q < 1$, существует $Q-$к.к отображение $(Q = (1+q)/(1-q))$ единичного круга на себя, которое конформно в нуле и комплексная характеристика которого по модулю равна $\varphi(|z|)$ п.в. (см. также [270], с. 248–249).

Указанная проблема естественным образом переформулируется для конформности по Белинскому. Поскольку при этом сохраняются многие геометрические свойства конформных отображений, перечисленные в предыдущем параграфе, то следующую теорему можно также рассматривать как частичное решение и самой исходной проблемы Райха–Вальчака:

Теорема 14.2. *Пусть $k(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция такая, что $0 \le k(z) \le q < 1$, и пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная точка плоскости.*

Тогда существует $Q-$к.к. отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с комплексной характеристикой $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $|\mu(z)| = k(z)$ п.в., которое является конформным по Белинскому в точке z_0.

При этом, в силу сделанных выше замечаний, всегда можно дополнительно предполагать, что $f \in H(Q)$, т.е. $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$.

При доказательстве этой теоремы основную роль будет играть критерий 2) теоремы 14.1 конформности по Белинскому, а также теорема 12.1 о замыкании.

2. Предварительные замечания. Итак, пусть $\mathfrak{M}(Q)$ – L^*-пространство комплексных характеристик μ отображений f класса $H(Q)$, которое мы наделяем сходимостью $\mu_n \overset{ch.}{\to} \mu$, индуцируемой локально равномерной сходимостью соответствующих отображений $f_n \to f$ (см. п. 11.3.1, 14.1.1). Отметим при этом, что локально равномерная сходимость для $Q-$к.к. отображений эквивалентна простой (поточечной) сходимости (см. [270], с. 76). Более того, это эквивалентно поточечной сходимости на всюду плотном подмножестве плоскости $\mathbb{C}$ (см. там же).

Выбирая соответствующие последовательности f_n и g_n, $n = 1, 2, \ldots$, $Q-$к.к. отображений и используя связь характеристик

$$\mu_{f\circ g^{-1}} = \left\{ \frac{\mu_f - \mu_g}{1 - \mu_f\overline{\mu_g}} \cdot \frac{g_z}{\overline{g_z}} \right\} \circ g^{-1} \tag{14.14}$$

(см. [16], с. 16), мы получаем:

Предложение 14.1. *Пусть μ и $\mu_n \in \mathfrak{M}(Q),\ n = 1, 2, \ldots$, и пусть $\mu_n \overset{ch.}{\to} \mu$ при $n \to \infty$. Тогда:*

1) для любого $c \in \mathbb{C}$:

$$\mu_n(z + c) \overset{ch.}{\to} \mu(z + c), \tag{14.15}$$

2) для любого $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\mu_n(az)\ \frac{\overline{a}}{a} \overset{ch.}{\to} \mu(az)\ \frac{\overline{a}}{a}, \tag{14.16}$$

3) для любых $c_n \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$, таких, что $c_n \to c_0$ при $n \to \infty$

$$\mu_n(z + c_n) \overset{ch.}{\to} \mu(z + c_0), \tag{14.17}$$

4) для любых $a_n \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ n = 1, 2, \ldots$, таких, что $a_n \to a_0 \in \mathbb{C}^*$ при $n \to \infty$

$$\mu_n(a_n z)\ \frac{\overline{a_n}}{a_n} \overset{ch.}{\to} \mu(a_0 z)\ \frac{\overline{a_0}}{a_0}\,, \tag{14.18}$$

5) для любого дробно-линейного отображения $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$$\mu_n(\varphi(z))\ \frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)} \overset{ch.}{\to} \mu(\varphi(z))\ \frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)}\,. \tag{14.19}$$

Будем говорить, что последовательность измеримых множеств $E_n \subseteq \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$, сходится к измеримому множеству $E \subseteq \mathbb{C}$ по мере, если сходятся по мере их характеристические функции $\chi_n \to \chi$ (см. [202], с. 66).

Как известно, из любой последовательности, сходящейся по мере, всегда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.в. (см., напр., [202], с. 58). Поэтому, в силу аксиомы Урысона (п. B1), а также леммы 11.7 (п. 11.3.3), имеем:

Предложение 14.2. *Пусть $E^k,\ k = 1, 2, \ldots$, – некоторое покрытие плоскости $\mathbb{C}$ по мере и пусть $E_n^k \subseteq \mathbb{C},\ k, n = 1, 2, \ldots$, – некоторые измеримые множества такие, что для каждого фиксированного $k = 1, 2, \ldots,\ E_n^k \to E^k$ по мере при $n \to \infty$.*

Тогда для μ и $\mu_n \in \mathfrak{M}(Q),\ n = 1, 2, \ldots$, следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mu_n \overset{ch.}{\to} \mu$ при $n \to \infty$;

2) $\chi^k \mu_n \overset{ch.}{\to} \chi^k \mu$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$;

3) $\chi_n^k \mu_n \overset{ch.}{\to} \chi^k \mu$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Здесь через χ^k и χ_n^k обозначены характеристические функции множеств E^k и $E_n^k,\ k, n = 1, 2, \ldots$, соответственно. Отметим, что множества $E_n^k,\ k = 1, 2, \ldots$, могут и не образовать *покрытие плоскости по мере* ни при одном $n = 1, 2, \ldots$ (определение смотри в пункте 11.3.2).

3. Доказательство теоремы 14.2. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Тогда, согласно теореме 14.1, нам достаточно показать, что $\mu_\tau(z) = \mu(\tau z) \overset{ch.}{\to} 0$ при $\tau \to 0,\ \tau > 0$, при соответствующем выборе $\vartheta(z) = \arg \mu(z)$. Семейству характеристик $\mu(z),\ \tau > 0$, отвечает семейство отображений $f_\tau : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,

$$f_\tau(z) = f(\tau z)/f(\tau), \quad \tau > 0, \tag{14.20}$$

класса $H(Q)$. Сходимость $\mu_\tau(z) \overset{ch.}{\to} 0$ эквивалентна сходимости $f_\tau(z) \to f_0(z) \equiv z$ л.р. при $\tau \to 0$ на $\mathbb{C}$. Это, в свою очередь, эквивалентно сходимости $f_\tau \to f_0$ л.р. на $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, где $\mathbb{R}^-$ – отрицательная вещественная полуось (см. [270], с. 76).

Таким образом, конформность по Белинскому f в нуле эквивалентна сходимости $F_t(\zeta) \to F_\infty(\zeta) \equiv e^\zeta$ при $t \to +\infty$, где

$$F_t(\zeta) = f(e^{\zeta - t})/f(e^{-t}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14.21}$$

– семейство отображений $F_t(\zeta) : \Pi \to \mathbb{C}\setminus f(\mathbb{R}^-),\ t \in \mathbb{R}$, заданных в полосе

$$\Pi = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\zeta| < \pi\}. \tag{14.22}$$

Их комплексные характеристики $N^{(t)}(\zeta) = N(\zeta - t),\ \zeta \in \Pi,\ t \in \mathbb{R}$, где

$$N(\zeta) = \mu(e^{\zeta})e^{-2\,i\operatorname{Im}\,\zeta}, \tag{14.23}$$

т.е.

$$|N(\zeta)| = k(e^{\zeta}) \tag{14.24}$$

и

$$\alpha(\zeta) \stackrel{def}{=} \arg N(\zeta) = \vartheta(e^{\zeta}) - 2\operatorname{Im}\,\zeta. \tag{14.25}$$

Пусть

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} N(\zeta), & \zeta \in \Pi, \\ 0, & \zeta \in \mathbb{C}\setminus\Pi. \end{cases} \tag{14.26}$$

В силу секвенциальной компактности класса $H(Q)$ (предложение 11.9, п. 11.3.1), аксиомы Урысона (п. B1), а также леммы 11.7, доказываемое утверждение эквивалентно тому, что $\nu(\zeta - t) \stackrel{ch.}{\to} 0$ при $t \to +\infty,\ t \in \mathbb{R}^+$.

Обозначим через

$$\Pi_l = \{\zeta \in \Pi : l \le \operatorname{Re}\,\zeta < l + 1\}, \tag{14.27}$$

$l = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$ – полуоткрытые прямоугольники, образующие дизъюнктное покрытие полосы Π, а через χ_l – характеристические функции этих прямоугольников. В дальнейшем, для произвольной функции $\varphi(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обозначаем

$$\varphi_l(\zeta) = \varphi(\zeta)\chi_l(\zeta),\ l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{14.28}$$

и

$$\varphi^{(t)}(\zeta) = \varphi(\zeta - t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{14.29}$$

Поскольку указанные операции срезания и сдвига функций не коммутируют друг с другом, то также уточним обозначения

$$\varphi_l^{(t)}(\zeta) = [\varphi^{(t)}(\zeta)]_l = \varphi(\zeta - t)\chi_l(\zeta). \tag{14.30}$$

В этих обозначениях критерий доказываемого утверждения состоит в том, что при $t \to +\infty$

$$\nu^{(t)} \stackrel{ch.}{\to} 0. \tag{14.31}$$

В силу предложения 14.2 это эквивалентно тому, что при $t \to +\infty$

$$\nu_l^{(t)} \stackrel{ch.}{\to} 0 \tag{14.32}$$

для всех $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Однако, поскольку $\chi_l(\zeta) = \chi_0(\zeta - l)$, то

$$\nu_l^{(t)}(\zeta) = \nu_l^{(r)}(w), \tag{14.33}$$

где $w = \zeta - l$ и $r = t - l$. Таким образом, в силу предложений 14.1, 14.2 совокупность соотношений (14.32) эквивалентна одному соотношению:

$$\nu_0^{(t)} \stackrel{ch.}{\to} 0 \tag{14.34}$$

при $t \to +\infty,\ t \in \mathbb{R}^+$.

Пусть

$$m(\zeta) = \begin{cases} k(e^{\zeta}), & \zeta \in \Pi, \\ 0, & \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Pi. \end{cases} \tag{14.35}$$

Полагаем $\Pi^+ = \{\zeta \in \Pi : \operatorname{Re}\zeta \geq 0\}$,

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} m(\zeta)e^{i\alpha_l(\zeta)}, & \zeta \in \Pi_l,\ l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \\ m(\zeta), & \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Pi^+, \end{cases} \tag{14.36}$$

функции $\alpha_l(\zeta)$ подобраны так, что

$$\rho(\nu_0^{(l)}, 0) < 2^{-l},\ l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{14.37}$$

где ρ – метрика, перенесенная из пространства $H(Q)$ в пространство $\mathfrak{M}(Q)$ через естественное соответствие (см. 11.3.1). Это всегда можно сделать в силу теоремы 12.1 для $M(\zeta) = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| = m_0^{(l)}(\zeta)\},\ \zeta \in \mathbb{C}$.

Таким образом, по построению

$$\nu_0^{(l)} \stackrel{ch.}{\to} 0 \tag{14.38}$$

при $l \to \infty,\ l = 1, 2, \ldots$. Покажем, что это уже влечет (14.34). В силу секвенциальной компактности пространства $H(Q)$, по аксиоме Урысона для этого достаточно проверить, что

$$\nu_0^{(t_n)} \stackrel{ch.}{\to} 0 \tag{14.39}$$

при $n \to \infty$ для произвольной последовательности $t_n \to \infty,\ t_n \in \mathbb{R}^+,\ n = 1, 2, \ldots$. Пусть $l_n = [t_n]$ и $\lambda_n = \{t_n\}$ – целая и дробная части чисел $t_n,\ n = 1, 2, \ldots$, соответственно. Тогда $l_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\lambda_n = [0, 1),\ n = 1, 2, \ldots$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda_n \to \lambda_0 \in [0, 1]$.

Для любого $\lambda \in [0, 1]$:

$$\chi_0(\zeta) = \chi_0(\zeta)[\chi_0(\zeta - (\lambda - 1)) + \chi_0(\zeta - \lambda)] = \varkappa^{\lambda}(\zeta) + \eta^{\lambda}(\zeta), \tag{14.40}$$

где $\varkappa^\lambda$ и η^λ – характеристические функции полуоткрытых прямоугольников:

$$P^\lambda = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\ \zeta| < \pi,\ 0 \le \mathrm{Re}\ \zeta < \lambda\}$$

и

$$R^\lambda = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\ \zeta| < \pi,\ \lambda \le \mathrm{Re}\ \zeta < 1\}.$$

Как видим, $\Pi_0 = P^\lambda \cup R^\lambda$. В указанных обозначениях из (14.40) имеем:

$$\begin{aligned} \nu_0^{(t_n)}(\zeta) &= \chi_0(\zeta)\ \nu(\zeta - l_n - \lambda_n) = \\ &= \chi_0(\zeta)\ [\nu_o^{(1+l_n)}(\zeta - (\lambda_n - 1)) + \nu_0^{(l_n)}(\zeta - \lambda_n)] \\ &= \varkappa^{\lambda_n}(\zeta)\ \nu_0^{(1+l_n)}(\zeta - (\lambda_n - 1)) + \eta^{\lambda_n}(\zeta)\ \nu_0^{l_n}(\zeta - \lambda_n). \end{aligned}$$

Поэтому в силу предложений 14.1 и 14.2 из (14.38) получаем (14.39), что и завершает доказательство. □

14.3. О дальнейших следствиях и приложениях.

Главным результатом параграфа является теорема 14.3 о поведении логарифма модуля квазиконформного отображения, которое конформно по Белинскому в данной точке.

Формулировка и доказательство теоремы 14.3 приведены в пункте 1.

На основе этой теоремы, в качестве иллюстрации возможных приложений, в пункте 2 сформулировано предложение 14.3 о существовании решений с особенностями логарифмического типа для одного из уравнений математической физики.

Доказательство предложения 14.3 проведено в пункте 3 через решение экстремальных задач в соответствующих компактных классах квазиконформных отображений с последующими предельными переходами.

1. Переход к логарифмической плоскости. Делая переход к логарифмической плоскости, описанный в книге Лехто–Виртанена (см. [270], с. 238), можно вполне однозначно и корректно задать $\ln f$ как функцию $\zeta = \ln z \in \mathbb{C}$. На основе соотношения (14.6) и из неравенства треугольника получаем:

Следствие 14.5. *При выполнении посылок и одного из условий 1)–4) теоремы 14.1 существует*

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{|f(z')|}{|f(z)|} - \frac{|z'|}{|z|} \right\} = 0 \tag{14.41}$$

при $|z'| \le \delta|z|$ *для любого* $\delta \ge 0$.

Отсюда и из теоремы Штольца О. мы докажем следующее утверждение:

Теорема 14.3. *Пусть квазиконформное отображение* f *конформно по Белинскому в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, *где* $f(z_0) \ne \infty$. *Тогда:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ln|f(z) - f(z_0)|}{\ln|z - z_0|} = 1. \tag{14.42}$$

Отсюда на основе следствия 14.1 немедленно получим:

Следствие 14.6. *Пусть комплексная характеристика* $\mu(z)$ *квазиконформного отображения* $f(z)$ *аппроксимативно непрерывна в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, *где* $f(z_0) \ne \infty$, *и пусть* $\mu(z_0) = 0$. *Тогда имеет место соотношение (14.42).*

Доказательство теоремы 14.3. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ и $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$. Покажем, что существует

$$\lim_{z \to 0} \frac{\ln|f(z)|}{\ln|z|} = 1. \tag{14.43}$$

Действительно, допустим, что соотношение (14.43) не имеет место, т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $z_n \to 0$ такие, что

$$\left| \frac{\ln|f(z_n)|}{\ln|z_n|} - 1 \right| \ge \varepsilon, \tag{14.44}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Для сокращения записи введем обозначения $t_n = -\ln|z_n|$ и $\tau_n = -\ln|f(z_n)|$. Тогда (14.44) перепишется в виде:

$$\left| \frac{\tau_n}{t_n} - 1 \right| \ge \varepsilon. \tag{14.45}$$

При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $t_n - t_{n-1} \ge 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Далее, вставляя, если нужно, между соседними членами последовательности t_n, $n = 1, 2, \ldots$, их среднее арифметическое, можно добиться, чтобы $t_n - t_{n-1} < 2$. При этом неравенство (14.45) сохраняется для бесконечного числа членов последовательности.

Таким образом, последовательность $\rho_n = |z_n| = e^{-t_n}$ удовлетворяет неравенствам $e^{-2} < \rho_n/\rho_{n-1} \le e^{-1}$. Из соотношения (14.41) получаем, что $\exp(\tau_{n-1} - \tau_n) = \exp(t_{n-1} - t_n) + \alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, или,

по-другому, $\exp(\tau_{n-1}-\tau_n)=(1+\beta_n)\exp(t_{n-1}-t_n)$ с $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда имеем, что $(\tau_n-\tau_{n-1})=(t_n-t_{n-1})+\gamma_n$ с $\gamma_n\to 0$ при $n\to\infty$ и, поскольку $t_n-t_{n-1}\geq 1$, $(\tau_n-\tau_{n-1})/(t_n-t_{n-1})=1+\delta_n$, где $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. По теореме Штольца тогда заключаем, что $\tau_n/t_n\to 1$ в противоречии с (14.45). Полученное противоречие и доказывает (14.43). $\Box$

2. О решениях с особенностями одного уравнения математической физики. Здесь речь пойдет вновь об уравнении

$$\operatorname{div}(a(z)\operatorname{grad} u)=0, \tag{14.46}$$

которое является основным уравнением в теории стационарных потоков, гидродинамике, магнито- и электростатике неоднородных сред. При этом нам удобно будет интерпретировать коэффициент a как функцию комплексной переменной $z=x+iy$. В дальнейшем мы предполагаем, что коэффициент a положителен и равномерно отделен как от 0, так и от ∞, т.е.

$$M=\operatorname{ess\,sup} a(z)<\infty \tag{14.47}$$

и

$$m=\operatorname{ess\,inf} a(z)>0. \tag{14.48}$$

Эти условия являются естественным с физической точки зрения. Кроме того, дополнительной нормировкой всегда можно добиться, чтобы

$$m=\operatorname{ess\,inf} a(z)=1. \tag{14.49}$$

Предложение 14.3. *Пусть функция $a:\overline{\mathbb{C}}\to\mathbb{R}^+$ принадлежит классу L^∞ и удовлетворяет нормирующему условию (14.49). Тогда для любого $z_0\in\mathbb{C}$ существует решение уравнения (14.46) с особенностями в точках z_0 и ∞, представимое в виде:*

$$U(z,z_0)=c\ln|f(z)-f(z_0)|,\ c>0, \tag{14.50}$$

где f – некоторое квазиконформное отображение, нормированное условиями $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f(\infty)=\infty$.

Кроме того, если функция $a(z)$ аппроксимативно непрерывна в точке z_0, а $a(1/z)$ – в нуле, то при любых α и $\beta>0$, $\beta/\alpha=a(\infty)/a(z_0)$, можно дополнительно потребовать, чтобы

$$\lim_{z\to\infty}\frac{U(z;z_0)}{\ln|z|^\alpha}=1 \tag{14.51}$$

и

$$\lim_{z\to z_0}\frac{U(z;z_0)}{\ln|z-z_0|^{\beta}}=1. \tag{14.52}$$

В частности, если $\alpha=1/a(\infty)$, *то* $\beta=1/a(z_0)$. *Для* $\alpha\le 1/a(\infty)$ *всегда можно подобрать* f *при* $c=1$, *а для* $\alpha>1/a(\infty)$ – *при* $c>1$.

Следствие 14.7. *Если* $a(z)$ *является непрерывной функцией, то все заключения предложения 14.3 имеют место для любого* $z_0\in\mathbb{C}$.

Поскольку по теореме Данжуа любая п.в. конечная измеримая функция является п.в. аппроксимативно непрерывной (см. [360], с. 199), то мы также имеем:

Следствие 14.8. *Если функция* $a(z)$ *непрерывна на* ∞, *то для почти всех* $z_0\in\mathbb{C}$ *имеют место все заключения предложения 14.3.*

Под решением уравнения (14.46) с особенностями в точках z_0 и ∞ здесь понимается функция U, которая обладает локально сопряженной функцией V такой, что пара (U,V) удовлетворяет п.в. обобщенной системе Коши–Римана

$$V_x=-aU_y,\ V_y=aU_x, \tag{14.53}$$

в соответствующей окрестности каждой точки $\zeta_0\in\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. Под этим подразумевается, что U и V обладает в этой окрестности обобщенными первыми производными. На самом же деле, в силу представления (14.50) и известных свойств квазиконформных отображений, $U\in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{C}\setminus\{z_0\})$. Более того, $U\in W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{C}\setminus\{z_0\})$ для всех $p>2$ достаточно близких к 2 (см., напр., [270], с. 226). Кроме того, U непрерывно в $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

Наконец, заметим, что система уравнений (14.53) эквивалентна одному комплексному уравнению

$$F_{\overline{z}}=-k(z)\overline{F_z}, \tag{14.54}$$

где $F=U+iV,\ z=x+iy$ и

$$k(z)=(a(z)-1)/(a(z)-1). \tag{14.55}$$

3. Доказательство предложения 14.3. 1) Решение уравнения (14.46) вида (14.50) мы построим из решения уравнения

$$f_{\overline{z}}=-k(z)\,\frac{f(z)-f(z_0)}{\overline{f(z)-f(z_0)}}\,\overline{f_z}\,, \tag{14.56}$$

где $k(z)$ задано (14.55). Существование решения уравнения (14.56) мы докажем через решение экстремальной задачи о $\max|f'(z_0)|$ в соответствующих классах квазиконформных отображений и последующие предельные переходы.

Именно, пусть $\mathfrak{F}_{r,R}$ – класс $a(z)-$к.к. отображений расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя, конформных в областях $|z-z_0|<r$ и $|z|>R,\ r+|z_0|<R$, с гидродинамической нормировкой на бесконечности:

$$f(z)=z+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_{r,R}$ множество всех комплексных дилатаций $\mu(z)$ отображений класса $\mathfrak{F}_{r,R}$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_{r,R}$ – выпуклое множество.

Таким образом, для любого $\nu\in\mathfrak{M}_{r,R}$ семейство функций $\mu_\varepsilon=\mu+\varepsilon(\nu-\mu)\in\mathfrak{M}_{r,R},\ \varepsilon\in[0,1]$, и в силу известной теоремы о дифференцировании квазиконформных отображений по параметру (см. [17] и теорему 7.1 главы 7):

$$f_\varepsilon(z)=f(z)+\frac{\varepsilon}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{\mu(\zeta)-\nu(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,f_\zeta^2\,d\xi\,d\eta+o(\varepsilon),\tag{14.57}$$

где $o(\varepsilon)/\varepsilon\to0$ при $\varepsilon\to0$ л.р.

По теореме 11.2 и лемме 11.9 класс $\mathfrak{F}_{r,R}$ является секвенциально компактным. В силу известной теоремы Вейерштрасса о сходимости аналитических функций (см., например, [105], с. 17), функционал $|f'(z_0)|$ непрерывен в указанном классе. Отсюда следует существование экстремали в задаче о $\max|f'(z_0)|^2$ на классе $\mathfrak{F}_{r,R}$. Непосредственно из условия максимума и вариационной формулы (14.57) получаем необходимое условие экстремума в виде уравнения (14.56) в кольцевой области и $f_{\overline{z}}=0$ для $|z-z_0|<r$ и $|z|>R$.

Отметим, что отображение $(f(z)-f(0))/(f(1)-f(0))$ также удовлетворяет уравнению (14.56) в кольцевой области. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $f(0)=0,\ f(1)=1$ и $f(\infty)=\infty$, т.е. $f\in H(a(z))$. По предложению 11.10 класс $f\in H(a(z))$ является секвенциально компактным. В силу этого можно выделить последовательности $r_n\to0$ и $R_n\to\infty$, для которых соответствующие отображения $f_n\to f\in H(a(z))$ л.р. По следствию 11.9 предельное $a(z)-$к.к. отображение f удовлетворяет уравнению (14.56) во всей комплексной плоскости. Функция $F(z)=\ln(f(z)-f(z_0))$ локально в $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ является решением уравнения (14.54), а потому $U(z,z_0)=\ln|f(z)-f(z_0)|$ есть решение уравнения (14.46) с сингулярностями в точках z_0 и ∞.

2) Покажем, что при дополнительных предположениях имеют место соотношения (14.51), (14.52) при $\alpha = 1/a(\infty)$ и $\beta = 1/a(z_0)$. Для определенности докажем (14.52). Соотношение (14.51) доказывается аналогично.

Для этого рассмотрим отображение $\Phi = \varphi \circ g$, где $g(z) = f(z_0 + z) - f(z_0)$, $\varphi(w) = w|w|^{\gamma-1}$, $\gamma = a(z_0)$. Заметим, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\infty) = \infty$ и φ удовлетворяет уравнению Бельтрами:

$$\varphi_{\overline{w}} = \varkappa \frac{w}{\overline{w}} \varphi_w \tag{14.58}$$

с $\varkappa = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Ввиду (14.56), отображение h, обратное к g, удовлетворяет уравнению

$$h_{\overline{w}} = k(z_0 + h(w))\frac{w}{\overline{w}} h_w, \tag{14.59}$$

$h(0) = 0$, $h(\infty) = \infty$ (см. [16], с. 15). Таким образом, $\Phi = \varphi \circ h^{-1}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \infty$, имеет комплексную характеристику

$$M(z) = \frac{k(z_0) - k(z_0 + z)}{1 - k(z_0)k(z_0 + z)} \cdot \frac{g(z)}{\overline{g(z)}} \frac{\overline{g_z}}{g_z}, \tag{14.60}$$

(см. [16], с. 16). Как видим, $M(z)$ аппроксимативно непрерывно в нуле и $M(0) = 0$. По теореме 14.3 и следствию 14.6, поскольку $\ln|\Phi| = \gamma \ln|g|$, получаем (14.52) при $\beta = 1/\gamma = 1/a(z_0)$.

3) Рассматривая уравнение (14.46) с заменой $a(z)$ на $A(z) = a(z)\Lambda$ с произвольным $\Lambda \geq 1$, по предыдущему получаем существование решений с особенностями, которые удовлетворяют (14.50)–(14.52) с любыми $\alpha \leq 1/a(\infty)$, $\beta = \alpha a(\infty)/a(z_0)$ и $c = 1$.

4) Наконец, для $\alpha > 1/a(\infty)$ получаем тоже из решения, указанного в пунктах 1)–2) доказательства, домножая его на константу $c = \alpha \cdot a(\infty)$. □

В заключение отметим, что в последние годы был получен целый ряд новых теорем существования для уравнения Бельтрами с вырождением условия строгой эллиптичности, см., например, обзор [161] и цитируемую там литературу. В этой связи, проблемы сходимости и компактности, а также теория вариационного метода и его приложений получили свое дальнейшее развитие в работах [275, 276] и [277].

Приложение А

Об инвариантно-выпуклых множествах

Здесь мы приведем достаточно полное для наших целей изложение теории инвариантно-выпуклых множеств, которые были введены и изучены в одной из малодоступных работ второго автора (Деп. в ВИНИТИ 16.04. 82 г., № 1874). Отдельные элементы этой теории можно найти также в статьях [343, 357].

Значение инвариантно-выпуклых множеств состоит в том, что они наиболее адекватно отражают поведение комплексных характеристик при локально равномерной сходимости отображений с обобщенными производными. В частности, в их терминах формулируются основные теоремы сходимости, компактности и замыкания (теоремы 11.2, 12.1, 12.2), которые усиливают и обобщают известные теоремы сходимости Штребеля и Берса–Боярского, а также теорему компактности Шиффера–Шобера (см. [53, 71, 270, 404, 409]).

В пункте 1 даны определение и геометрический критерий инвариантно-выпуклых множеств (предложение А1), а также различные представления таких множеств (теорема А1, следствие А1).

Пункт 2 содержит определение инвариантно-выпуклой оболочки $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$ и ее описание в различных терминах (теоремы А2, А3, следствие А2).

В пункте 3 введено понятие множества инвариантно-крайних точек $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$, роль которого определяется тем обстоятельством, что оно является минимальным по включению подмножеством ∂M, по которому еще восстанавливается $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$ (теорема А4, предложение А2). Приводится также один критерий и более подробный анализ этого множества (предложение А3 и следствие А3).

Наконец, в пункте 4 сформулированы аналоги классических теорем выпуклого анализа – теорем Крейна–Мильмана и Каратеодори-Минковского (теоремы А5 и А6).

1. Определения и основные свойства. Пусть $\Delta = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1\}$ – единичный круг и $\mathcal{G}$ – группа всех дробно-линейных отображений Δ

на себя. Множество M из Δ назовем *инвариантно-выпуклым*, если все множества $g(M),\ g \in \mathcal{G}$, являются выпуклыми.

Приведем критерий инвариантной выпуклости. Для этого заметим, что через каждые три точки $\mu_1,\ \mu_2 \in \Delta$ и $\eta \in \partial\Delta$ приходит единственная окружность. Замкнутую дугу этой окружности, соединяющую μ_1 и μ_2 внутри Δ, обозначим через $[\mu_1, \mu_2](\eta)$. В силу кругового свойства дробно-линейных отображений (см., напр., [396], с. 47) немедленно получаем:

Предложение А1. *Замкнутое множество M из Δ инвариантно-выпукло тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой точек $\mu_1,\ \mu_2 \in M$ этому множеству принадлежит и вся совокупность дуг $[\mu_1, \mu_2](\eta),\ |\eta| = 1$.*

Введем аналог опорной полуплоскости. Именно, замкнутый круг D из $\overline{\Delta}$, касающийся $\partial\Delta$, назовем *опорным* к множеству M из Δ, если $M \subseteq D$ и $\partial D \cap \partial M \neq \oslash$. Обозначим через $D_M(\eta)$ единственный опорный к M круг, касающийся $\partial\Delta$ в точке $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$. Отметим, что радиус $r(\eta)$ и центр $c(z) = \eta(1 - r(\eta))$ опорного круга $D_M(\eta)$ являются непрерывными функциями параметра $\eta,\ |\eta| = 1$, если $\overline{M} \subseteq \Delta$.

Теорема А1. *Любое замкнутое инвариантно-выпуклое множество M из Δ представимо в виде*

$$M = \bigcap_{|\eta|=1} D_M(\eta). \tag{A1}$$

Эта теорема является прямым следствием следующей леммы.

Лемма А1. *Пусть M – произвольное замкнутое инвариантно-выпуклое множество из Δ. Тогда для любой точки $\nu \in \mathbb{C} \setminus M$ найдется опорный к M круг D такой, что $\nu \in \mathbb{C} \setminus D$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\nu = 0$. Пусть μ_0 – точка из M, на которой реализуется $\rho_0 = \min |\mu| \neq 0$. Можно считать, что $\mu_0 > 0$. Покажем, что

$$D = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left| \mu - \frac{1 + \mu_0}{2} \right| \leq \frac{1 - \mu_0}{2} \right\}$$

является искомым опорным кругом. Для этого достаточно показать включение $M \subseteq D$.

Допустим, что это не так, т.е. найдется точка μ_1 из M, которая не принадлежит D. Тогда дуга окружности, порождаемой тройкой точек μ_0, μ_1 и 1, которая соединяет μ_0 и μ_1 в Δ, имеет непустое пересечение с

кругом $D_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < \rho_0\}$. Следовательно, в силу предложения A1, и $M \cap D_0 \neq \varnothing$, что противоречит определению ρ_0.

Следствие A1. *Любое компактное инвариантно-выпуклое множество M из Δ имеет представление:*

$$M = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}_M} D, \tag{A2}$$

где $\mathfrak{D}_M$ – совокупность всех замкнутых кругов D из Δ таких, что $M \subseteq D$.

Действительно, вместе с опорным кругом D, найденным в лемме, найдется очевидно и замкнутый круг $\widetilde{D} \subseteq \Delta$ такой, что $M \subseteq \widetilde{D}$, а $\nu \in \mathbb{C} \setminus \widetilde{D}$.

2. Об инвариантно-выпуклой оболочке. В соответствии с предложением A1 *инвариантно-выпуклой оболочкой* $\operatorname{inv\,co} M$ множества M из Δ, $\overline{M} \subseteq \Delta$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M.

Теорема A2. *Если $\overline{M} \subseteq \Delta$, то*

$$\operatorname{inv\,co} M = \bigcap_{|\eta|=1} D_M(\eta). \tag{A3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$D_M(\eta) = D_{\operatorname{inv\,co} M}(\eta). \tag{A4}$$

Действительно, по определению $M \subseteq \operatorname{inv\,co} M$ и поэтому $D_M \subseteq D_{\operatorname{inv\,co} M}(\eta)$. Кроме того, если $\overline{M} \subseteq \Delta$, то найдется $0 \leq q < 1$ такое, что $M \subseteq \Delta_q = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq q\}$ и, таким образом, $M \subseteq \Delta_q \cap D_M(\eta)$, $|\eta| = 1$. Следовательно, $\operatorname{inv\,co} M \subseteq \Delta_q \cap D_M(\eta) \subseteq D_M(\eta)$ и тем самым (A4) доказано.

Отсюда и из теоремы A1 немедленно следует соотношение (A3).

Следствие A2. *Если $\overline{M} \subseteq \Delta$, то*

$$\operatorname{inv\,co} M = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}_M} D, \tag{A5}$$

где $\mathfrak{D}_M$ – совокупность всех замкнутых кругов D из Δ таких, что $M \subseteq D$.

Действительно, если $D \in \mathfrak{D}_M$, то по определению $\operatorname{inv}\operatorname{co} M \subseteq D$. Таким образом, $\mathfrak{D}_M \subseteq \mathfrak{D}_{\operatorname{inv}\operatorname{co} M}$. Обратное включение очевидно. Следовательно,

$$\mathfrak{D}_M = \mathfrak{D}_{\operatorname{inv}\operatorname{co} M} \tag{A6}$$

и по следствию А1 получаем соотношение (А5).

Дуговым замыканием $\widehat{M}$ множества M из Δ называется в дальнейшем множество, возникающее в результате попарного соединения точек M внутри Δ дугами всех тех окружностей, которые пересекают или касаются $\partial\Delta$. В соответствии с обозначением, введенным в предыдущем пункте,

$$\widehat{M} = \bigcup_{\substack{|\eta|=1 \\ \mu_1,\,\mu_2 \in M}} [\mu_1, \mu_2](\eta). \tag{A7}$$

Теорема А3. *Если M – замкнутое множество из Δ, то*

$$\operatorname{inv}\operatorname{co} M = \widehat{\widehat{M}}. \tag{A8}$$

Доказательство этой теоремы базируется на следующей лемме:

Лемма А2. *Пусть $\overline{M} \subseteq \Delta$ и Γ – граница $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$. Тогда Γ представляет собой строго выпуклую жорданову кривую и при этом*

$$\Gamma = \bigcup_{|\eta|=1} \Gamma(\eta), \tag{A9}$$

где

$$\Gamma(\eta) = \Gamma \cap \partial D_M(\eta) \neq \oslash \tag{A10}$$

при каждом η, $|\eta| = 1$, является замкнутой дугой окружности $\partial D_M(\eta)$, возможно вырождающейся в единственную точку, концы которой принадлежат ∂M.

Доказательство теоремы А3. Действительно, в силу леммы А2 и замкнутости M, имеет место включение $\Gamma \subseteq \widehat{M}$. В виду выпуклости $\operatorname{inv}\operatorname{co} M \subseteq \widehat{\Gamma} \subseteq \widehat{\widehat{M}}$. Обратное включение $\widehat{\widehat{M}} \subseteq \operatorname{inv}\operatorname{co} M$ следует из предложения А1 и замкнутости $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$. Тем самым теорема А3 полностью доказана.

Рассмотрим для примера множество M состоящее из пары точек μ_1, $\mu_2 \in \Delta$. Заметим, что существует в точности две окружности, которые проходят через обе точки и касаются $\partial\Delta$. Этот факт становится

очевидным, благодаря круговому свойству дробно-линейных отображений расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, например, после преобразования $P(\mu) := 1/(\mu - \mu_2)$ (см. [396], с. 47). Действительно, существует в точности две прямые, проходящие через точку $\mu_1^* = P(\mu_1)$ и касающиеся окружности $P(\partial\,\Delta)$.

Пусть D_1 и D_2 – замкнутые круги, ограниченные указанными окружностями. Тогда:

$$\{\mu_1, \mu_2\}^{\frown} = \operatorname{inv co}\{\mu_1, \mu_2\} = D_1 \cap D_2. \tag{A11}$$

Действительно, т.к. D_1 и D_2 по построению являются опорными к $M = \{\mu_1, \mu_2\}$ кругами, то в силу теоремы A2 $\operatorname{inv co} M \subseteq D_1 \cap D_2$. Далее, ввиду замкнутости $\operatorname{inv co} M$ и предложения A1, $\widehat{M} \subseteq \operatorname{inv co} M$. Наконец, из очевидного включения $D_1 \cap D_2 \subseteq \widehat{M}$ получаем (A11).

Соотношение (A11) позволяет ввести в $\operatorname{inv co}\{\mu_1, \mu_2\}$ некоторую систему координат. Именно, пусть $|\eta| = 1,\ \lambda \in [0, 1]$. Тогда через тройку точек $\eta \in \partial\Delta,\ \mu_1,\ \mu_2 \in \Delta$ проходит единственная окружность. При дробно-линейном отображении $P_\eta(\mu) = (\eta + \mu)/(\eta - \mu)$ указанная окружность переходит в прямую, проходящую через пару точек $\varkappa_i = P_\eta(\mu_i),\ i = 1, 2,\ \varkappa_1 \neq \varkappa_2$. Пусть $\varkappa = \lambda\varkappa_1 + (1 - \lambda)\varkappa_2$. Тогда $\varkappa$ лежит на отрезке прямой, соединяющем $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, и при обратном дробно-линейном отображении переходит в некоторую точку μ, которая расположена на дуге, соединяющей μ_1 и μ_2 в Δ, указанной выше окружности.

Такое μ будем обозначать через $\omega(\eta, \lambda; \mu_1, \mu_2)$. Из соотношения (A11) и построения ясно, что $\mu \in \operatorname{inv co}\{\mu_1, \mu_2\}$ и что вообще любая точка $\mu \in \operatorname{inv co}\{\mu_1, \mu_2\}$ представима в таком виде при некоторых $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1,\ \lambda \in [0, 1]$.

В вырожденном случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, функцию $\omega(\eta, \lambda; \mu_1, \mu_2)$ доопределяем соотношением: $\omega(\eta, \lambda; \mu_1, \mu_2) \equiv \mu$ при всех $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1,\ \lambda \in [0, 1]$.

Ввиду бесконечной дифференцируемости всех определяющих соотношений, функция $\omega(\eta, \lambda; \mu_1, \mu_2)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных на декартовом произведении $\partial\Delta \times [0, 1] \times \Delta_q \times \Delta_q,\ \Delta_q = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leq q\},\ q < 1$, т.е.

$$|\Delta\omega| \leq c(q)\{|\Delta\eta| + |\Delta\lambda| + |\Delta\mu_1| + |\Delta\mu_2|\}, \tag{A12}$$

где $c(q)$ – константа, зависящая только от q.

Доказательство леммы A2. Строгая выпуклость кривой Γ следует из предложения A1.

Соотношение (А9) эквивалентно включению:

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{|\eta|=1} \partial D_M(\eta). \tag{А13}$$

Допустим, что (А13) не выполнено, т.е. существует точка $\mu_0 \in \Gamma$ такая, что $\mu_0 \notin \partial D_M(\eta)$ ни при каком $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$. Тогда при всех $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$,

$$\rho(\eta) = \min_{\mu \in \partial D_M(\eta)} |\mu - \mu_0| > 0.$$

Если $\rho_0 = \inf \rho(\eta) \neq 0$, то, в силу теоремы А1 и соотношения (А4), $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_0| < \rho_0\} \subseteq \operatorname{inv co} M$, что невозможно, т.к. $\mu_0 \in \Gamma$. Следовательно, $\rho_0 = 0$ и потому существует последовательность $\eta_n,\ n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\rho(\eta_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу компактности $\partial\Delta = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| = 1\}$ можно считать, что $\eta_n \to \eta_0 \in \partial\Delta$ при $n \to \infty$. Ввиду непрерывности радиуса $r(\eta)$ и центра $c(\eta)$ опорного круга $D_M(\eta)$ по параметру $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$, последовательность окружностей $\partial D_M(\eta_n)$ при $n \to \infty$ стягивается к $\partial D_M(\eta_0)$ и т.к. $\rho(\eta_n) \to 0$, то $\mu_0 \in \partial D_M(\eta_0)$. Полученное противоречие и доказывает (А13), а вместе с тем и (А9).

Докажем, (А10), т.е. что $\Gamma(\eta) \neq \oslash, |\eta| = 1$. Действительно, по определению опорного круга для любого $\eta, |\eta| = 1$, найдется точка $\mu \in \partial M \cap \partial D_M(\eta)$. В силу теоремы А2, $\mu \in \Gamma$, т.е. $\mu \in \Gamma(\eta) \cap \partial M$.

Далее, в виду замкнутости Γ и $\operatorname{inv co} M$, а также в силу предложения А1, $\Gamma(\eta)$ при каждом $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$, представляет собой замкнутую дугу окружности $\partial D_M(\eta)$.

Таким образом, остается только показать, что концы дуги $\Gamma(\eta)$ принадлежат ∂M при каждом $\eta \in \partial\Delta$. Допустим, что это не так для некоторого $\eta_0 \in \partial\Delta$. Пусть μ_0 – конец дуги $\Gamma(\eta_0)$, который не принадлежит ∂M. Тогда все точки из $\Gamma(\eta_0) \cap \partial M$ лежат по одну сторону от μ_0 на дуге $D_M(\eta_0) \setminus \{\eta_0\}$. Благодаря круговому свойству дробно-линейных отображений, преобразование плоскости $P(\mu) = 1/(\mu - \mu_0)$ переводит круг $D_M(\eta_0)$ в полуплоскость, содержащую $P(M)$, которой в точке $P(\eta_0)$ касается внешним образом круг $P(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta)$. При этом все множество $P(\partial M \cap \partial D_M(\eta_0))$ лежит на прямой $P(\partial D_M(\eta_0))$ по одну сторону от точки $P(\eta_0)$. Поскольку же $\mu_0 \notin \overline{M} \subseteq \Delta$, то множество $P(\overline{M}) = \overline{P(M)}$ расположено в некотором кольцевом секторе с центром в точке $P(\eta_0)$ и раствором, меньше π. Такой сектор заведомо можно погрузить в замкнутый круг K, который не пересекается с кругом $P(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta)$. По построению замкнутый круг $D = P^{-1}(K) \subseteq \Delta$ содержит внутри себя M, но не содержит точку μ_0. Таким образом, в силу следствия А2, $\mu_0 \notin \operatorname{inv co} M$ в противоречии с определением ($\mu_0 \in \Gamma(\eta) \subseteq \Gamma = \partial(\operatorname{inv co} M)$). Полученное противоречие и показывает, что концевые точки дуг $\Gamma(\eta),\ |\eta| = 1$, принадлежат ∂M.

3. Об инвариантно-крайних точках. В силу предложения A1, инвариантно-выпуклые множества являются строго выпуклыми множествами, т.е. их границы не могут содержать отрезков прямых. Таким образом, все граничные точки таких множеств являются крайними.

Граничную точку множества M, $\overline{M} \subseteq \Delta$, назовем *инвариантно-крайней*, если на некоторой опорной окружности $\partial D_M(\eta)$, $|\eta| = 1$, она является ближайшей из ∂M к точке η по или против часовой стрелки. Множество всех инвариантно-крайних точек M в дальнейшем обозначается через $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$.

В силу леммы A2 мы немедленно получаем:

Теорема A4. *Пусть M – произвольное множество из Δ с $\overline{M} \subseteq \Delta$. Тогда*

$$\operatorname{inv}\operatorname{co} M = \operatorname{inv}\operatorname{co}(\operatorname{inv}\operatorname{ext} M). \tag{A14}$$

Если же M_0 – некоторое замкнутое подмножество $\overline{M}$ такое, что

$$(\operatorname{inv}\operatorname{ext} M) \setminus M_0 \neq \oslash, \tag{A15}$$

то

$$(\operatorname{inv}\operatorname{co} M) \setminus (\operatorname{inv}\operatorname{co} M_0) \neq \oslash. \tag{A16}$$

Также легко доказывается.

Предложение A2. *Множество* $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$ *при* $\overline{M} \subseteq \Delta$, *является замкнутым подмножеством ∂M.*

Таким образом, роль подмножества $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$ определяется тем обстоятельством, что оно является минимальным по включению замкнутым подмножеством ∂M, по которому еще восстанавливается $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$.

Как видно из леммы A2, утверждение (A16) можно усилить соотношением:

$$(\operatorname{inv}\operatorname{ext} M) \setminus (\operatorname{inv}\operatorname{co} M_0) \neq \oslash. \tag{A17}$$

Поэтому подмножество $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$ можно охарактеризовать в других терминах, которые более близки к классическому определению крайних точек и потому лучше высвечивают эту аналогию:

Предложение A3. *Пусть M – замкнутое инвариантно-выпуклое множество из Δ и $\mu_0 \in M$. Тогда для принадлежности $\mu_0 \in \operatorname{inv}\operatorname{ext} M$ необходимо и достаточно, чтобы не существовало такой пары μ_1, $\mu_2 \in M$, $\mu_i \neq \mu_0$, $i = 1, 2$, для которой бы μ_0 принадлежала дуге $\overset{\frown}{\mu_1\mu_2}$ некоторой окружности, пересекающей или касающейся единичной окружности $\partial\Delta$.*

Для дальнейшего нам потребуется более тонкий анализ $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$. Именно, пусть

$$\operatorname{inv}\operatorname{ext}_M(\eta) \stackrel{def}{=} \partial D_M(\eta) \cap \operatorname{inv}\operatorname{ext} M. \tag{A18}$$

Тогда по Лемме А2 $\operatorname{inv}\operatorname{ext}_M(\eta) \neq \oslash$, $|\eta| = 1$, состоит из не более чем двух точек и

$$\operatorname{inv}\operatorname{ext} M = \bigcup_{|\eta|=1} \operatorname{inv}\operatorname{ext}_M(\eta). \tag{A19}$$

При этом,

$$\operatorname{inv}\operatorname{ext}_M(\eta) = \{\operatorname{inv}\operatorname{ext}^+(\eta)\} \cup \{\operatorname{inv}\operatorname{ext}^-(\eta)\}, \tag{A20}$$

где $\operatorname{inv}\operatorname{ext}^+(\eta)$ и $\operatorname{inv}\operatorname{ext}^-(\eta)$ – ближайшие к η, $|\eta| = 1$, точки по и против часовой стрелки, соответственно, вдоль опорной окружности $\partial D_M(\eta)$ из ∂M.

Предложение А2 получается непосредственно из следующего простого следствия леммы А2:

Следствие А3. *Пусть* $\overline{M} \subseteq \Delta$. *Тогда*

$$\lim_{\vartheta \to \Theta + 0} \operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}(e^{i\vartheta}) = \operatorname{inv}\operatorname{ext}^+(e^{i\Theta}), \tag{A21}$$

$$\lim_{\vartheta \to \Theta - 0} \operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}(e^{i\vartheta}) = \operatorname{inv}\operatorname{ext}^-(e^{i\Theta}). \tag{A22}$$

Здесь, как обычно, подразумевается, что угол растет при вращении против часовой стрелки.

Действительно, пусть $\Gamma(\eta)$, $|\eta| = 1$, – дуги границы $\Gamma = \partial(\operatorname{inv}\operatorname{co} M)$ из леммы А2. Эти дуги циклически упорядочены на Γ точно также, как η на единичной окружности. Поскольку радиус $r(\eta)$ и центр $c(\eta)$ опорной окружности $\partial D_M(\eta)$ непрерывно зависит от параметра η, то точки накопления $\operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}(e^{i\vartheta})$ при $\vartheta \to 0$ находятся на опорной окружности $\partial D_M(e^{i\vartheta})$ и, ввиду замкнутости Γ, на дуге $\Gamma(e^{i\vartheta})$. В силу указанной упорядоченности $\Gamma(\eta)$, $|\eta| = 1$, и леммы А2 немедленно получаем соотношения (А21) и (А22).

Предложение А2 следует из соотношений (А21) и (А22) в силу секвенциальной компактности единичной окружности $\partial\Delta = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| = 1\}$.

4. О некоторых аналогах классических теорем. Здесь мы приведем аналоги классических результатов выпуклого анализа. Напомним формулировку *теоремы Крейна-Мильмана*. Если X – компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства, то X совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек. Ее аналог,

который следует непосредственно из теоремы А4, звучит следующим образом:

Теорема А5. *Пусть M – компактное инвариантно-выпуклое подмножество Δ. Тогда:*

$$M = \operatorname{inv}\operatorname{co}(\operatorname{inv}\operatorname{ext} M). \tag{A23}$$

Другим классическим результатом выпуклого анализа является *теорема Минковского*: Пусть X – компактное выпуклое подмножество конечномерного векторного пространства E и x – элемент из X. Тогда x есть конечная выпуклая комбинация крайних точек. *Теорема Каратеодори* усиливает результат Минковского: Если X – компактное выпуклое подмножество $n-$мерного пространства E, то каждая точка x из X является выпуклой линейной комбинацией не более чем $n+1$ крайних точек X. Ее аналог можно сформулировать в следующем виде:

Теорема А6. *Пусть M – компактное инвариантно-выпуклое подмножество Δ. Тогда любая точка μ из M принадлежит инвариантно-выпуклой оболочке некоторой тройки точек из* $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$.

В силу теоремы А2, это эквивалентно тому, что μ принадлежит двукратному дуговому замыканию некоторой тройки точек $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ из $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$ или, по-другому, некоторому криволинейному треугольнику, который может вырождаться в двуугольник или точку и стороны которого состоят из дуг окружностей, опорных к множеству $N = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$.

Доказательство теоремы А6. Пусть μ_0 – произвольная точка из $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M$. Обозначим через $\Delta(\eta),\ |\eta| = 1,$ – криволинейный треугольник с вершинами в точках μ_0 и $\mu_1(\eta) = \operatorname{inv}\operatorname{ext}^+(\eta),\ \mu_2(\eta) = \operatorname{inv}\operatorname{ext}^-(\eta)$, одна из сторон которого совпадает с дугой $\Gamma(\eta)$ из леммы А2, а две другие представляют собой отрезки прямых, соединяющих μ_0 с $\mu_1(\eta)$ и $\mu_2(\eta)$, соответственно (конечно же, треугольник $\Delta(\eta)$ может вырождаться в двуугольник или точку). Тогда согласно лемме А2

$$M = \bigcup_{|\eta|=1} \Delta(\eta).$$

Поскольку же

$$\Delta(\eta) \subseteq \operatorname{inv}\operatorname{co}\{\mu_0, \mu_1(\eta), \mu_2(\eta)\},$$

то доказательство завершено. □

Приложение Б

О семействах множеств, измеримых по параметру

Рассматриваемое понятие представляет собой совершенный аналог измеримой функции. Это понятие возникло первоначально в теории вероятностей и теории оптимального управления под названиями "случайное множество" и "измеримое многозначное отображение", соответственно (см., напр., [169, 184, 194, 207, 231, 283, 305, 335, 362, 408]). Здесь мы используем классический термин Бурбаки [77] "семейство множеств". Авторам принадлежат только специальные результаты теории измеримых семейств, относящиеся к теории инвариантно - выпуклых множеств, такие как измеримость $\operatorname{inv}\operatorname{co} M(z)$ и $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M(z)$.

Пункт 1 содержит основные определения и предварительные замечания. В пункте 2 доказан целый ряд критериев измеримости (теорема Б1). В пункте 3 показано, что при элементарных операциях типа объединения и пересечения измеримость сохраняется. Основным результатом данного пункта является теорема Б2 об измеримости верхнего топологического предела. Пункт 4 содержит теорему о так называемых измеримых сечениях (теорема Б3). В пункте 5 доказана теорема о представлении измеримых семейств через измеримые функции (теоремы Б4). В пункте 6 сформулирована теорема о равенстве классов измеримых функций, порождаемых измеримыми семействами множеств (теорема Б5). Пункт 7 включает теорему об измеримости семейств инвариантно-выпуклых оболочек $\operatorname{inv}\operatorname{co} M(z)$ (теорема Б6), а пункт 8 – теорему об измеримости семейств инвариантно-крайних точек $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M(z)$ (теорема Б7). Наконец, в пункте 9 доказана лемма Б5 о так называемых измеримых опорах, а в пункте 10 – лемма Б6 об измеримости точек касания опорных кругов с единичной окружностью.

1. Определения и предварительные замечания. Будем говорить, что *семейство* замкнутых *множеств* комплексной плоскости $M(z)$, $z \in E \subseteq \mathbb{C}$, *измеримо* по параметру z, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество точек

$$E_0 = \{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} \tag{Б1}$$

измеримо по Лебегу (ср. [360], с. 27).

Напомним также некоторые топологические понятия. *Верхним топологическим пределом* последовательности множеств M_n называется множество

$$M = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{n\geq m} M_n \right)}. \tag{Б2}$$

Другими словами, точка μ принадлежит M, если любая ее окрестность пересекается с бесконечным числом множеств M_n (см. [229], с. 344–345).

В соответствии с этим, множество M называется *топологическим пределом* последовательности множеств $M_n,\ n = 1, 2, \ldots$, если для любой ее подпоследовательности $M_{n_k},\ k = 1, 2, \ldots$,

$$M = \operatorname*{Ls}_{k\to\infty} M_{n_k}. \tag{Б3}$$

В этом случае пишем (см. [229], с. 347):

$$M = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} M_n. \tag{Б4}$$

Над пространством всех ограниченных замкнутых множеств из $\mathbb{C}$ можно ввести *метрику Хаусдорфа* (см. [229], с. 223):

$$\operatorname{dist}(M_1, M_2) = \max\{ \sup_{\mu_1\in M_1} \rho(\mu_1, M_2),\ \sup_{\mu_2\in M_2} \rho(\mu_2, M_1)\}, \tag{Б5}$$

где, как обычно,

$$\rho(\mu_0, M_0) = \inf_{\mu\in M_0} |\mu - \mu_0| \tag{Б6}$$

обозначает расстояние от точки μ_0 до множества M_0.

Отметим, что для компактных множеств из $\mathbb{C}$ топологический предел (Б4) эквивалентен сходимости по метрике Хаусдорфа (см. [230], с. 54–56):

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(M_n, M) = 0. \tag{Б7}$$

В дальнейшем будем говорить, что *семейство множеств* $M(z)$, $z \in E \subseteq \mathbb{C}$, *непрерывно* по параметру z в точке $z_0 \in E$, если для любой последовательности $z_n \in E,\ n = 1, 2, \ldots,\ z_n \to z_0$, имеет место равенство

$$M(z_0) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M(z_n). \tag{Б8}$$

Этот факт фиксируем записью

$$M(z_0) = \operatorname*{Lim}_{z\to z_0} M(z). \tag{Б9}$$

Методом от противного легко доказывается следующее:

Замечание Б1. *Непрерывность семейства множеств $M(z)$ в точке z_0 эквивалентна соотношению*

$$M(z_0) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\left(\bigcup_{\substack{0<|z-z_0|<\delta_0 \\ z\in E}} M(z) \right)}. \tag{Б10}$$

Для дальнейшего будет полезно следующее:

Замечание Б2. *Если семейство компактов $M(z),\ z \in E$, и функция $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ непрерывны в точке $z_0 \in E$, то функция расстояния:*

$$r(z) = \min_{\mu\in M(z)} |\mu - \mu(z)| \tag{Б11}$$

также непрерывна в этой точке.

Действительно, как легко видеть,

$$r(z) = \operatorname{dist}(N(z), M(z)),$$

$$|\mu - \mu(z_0)| = \operatorname{dist}(N(z), N(z_0)),$$

где $N(z) = \{\mu(z)\},\ z \in E$, – семейство одноточечных множеств. Поскольку же $\mu(z) \to \mu(z_0)$ и $\operatorname{dist}(M(z), M(z_0)) \to 0$ при $z \to z_0$, то, в силу непрерывности любой метрики, $r(z) \to r(z_0)$.

Нам также потребуется понятие аппроксимативной непрерывности. Семейство множеств $M(z),\ z \in E$, будем называть *аппроксимативно непрерывным* в точке $z_0 \in E$, если существует такое измеримое подмножество $E_0 \subseteq E$, для которого z_0 является точкой плотности, а семейство $M(z),\ z \in E_0$, непрерывно в точке z_0. Точка $z_0 \in E_0$ называется точкой плотности множества E, если

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{mes} E_0 \cap D_{z_0,\delta}/\pi\delta^2 = 1, \tag{Б12}$$

где $D_{z_0,\delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ (ср. [360], с. 199).

Как легко следует из замечания Б2, имеет место

Замечание Б3. *Если семейство компактов $M(z),\ z \in E$, и функция $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ аппроксимативно непрерывны в точке $z_0 \in E$, то функция расстояния (Б11) также аппроксимативно непрерывна в этой точке.*

Введем еще одно понятие. Последовательность множеств $E_n \subseteq E$ будем называть *исчерпанием по мере* измеримого множества E, если

$$\operatorname{mes} E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = 0. \tag{Б13}$$

В дальнейшем мы также говорим, что семейство множеств $M(z),\ z \in E$, *непрерывно на исчерпании* $E_n,\ n = 1, 2, \ldots$, множества E, если семейства множеств $M(z),\ z \in E_n,\ n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в каждой точке E_n.

2. Критерии измеримости. Приведем ряд критериев измеримости семейств множеств, которые во многом аналогичны хорошо известным критериям измеримости обычных числовых функций (ср. [360], с. 26–28, 112, 199–200; см. также [194, 207]).

Теорема Б1 (о критериях измеримости). *Пусть $M(z),\ z \in E \subseteq \mathbb{C}$ – семейство непустых компактов из $\mathbb{C}$. Тогда следующие свойства $M(z)$ эквивалентны:*

a) $M(z)$ – измеримое по z семейство множеств;

b) для любого открытого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество точек

$$E_0 = \{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} \tag{Б14}$$

измеримо относительно плоской меры Лебега;

c) $M(z)$ непрерывно на некотором исчерпании множества E по мере;

d) $M(z)$ аппроксимативно непрерывно для п.в. $z \in E$;

e) для любой измеримой функции $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ функция расстояния

$$r_{\mu,M}(z) = \min_{\mu \in M(z)} |\mu - \mu(z)| \tag{Б15}$$

аппроксимативно непрерывна при п.в. $z \in E$;

f) для любой измеримой функции $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ функция расстояния (Б15) измерима;

g) для любого $\mu_0 \in \mathbb{C}$ функция расстояния

$$r_{\mu_0,M}(z) = \min_{\mu \in M(z)} |\mu - \mu_0| \tag{Б16}$$

измерима.

Доказательство. Общая схема доказательства эквивалентности перечисленных свойств имеет вид:

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow f) \Rightarrow g) \Rightarrow a).$$

$a) \Rightarrow b)$. Поскольку множества $M(z),\ z \in E$, являются компактами, то

$$\{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{z \in E : M(z) \subseteq M_l\},$$

где $M_l = M_0 \cap D_l,\ D_l = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < l\},\ l = 1, 2, \ldots$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что M_0 – ограниченное открытое множество. Пусть

$$M^{(n)} = \{\mu \in M_0 : \rho(\mu, \partial M_0) \geq 1/n\},$$

где ρ – расстояние от точки μ до ∂M_0:

$$\rho(\mu, \partial M_0) = \min_{\nu \in \partial M_0} |\nu - \mu|.$$

Заметим, прежде всего, что все множества $M^{(n)},\ n = 1, 2, \ldots$, являются замкнутыми множествами. Действительно, пусть $\mu_m \in M^{(n)}$, $m = 1, 2, \ldots$ и $\mu_m \to \mu_0$ при $m \to \infty$. Тогда, выбирая, например, в замечании Б2 $\mu(z) \equiv z,\ M(z) \equiv \partial M_0,\ E = \{\mu_m\}_0^{\infty}$, получаем, что

$$\rho(\mu_m, \partial M_0) \to \rho(\mu_0, \partial M_0)$$

при $m \to \infty$ и, следовательно, $\rho(\mu_0, \partial M_0) \geq 1/n$.

Таким образом,

$$M_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^{(n)},$$

где все множества $M^{(n)},\ n = 1, 2, \ldots$, являются замкнутыми. Поскольку множества $M(z),\ z \in E$, компактны, то

$$\{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in E : M(z) \subseteq M^{(n)}\}.$$

Отсюда немедленно получаем импликацию $a) \Rightarrow b)$.

$b) \Rightarrow c)$. Пусть $D_m,\ m = 1, 2, \ldots$, – перенумерация всех замкнутых кругов плоскости $\mathbb{C}$, координаты центров и радиусы которых принимают рациональные значения. Тогда по условию измеримы, в частности, множества точек:

$$E_m = \{z \in E : M(z) \subseteq \mathbb{C} \setminus D_m\} = \{z \in E : D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z)\}$$

и потому измеримы их характеристические функции $\chi_m(z),\ m = 1, 2, \ldots$ (см. [360], с. 29).

По критерию Лузина при любом фиксированном m найдется последовательность замкнутых множеств $E_m^{(n)} \subseteq E,\ n = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\operatorname{mes}(E \setminus E_m^{(n)}) \leq 1/n\, 2^m,$$

на которых функция $\chi_m(z)$ непрерывна. Полагая

$$E^{(n)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m^{(n)},$$

отсюда имеем оценку меры

$$\operatorname{mes}(E \setminus E^{(n)}) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{mes}(E \setminus E_m^{(n)}) \leq 1/n\,.$$

Таким образом, последовательность замкнутых множеств $E^{(n)}$ образует исчерпание множества E по мере. Кроме того, на $E^{(n)}$ непрерывны все функции $\chi_m(z),\ m = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что $M(z)$ также непрерывно по z на каждом из множеств $E^{(n)}$. Последнее означает, что для любого $z_0 \in E^{(n)}$ и любой последовательности $z_k \in E^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots$, такой, что $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$, выполнено соотношение $M(z_0) = \operatorname*{Ls}_{k\to\infty} M(z_k)$, а это в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\mathbb{C} \setminus M(z_0) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[\bigcap_{k\geq l} (\mathbb{C} \setminus M(z_k)) \right]^O \tag{Б17}$$

где через O обозначена операция взятия внутренности множества. Переходим к доказательству (Б17).

Итак, пусть $\mu \in \mathbb{C} \setminus M(z_0)$. Тогда найдется круг D_m такой, что $\mu \in D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z_0)$. Поскольку функция $\chi_m(z)$ непрерывна на $E^{(n)}$, то для достаточно больших $k = 1, 2, \ldots,\ \chi_m(z_k) = 1$, т.е. $D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z_k)$ и, следовательно, μ принадлежит правой части (Б17).

Наоборот, пусть выполнено последнее включение. Тогда найдется такое l, что $\mu \in \left[\bigcap_{k\geq l} (\mathbb{C} \setminus M(z_k)) \right]^O$ и потому найдется круг D_m, удовлетворяющий включениям $\mu \in D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z_k)$ при всех $k \geq l$. Таким образом, $\chi_m(z_k) = 1$ при $k \geq l$ и, в силу непрерывности $\chi_m(z)$ на $E^{(n)},\ \chi_m(z_0) = 1$, т.е. $D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z_0)$. В частности, тогда $\mu \in \mathbb{C} \setminus M(z_0)$. Следовательно, равенство (Б17) полностью доказано.

$c) \Rightarrow d)$. Пусть $E^{(n)}$ – исчерпание множества E по мере, на котором семейство $M(z)$ непрерывно по параметру z. Поскольку множества $E^{(n)},\ n = 1, 2, \ldots$, являются измеримыми множествами, то почти все их точки являются точками плотности (см. [360], с. 196). Поэтому $M(z)$ аппроксимативно непрерывны для п.в. $z \in E$.

$d) \Rightarrow e)$. Так как по теореме Данжуа всякая измеримая функция $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ аппроксимативно непрерывна п.в. на E (см. [360], с. 199), то в силу замечания Б3 импликация становится очевидной.

$e) \Rightarrow f)$. Поскольку всякая функция, аппроксимативно непрерывная п.в. на E, является измеримой (см. [360], с. 200).

$f) \Rightarrow g)$. Очевидно, т.к. функция $\mu(z) \equiv \mu_0$ измерима.

$g) \Rightarrow a)$. Пусть $D_m,\ m = 1, 2, \ldots$, как и при доказательстве импликации $b) \Rightarrow c)$, – некоторая перенумерация всех замкнутых кругов плоскости $\mathbb{C}$, координаты центров μ_m и радиусы $r_m,\ m = 1, 2, \ldots$, которых принимают рациональные значения.

Пусть M_0 – произвольное замкнутое множество плоскости $\mathbb{C}$. Тогда

$$\mathbb{C} \setminus M_0 = \bigcup_{m \in N_0} D_m,$$

где

$$N_0 = \{m = 1, 2, \ldots : D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M_0\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} &= \{z \in E : \mathbb{C} \setminus M_0 \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z)\} = \\ &= \bigcap_{m \in N_0} \{z \in E : D_m \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z)\} = \\ &= \bigcap_{m \in N_0} \{z \in E : r_{\mu_m, M}(z) > r_m\}, \end{aligned}$$

где функции расстояния

$$r_{\mu_m, M}(z) = \inf_{\mu \in M(z)} |\mu - \mu_m|$$

по условию $g)$ являются измеримыми функциями. Следовательно, множество (Б14) действительно является измеримым.

3. Об элементарных операциях над измеримыми семействами. *Точной верхней гранью* последовательности множеств M_n, $n = 1, 2, \ldots$, из $\mathbb{C}$ будем называть множество

$$\sup_n M_n \stackrel{def}{=} \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)}. \qquad \text{(Б18)}$$

Предложение Б1. *Пусть* $M_n(z),\ z \in E,\ n = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность семейств непустых замкнутых множеств из* $\mathbb{C}$, *измеримых по параметру* z. *Тогда* $M(z) = \sup\limits_n M_n(z),\ z \in E$, *также измеримо по* z.

Следствие Б1. *Пусть* $\mu_n(z) : E \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность измеримых функций. Тогда семейство множеств*

$$M(z) = \overline{\{\mu_n(z)\}_{n=1}^{\infty}}, z \in E, \tag{Б19}$$

измеримо по z.

Следствие Б2. *Если* $M_n(z),\ z \in E,\ n = 1, \ldots, m,$ – *конечная совокупность семейств множеств измеримых по* z, *то семейство*

$$M(z) = \bigcup_{n=1}^{m} M_n(z),\ z \in E, \tag{Б20}$$

также измеримо по z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение очевидно из определения измеримых семейств и тождеств:

$$\begin{aligned}\{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} &= \{z \in E : \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(z)}\right) \subseteq M_0\} = \\ &= \{z \in E : \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(z) \subseteq M_0\} = \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in E : M_n(z) \subseteq M_0\},\end{aligned}$$

справедливых для любого замкнутого множества M_0 из $\mathbb{C}$. □

Точной нижней гранью последовательности множеств $M_n \subseteq \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, будем называть множество:

$$\inf_n M_n \stackrel{def}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n. \tag{Б21}$$

Предложение Б2. *Пусть* $M_n(z),\ z \in E,\ n = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность измеримых семейств компактов из* $\mathbb{C}$ *и пусть* $M(z) = \inf\limits_n M_n(z) \neq \oslash,\ z \in E$. *Тогда семейство множеств* $M(z)$ *также измеримо по* z.

Доказательство этого предложения будет базироваться на следующей лемме:

Лемма Б1. *Пусть* $M^{(k)}(z),\ z \in E,\ k = 1, 2, \ldots, m,$ *– конечный набор измеримых семейств компактов из* $\mathbb{C}$ *и пусть*

$$M(z) = \bigcap_{k=1}^{\infty} M^{(k)}(z) \neq \oslash,\ z \in E.$$

Тогда $M(z),\ z \in E,$ *также представляет собой измеримое по* z *семейство компактов.*

При этом мы воспользуемся следующим простым замечанием, которое вытекает прямо из определения верхнего топологического предела:

Замечание Б4. *Для любых множеств* $M_n^{(k)} \subseteq \mathbb{C},\ k = 1, 2, \ldots, m;$ $n = 1, 2, \ldots,$

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{m} M_n^{(k)} \right) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M_n^{(k)} \right). \tag{Б22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы Б1. Согласно критерия с) теоремы Б1 при каждом фиксированном $k = 1, \ldots, m$ найдется последовательность замкнутых множеств $E_l^{(k)},\ l = 1, 2, \ldots,$ таких, что $\operatorname{mes}(E \setminus E_l^{(k)}) < 1/l$ и $M^{(k)}(z)$ непрерывно на $E_l^{(k)},\ l = 1, 2, \ldots.$ Тогда последовательность замкнутых множеств $E_l = \bigcap_{k=1}^{m} E_l^{(k)}$ такова, что $\operatorname{mes}(E \setminus E_l) < m/l$ и $M^{(k)}(z),\ k = 1, 2, \ldots,$ непрерывны на $E_l,\ l = 1, 2, \ldots.$

Покажем, что функция расстояния

$$r(z) = r_{\mu,M}(z) = \min_{\nu \in M(z)} |\nu - \mu|$$

полунепрерывна снизу на $E_l,\ l = 1, 2, \ldots,$ для любого $\mu \in \mathbb{C}.$

Если $z_0 \in E_l$ таково, что $r(z_0) = 0$, то доказывать нечего. Пусть $z_0 \in E_l,\ r(z_0) > 0$ и $z_n \in E_l,\ n = 1, 2, \ldots,$ – произвольная последовательность такая, что $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$. Тогда $M^{(k)}(z_0) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} M^{(k)}(z_n),\ k = 1, \ldots, m,$ и, благодаря (Б22)

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M(z_n) \subseteq M(z_0),$$

т.е.

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{n \geq j} M(z_n) \right)} \subseteq M(z_0).$$

Последнее равносильно соотношению

$$\mathbb{C} \setminus M(z_0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n \geq j} (\mathbb{C} \setminus M(z_n)) \right)^O,$$

где через O обозначена операция взятия внутренности множества.

Пусть r – произвольное число из интервала $(0, r(z_0))$. Тогда для всех достаточно больших n

$$\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu - \mu| \leq r\} \subseteq \mathbb{C} \setminus M(z_n),$$

т.е. $r(z_n) > r$. Отсюда в частности имеем

$$\liminf_{n \to \infty} r(z_n) \geq r$$

и ввиду произвола r

$$\liminf_{n \to \infty} r(z_n) \geq r(z_0).$$

В силу же произвола $z_n,\ n = 1, 2, \ldots$, вообще

$$\liminf_{z \to z_0,\, z \in E_l} r(z) \leq r(z_0),$$

т.е. функция $r(z)$ действительно полунепрерывна снизу на $E_l,\ l = 1, 2, \ldots$.

Поэтому $r(z)$ является измеримой функцией на каждом $E_l,\ l = 1, 2, \ldots$ (см. [360], с. 70). По критерию Лузина (см. [360], с. 112) найдется замкнутое множество $\widetilde{E}_l \subseteq E_l$ такое,что $\mathrm{mes}(E_l \setminus \widetilde{E}_l) < 1/l$ и $r(z)$ непрерывна на $\widetilde{E}_l$. Таким образом, $\mathrm{mes}(E_l \setminus \widetilde{E}_l) < (m+1)/l$ и, вновь по критерию Лузина, $r(z)$ измерима на E. Следовательно, по критерию g) теоремы Б1, $M(z),\ z \in E$, является измеримым семейством. □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения Б2. Полагаем

$$M^{(n)} \stackrel{def}{=} \bigcap_{k=1}^{n} M_k(z).$$

Так как $M(z) \neq \oslash,\ z \in E$, то тем более $M^{(n)}(z) \neq \oslash,\ z \in E,\ n = 1, 2, \ldots$. Отметим также, что $M^{(n)}(z)$ – монотонно убывающая по n последовательность замкнутых множеств при всяком фиксированном z. Кроме того,

$$M(z) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M^{(n)}(z). \qquad \text{(Б23)}$$

Пусть $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ – произвольное открытое множество. Докажем равенство

$$\{z \in E : M(z) \subseteq M_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in E : M^{(n)}(z) \subseteq M_0\}. \qquad (Б24)$$

Действительно, в силу соотношения (Б23), если $M^{(n)}(z) \subseteq M_0$ при некотором n, то тем более $M(z) \subseteq M_0$. Покажем, что и, наоборот, $M(z) \subseteq M_0$ влечет существование такого n, для которого $M^{(n)}(z) \subseteq M_0$. Допустим, что это не так. Тогда

$$M_0^{(n)}(z) \stackrel{def}{=} M^{(n)}(z) \cap (\mathbb{C} \setminus M_0) \neq \oslash$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$, для некоторого $z \in E$. Однако $M_0^{(n)},\ n = 1, 2, \ldots$, является монотонно убывающей последовательностью непустых компактных множеств и по условию Кантора (см. [230], с. 8)

$$M(z) \cap (\mathbb{C} \setminus M_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_0^{(n)}(z) \neq \oslash,$$

что противоречит включению $M(z) \subseteq M_0$.

В силу леммы Б1 семейства множеств $M^{(n)}(z),\ z \in E$, измеримы. Отсюда и из (Б24) по критерию b) теоремы Б1 получаем измеримость семейства $M(z),\ z \in E$. Доказательство предложения Б2 завершено. □

Наконец, в силу предложений Б1 и Б2, а также условия Кантора получаем:

Теорема Б2. *Пусть $\rho(z) : E \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция, а $M_n(z),\ z \in E,\ n = 1, 2, \ldots$,– последовательность измеримых семейств непустых замкнутых множеств из $\Delta_{\rho(z)} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leq \rho(z)\}$. Тогда*

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M_n(z),\ z \in E,$$

также является измеримым семейством непустых замкнутых множеств.

Следствие Б3. *Пусть $\rho(z) : E \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция, а $\mu_n(z) : E \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$, – последовательность измеримых функций с $|\mu_n(z)| \leq \rho(z)$. Тогда множества точек накопления последовательности $\mu_n(z)$,*

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\mu_n(z)\},\ z \in E,$$

образует измеримое по z семейство непустых замкнутых множеств плоскости $\mathbb{C}$.

4. Теорема об измеримых сечениях. Измеримая функция $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ называется *измеримым сечением* семейства множеств $M(z) \subseteq \mathbb{C},\ z \in E \subseteq \mathbb{C}$, если

$$\mu(z) \in M(z) \tag{Б25}$$

для п.в. $z \in E$.

Главной целью данного пункта является:

Теорема Б3. *Пусть $M(z),\ z \in E$ – измеримое семейство непустых компактов. Тогда найдется хотя бы одно измеримое сечение $\mu(z)$ семейства $M(z)$.*

Эта теорема содержится в следующей лемме:

Лемма Б2. *Пусть $M(z),\ z \in E$, – измеримое семейство непустых компактов и пусть $\nu(z) : E \to \mathbb{C}$ – произвольная измеримая функция. Тогда найдется измеримое сечение $\mu(z)$ семейства $M(z)$, для которого*

$$|\mu(z) - \nu(z)| = \min_{\varkappa \in M(z)} |\varkappa - \nu(z)|. \tag{Б26}$$

При этом, мы воспользуемся следующим простым замечанием:

Замечание Б5. *Пусть $\nu(z) : E \to \mathbb{C}$ и $r(z) : E \to \mathbb{R}^+$ – произвольные измеримые функции. Тогда семейство окружностей*

$$\Omega(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - \nu(z)| = r(z)\},\ z \in E,$$

измеримо по z.

Действительно, какова бы ни была измеримая функция $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$, функция расстояния

$$\rho(\mu(z), \Omega(z)) = |r(z) - |\nu(z) - \mu(z)||$$

измерима и, следовательно, по критерию е) теоремы Б1 семейство $M(z)$, $z \in E$, измеримо.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы Б2. По критерию е) функция расстояния

$$r(z) = \min_{\varkappa \in M(z)} |\varkappa - \nu(z)| = r(z),\ z \in E,$$

измерима и, следовательно, по замечанию Б5 семейство окружностей

$$\Omega(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - \nu(z)| = r(z)\}$$

также измеримо. По построению, ввиду компактности множеств $M(z)$, семейство

$$M_1(z) = \Omega(z) \cap M(z)$$

не пусто и в силу леммы Б1 измеримо.

Рассмотрим измеримую функцию

$$\nu_1(z) = \nu(z) + r(z).$$

Повторяя рассуждения, получаем измеримость функции расстояния

$$r_1(z) = \min_{\varkappa \in M_1(z)} |\varkappa - \nu_1(z)|,$$

семейства окружностей

$$\Omega_1(z) = \{z \in \mathbb{C} : |\varkappa - \nu_1(z)| = r_1(z)\}$$

и семейства множеств

$$M_2(z) = \Omega_1(z) \cap M_1(z) = \Omega_1(z) \cap \Omega(z) \cap M(z) \neq \oslash.$$

Аналогично, рассмотрев функцию

$$\nu_2(z) = \nu(z) + ir(z),$$

получаем измеримость функции расстояния

$$r_2(z) = \min_{\varkappa \in M_2(z)} |\varkappa - \nu_2(z)|,$$

семейства окружностей

$$\Omega_2(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - \nu_2(z)| = r_2(z)\}$$

и семейства множеств

$$M_0(z) = \Omega_2(z) \cap M_2(z) = \Omega_2(z) \cap \Omega_1(z) \cap \Omega(z) \cap M(z).$$

При этом, $M_0(z) \neq \oslash,\ z \in E$.

Поскольку

$$M_0(z) \subseteq \Omega(z) \cap \Omega_1(z) \cap \Omega_2(z),$$

т.е. входит в пересечение трех окружностей с центрами $\nu(z)$, $\nu(z)+r(z)$ и $\nu(z)+i\,r(z)$, то $M_0(z)$ при каждом $z \in E$ состоит из единственной точки. Действительно, если бы в $M_0(z)$ нашлась хотя бы одна пара точек, то

все три центра должны были бы лежать на срединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему точки. Итак,

$$M_0(z) = \{\mu(z)\}$$

измеримо по z.

Пусть $E_0 \subseteq E$ – множество всех точек аппроксимативной непрерывности семейства $M_0(z),\ z \in E$. По критерию d) теоремы Б1 $\operatorname{mes} E \backslash E_0 = 0$. Однако,

$$\operatorname{dist}\left(M_0(z_1), M_0(z_2)\right) = |\mu(z_1) - \mu(z_2)|$$

и эквивалентность (Б4) и (Б7) приводит к аппроксимативной непрерывности функции $\mu(z) : E \to \mathbb{C}$ во всех точках $z \in E_0$. Поэтому $\mu(z)$ измерима (см. [360], с. 200). □

5. Теорема о представлении измеримых семейств. На основе леммы Б2 можно получить усиление теоремы Б3 об измеримых сечениях. Именно, имеет место:

Теорема Б4. *Для измеримости по параметру z семейства непустых замкнутых множеств $M(z),\ z \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $z \in E$*

$$M(z) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mu_n(z)\}}, \tag{Б27}$$

где $\mu_n(z),\ n = 1, 2, \ldots,$ – некоторая последовательность измеримых функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность следует из предложения Б1.

Теперь пусть семейство множеств $M(z),\ z \in E$, измеримо по параметру z и пусть $\nu_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ – некоторая перенумерация всех точек плоскости $\mathbb{C}$ с рациональными координатами. Отметим, что $\nu_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ всюду плотны в $\mathbb{C}$.

По лемме Б2 найдется последовательность измеримых функций $\mu_n(z) \in M(z)$ п.в., $n = 1, 2, \ldots,$ таких, что

$$|\mu_n(z) - \nu_n| = \min_{\varkappa \in M(z)} |\varkappa - \nu_n|.$$

Следовательно, по неравенству треугольника для п.в. $z_0 \in E$ и любого $\mu_0 \in M(z_0)$:

$$|\mu_n(z_0) - \mu_0| \le 2|\nu_n - \mu_0|.$$

Таким образом, последовательность точек $\nu^{(n)} = \mu_n(z_0)$ образует счетное всюду плотное подмножество $M(z_0)$ и потому имеет место (Б27). $\square$

6. Теорема о равенстве. Обозначим через $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых сечений семейства множеств $M(z),\ z \in E$.

Теорема Б5. *Пусть $M_1(z)$ и $M_2(z)$ – семейства непустых незамкнутых множеств, измеримые по параметру $z \in E$. Тогда для выполнения равенства*

$$\mathfrak{M}_{M_1(z)} = \mathfrak{M}_{M_2(z)} \tag{Б28}$$

необходимо и достаточно выполнения семейства равенств

$$M_1(z) = M_2(z) \tag{Б29}$$

для п.в.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна.

Теперь пусть выполнено (Б28). Для доказательства (Б29) нужно показать, что включения $M_1(z) \subseteq M_2(z)$ и $M_2(z) \subseteq M_1(z)$ выполнены для п.в. $z \in E$. Для определенности покажем первое включение, второе доказывается точно также ввиду симметрии относительно M_1 и M_2.

По теореме 4 найдутся измеримые функции $\mu_n(z) \in M_1(z)$ п.в. $n = 1, 2, \ldots$, для которых выполнено равенство (Б27) п.в. при $M(z) \equiv M_1(z)$. В силу (Б28), в частности, $\mu_n(z) \in M_2(z)$ п.в. $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку μ_n всюду плотны в $M_1(z)$ для п.в. $z \in E$, то отсюда и из замкнутости $M_2(z)$ имеем доказываемое включение $M_1(z) \subseteq M_2(z)$ для п.в. $z \in E$. $\square$

7. Об измеримости семейств инвариантно-выпуклых оболочек. Главной целью данного пункта является:

Теорема Б6. *Пусть $M(z),\ z \in E,$ – измеримое семейство непустых замкнутых множеств из $\Delta = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1\}$. Тогда семейство инвариантно-выпуклых оболочек* $\operatorname{inv}\operatorname{co} M(z),\ z \in E,$ *также измеримо по z.*

Эта теорема является прямым следствием теорема А3, а также следующего:

Предложение Б3. *Пусть $M(z),\ z \in E,$ – измеримое семейство непустых замкнутых множеств из Δ. Тогда семейство дуговых замыканий $\widehat{M}(z),\ z \in E,$ измеримо по z.*

Действительно, соотношение $M = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M_n$ эквивалентно тому, что любая точка $\mu \in M$ имеет представление $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k}$, где $\mu_{n_k} \in M_{n_k}$, для некоторой подпоследовательности $n_k,\ k = 1, 2, \ldots$, и что, наоборот, любая точка μ, имеющая указанное представление, принадлежит M.

После этого остается воспользоваться, например, критерием c) теоремы Б1, а также непрерывностью функции $\mu = \omega(\eta, \lambda; \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ по совокупности переменных η, λ и μ_1, μ_2 (смотри пункт А2) и компактностью множеств $\partial\Delta$ и [0,1].

8. Об измеримости семейства множеств инвариантно-крайних точек. Совершенно естественно ожидать, что имеет место:

Теорема Б7. *Пусть $M(z),\ z \in E,$ – измеримое семейство непустых замкнутых множеств из Δ. Тогда семейство инвариантно-крайних точек* $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M(z),\ z \in E,$ *также измеримо по z.*

Доказательство этой теоремы базируется на следующей лемме:

Лемма Б3. *В условиях теоремы Б7 семейство радиусов $r(z, \eta)$ и центров $c(z, \eta) = \eta(1 - r(z, \eta))$ опорных кругов $D_{M(z)}(\eta)$ измеримо по параметру $z \in E$ при каждом фиксированном $\eta \in \partial\Delta$.*

Как уже отмечалось в пункте А1, $r(z, \eta)$ непрерывно по $\eta \in \partial\Delta$. Таким образом, $r(z, \eta)$ и $c(z, \eta)$ удовлетворяют условиям Каратеодори.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы Б3. В силу критерия c) без ограничения общности можно предполагать, что

$$M(z) \subseteq \Delta_q,\ z \in E,\ \text{где } \Delta_q = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le q\}$$

для некоторого $q < 1$.

Обозначим $M_n = M(z_n)$ и $D_n = D_{M_n}(\eta_0),\ n = 0, 1, 2, \ldots$, для произвольного фиксированного $\eta_0 \in \partial\Delta$ и пусть r_n – радиусы опорных кругов D_n. Соотношение $M_0 = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} M_n$ в частности означает, что любая точка $\mu \in \Delta$, представимая в виде $\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k}$, где $\mu_{n_k} \in M_{n_k}$, для некоторой последовательности $n_k,\ k = 1, 2, \ldots$, принадлежит M_0. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ все M_n, начиная с некоторого n, принадлежат $\varepsilon-$окрестности множества M_0 и, тем более, $\varepsilon-$окрестности $\Delta_q \cap D_0$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} r_n \le r_0.$$

Таким образом, на любом исчерпании $E_m,\ m = 1, 2, \ldots$, множества E по мере, на котором семейство $M(z)$ непрерывно, функция $\rho(z) =$

$r(z, \eta_0)$ является полунепрерывной сверху и, следовательно, измеримой (см. [360], с. 26–27, 69, 108, 112). □

Следствие Б4. *Пусть $M(z),\ z \in E,$ – измеримое семейство непустых замкнутых множеств из Δ. Тогда семейство опорных кругов $D(z;\eta) = D_{M(z)}(\eta)$ измеримо по $z \in E$ и непрерывно по $\eta \in \partial\Delta$.*

Действительно, как легко видеть

$$\operatorname{dist}\left(D(z_1,\eta), D(z_2,\eta)\right) = 2|r(z_1,\eta) - r(z_2,\eta)|,$$

где $r(z,\eta)$ – семейство радиусов опорных кругов $D(z,\eta)$. Как уже отмечалось в пункте Б1, соотношение $N = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} N_n$ для компактных множеств эквивалентно соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(N, N_n) = 0$. Таким образом, заключение следствия вытекает из леммы Б3, теоремы Лузина (см., напр., [360], с. 112) и критерия c) теоремы Б1.

Используя обозначения пункта А3, сформулируем еще одну лемму:

Лемма Б4. *Пусть $M(z),\ z \in E,$ – измеримое семейство непустых замкнутых множеств из Δ. Тогда функции $\operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}(z;\eta) = \operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}_{M(z)}(z;\eta)$ измеримы по $z \in E$.*

Доказательство леммы Б4. По определению $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M = \operatorname{inv}\operatorname{ext}(\operatorname{inv}\operatorname{co} M)$ и по теореме Б6 без ограничения общности можно считать, что семейство $M(z),\ z \in E$, состоит из инвариантно-выпуклых множеств (смотри также лемму А2). В силу критерия c) теоремы Б1 без ограничения общности можно также дополнительно предполагать, что $M(z) \subseteq \Delta_q = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \le q\},\ z \in E$, при некотором $q < 1$.

По предложению Б2 и следствию Б4 семейство дуг

$$\gamma(z) = M(z) \cap D(z, \eta_0)$$

измеримо по z при любом фиксированном $\eta_0 \in \partial\Delta$.

Отобразим Δ на правую полуплоскость P с помощью дробно-линейного отображения $p(\mu) = (\eta_0 + \mu)/(\eta_0 - \mu)$. При этом отображении круг Δ_q переходит в круг K с центром в точке $(1+q^2)/(1-q^2)$ и радиусом $\rho = 2q/(1-q^2)$.

Тогда по критерию c) теоремы Б1 семейство множеств $P(z) = p(\gamma(z))$, $z \in E$, измеримо по параметру $z \in E$. Заметим при этом, что семейство множеств $P(z),\ z \in E$, состоит из замкнутых вертикальных отрезков, расположенных внутри круга K, а значит и внутри полосы $|\operatorname{Im}\zeta| \le \rho$.

По лемме Б2 существует пара измеримых функций $\varphi^{\pm}(z) \in P(z)$ п.в. таких, что

$$|\varphi^{\pm}(z) \pm i\rho| = \min_{\varkappa \in P(z)} |\varkappa \pm i\rho|.$$

Однако, как видно из определения, $\varphi^{\pm}(z)$ при каждом фиксированном $z \in E$ совпадает с верхним и, соответственно, нижним концом отрезка $P(z)$. Таким образом, $\operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}(z, \eta_0) = p^{-1}(\varphi^{\pm}(z))$, действительно, являются измеримыми функциями.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы Б7. Пусть $\eta_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ – произвольное счетное всюду плотное подмножество $\partial\Delta$. Тогда, как это видно из следствия А3,

$$\operatorname{inv}\operatorname{ext} M(z) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \operatorname{inv}\operatorname{ext}^{\pm}(z, \eta_n).$$

Отсюда по теореме Б4 и лемме Б4 получаем измеримость $\operatorname{inv}\operatorname{ext} M(z)$.□

9. Об измеримых опорах. Покажем, что функции класса $\mathfrak{M}_{\widehat{M}}$ можно строить, опираясь на пары функций $\mathfrak{M}_M$ и используя функцию ω из пункта А2.

Лемма Б5. *Пусть $M(z),\ z \in E,$ – измеримое семейство непустых замкнутых множеств из Δ. Тогда любая функция $\mu_0(z) \in \mathfrak{M}_{\widehat{M}}$ для п.в. $z \in E$ представима в виде:*

$$\mu_0(z) = \omega(\eta(z), \lambda(z); \mu_1(z), \mu_2(z)), \tag{Б30}$$

где μ_1 и $\mu_2 \in \mathfrak{M}_M$, а $\eta(z),\ |\eta(z)| = 1,$ и $\lambda(z) \in [0, 1]$ п.в. – некоторые измеримые функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\Omega(\mu, w),\ \mu \in \Delta,\ w \in K = \{w = u + iv : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$, обозначим ту единственную окружность, которая проходит через точки $\mu \in \Delta,\ \eta_1 = e^{iu}$ и $\eta_2 = e^{iv} \in \partial\Delta$ (при $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0$ через $\Omega(\mu, w)$ обозначается та единственная окружность, которая проходит через точку $\mu \in \Delta$ и касается $\partial\Delta$ в точке η_0).

Пусть теперь $\gamma_1(\mu, w)$ (соответственно, $\gamma_2(\mu, w)$) – замкнутая дуга окружности $\Omega(\mu, w)$, лежащая внутри $\overline{\Delta}$ от μ до пересечения с $\partial\Delta$ по часовой стрелке (против часовой стрелки). Тогда ясно, что $\gamma_j(\mu, w),\ j = 1, 2,$ являются семействами непустых замкнутых множеств из $\overline{\Delta}$, которые непрерывны по совокупности переменных $(\mu, w) \in \Delta \times K$.

В силу критерия Лузина об измеримых функциях и критерия с) теоремы Б1 семейство множеств $\Gamma_j(z, w) = \gamma_j(\mu_0(z), w),\ j = 1, 2,$ измеримы

по $z \in E$ и непрерывны по $w \in K$. По лемме Б1 и замечанию Б4 семейство множеств

$$M_j(z,w) = M(z) \cap \Gamma_j(z,w),\ j = 1,\, 2,$$

измеримы по $z \in E$ и полунепрерывны сверху по $w \in K$, т.е.

$$\operatorname*{Ls}_{w_n \to w_0} M_j(z,w_n) \subseteq M_j(z,w_0).$$

Далее, поскольку $\mu_0(z) \in \widehat{M}(z)$ п.в., то $W(z) \neq \oslash$ п.в., где

$$W(z) \stackrel{def}{=} \{w \in K : M_j(z,w) \neq \oslash, j = 1,\, 2\}.$$

В силу полунепрерывности $M_j(z,w)$ по $w \in K$, множества:

$$W_j(z) \stackrel{def}{=} \{w \in K : M_j(z,w) = \oslash\},\ j = 1,\, 2,\ z \in E,$$

являются открытыми в относительной топологии квадрата K. Это доказывается от противного. Поэтому семейство $W(z),\ z \in E$, состоит из п.в. непустых замкнутых подмножеств этого квадрата.

Покажем, что семейство множеств $W(z),\ z \in E$, измеримо по z.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. По критерию Лузина и критерию с) теоремы Б1 найдется такое измеримое подмножество $E_\varepsilon \subseteq E$, что $M(z)$ и $\mu_0(z)$ непрерывны на E_ε, а $\operatorname{mes}(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$.

Покажем сначала, что $W(z)$ – полунепрерывно сверху на E_ε. Итак, пусть $z_k \in E_\varepsilon,\ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, z_k \to z_0$ при $k \to \infty$ и $w_0 \in \operatorname*{Ls}_{k\to\infty} W(z_k)$, т.е. существует подпоследовательность $k_l,\ l = 1,\, 2,\, \ldots$, такая, что $w_0 = \lim\limits_{l\to\infty} w_l$ при некоторых $w_l \in W(z_{k_l}),\ l = 1,\, 2,\, \ldots$. Тогда $M_j(z_{k_l}, w_l) \neq \oslash,\ j = 1,\, 2;\ l = 1,\, 2,\, \ldots$, и, ввиду полунепрерывности $M_j(z,w),\ j = 1,\, 2$ (см. замечание Б4), получаем, что $M_j(z_0,w_0) \neq \oslash,\ j = 1,\, 2$, т.е. $w_0 \in W(z_0)$. Итак, $W(z),\ z \in E$ полунепрерывны сверху на E_ε.

Для доказательства измеримости $W(z)$ по z на E_ε воспользуемся критерием в) теоремы Б1. Действительно, пусть W_0 – произвольное открытое множество плоскости $\mathbb{C}$. Рассуждая от противного, из полунепрерывности $W(z)$ на E_ε получаем, что множество

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{z \in E_\varepsilon : W(z) \subseteq W_0\}$$

является открытым в относительной топологии E_ε. В частности, отсюда следует измеримость множества $\mathcal{E}_\varepsilon$. Следовательно, $W(z)$ измеримо на E_ε.

Наконец, прибегая к критерию c) теоремы Б1, получаем измеримость семейства множеств $W(z)$ на E.

Отсюда по теореме Б3 следует, что существует измеримая функция $w_0(z) \in W(z)$ п.в. Опираясь на критерий Лузина, а также критерий c) теоремы Б1, получаем, что $\gamma_j(\mu_0(z), w_0(z)),\ j = 1, 2$, измеримы по $z \in E$. Но тогда по лемме Б1 семейства $M_j(z, w_0(z)),\ j = 1, 2$, тоже измеримы по z. Опять же по теореме Б3 найдутся измеримые функции $\mu_j(z) \in M_j(z, w_0(z))$ п.в. $j = 1, 2$. По построению ясно, что $\mu_j(z),\ j = 1, 2$, являются искомыми функциями. При этом в качестве $\eta(z)$ можно взять, например, $e^{iu(z)}$, где $u(z) = \operatorname{Re} w_0(z)$, а $\lambda(z) = [\varkappa_0(z) - \varkappa_2(z)]/[\varkappa_1(z) - \varkappa_2(z)]$, где $\varkappa_j(z) = [\eta(z) + \mu_j(z)]/[\eta(z) - \mu_j(z)],\ j = 0, 1, 2$ (при $\mu_1(z) = \mu_2(z)$ доопределяем $\lambda(z) = 0$). □

10. Об измеримости точек касания.

Лемма Б6. *Пусть $M(z),\ z \in E$, – семейство непустых замкнутых множеств из единичного круга Δ, измеримое по параметру z, а $\mu(z) : E \to \Delta$ – произвольная функция, и пусть*

$$E_0 = \{z \in E : \mu(z) \in \operatorname{inv ext} M(z)\}, \tag{Б31}$$

$$H(z) = \{\eta \in \partial\Delta : \mu(z) \in \partial K(z, \eta)\},\ z \in E_0, \tag{Б32}$$

где $K(z, \eta)$ – семейство опорных к $M(z)$ кругов, касающихся $\partial\Delta$ в точке $\eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$.

Тогда $H(z),\ z \in E_0$, образует семейство непустых замкнутых множеств, лежащих на единичной окружности $\partial\Delta$, которое измеримо по параметру z.

Доказательство леммы Б6. Заметим прежде всего, что множество E_0 измеримо в силу пункта f) теоремы Б1 и измеримости $\operatorname{inv ext} M(z)$ (см. также [360], с. 27). Далее, так как $\mu(z)$ и точка касания η однозначно определяют центр и радиус опорного круга $K(z, \eta)$:

$$c(z, \eta) = \eta(1 - r(z, \eta)), \tag{Б33}$$

$$r(z, \eta) = \frac{1}{2}\,\frac{|\mu(z) - \eta|}{1 - \operatorname{Re}\overline{\eta}\mu(z)}, \tag{Б34}$$

то $H(z)$ можно описать и по другому:

$$H(z) = \{\eta \in \partial\Delta : M(z) \subseteq K(z, \eta)\}, \tag{Б35}$$

где

$$K(z, \eta) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - c(z, \eta)| \le r(z, \eta)\}. \tag{Б36}$$

Как легко видеть из (Б33), (Б34), функции $r(z,\eta)$ и $c(z,\eta)$ удовлетворяют *условиям Каратеодори*, то есть измеримы по $z \in E_0$ при любом фиксированном $\eta \in \mathbb{C}, |\eta| = 1$, и непрерывны по $\eta \in \mathbb{C}, |\eta| = 1$, при п.в. $z \in E_0$.

Ввиду измеримости $M(z)$ по теореме Б4 найдется последовательность измеримых функций $\mu_l(z) \in M(z)$ для п.в. $z \in E$, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что выполняется (Б27) при п.в. $z \in E_0$. Рассмотрим последовательность вещественных функций:

$$J_l(z,\eta) = r(z,\eta) - |\mu_l(z) - c(z,\eta)|, \ l = 1, 2, \ldots.$$

Все они удовлетворяют условиям Каратеодори. Поэтому при каждом фиксированном $l = 1, 2, \ldots$,

$$H_l = \{\eta \in \partial\Delta : J_l(z,\eta) \geq 0\}, \ z \in E_0,$$

образует семейство замкнутых множеств, которое измеримо по параметру z (см. [194], с. 346). Обратим теперь внимание, что в силу (Б27) и (Б35) $H(z) = \cap H_l$ и $H(z) \neq \oslash$ при $z \in E_0$ по определению инвариантно-крайних точек. Следовательно, по предложению Б2 $H(z)$ измеримо по параметру z. □

Из леммы Б6, а также из соотношений (Б33)–(Б36), в силу теоремы Б4 и пункта g) теоремы Б1, немедленно получаем:

Следствие Б5. *В условиях и обозначениях леммы Б6 существует измеримая функция* $\eta(z) : E_0 \to \mathbb{C}$, $|\eta(z)| = 1$, *такая, что для п.в.* $z \in E_0$

$$\mu(z) \in \partial K(z, \eta(z)), \tag{Б37}$$

или, что то же самое,

$$M(z) \subseteq K(z), \tag{Б38}$$

где

$$K(z) = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu - c(z)| \leq r(z)\}, \tag{Б39}$$

$$c(z) = \eta(z)(1 - r(z)), \tag{Б40}$$

$$r(z,\eta) = \frac{1}{2} \frac{|\mu(z) - \eta(z)|^2}{1 - \operatorname{Re} \mu(z)\overline{\eta(z)}}. \tag{Б41}$$

Другими словами, существует измеримое по параметру z *семейство* $K(z)$ *опорных к* $M(z)$ *кругов такое, что* $\mu(z) \in \partial K(z)$ *для п.в.* $z \in E_0$.

Следствие Б6. *В условиях леммы Б6 пусть* $\eta(z) \in H(z),\ z \in E_0,$ *– произвольная измеримая функция и пусть:*

$$E^+ = \{z \in E_0 : \mu(z) = \mu^+(z, \eta(z)) \neq \mu^-(z, \eta(z))\}, \tag{Б42}$$

$$E^- = \{z \in E_0 : \mu(z) = \mu^-(z, \eta(z)) \neq \mu^+(z, \eta(z))\}, \tag{Б43}$$

$$E^0 = \{z \in E_0 : \mu(z) = \mu^-(z, \eta(z)) = \mu^+(z, \eta(z))\}. \tag{Б44}$$

Тогда $E_0 = E^+ \cup E^- \cup E^0$ *и множества* E^+, E^- *и* E^0 *измеримы и взаимно не пересекаются.*

Здесь по лемме Б4 и следствию А3 функции

$$\mu^{\pm}(z, \eta) \stackrel{def}{=} \operatorname{inv} \operatorname{ext}^{\pm}(z, \eta) \tag{Б45}$$

удовлетворяет односторонним условиям Каратеодори. Поэтому прежде, чем переходить к доказательству этого следствия, докажем еще одну лемму из области вещественного анализа. Известно (см. [212], с. 340), что если функция $\varphi(z, t)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то ее суперпозиция с любой измеримой функцией $\tau(z)$ является измеримой функцией. В этом случае говорят (см. [212], с. 361), что функция $\varphi(z, t)$ *суперпозиционно-измерима.* Оказывается, что для этого достаточно и односторонних условий Каратеодори:

Предложение Б4. *Если функция* $\varphi(z, t) : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{C}$, *удовлетворяет условиям Каратеодори справа (или слева); то* $\varphi(z, t)$ *суперпозиционно-измерима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения Б4. Итак, пусть $\tau(z) : E \to \mathbb{R}$– произвольная измеримая функция. Построим последовательность измеримых ступенчатых функций

$$\tau_n(z) = k\, 2^{-n},\ z \in E_{k\,n},\ \bigcup_k E_{kn} = E,$$

где

$$E_{k\,n} = \{z \in E : (k-1)2^{-n} < \tau(z) \leq k\, 2^{-n}\},$$

$n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Как легко видеть, $\tau_n(z) \geq \tau(z)$ и $|\tau_n(z) - \tau(z)| \leq 2^{-n}$, то есть $\tau_n(z) \to \tau(z)$.

В силу измеримости функции $\tau(z)$ все указанные множества $E_{k\,n}$ измеримы (см. [360], с. 27). Следовательно, все функции $\tau_n(z),\ z \in E,\ n = 1, 2, \ldots,$ измеримы. Измеримость $\varphi(z, \tau_n(z)),\ n = 1, 2, \ldots,$ очевидна. Следовательно, $\varphi(z, \tau(z)) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(z, \tau_n(z))$ также измерима (см. [360], с. 31). □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия Б6. Рассмотрев Re и $\operatorname{Im}\mu^{\pm}(z, e^{it})$, $z \in E_0,\ t \in \mathbb{R}$, по следствию Б5 получаем измеримость функций

$$\mu^{\pm}(z, \eta(z)),\ \ z \in E_0,$$

и, следовательно, измеримость множеств E^0 и $E^{\pm}$ (см. [360], с. 27). $\square$

Приложение В

О пространствах со сходимостью. Ядерное пространство

Теория абстрактных пространств со сходимостями Фреше-Урысона вкратце изложена в пункте 1. Вся остальная часть этого приложения посвящена одному частному случаю таких пространств – ядерному пространству, которое состоит из открытых множеств произвольного топологического пространства и наделено сходимостью к ядру. Отметим, что эта сходимость двойственна так называемому топологическому пределу замкнутых множеств.

Сходимость областей к ядру относительно точки, которая является традиционным инструментом теории функций, может быть получена из общей сходимости к ядру открытых множеств непрерывной проекцией. Вопрос об изучении функций, заданных в переменных областях, разрабатывается уже давно и восходит к известным работам Бибербаха, Каратеодори, Куранта, А.И. Маркушевича, Радо, Г.Д. Суворова и других авторов (см., напр., [62, 205, 319, 369, 370]).

В пункте 2 доказана теорема В1 о секвенциальной компактности ядерного пространства для произвольного сепарабельного метрического пространства. Эта теорема усиливает известную лемму Г.Д. Суворова. В пункте 3 изучается вопрос о метризации ядерного пространства. Доказано, что в случае компактного метрического пространства соответствующее ему ядерное пространство также является метризуемым и компактным (теорема В2). В частности, отсюда следует, что ядерное пространство в этом случае является полным, сепарабельным и секвенциально компактным пространством (теорема В3). В пункте 4 речь идет о ядерных пространствах многообразий. Показано, что ядерное пространство произвольных топологических многообразий является секвенциально компактным, а в случае компактных многообразий и метризуемым (теоремы В4 и В5). Наконец, в пункте 5 приведены следствия В4–В8 для римановых поверхностей. Для теории функций наиболее интересен весьма частный случай комплексной плоскости.

1. О пространствах со сходимостями. Абстрактные пространства, в которых понятие предела играет роль исходного понятия, были введены Фреше (1906) в его диссертации.

Произвольное множество X абстрактной природы называют *L–пространством*, если в нем выделен некоторый класс последовательностей, именуемых *сходящимися*. Причем каждой последовательности $x_n,\ n = 1, 2, \ldots$, этого класса поставлен в соответствие единственный элемент $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, называемый пределом, таким образом, что выполняются аксиомы:

A1. Если $x_n = x,\ n = 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

A2. Если последовательность $x_n,\ n = 1, 2, \ldots$, сходится к x, то и любая ее подпоследовательность также сходится к x.

В работе [382], которая возникла в результате личного контакта Урысона с Фреше (1924), первым была введена еще одна аксиома:

A3. Если компактная последовательность $x_n,\ n = 1, 2, \ldots$, имеет единственную точку прикосновения x, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Здесь под *точкой прикосновения* последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, понимается предел какой-либо сходящейся ее подпоследовательности. Последовательность $x_n,\ n = 1, 2, \ldots$, называется *компактной*, если из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Урысон называл $L-$пространства с третьей аксиомой *L_t-пространствами*. Отметим, что аксиома A3 эквивалентна третьей аксиоме Куратовского (см. [229], с. 197), который называет те же пространства L^*-пространствами.

Подчеркнем, что третья аксиома является наиболее важной. Как мы неоднократно видим в диссертации, она значительно облегчает проверку сходимости последовательностей.

Как легко видеть, сходимость по любой метрике удовлетворяет аксиомам L^*-пространства (см. [229], с. 215), а, например, всем известная сходимость п.в. для измеримых функций не удовлетворяет третьей аксиоме (любая сходящаяся по мере последовательность имеет единственную точку накопления и компактна относительно сходимости п.в., но не любая сходится п.в.).

Как известно, в пространстве измеримых функций $S(T, \Sigma, m)$ с $\sigma-$конечной мерой m можно ввести метрику, сходимость по которой эквивалентна сходимости по мере (см. [202], с. 63–64). С другой стороны, из сходимости п.в. следует сходимость по мере ([202], с. 58). Таким образом, непосредственно из аксиомы Урысона получаем:

Следствие B1. *Пусть* (T, Σ, m) – *пространство с* $\sigma-$*конечной мерой и пусть* $\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность измеримых функций, компактная относительно сходимости п.в. с единственной точкой прикосновения* φ. *Тогда* $\varphi_n \to \varphi$ *по мере.*

Совершенно аналогично, с привлечением теоремы Лебега ([202], с. 59), доказывается:

Следствие B2. *Пусть* $\varphi_n \in L^p(T, \Sigma, m),\ |\varphi_n| \le \varphi_0 \in L^p(T, \Sigma, m),$ $1 \le p < \infty,\ n = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность, компактная относительно сходимости п.в. с единственной точкой прикосновения* φ. *Тогда* $\varphi_n \to \varphi$ *по норме* $L^p(T, \Sigma, m)$.

Указанные следствия были получены благодаря метризуемости соответствующих сходимостей. Слабая сходимость во многих пространствах, наоборот, доставляет примеры неметризуемых сходимостей. Тем не менее в некоторых случаях слабая сходимость остается метризуемой. В частности, имеет место:

Следствие B3. *Пусть* (T, Σ, m) – *пространство с сепарабельной мерой* m *и пусть последовательность* $\varphi_n \in L^p(T, \Sigma, m),\ 1 < p < \infty,\ n = 1, 2, \ldots,$ *ограничена по норме и имеет единственную точку прикосновения* φ *относительно слабой сходимости в* $L^p(T, \Sigma, m)$. *Тогда* $\varphi_n \to \varphi$ *слабо в* $L^p(T, \Sigma, m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что пространства $L^p(T, \Sigma, m)$ при $1 < p < \infty$ рефлексивны ([168], с. 313). В рефлексивных линейных нормированных пространствах для слабой компактности последовательности $\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной по норме ([168], с. 81).

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ а также φ лежат в замкнутом единичном шаре B пространства $L^p(T, \Sigma, m)$. Но в любом банаховом пространстве, в частности, $L^p(T, \Sigma, m)$, $1 \le p < \infty$ (см. [202], с. 142), рефлексивность равносильна бикомпактности единичного шара B в слабой топологии ([168], с. 460). Слабая же топология слабо бикомпактного подмножества порождается метрикой ([168], с. 470).

Однако, пространства $L^p(T, \Sigma, m),\ 1 \le p < \infty$, сепарабельны в том и только в том случае, когда сепарабельна мера m ([202], с. 139 и 142). Следовательно, слабая топология единичного шара B в $L^p(T, \Sigma, m),\ 1 < p < \infty$, с сепарабельной мерой m метризуема. Поэтому из аксиомы Урысона получаем следствие B3. □

Замечание В1. *В частности, мера Лебега на произвольном измеримом множестве* $E \subseteq \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, *сепарабельна (см. [202], с. 66–67). То же верно и для* $E \subseteq \mathbb{C}$, *поскольку* $\mathbb{C}$ *эквивалентно* $\mathbb{R}^2$. *Таким образом, следствия В1–В3 имеют место в* $S(E)$ *и* $L^p(E)$, *соответственно.*

L^*-пространство будем называть *секвенциально компактным*, если из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Другими словами, любая последовательность в таком пространстве является компактной в указанном выше смысле.

В секвенциально компактном пространстве *аксиома Урысона* приобретает особо простой вид: последовательность с единственной точкой накопления сходится к этой точке (см. [229], с. 203). Другими словами, в таком пространстве, чтобы убедиться, что какая-либо последовательность сходится к некоторой точке, достаточно проверить, что любая ее *сходящаяся* подпоследовательность сходится именно к этой точке. Этим обстоятельством мы воспользовались, например, при доказательстве теоремы 2 и еще не раз будем пользоваться в дальнейшем.

Отметим, что в L^*-пространствах естественным образом возникает понятие замыкание множества:

$$\overline{X_0} = \{x : x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n \in X_0,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Однако, при этом не всегда выполняется одна из аксиом топологического пространства (см. [229], с. 44):

$$\overline{\overline{X_0}} = \overline{X_0}. \tag{В1}$$

Таким образом, сходимость не всегда порождает топологию (см. [229], с. 119). Тем не менее, эта проблема снимается, как только показано, что сходимость порождается некоторой метрикой (см. [229], с. 215).

Приведем здесь общую конструкцию генерирования метрик псевдометриками (см. [229], с. 241). Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется псевдометрикой, если выполняются аксиомы:

В1. $\rho(x, x) = 0$

В2. $\rho(x, y) + \rho(x, z) \geq \rho(y, z)$.

Отсюда также следует, что $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Если, кроме того,

$$(x \neq y) \Rightarrow \rho(x, y) \neq 0,$$

то псевдометрика становится метрикой.

Пространство X называется *псевдометрическим* относительно семейства псевдометрик $\{\rho_j\},\ j \in J$, если

В3. для каждой пары $x \neq y$ существует $j \in J$ такое, что $\rho_j(x, y) \neq 0$.

Если множество индексов J счетно, то

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(x, y)}{1 + \rho_j(x, y)} \tag{В2}$$

определяет метрику в пространстве X (см. [229], с. 243).

2. О ядерном пространстве. Итак, пусть (T, τ) – произвольное топологическое пространство, состоящее из множества T абстрактной природы и топологии τ, т.е. некоторой совокупности подмножеств T, называемых открытыми множествами, которые удовлетворяют аксиомам (см., напр., [80], с. 17):

О1. Всякое объединение множеств из τ есть множество из τ.

О2. Пересечение всякого конечного семейства множеств из τ есть множество из τ.

В соответствии с этим, под *внутренностью* произвольного множества $E \subseteq T$, обозначаемой $\operatorname{Int} E$, понимается максимальное по включению открытое его подмножество. Как видно из аксиомы О1, внутренность $\operatorname{Int} E$ всегда существует и представляет собой объединение всех открытых подмножеств множества E.

Ядром $N\{E_n\}$ последовательности множеств $E_n \subseteq T,\ n = 1, 2, \ldots,$ называется множество

$$N\{E_n\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\operatorname{Int} \left(\bigcap_{n \geq m} E_n \right) \right] \tag{В3}$$

(см., напр., [270], с. 79). Таким образом, $z \in N\{E_n\}$ тогда и только тогда, когда существуют окрестность U точки z и число m, такие что $U \subseteq E_m$ для всех $n \geq m$. Отметим, что ядро, как объединение открытых множеств, всегда является открытым множеством.

Будем говорить, что последовательность множеств E_n сходится к множеству E как к ядру, и писать $E_n \xrightarrow{N} E$, если ядро любой ее подпоследовательности E_{n_k} совпадает с E.

Пространство τ всех открытых подмножеств T, наделенное сходимостью к ядру, превращается в L^*-пространство. Обозначим его через T_N и будем называть ядерным пространством.

Через 2^T принято обозначать совокупность всех замкнутых подмножеств T, т.е. множеств дополнительных в T и открытым множествам

(см. [229], с. 168). Пространство 2^T также можно наделить сходимостью, которая будет естественным образом двойственна сходимости к ядру.

Введем необходимые определения. Пусть

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} E_n \stackrel{def}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\left[\bigcup_{n\geq m} E_n\right]} \tag{B4}$$

обозначает так называемый *верхний топологический предел* последовательности $E_n \subseteq T,\ n = 1, 2, \ldots$ (см. [229], с. 344–345). Здесь, как обычно, через $\overline{\mathcal{E}}$ обозначается замыкание множества $\mathcal{E}$, т.е. минимальное по включению замкнутое множество, содержащее $\mathcal{E}$. Другими словами, $\overline{\mathcal{E}}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих $\mathcal{E}$.

Ясно, что $z \in \operatorname{Ls} E_n$ тогда и только тогда, когда любая окрестность U точки z пересекается с бесконечным числом множеств E_n. Как пересечение замкнутых множеств, $\operatorname{Ls} E_n$ всегда является замкнутым множеством (см. [229], с. 344–345).

Будем говорить, что множество E является топологическим пределом последовательности множеств E_n, и писать $E = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E_n$, если $\operatorname{Ls} E_{n_k} = E$ для любой подпоследовательности (см. [229], с. 346–347).

Как видно из (B3) и (B4),

$$N\{E_n\} = T \setminus \operatorname{Ls}(T \setminus E_n) \tag{B5}$$

и

$$\operatorname{Ls} E_n = T \setminus N\{T \setminus E_n\}. \tag{B6}$$

Следовательно,

$$E_n \stackrel{n}{\to} E \Leftrightarrow \operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(T \setminus E_n) = T \setminus E, \tag{B7}$$

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E_n = E \Leftrightarrow T \setminus E_n \stackrel{n}{\to} T \setminus E. \tag{B8}$$

Таким образом, сходимость к ядру и топологический предел полностью двойственны друг другу.

Пространство замкнутых множеств 2^T, наделенное топологическим пределом Lim, обозначается как $(2^T)_L$ и является L^*-пространством (см. [229], с. 349). Оно естественным образом гомеоморфно ядерному пространству T_n, т.е.

$$(2^T)_L \underset{top}{=} T_n\,. \tag{B9}$$

Непрерывность соответствия здесь понимается в том смысле, что любая сходящаяся последовательность переходит в сходящуюся. Отметим, что

топологический предел и сходимость к ядру могут не порождать, вообще говоря, топологию (см. [229], с. 350).

Далее, если T – сепарабельное метрическое пространство, то пространство $(2^T)_L$, а вместе с ним и ядерное пространство секвенциально компактны (см. [229], с. 351). Итак:

Теорема B1. *Если T – сепарабельное метрическое пространство, то из любой последовательности открытых множеств $\Omega_n \subseteq T$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность Ω_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, которая будет сходиться к некоторому открытому множеству $\Omega \subseteq T$ как к ядру.*

Отметим, что теорема B1 усиливает известную лемму Суворова, которая была доказана для компактных метрических пространств и областей, т.е. открытых связных множеств, а также для сходимости областей к ядру относительно точки (см. [369], с. 130). Действительно, сепарабельное метрическое пространство может и не быть компактным, как показывают примеры вещественной оси $\mathbb{R}$ и конечной плоскости $\mathbb{C}$. С другой стороны, всякое компактное метрическое пространство является сепарабельным (см. [230], с. 27). Ядро последовательности областей относительно точки совпадает с компонентной связности ядра (B3), содержащей эту точку. Если все элементы последовательности содержат фиксированную окрестность данной точки, как это имеет место в лемме Суворова, то ядро не вырождается.

3. О метризации ядерного пространства. Займемся теперь вопросом метризуемости ядерного пространства. Пусть (T, ρ) – метрическое пространство. Если пространство T не ограничено по метрике ρ, то всегда можно перейти к новому расстоянию

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \tag{B10}$$

такому, что $d(x, y) < 1$ для любых x и y. При этом пространства (T, ρ) и (T, d) гомеоморфны (см. [229], с. 220–221).

Через $(2^T)_m$ принято обозначать множество всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства T. В случае ограниченного метрического пространства $(2^T)_m$ совпадает с множеством 2^T всех замкнутых подмножеств пространства T. Как мы только что видели, это разграничение носит условный характер.

В дальнейшем, подразумевая пространство T ограниченным, на 2^T

введем расстояние Хаусдорфа между двумя множествами A и $B \neq \oslash$:

$$\operatorname{dist}(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\rho(a,B), \sup_{b\in B}\rho(b,A)\}, \tag{B11}$$

где, как обычно,

$$\rho(a,B) = \inf_{b\in B}\rho(a,b). \tag{B12}$$

Если $A = \oslash \neq B$, то

$$\operatorname{dist}(A,B) = \delta(T) := \sup_{a,b\in T}\rho(a,b). \tag{B13}$$

Как видим, пустое множество является изолированным элементом по указанной метрике (см. [229], с. 223).

Если T – компактное метрическое пространство, то оно автоматические ограничено (см. [230], с. 27) и на 2^T

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E_n = E \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\operatorname{dist}(E_n,E) = 0 \tag{B14}$$

(см. [230], с. 56). Отметим также, что в этом случае именно метрика Хаусдорфа порождает *экспоненциальную топологию* на 2^T ([230], с. 54). Так называется слабейшая топология, в которой множества 2^M, открыты для открытых и замкнуты для замкнутых множеств $M \subseteq T$ ([229], с. 168). Таким образом,

$$2^T \underset{top}{=} (2^T)_L \underset{top}{=} (2^T)_m \underset{top}{=} T_N \tag{B15}$$

и на T_N можно ввести метрику

$$d(E_1,E_2) = \operatorname{dist}(T\setminus E_1, T\setminus E_2), \tag{B16}$$

которая порождает сходимость к ядру. Итак (см. [230], с. 52):

Теорема В2. *Пусть T – компактное метрическое пространство. Тогда его ядерное пространство T_N также метризуемо и компактно.*

Отсюда и из теоремы В1 немедленно получаем (см. [230], с. 27):

Теорема В3. *Пусть T – компактное метрическое пространство. Тогда его ядерное пространство T_N с метрикой (В16) является полным, вполне ограниченным, секвенциально компактным и сепарабельным пространством.*

В связи с обсуждаемым вопросом приведем также следующее:

Предложение В1. ([230], с. 7–9). *Пусть T – произвольное метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) T секвенциально компактно;

2) T компактно (бикомпактно);

3) T счетно-компактно.

Напомним, что *компактность* (бикомпактность) означает выполнение *условия Бореля-Лебега*: каждое открытое покрытие T содержит конечное подпокрытие.

Счетная компактность сводится к *условию Бореля*: каждое счетное открытое покрытие T содержит конечное подпокрытие.

Условию Бореля эквивалентно *условие Кантора*: для любой цепи непустых замкнутых множеств $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ из T

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \oslash. \tag{B17}$$

Секвенциальная компактность сводится к *условию Больцано-Вейерштрасса*, сформулированному в пункте 1.

Поскольку топологическое пространство T в условиях теорем В1–В3 является сепарабельным, напомним, что сепарабельность метрического пространства эквивалентна существованию счетной открытой базы (см. [229], с. 215). Поэтому в качестве критерия метризуемости топологического пространства T будет удобно воспользоваться метризационной теоремой Урысона:

Предложение В2. ([10], с. 171). *Для того, чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемым необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным τ_1-пространством.*

Напомним, что топологическое пространство T называется *нормальным*, если любые два непересекающиеся замкнутые множества в нем имеют непересекающиеся открытые окрестности (см. [229], с. 128). Топологическое пространство называется τ_1-пространством, если любое одноточечное множество в нем является замкнутым ([229], с. 44).

Заметим, что указанное в предложении В2 условие метризуемости формально может быть ослаблено:

Предложение В3. ([229], с. 249). *Для того, чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемым необходимо и достаточно, чтобы оно было регулярным τ_1-пространством.*

В связи с этим напомним, что топологическое пространство T называется *регулярным*, если любая точка $t \in T$ и замкнутое множество

$T_0 \not\ni t$ имеют непересекающиеся окрестности. Для τ_1-пространств условие регулярности, вообще говоря, слабее условия нормальности (см. [10], с. 168). Однако, при наличии дополнительного априорного условия – существовании счетной открытой базы – свойства нормальности и регулярности эквивалентны (см. [229], с. 129).

4. О ядерных пространствах многообразий. При изложении теории топологических многообразий мы будем в основном придерживаться монографии [337].

Топологическое пространство называется *локально евклидовым пространством размерности* n, если каждая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$ или полупространству $\mathbb{R}^n_-$ пространства $\mathbb{R}^n$, составленному из точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с $x_1 \leq 0$.

Локально евклидово пространство называется *топологическим многообразием* или, короче, *многообразием*, если оно хаусдорфово и обладает счетной базой.

Напомним, что топологическое пространство называется хаусдорфовым (или τ_2-пространством), если любая пара точек в нем имеет непересекающиеся окрестности. Как известно, любое τ_2-пространство является и τ_1-пространством ([229], с. 56).

Кроме того, многообразия являются локально компактными топологическими пространствами (см. [337], с. 136). Следовательно, они всегда регулярны (см. [230], с. 48, [229], с. 127). Таким образом, по предложению В3 любое топологическое многообразие является метризуемым топологическим пространством.

Поскольку для метрических пространств условия сепарабельности и существования счетной открытой базы эквивалентны (см. [229], с. 215), то по теореме В1 получаем:

Теорема В4. *Пусть M – произвольное топологическое многообразие. Тогда его ядерное пространство M_N является секвенциально компактным L^*-пространством.*

Из теоремы В2 также получаем:

Теорема В5. *Пусть M – произвольное топологическое многообразие. Тогда сходимость к ядру порождает на M_N метризуемую и компактную топологию.*

5. О ядерных пространствах римановых поверхностей. Понятие римановой поверхности лежит в основе геометрической теории аналитических функций, исключительная плодотворность которой проявляется во многих исследованиях, начиная с гениальной работы Б. Рима-

на, блестяще продолженной Ф. Клейном, А. Пуанкаре, П. Кебе и другими. Хотя понятие римановой поверхности аналитической функции было введено Риманом еще в 1857 году, понятие абстрактной римановой поверхности смогло получить строгое определение лишь после развития теории абстрактных пространств и топологических многообразий. Общее понятие абстрактной римановой поверхности было впервые строго определено Г. Вейлем [82].

Согласно Вейлю, абстрактная риманова поверхность – это топологическая поверхность (триангулируемое двумерное многообразие) с конформными соотношениями соседства. Значение работы Т. Радо [320] состояло в том, что он установил эквивалентность для двумерных многообразий свойств триангулируемости и наличия счетной открытой базы. Тем самым предельно упрощено определение двумерного топологического многообразия, которое совпадает с приведенным в предыдущем пункте для $n = 2$.

На этой основе было вообще показано, что всякая ориентируемая топологическая поверхность гомеоморфна некоторой римановой поверхности. Таким образом, римановы поверхности в топологическом плане среди двумерных многообразий выделяются только одним дополнительным свойством – ориентируемостью (см. [366], с. 101–105).

Следствие B4. *Пусть R – абстрактная риманова поверхность. Тогда ядерное пространство R_N является секвенциально компактным L^*-пространством.*

Следствие B5. *Если R – компактная риманова поверхность, то сходимость к ядру порождает на R_N компактную и метризуемую топологию.*

Следствие B6. *Ядерное пространство $\overline{\mathbb{C}}_N$ является компактным метризуемым пространством. В качестве метрики, генерирующей сходимость к ядру, можно взять метрику (B16), где через* dist *обозначена метрика Хаусдорфа (B11), построенная по сферической метрике $\rho = s$. Относительно этой метрики $\overline{\mathbb{C}}_N$ является полным, вполне ограниченным и сепарабельным.*

Следствие B7. *Пусть Ω – произвольное открытое множество из расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда ядерное пространство Ω_N метризуемо, компактно, сепарабельно.*

Следствие B8. *Ядерное пространство конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}_N$ метризуемо, компактно и сепарабельно.*

Наконец, отметим, что секвенциальная компактность сохраняет свою

силу и для соответствующих пространств областей со сходимостью к ядру относительно точки. Это очевидно, поскольку естественная проекция ядерного пространства в подпространство областей является непрерывным отображением.

Приложение Г

О голоморфных операторах. Распространение результатов

Основные результаты диссертации были сформулированы выше только для гомеоморфизмов плоскости и, при этом, зачастую специальным образом нормированных. Было бы неразумно передоказывать соответствующие теоремы для каждого отдельно взятого случая других нормировок или областей определения. Цель данного приложения – указать границы и способы распространения теорем на более общие классы отображений. Этой цели как раз и служит понятие голоморфного оператора, который при необходимости может сужать или делать переменной область определения и выступать в роли обобщенной нормировки в случае неоднолистных отображений. В силу теории униформизации результаты также распространяются на произвольные римановы поверхности.

Пункт 1 содержит определения и предварительные замечания по теории внутренних отображений и голоморфных операторов. В пункте 2 доказана лемма Г1 о полунепрерывности множеств точек ветвления и областей регулярности, а в пункте 3 – лемма Г2 о непрерывности радиусов листности и инъективности при локально равномерной сходимости внутренних отображений. На этой основе в пункте 4 показано, каким образом все результаты диссертации распространяются на соответствующие классы внутренних по Стоилову отображений. Наконец, в пункте 5 приведены простейшие примеры непрерывных невырожденных голоморфных операторов.

1. О внутренних отображениях и голоморфных операторах. Внутренним отображением одного двумерного многообразия V в другое двумерное многообразие W называется непрерывное отображение V в W, которое

1) любое открытое множество многообразия V переводит в открытое множество многообразия W;

2) никакой отличный от точки континуум многообразия V не отображает в единственную точку многообразия W.

Всякое топологическое отображение есть внутреннее отображение. С другой стороны, любая аналитическая функция, отличная от постоянной, осуществляет внутреннее отображение.

Из определения также явствует, что суперпозиция двух внутренних отображений вновь является внутренним отображением. Оказывается, что вообще любое внутреннее отображение f представимо в виде суперпозиции аналитической функции A и топологического отображения g,

$$f = A \circ g. \tag{Г1}$$

Этот замечательный результат принадлежит Стоилову (см. [366], с. 137).

Благодаря указанному представлению, на внутренние отображения очевидным образом переносится ряд важнейших свойств аналитических функций, таких как принцип максимума, принцип аргумента, принцип инвариантности области, теорема об изолированности нулей и многие другие.

В предыдущем приложении уже отмечалось, что произвольная ориентированная топологическая поверхность (двумерное многообразие) гомеоморфна некоторой римановой поверхности. В силу теории униформизации, всякая риманова поверхность в качестве конформно эквивалентной модели имеет факторпространство $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ или единичного круга $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ по некоторой дискретной группе дробно-линейных отображений (см., напр., [50], с. 114). Таким образом, соответствующие классы внутренних отображений одного двумерного многообразия в другое всегда можно интерпретировать, как заданные в комплексной плоскости и подчиненные дополнительным условиям групповой симметрии. Поэтому в дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением плоских отображений.

Итак, в дальнейшем в качестве области определения внутреннего отображения f мы допускаем произвольное открытое множество $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Тогда Ω распадается на не более чем счетную совокупность связных открытых множеств (областей) $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, ..., в которых собственно и заданы внутренние отображения $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ... Соответственно, в представлении (Г1) $f^{(1)} = A^{(1)} \circ g^{(1)}$, $f^{(2)} = A^{(2)} \circ g^{(2)}$, ... Однако для дальнейшего будет удобным сохранить прежние единые обозначения f, A, g, подразумевая под этим соответствующие системы функций, заданных в непересекающихся или, как еще говорят, в неналегающих областях.

Пусть H_0 – некоторый класс плоских гомеоморфизмов, а C – класс всех непрерывных функций в плоскости. Оператор $\mathcal{A} : H_0 \to C$ будем называть голоморфным, если $f \circ g^{-1} = A$ – аналитическая функция для любого $g \in H_0$, $f := \mathcal{A}(g)$. При этом подразумевается, что область опре-

деления Ω гомеоморфизма g не уже области определения Ω' функции f, а область определения A совпадает с $g(\Omega')$.

Далее, будем говорить, что голоморфный оператор не вырожден, если $A \not\equiv const$, т.е. если $f = \mathcal{A}(g)$ является внутренним отображением для любого $g \in H_0$. Оператор $\mathcal{A} : H_0 \to C$ будем называть непрерывным, если из сходимости $g_n \overset{\text{л.р.}}{\to} g$ следует сходимость $\mathcal{A}(g_n) \overset{\text{л.р.}}{\to} \mathcal{A}(g)$.

Здесь мы говорим, что последовательность непрерывных функций $f_n : \Omega_n \to \mathbb{C}$ с областями определения $\Omega_n \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ сходится при $n \to \infty$ локально равномерно к непрерывной функции $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ с областью определения $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ и пишем $f_n \overset{\text{л.р.}}{\to} f$, если $\Omega_n \overset{N}{\to} \Omega$ как к ядру и $f_n \to f$ равномерно относительно сферической метрики на каждом компактном подмножестве из Ω.

2. О точках ветвления внутренних отображений. Внутреннее отображение $w = f(z)$ является локально топологическим в любой точке z своей области определения Ω, за исключением некоторого множества изолированных точек Ω. В окрестности такой точки $z_0 \in \Omega$ отображение $w = f(z)$ топологически эквивалентно отображению ζ^k, где k – целое число, $k \geq 2$, т.е. существует топологическое отображение g некоторой окрестности точки z_0 на единичный круг $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ такое, что $g(z_0) = 0$ и $f \circ g^{-1}(\zeta) = \zeta^k$. При этом, точку z_0 принято называть *точкой ветвления* порядка $k-1$ внутреннего отображения f, а точки, в окрестности которых f является топологическим, называются *обыкновенными* (см. [368], с. 225).

Пусть f – внутреннее отображение с областью определения Ω. Обозначим через $S^{(m)}(f)$ множество всех точек ветвления отображения f порядка не меньше m, а через $\Omega^{(m)}(f) = \Omega \setminus S^{(m)}(f)$ – множество всех обыкновенных точек и всех точек ветвления порядка меньше m. Будем называть $\Omega^{(m)}(f),\ m = 1, 2, \ldots, m-$ой областью регулярности.

Ясно, что множества $\Omega^{(m)}(f)$ являются открытыми, а множества $S^{(m)}(f)$ – замкнутыми в относительной топологии Ω. При этом, область регулярности $\Omega^{(1)}(f)$ совпадает с множеством всех обыкновенных точек отображения f, а $S^{(1)}(f)$ – с множеством всех его точек ветвления.

Лемма Г1. *Пусть f и f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность внутренних отображений с областями определения Ω и Ω_n, $\Omega^{(m)} = \Omega \setminus S^{(m)}(f)$, $\Omega_n^{(m)} = \Omega_n \setminus S^{(m)}(f_n)$, и пусть $f_n \overset{л.р.}{\to} f$. Тогда для любого $m = 1, 2, \ldots,$*

$$\Omega^{(m)} \subseteq N\left\{\Omega_n^{(m)}\right\} \tag{Г2}$$

или, что то же самое,

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} S^{(m)}(f_n) \cap \Omega \subseteq S^{(m)}(f). \tag{Г3}$$

Другими словами, области регулярности являются полунепрерывными снизу относительно сходимости к ядру, а множества точек ветвления – полунепрерывными сверху относительно верхнего топологического предела в топологии ядра $\Omega = N\{\Omega_n\}$.

При доказательстве этой леммы основную роль сыграет принцип аргумента, а также его следствие – аналог теоремы Руше. Для этого напомним соответствующие формулировки.

Итак, пусть $c \subseteq \mathbb{C}$ – некоторая замкнутая жорданова кривая, а $w = f(z) : c \to \mathbb{C}$ – непрерывное отображение. Тогда $\Gamma = f(c)$ – некоторая непрерывная замкнутая кривая, которая не обязательно является жордановой.

Пусть Γ не проходит через точку $w = 0$. Тогда выражение $\varphi = \arg w$ имеет смысл на Γ и значения этой функции имеют вид $\varphi_0 + 2k\pi$, где k – произвольное целое число. Когда z перемещается по c $\arg w$ является непрерывной функцией от z при подходящем выборе k. Разность между конечным и начальным значением этого аргумента, когда z описывает один раз полностью кривую c в положительном направлении называется изменением аргумента функции $f(z)$. Мы обозначаем его через $V[f(z), z \in c]$.

Значение выражения $V[f(z), z \in c]$ всегда является целым кратным 2π, т.к. $w = f(z)$ возвращается к своей исходной точке, когда z полностью описывает кривую c. Оно не зависит от исходной точки на c, а зависит от f и c.

В силу представления (Г1) для внутренних отображений имеет место следующее предложение, которое называется принципом аргумента (см. [367], с. 64–67):

Предложение Г1. *Пусть* $D \subseteq \mathbb{C}$ *– жорданова область, которая вместе со своим замыканием* $\overline{D} = D + c$ *лежит в области определения* Ω *внутреннего отображения* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, *и пусть* $f(z) \neq 0$ *при* $z \in c$. *Тогда*

$$V[f(z), z \in c] = 2\pi k, \tag{Г4}$$

где k *– суммарная кратность нулей отображения* f, *лежащих в* D.

Здесь кратность нуля внутреннего отображения $f(z)$ равна 1 для обыкновенных точек z и $k + 1$ для точек ветвления порядка k.

Совершенно аналогично случаю голоморфных функций доказывается (см. [367], с. 67):

Предложение Г2. *Пусть f_1 и f_2 – два внутренних отображения, области определения которых Ω_1 и Ω_2 содержат жорданову область D вместе с ее замыканием $\overline{D} = D + c$, $f_1(z) \neq 0$, $f_2(z) \neq 0$ при $z \in c$ и*

$$\frac{|f_2(z) - f_1(z)|}{|f_1(z)|} < 1 \tag{Г5}$$

на c. Тогда f_1 и f_2 имеют одинаковое число нулей в D с учетом их кратности.

Это и есть аналог теоремы Руше.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы Г1. Допустим, что (Г2) не выполнено. Тогда найдется точка $z_0 \in \Omega^{(m)}$ и последовательность точек $z_l \in S^{(m)}(f_{n_l})$ такие, что $z_l \to z_0$ при $l \to \infty$. Пусть $g(z) = f(z) - f(z_0)$ и $g_l(z) = f_{n_l}(z) - f_{n_l}(z_l)$, $l = 1, 2, \ldots$. Тогда $g_l \overset{\text{л.р.}}{\to} g$ при $l \to \infty$.

Поскольку $\Omega^{(m)} \subseteq \Omega = N\{\Omega_n\}$, то найдется число $\delta > 0$ такое, что круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \delta\} \subseteq \Omega_{n_l}$ для достаточно больших l. Нули функций g и g_l образуют дискретное множество и их может быть не более чем счетное число. Поэтому в интервале $(0, \delta)$ найдется хотя бы одно число r, для которого на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ нет ни одного нуля функций g_l, $l = 1, 2, \ldots$, а внутри круга $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ – ни одного нуля функции $g(z)$, кроме $z = z_0$.

Пусть

$$\rho = \min_{|z - z_0| = r} |g(z)|.$$

Тогда $\rho > 0$ и для достаточно больших l

$$|g(z) - g_l(z)| < \rho$$

на указанной окружности c. Из аналога теоремы Руше (предложение Г2) получаем, что g_l для достаточно больших l имеет то же самое число нулей, что и g, внутри круга $|z - z_0| \leq r$. Однако по построению $g(z)$ имеет в этом круге единственный нуль z_0 кратности не больше m, а $g_l(z)$, при достаточно большом l, – по крайней мере один нуль z_l кратности не меньше $m + 1$. Полученное противоречие опровергает сделанное предположение и тем самым доказывает соотношение (Г2). □

3. О радиусах листности и инъективности. Скажем, что внутреннее отображение f $k-$листно на некотором подмножестве E своей области определения Ω, если суммарная кратность нулей функций $F_a(z) = f(z) - a$, $z \in E$, при каждом $a \in \mathbb{C}$ не превышает числа $k = 1, 2, \ldots$. Если

$k = 1$, то говорим также, что f инъективно на E. Число $r_f^{(k)}(z_0) = \sup \rho$ по всем $\rho \geq 0$, для которых отображение f $k-$листно в круге $|z - z_0| \leq \rho$, будем называть радиусом $k-$листности f в точке $z_0 \in \Omega$. При $k = 1$ также будем говорить о радиусе инъективности.

Лемма Г2. *Пусть f и f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – внутренние отображения с областями Ω и Ω_n, соответственно, и пусть $f_n \overset{л.р.}{\to} f$. Тогда*

$$r_f^{(k)}(z_0) = \lim_{n\to\infty} r_{f_n}^{(k)}(z_0) \tag{Г6}$$

для любого $k = 1, 2, \ldots,$ и $z_0 \in \Omega$. Другими словами, радиусы $k-$листности непрерывны относительно локально равномерной сходимости внутренних отображений. В частности, непрерывен радиус инъективности.

Следствие Г1. *Радиусы $k-$листности $r_f^{(k)}(z)$ внутреннего отображения f непрерывны по переменной z.*

Действительно, внутреннее отображение f локально равномерно непрерывно в своей области определения. Поэтому семейство внутренних отображений $f_\zeta(z) = f(z+\zeta),\ z \in \Omega_\zeta = \Omega - \zeta$, непрерывно по параметру ζ в смысле локально равномерной сходимости $f_\zeta \overset{л.р.}{\to} f$ при $\zeta \to 0$. Поэтому следствие Г1 вытекает прямо из леммы Г2.

Следствие Г2. *Пусть $f_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ – внутренние отображения и $f_n \overset{л.р.}{\to} f_0$ при $n \to \infty$. Тогда $r_{f_n}^{(k)} \overset{л.р.}{\to} r_{f_0}^{(k)}$ при $n \to \infty$ для любого $k = 1, 2, \ldots$.*

Действительно, допустим, что это не так, т.е. найдется последовательность внутренних отображений $f_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ f_n \overset{л.р.}{\to} f_0$, числа $\varepsilon > 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ компакт D из области определения f_0, а также последовательность $z_n \in D,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ z_n \to z_0$ при $n \to \infty$, такие, что

$$|r_{f_n}^{(k)}(z_n) - r_{f_0}^{(k)}(z_n)| \geq \varepsilon_0 \tag{Г7}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность внутренних отображений

$$g_n(z) = f_n \circ \psi_n(z),\ z \in \Omega_n' = \Omega_n - \zeta_n,$$

где

$$\psi_n(z) = z + \zeta_n,\ \zeta_n = z_n - z_0.$$

Поскольку $f_n \overset{л.р.}{\to} f_0$, то и $\psi_n(z) \overset{л.р.}{\to} \psi_0(z) \equiv z$, то и $g_n \overset{л.р.}{\to} g_0$ при $n \to \infty$. Однако $r_{f_n}^{(k)}(z_n) = r_{g_n}^{(k)}(z_0),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ и, таким образом, (Г7) противоречит лемме Г2.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы Г2. Для того, чтобы доказать, что имеет место (Г6) достаточно показать, с одной стороны, неравенство

$$r_f^{(k)}(z_0) \le \liminf_{n\to\infty} r_{f_n}^{(k)}(z_o), \tag{Г8}$$

а с другой стороны, неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} r_{f_n}^{(k)}(z_o) \le r_f^{(k)}(z_0). \tag{Г9}$$

Покажем, к примеру, (Г8). Неравенство (Г9) доказывается совершенно аналогично. Итак, допустим, что (Г8) имеет место не всегда. Тогда для некоторой последовательности внутренних отображений

$$r_n < r_0 - \delta, \tag{Г10}$$

где $\delta > 0,\ r_n = r_{f_n}^{(k)}(z_0),\ r_0 = r_f^{(k)}(z_0)$. Пусть

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r_0 - \delta/2\}.$$

Для достаточно больших n: $D \subseteq \Omega_n$ и $f_n(z) \in D_R,\ z \in D$, где $D_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \le R\},\ R = 2\max|f(z)|$ по D. В силу (Г10) и компактности D_R найдется последовательность $a_n \in D_R,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, такая, что $a_n \to a_0$ при $n \to \infty$, для которой все отображения $g_n(z) = f_n(z) - a_n$ для достаточно больших $n = 1, 2, \ldots$, имеют не менее, чем $k+1$ нулей в D с учетом их кратности. При этом, $g_n \overset{\text{л.р.}}{\to} g_0$, где $g_0(z) = f(z) - a_0$.

Поскольку множество нулей внутренних отображений g_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, не более чем счетно, то найдется число $r \in (r_0 - \delta/2, r_0)$ такое, что на окружности

$$c(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

нет нулей $g_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. При этом, в круге

$$D(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$$

имеется не более k нулей отображения g_0 и, в тоже время, не менее $k+1$ нулей каждого из отображений g_n при достаточно больших $n = 1, 2, \ldots$.

С другой стороны, при достаточно больших $n = 1, 2, \ldots$,

$$|g_n(z) - g_0(z)| < \rho,$$

где

$$\rho = \min_{z\in C(r)} |g_0(z)|,$$

и по предложению Г2 g_n и g_0 должны иметь одинаковое число нулей. Полученное противоречие и доказывает (Г8). Неравенство (Г9) доказывается аналогично. □

Отметим, что в дальнейшем фактически используется только неравенство (Г8).

4. Распространение результатов на внутренние отображения. Для простоты скажем, что внутреннее отображение f сохраняет ориентацию, если таковым является гомеоморфизм g из представления (Г1).

Данное определение корректно, поскольку при наличии двух таких представлений

$$f = A_1 \circ g_1 = A_2 \circ g_2 \tag{Г11}$$

гомеоморфизм $h = g_2 \circ g_1^{-1}$ очевидно является конформным в $g_1(\Omega \setminus S)$, где Ω – область определения отображения f, а S – множество всех его точек ветвления. В силу же устранимости изолированных особенностей конформных отображений (см., напр., [270], с. 43), h конформно вообще в $g_1(\Omega)$. Таким образом,

$$g_2 = h \circ g_1, \tag{Г12}$$

где h – конформное отображение. Отметим также, что

$$A_1 = A_2 \circ h. \tag{Г13}$$

Будем говорить, что внутреннее отображение f принадлежит классу Соболева, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus S)$. Любое внутреннее отображение f класса $\mathcal{ACL}$, сохраняющее ориентацию, удовлетворяет п.в. некоторому уравнению Бельтрами и имеет смысл говорить о комплексной характеристике $\mu(z)$ и дилатации $p(z)$, которые определены однозначно с точностью до эквивалентности (п.в.).

Из теоремы 11.1 на основе леммы Г2, повторяя неоднократно использовавшиеся рассуждения с покрытиями Витали, получаем:

Следствие Г4. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}$ и $f_n : \Omega_n \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, – сохраняющие ориентацию внутренние отображения класса $\mathcal{ACL}$ и $f_n \overset{л.р.}{\to} f$. Тогда на любом открытом множестве Ω_0, $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega$*

$$\iint\limits_{\Omega_0} \Phi(p\,(z))\,dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_0} \Phi(p\,(z))\,dx\,dy, \tag{Г14}$$

где Φ *– произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1. При этом, если* $\Omega \subseteq \Omega_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ *здесь допустимо любое открытое множество* $\Omega_0 \subseteq \Omega$.

Действительно, множество точек ветвления S отображения f не более чем счетно и потому имеет меру нуль. Для каждой же обыкновенной точки $z \in \Omega^{(1)}(f) = \Omega \setminus S$ по лемме Г2 найдется $\delta = \delta(z) > 0$ такое, что в круге $D_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| \le r\}$ при $r < \delta$ все отображения f и f_n являются топологическими для достаточно больших $n > N = N(z, \delta)$. Система кругов $D_r(z),\ z \in \Omega^{(1)}(f),\ r < \delta(z)$, образует покрытие в смысле Витали области регулярности $\Omega^{(1)}(f)$. По теореме Витали (см. [360], с. 167) найдется счетное множество попарно непересекающихся кругов $D^{(m)} \subseteq \Omega_0$ из указанной системы, которое покрывает почти все точки Ω_0. По теореме 1 в каждом из указанных кругов выполняется неравенство:

$$\iint\limits_{D^{(m)}} \Phi(p\,(z))\,dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{D^{(m)}} \Phi(p\,(z))\,dx\,dy.$$

Отсюда, в силу счетной аддитивности интеграла ([360], с. 49), а также из леммы типа Фату для рядов (леммы 1.2) получаем неравенство (Г14).

Совершенно аналогично, еще раз используя рассуждения о покрытиях Витали, приходим к следствию теоремы 2:

Следствие Г5. *Пусть* $f_n : \Omega_n \to \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность* $Q(z)-$*к.к. функций с локально суммируемой* $Q(z) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$ *и* $f_n \overset{л.р.}{\to} f$, *где* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *– некоторое внутреннее отображение. Тогда* f *является* $Q(z)-$*к.к. функцией и* $(f_n)_z \to f_z,\ (f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ *при* $n \to \infty$ *слабо в* $L^1_{\rm loc}(\Omega \setminus S)$, *где* S *– множество точек ветвления* f. *Кроме того, п.в. на* E'

$$\mu(z) \in \operatorname{inv\,co} M(z) \tag{Г15}$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ *по мере на множестве*

$$E_0 = \{z \in E' : \mu(z) \in \operatorname{inv\,ext} M(z)\}, \tag{Г16}$$

где E' *– множество регулярных точек отображения* f *и*

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\mu_n(z)\}. \tag{Г17}$$

Здесь внутреннее отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$ класса $\mathcal{ACL}$, сохраняющее ориентацию, называется $Q(z)-$квазиконформной функцией, если его дилатация $p(z) \le Q(z)$ п.в.

Из следствия Г5 также получается распространение теорем сходимости Штребеля и Берса-Боярского на случай $Q(z)$−к.к. функций с локально суммируемой $Q(z)$.

Теорема 11.3 обобщается на случай внутренних отображений $f = \mathcal{A}(g), g \in H(Q(z))$, где $\mathcal{A}$ – произвольный невырожденный непрерывный голоморфный оператор, а $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере на ∞. Только здесь, в отличие от теоремы 11.3, следует ограничится срезками комплексных характеристик на множествах, компактно лежащих в ядре последовательности областей определения. При этом, оператор $\mathcal{A}$ выполняет роль обобщенной нормировки.

В силу секвенциальной компактности ядерного пространства все критерии компактности и теоремы замыкания (теоремы 12.1, 12.2, 13.1, 13.2) остаются в силе для классов внутренних отображений $\mathcal{A}(H^\Phi)$ и $\mathcal{A}(H_M)$, где $\mathcal{A} : H \to \mathbb{C}$ – произвольный невырожденный непрерывный голоморфный оператор. При этом, все интегральные и теоретико-множественные ограничения относятся только к (переменным) областям определения. В критерии компактности $\mathcal{A}(H_M)$ необходимые условия на M относятся к объединению областей определения.

Все теоремы дифференцирования по Белинскому (теоремы 14.1–14.3) сохраняются для произвольных $Q(z)$−к.к. функций относительно любой точки из области определения за исключением точек ветвления.

Наконец, все вариационные теоремы (теоремы 12.3, 13.3 и прочее) распространяются на случай, когда оператор $\mathcal{A}$ дифференцируем в соответствующем смысле (типа дифференцируемости по Фреше).

В силу сделанных в пункте 1 замечаний, все результаты также обобщаются на соответствующие классы внутренних отображений римановых поверхностей.

5. Некоторые примеры голоморфных операторов. Хотя развитая нами техника позволяет рассматривать задачи со свободными границами, здесь мы ограничимся простейшими примерами с фиксированной областью определения – открытым единичным кругом Δ.

Пусть H_0 – совокупность всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов g плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя класса $\mathcal{ACL}$ с нормировками $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и $g(\infty) = \infty$, комплексные характеристики которых удовлетворяют условию Давида (III).

Пример 1. Поставим в соответствие каждому $g \in H_0$ топологическое отображение $f : \Delta \to \Delta$ класса $\mathcal{ACL}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и с той же комплексной характеристикой в Δ, что и g. По теореме Давида (см. [165], с. 55) такое отображение имеет представле-

ние (Г1), т.е. мы действительно имеем дело с голоморфным оператором, который по определению не вырождается.

Его легко восстановить в явном виде через соответствующие конформные отображения. Именно, пусть $\mathcal{G} = g(\Delta)$. Из нормировок имеем, что $g(0) = 0 \in \mathcal{G}$ и $g(1) = 1 \in \partial\mathcal{G}$. По теореме Римана существует конформное отображение $A : \mathcal{G} \to \Delta$ такое, что $A(0) = 0$ и $A(1) = 1$. Такое отображение единственно в силу того, что совокупность всех конформных автоморфизмов единичного круга совпадает с двупараметрическим семейством дробно-линейных отображений:

$$h(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \zeta\overline{\zeta_0}},$$

где $\zeta_0 \in \Delta,\ \alpha \in \mathbb{R}$ ([316], с. 342).

Используя теоремы Каратеодори и Радо о сходимости конформных отображений (см., например, [205, 319] или [105], с. 56 и 60), можно легко показать, что соответствующий голоморфный оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным.

Пример 2. Совершенно аналогично дело обстоит в случае, когда берутся топологические отображения $f : \Delta \to \Delta$ класса $\mathcal{ACL}$, оставляющие неподвижными какие-либо три точки единичной окружности $\partial\Delta$.

Пример 3. Наконец, рассмотрим случай неоднолистных (негомеоморфных) внутренних отображений $f : \Delta \to \mathbb{C}$.

Зафиксируем на единичной окружности $\partial\Delta$ произвольную непрерывную вещественнозначную функцию $\varphi : \partial\Delta \to \mathbb{R}$, отличную от постоянной, и рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} f|_{\partial\Delta} = \varphi, & \text{(Г18)} \\ \operatorname{Im} f(0) = 0. & \text{(Г19)} \end{cases}$$

для уравнения Бельтрами с той же комплексной характеристикой в Δ, что и $g \in H(Q),\ 1 < Q < \infty$.

Если дополнительно потребовать, чтобы $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Delta)$ для некоторого $p > 2$, то задача имеет единственное решение. Действительно, по теореме представления Давида (см. [165], с. 55), если для данного $g \in H_0$ имеется решение f, то $f = A \circ g$, где A – некоторая аналитическая функция, заданная в $\mathcal{G} = g(\Delta)$. Пусть h – конформное отображение Римана $\mathcal{G}$ на Δ. Тогда

$$f = \mathcal{B} \circ h \circ g, \qquad \text{(Г20)}$$

где

$$\mathcal{B} = A \circ h^{-1}, \qquad \text{(Г21)}$$

– аналитическая функция, заданная в Δ и удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\mathcal{B}|_{\partial\Delta} = \psi, & (\Gamma 22) \\ \operatorname{Im}\mathcal{B}(0) = 0. & (\Gamma 23) \end{cases}$$

где

$$\psi = \varphi \circ g^{-1} \circ h^{-1}. \qquad (\Gamma 24)$$

Таким образом, исходная задача (Г18)–(Г19) сводится к задаче Дирихле (Г22)–(Г23) для аналитической функции $\mathcal{B}$ и, при этом,

$$A = \mathcal{B} \circ h. \qquad (\Gamma 25)$$

В силу представлении Шварца (см. [117], с. 346)

$$B(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \psi(\eta) \frac{\eta + \zeta}{\eta - \zeta} \frac{d\eta}{\eta}\,, \qquad (\Gamma 26)$$

используя теоремы сходимости Каратеодори и Радо ([105], с. 56, 60), легко показать, что голоморфный оператор $\mathcal{A}(g) := A \circ g$ также непрерывно зависит от g.

Список литературы

[1] *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. – 1975. – **30** (184), № 4. – С. 3—60.

[2] *Агард С.Б., Геринг Ф.В. (Agard S.B., Gehring F.W.)* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. – 1965. – **3**, 14 A. – P. 1–21.

[3] *Агард С.Б., Келингос Дж. (Agard S.B., Kelingos J.)* On parametric representation for quasisymmetric functions // Comm. Math. Helv. – 1969. – **44**. – P. 446–456.

[4] *Александров И.А.* Граничные значения функционала $I = I(f, \bar{f}, f', \bar{f}')$ на классе голоморфных однолистных в круге функций // Сиб. матем. журн. – 1963. – **4**, № 1. – С. 17–31.

[5] *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.

[6] *Александров И.А., Гутлянский В.Я.* Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу // Докл. АН СССР. – 1965. – **165**, № 5. – С. 983–986.

[7] *Александров И.А., Гутлянский В.Я.* Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу // Труды Томск. ун–та. – 1966. – **189**. – С. 111–122.

[8] *Александров И.А., Копанев С.А.* О взаимном росте однолистной функции и ее производной // Сиб. матем. журн. – 1966. – **7**, № 1. – С. 23–30.

[9] *Александров И.А., Попов В.И.* Решение задачи И.Е. Базилевича и Г.Б. Корицкого о звездообразных дугах линий уровня // Сиб. матем. журн. – 1965. – **6**, № 1. – С. 16–37.

[10] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 367 с.

[11] *Аленицин Ю.Е.* Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области // Труды Матем. ин–та им. В.А. Стеклова. – 1968. – **94**. – Р. 4–18.

[12] *Альфорс Л. (Ahlfors L.)* Zur Theorie der Überlagerungsflächen // Acta Math. – 1935. – **65**. – S. 157–194.

[13] *Альфорс Л. (Ahlfors L.)* On quasiconformal mappings // J. Analyse Math. – 1953/54. – **3**. – P. 1–58.

[14] *Альфорс Л. (Ahlfors L.)* Conformality with respect to Riemann metrics // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.1. – 1955. – **206**. – P. 1–22.

[15] *Альфорс Л. (Ahlfors L.)* Quasiconformal reflections // Acta Math. – 1963. – **109**. – P. 291–301.

[16] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.

[17] *Альфорс Л., Берс Л. (Ahlfors L., Bers L.)* Riemann's mapping theorem for variable metrics // Ann. Math. – 1960. – **72**. – P. 385–404.

[18] *Альфорс Л., Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. – М.: ИЛ, 1961. – 178 с.

[19] *Альфорс Л., Бёрлинг А. (Ahlfors L., Beurling A.)* Conformal invariants and function theoretic null-sets // Acta Math. – 1950. – **83**. – P. 101–129.

[20] *Альфорс Л., Вейль Г. (Ahlfors L., Weill G.)* A uniqueness theorem for Beltrami equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – **13**. – P. 975–978.

[21] *Андерсон Дж., Беккер Й., Лесли Ф.Д. (Anderson J.M., Becker J., Lesley F.D.)* Boundary values of asymptotically conformal mapping // J. London Math. Soc. – 1988. – **38**, 2. – P. 453–462.

[22] *Андриян-Казаку К. (Andreian Cazacu C.)* Une propriete caracteristique des representations quasi-conformes extremales // Rev. Roumaine math. pures et appl. – 1967. – **12**, 2. – P. 167–176.

[23] *Асеев В.В., Лазарева О.А.* О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра // Изв. вузов. Матем. – 2006. – **10**. – С. 10—18.

[24] *Астала К. (Astala K.)* Area distortion of quasiconformal mappings // Acta Math. – 1994. – **173**. – P. 37–60.

[25] *Астала К., Иванец Т., Мартин Г. (Astala K., Iwaniec T., Martin G.J.)* Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane. – Princeton Math. Ser. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. – 677 p.

[26] *Базилевич И.Е.* Sur les theoremes de Koebe–Bieberbach // Матем. сб. – 1936. – **1**, № 3. – С. 283–292.

[27] *Базилевич И.Е.* О теоремах искажения в теории однолистных функций // Матем. сб. – 1951. – **28**, № 2. – С. 283–292.

[28] *Базилевич И.Е.* Геометрическая теория функций // В сб. "Математика в СССР за 40 лет", 1957.

[29] *Базилевич И.Е.* Дисперсия коэффициентов однолистных функций // Матем. сб. – 1965. – **68** (110), № 4. – С. 549–560.

[30] *Базилевич И.Е., Корицкий Г.В.* О некоторых свойствах линий уровня при однолистных конформных отображениях // Матем. сб. – 1962. – **58** (100):3. – С. 249–280.

[31] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе// Труды Института математики НАНУ. – 2008. – Т. 73. – 308 с.

[32] *Беккер Й. (Becker J.)* On asymptotically conformal extension of univalent functions // Complex variables. – 1987. – **9**. – P. 109–120.

[33] *Беккер Й., Поммеренке Х. (Becker J., Pommerenke Ch.)* Über die quasiconforme Fortzetzung schlichter Funktionen // Math. Zeit. – 1978. – **161**, 1. – S. 69–80.

[34] Беккер Й., Поммеренке Х. (Becker J., Pommerenke Ch.) Hölder continuity of conformal maps with quasiconformal extension. – 1988. – **10**. – P. 267 – 272.

[35] *Белинский П.П.* Теорема существования и единственности квазиконформных отображений // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, № 2 (42). – С. 145.

[36] *Белинский П.П.* О метрических свойствах квазиконформного отображения // ДАН СССР. – 1953. – **93**, № 4. – С. 589–590.

[37] *Белинский П.П.* Об искажении при квазиконформных отображениях // ДАН СССР. – 1953. – **91**, № 5. – С. 997–998.

[38] *Белинский П.П.* Поведение квазиконформного отображения в изолированной точке // ДАН СССР. – 1953. – **91**, № 4. – С. 709–710.

[39] *Белинский П.П.* Квазиконформные отображения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1954. – 16 с.

[40] *Белинский П.П.* Поведение квазиконформного отображения в изолированной точке // Учен. зап. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1954. – **29**, № 6. – С. 85–70.

[41] *Белинский П.П.* О вариации квазиконформного отображения // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 5. – С. 93–95.

[42] *Белинский П.П.* О существовании решения вариационных задач квазиконформных отображений // Тр. 3 Всесоюз. мат. съезда, Москва, 1956 г. – М., 1956. – Т. 1: Секц. докл. – С. 77.

[43] *Белинский П.П.* О мере площади при квазиконформном отображении // ДАН СССР. – 1958. – **121**, № 1. – С. 16–17.

[44] *Белинский П.П.* О решении экстремальных задач квазиконформных отображений методом вариаций // ДАН СССР. – 1958. – **121**, № 2. – С. 199–201.

[45] *Белинский П.П.* О нормальности семейств квазиконформных отображений // ДАН СССР. – 1959. – **128**, № 4. – С. 651–652.

[46] *Белинский П.П.* Общие свойства квазиконформных отображений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1959. – 10 с.

[47] *Белинский П.П.* Решение экстремальных задач теории квазиконформных отображений вариационным методом // Сиб. мат. журн. – 1960. – **1**, № 3. – С. 303–330.

[48] *Белинский П.П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.

[49] *Бельтрами Е. (Beltrami E.)* Delle variable complesse sorpa una superficie qualunque // Ann. Math. Pura Appl. – 1867/1868. – 1, 2. – P. 329–366.

[50] *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. – М.: Наука, 1986. – 300 с.

[51] *Берс Л. (Bers L.)* Univalent solutions of linear elliptic systems // Comm. Pure Appl. Math. – 1953. – **6**. – P. 513–526.

[52] *Берс Л. (Bers L.)* Functional theoretical properties of solutions of partial differential equations of elliptic type // Ann. Math. Stud. – 1954. – **33**. – P. 69–94.

[53] *Берс Л. (Bers L.)* On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – **84**. – P. 78–84.

[54] *Берс Л. (Bers L.)* The equivalence of two definitions of quasiconformal mappings // Comment. Math. Helv. – 1962. – **37**. – P. 148–154.

[55] *Берс Л. (Bers L.)* A nonstandard integral equation with application to quasiconformal mappings // Acta Math. – 1966. – **116**. – P. 113–134.

[56] *Берс Л. (Bers L.)* Finitely generated Kleinian groups. An introduction // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.1. – 1989. – **13**, 3. – P. 313–327.

[57] *Берс Л., Гелбарт А. (Bers L., Gelbart A.)* On a class of functions defined by partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – **56**. – P. 67–93.

[58] *Берс Л., Гелбарт А. (Bers L., Gelbart A.)* A topological property of solutions of partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1946. – **52**. – P. 64.

[59] *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.

[60] *Берс Л., Ройдин Г.Л. (Bers L., Royden H.L.)* Holomorphic families of injections // Acta Math. – 1986. – **157**, 3–4. – P. 259–286.

[61] *Бёрлинг А., Альфорс Л. (Beurling A., Ahlfors L.)* The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. – 1956. – **96**. – P. 125–142.

[62] *Бибербах Л. (Bieberbach L.)* Über einen Satz des Herrn Caratheodory // Nachr. Wiss. Gött., Math.-phys. KL. – 1913. – **4**. – P. 552–561.

[63] *Бибербах Л. (Bieberbach L.)* Über Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung // Math. Annalen. – 1916. – **77**. – P. 153–172.

[64] *Бибербах Л. (Bieberbach L.)* Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. – 1916. – P. 940–955.

[65] *Бибербах Л. (Bieberbach L.)* Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichten konforme Abbildungen // Math. Z. – 1919. – **4**. – P. 295–305.

[66] *Билута П.А.* Некоторые экстремальные задачи в классе отображений, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. – 1964. – **165**, № 3. – С. 503–505.

[67] *Билута П.А.* Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 4. – С. 717–726.

[68] *Билута П.А., Крушкаль С.Л.* К вопросу об экстремальных квазиконформных отображениях // ДАН СССР. – 1971. – **196**. – С. 259–262.

[69] *Боярский Б.В.* Гомеоморфные решения уравнения Бельтрами // ДАН СССР. – 1955. – **102**, № 4. – С. 661–664.

[70] *Боярский Б.В.* О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений на плоскости // ДАН СССР. – 1955. – **102**, №5. – С. 871–874.

[71] *Боярский Б.В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. – 1957. – **43**(85), № 4. – С. 451–503.

[72] *Боярский Б.В., Гутлянский В.Я. (Bojarski B.V., Gutlyanskii V. Ya.)* On the Beltrami equation // in: Conference Proceedings and Lecture Notes on Analysis I (Tianjin 1992), ed. Zhong Li. – International Press, Cambridge, MA, 1994. – P. 8-–33.

[73] *Бракалова М.А. (Brakalova M.A.)* Sufficient and necessary conditions for conformality. Part I. Geometric viewpoint // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **55**, 1. – P. 137-–155.

[74] *Бракалова М.А. (Brakalova M.A.)* Sufficient and necessary conditions for conformality. Part II. Analytic viewpoint // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 235-–254.

[75] *Бракалова М.А., Дженкинс Дж.А. (Brakalova M., Jenkins J.A.)* On the local behavior of certain homeomorphisms // Kodai Math. J. – 1994. – **17**. – P. 201–213.

[76] *Бранж Л. (Branges L.)* A proof of the Biberbach conjecture // Acta Math. – 1985. – **194**, 1–2. – P. 137–152.

[77] *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.

[78] *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

[79] *Бурбаки Н.* Интегрирование. – М.: Наука, 1967. – 396 с.

[80] *Бурбаки Н.* Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 272 с.

[81] *Васильев А. (Vasil'ev A.)* Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. – Springer-Verlag, Berlin–New York, 2002. – **1788**. – 211 p.

[82] *Вейль Г. (Weyl H.)* Die Idee der Riemannshen Fläche. – Leipzig–Berlin, 1913.

[83] *Векуа И.Н.* Общее представление функций двух независимых переменных, допускающих производные в смысле С.Л. Соболева и проблема примитивных // ДАН СССР. – 1953. – **89**, № 5. – С. 773–775.

[84] *Векуа И.Н.* О некоторых свойствах решений системы уравнений эллиптического типа // ДАН СССР. – 1954. – **98**, № 2. – С. 181–184.

[85] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

[86] *Виттих Г. (Wittich H.)* Zum Beweis eines Satzes über quasiconforme Abbildungen // Math. Zeitscher. – 1948. – **51**. – P. 275–288.

[87] *Водопьянов С.К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Матем. тр. – 2002. – **5**, № 2. – С. 92—137.

[88] *Водопьянов С.К., Ухлов А.Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. матем. журн. – 1998. – **39**, № 4. – С. 776—795.

[89] *Волковыский Л.И.* Квазиконформные отображения. – Львов: Издво Львовс. ун-та, 1954. – 155 с.

[90] *Вуоринен М. (Vuorinen M.)* Conformal geometry and quasiregular mappings // Lecture Notes in Math. – 1988. – **1319**. – P. 1–200.

[91] *Вяйсяля Ю. (Väisälä J.)* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. – 1972. – **229**. – P. 1–200.

[92] *Гайер Д. (Gaier D.)* Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. – Berlin: Springer-Verlag, 1964. – 294 p.

[93] *Гарабедян П.Р., Шиффер М. (Garabedian P.R., Schiffer M.)* The local maximum theorem for the coefficients of univalent functions // Arch. Rational Mech. Anal. – 1967. – **26**. – P. 1–32.

[94] *Гардинер Ф.П., Салливан Д.П. (Gardiner F.P., Sullivan D.P.)* Symmetric structures on a closed curve // American J. of Math. – 1992. – **114**. – P. 683–731.

[95] *Гельфер С.А.* Метод вариаций в теории аналитических функций, допускающих параметрическое представление // В кн. "Экстремальные задачи геометрической теории функций", Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1968. – **XCIV**. – P. 19–26.

[96] *Геринг Ф.У. (Gehring F.W.)* The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. A1. – 1960. – **281**. – P. 1–38.

[97] *Геринг Ф.У. (Gehring F.W.)* Definitions for a class of plane quasiconformal mappings // Nagoya Math. J. – 1967. – **29**. – P. 175–184.

[98] *Геринг Ф.У. (Gehring F.W.)* L^p–integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mappings // Acta Math. – 1973. – **130**. – P. 265–277.

[99] *Геринг Ф.У. (Gehring F.W.)* Spirals and the universal Teichmüller space // Acta Math. – 1978. – **141**. – P. 99–113.

[100] *Геринг Ф.У., Лехто О. (Gehring F.W., Lehto O.)* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. – 1959. – **272**. – P. 1–9.

[101] *Геринг Ф.У., Райх Э. (Gehring F.W., Reich E.)* Area distortion under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. AI. – 1966. – **388**. – P. 1–15.

[102] *Голузин Г.М.* О теоремах искажения в теории конформных отображений // Матем. сб. – 1936. – **1**. – С. 127–135.

[103] *Голузин Г.М.* Метод вариаций в конформном отображении, I // Матем. сб. – 1946. – **19** (61), № 2. – С. 203–236.

[104] *Голузин Г.М.* Об одном методе вариаций в теории однолистных функций // Уч. зап. Ленингр. унив., сер. матем. наук. – 1952. – **144**, 23. – С. 85–101.

[105] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

[106] *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983. – 284 с.

[107] *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. – 1987. – **134** (176), № 3 (11). – С. 306—352.

[108] *Горяинов В.В.* Общая теорема единственности и геометрия экстремальных конформных отображений в задачах искажения и вращения // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1986. – **10**. – С. 40–47.

[109] *Горяинов В.В.* Полугруппы конформных отображений и экстремальные вопросы теории однолистных функций // Дисс... д-ра физ.-мат. наук, АН УССР, Институт прикладной математики и механики. – Донецк, 1986. – 282 с.

[110] *Горяинов В.В.* Полугруппы конформных отображений // Матем. сб. – 1986. – **129**, № 4. – С. 451–472.

[111] *Град А. (Grad A.)* The regions of values of the derivative of a schlicht functions // Приложение к книге: Schaffer A.C., Spencer D.C. Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. – 1950. – **35**.

[112] *Грётч Г. (Grötzsch H.)* Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes // Ber. Verh. Sächs Akad. Wiss. Leipzig. – 1928. – **80**. – S. 503–507.

[113] *Гронуолл Т.Г. (Gronwall T.H.)* Some remarks on conformal representation // Ann of Math. – 1914-1915. – **16**. – P. 72–76.

[114] *Грунский Х. (Grunsky H.)* Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein und mehrfachzusammenhängender Bereiche // Schr. Math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin. – 1932. – **1**. – P. 93–140.

[115] *Грунский Х. (Grunsky H.)* Koeffizientenbediengungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen // Math. Z. – 1939. – **45**. – P. 29—61.

[116] *Гудман Г.С. (Goodman G.S.)* Univalent functions and optimal control. – Thesis Stanford Univesity, 1967. – 112 p.

[117] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.

[118] *Гутлянский В.Я.* Об областях значений некоторых функционалов и свойствах линий уровня на классах однолистных функций // Труды Томск. ун-та. – 1968. – **200**. – P. 71–87.

[119] *Гутлянский В.Я.* О взаимном изменении модуля регулярной функции с положительной вещественной частью и модуля ее производной // Укр. матем. журн. – 1970. – **22**, № 5. – P. 680–685.

[120] *Гутлянский В.Я.* Параметрическое представление однолистных функций // ДАН СССР. – 1970. – **194**, № 4. – P. 750–753.

[121] *Гутлянский В.Я.* Теорема вращения в классе однолистных p–симметричных функций // Матем. заметки. – 1971. – **10**, 2. – С. 239–242.

[122] *Гутлянский В.Я.* Параметрическое представление однолистных функций // Дисс... д-ра физ.-мат. наук, Киев, Ин–т матем. – 1972.

[123] *Гутлянский В.Я.* Теорема площадей для одного класса квазиконформных отображений // ДАН СССР. – 1973. – **212**, № 3. – С. 540–543.

[124] *Гутлянский В.Я.* О методе вариаций для однолистных аналитических функций с квазиконформным продолжением // ДАН СССР. – 1977. – **236**, № 5. – С. 1045–1048.

[125] *Гутлянский В.Я.* О методе вариаций для однолистных аналитических функций с квазиконформным продолжением // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 2. – С. 61–78.

[126] *Гутлянский В.Я.* О методе внутренних вариаций для однолистных функций с квазиконформным продолжением // Международная. конф. "Комплексный анализ", Тезисы докладов. Изд ун-та им. Мартина Лютера, г. Халле, ГДР. – 1980.

[127] *Гутлянский В.Я.* Квазиконформные отображения и вариации однолистных аналитических функций // Международная. конф. "Complex Analysis and Applications", г. Варна. – 1981. – С. 20.

[128] *Гутлянский В.Я.* К параметрическому методу Левнера – Куфарева // Всесоюзная школа по теории функций: Тез. докл., Кемерово, Изд-во Кемеровск. ун-та. – 1983. – С. 39.

[129] *Гутлянский В.Я.* The product of conformal radii of nonoverlapping domains // Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A. – 1977. – **4**. – P. 44-–48; See: Ten papers on complex analysis, AMS Translations, Ser. 2. – 1984. – **122**. – P. 65-–69.

[130] *Гутлянский В.Я. (Gutlyanskii V.Ya.)* The product of the conformal radii of nonoverlapping domains // Amer. Math. Soc. Transl. (2). – 1984. – **122**. – P. 65—69.

[131] *Гутлянский В.Я.* К параметрическому методу для однолистных аналитических функций // Математические структуры – Вычислительная математика – Математическое моделирование. София: Изд-во Болг. АН. – 1984. – **2**. – P. 36–42.

[132] *Гутлянский В.Я., Астахов В.Н.* О некоторых экстремальных задачах для однолистных аналитических функций // Метрические вопросы теории функций и отображений. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 3–19.

[133] *Gutlyanskii V., Golberg A.* Rings and generalized quasiconformal mappings // Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2009. – P. 187–192.

[134] *Gutlyanskii V.Ya., Golberg A.* On Lipschitz Continuity of Quasiconformal Mappings in Space // Journal D'Analyse Mathematique. – 2009. – **109**. – P. 233–251.

[135] *Гутлянский В.Я., Горяинов В.В.* О радиусе звездности при конформном отображении // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1974. – № 2. – С. 100–102.

[136] *Гутлянский В.Я., Горяинов В.В.* К геометрическим свойствам конформного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений. – К.: Наукова думка, 1975. – С. 24–40.

[137] *Гутлянский В.Я., Горяинов В.В.* Об экстремальных задачах в классе S_M // Матем. сб. – 1976. – С. 242–246.

[138] *Гутлянский В.Я., Десятский С.П.* Об экстремалях в задаче вращения для ограниченных однолистных функций // Ин-т математики АН УССР. Препринт 85.77, г. Киев. – 1986.

[139] *Гутлянский В.Я., Зайдан А.О.* О конформных отображениях полигональных областей // Укр. матем. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1464–1467.

[140] *Гутлянский В.Я., Зайдан А.О.* К методу П.П. Куфарева об определении параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля // Доклады РАН. – 1994. – **336**, № 1. – С. 14–16.

[141] *Гутлянский В.Я., Кравчук Е.В.* О граничных функциях системы функционалов, зависящих от значения однолистной функции и ее производной // Ин-т математики АН УССР. Препринт 85.13, г. Киев. – 1987. – С. 1–30.

[142] *Гутлянский В.Я., Курта В.В.* Однолистные отображения круга на взаимно неналегающие области // Доклады АН УССР. – Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1986. – № 8. – С. 5–8.

[143] *Гутлянский В.Я., Мартио О. (Gutlyanskiĭ V., Martio O.)* Rotation estimates and spirals // Conform. Geom. Dyn. – 2001. – **5**. – P. 6–20.

[144] *Гутлянский В.Я., Мартио О. (Gutlyanskiĭ V., Martio O.)* Conformality of a quasiconformal mapping at a point // Journal D'Analyse Mathematique. – 2003. – **91**. – P. 179–192.

[145] *Гутлянский В.Я., Мартио О.* О конформности квазиконформного отображения в точке // Доклады РАН. – 2003. – **391**, № 2. – С. 155–157.

[146] *Гутлянский В.Я., Мартио О.* Оценки вращения при конформных и квазиконформных отображениях // Укр. матем. вісник. – 2004. – **1**, № 2. – С. 147–171; translation in Ukr. Math. Bull. – 2004. – **1**, № 2. – P. 153–176.

[147] *Гутлянский В.Я., Мартио О., Рязанов В.И., Вуоринен М. (Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.)* Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2000. – **25**, no. 1. – P. 101–130.

[148] *Гутлянский В.Я., Мартио О., Рязанов В.И., Вуоринен М. (Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.)* On the asymptotic behavior of quasiconformal mappings in space // Quasiconformal Mappings and Analysis, Ed. by P. Duren., Springer-Verlag. – 1998. – P. 159–180.

[149] *Гутлянский В.Я., Мартио О., Рязанов В.И., Вуоринен М. (Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.)* On convergence theorem for space quasiregular mappings // Forum Math. – 1998. – **10**, no. 3. – P. 353–375.

[150] *Гутлянский В.Я., Мартио О., Рязанов В.И. и Вуоринен М. (Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I. and Vuorinen M.)* On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings // Studia Mathematica. – 1998. – **128**, no. 3. – P. 243–271.

[151] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями на характеристику М.А. Лаврентьева интегрального типа // ДАН СССР. – 1987. – **297**, № 2. – С. 283–286.

[152] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О вариационном методе для квазиконформных отображений // Сиб. матем. журнал. – 1987. – **28**, № 1. – С. 81–85, 225.

[153] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику М.А. Лаврентьева // Сиб. матем. журнал. – 1990. – **31**, № 2. – С. 21–36.

[154] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О представлении решений с особенностями для обобщенной системы Коши–Римана // Доклады РАН. – 1991. – **321**, № 6. – С. 1147–1150.

[155] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О решениях с особенностями для одного уравнения математической физики // Укр. матем. журнал. – 1992. – **44**, № 2. – С. 155–159.

[156] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О квазиокружностях и асимптотически конформных кривых // Доклады РАН. – 1993. – **330**, № 5. – С. 546–548.

[157] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. (Gutlyanskiĭ V.Ya., Ryazanov V.I.)* On Asymptotically conformal curves // Complex Variables. – 1994. – **25**. – P. 1–10.

[158] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* О спрямляемости и гладкости некоторых квазиконформных кривых // Доклады РАН. – 1994. – **338**, № 5. – С. 583–584.

[159] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* К теории локального поведения квазиконформных отображений // Известия РАН, Сер. матем. – 1995. – **59**, № 3. – С. 31–58.

[160] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. (Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.)* On boundary correspondence under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1996. – **21**, 1. – P. 167–178.

[161] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И., Сребро У., Якубов Э. (Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.)* On recent advances in the Beltrami equations // Укр. мат. вестник. – 2010. – **7**, № 4. – С. 467–515; translated into English in J. Math. Sci. – 2011. – **175**, 4. – P. 413–449.

[162] *Гутлянский В.Я., Сугава Т. (Gutlyanskiĭ V., Sugawa T.)* On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings // Papers on analysis, Rep. Univ. Jyväskylä, Dep. Math. Stat., Univ. Jyväskylä, Jyväskylä. – 2001. – **83**. – P. 91–108.

[163] *Гутлянский В.Я., Щепетев В.А.* К теоремам искажения и вращения в классе однолистных аналитических функций // Сиб. матем. журн. – 1973. – **14**, № 4. – С. 239–242.

[164] *Гутлянский В.Я., Щепетев В.А.* Обобщенная теорема площадей для одного класа q–квазиконформных отображений // ДАН СССР. – 1974. – **218**, № 3. – С. 509–512.

[165] *Давид Г. (David G.)* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1988. – **13**. – P. 25–70.

[166] *Данилов В.А.* О поведении квазиконформных отображений вблизи кривых разрыва характеристики // ДАН СССР. – 1976. – **231**, № 5. – С. 1049–1051.

[167] *Данилов В.А.* Оценки искажения квазиконформных отображений в пространстве типа C^m_α // Сиб. мат. ж. – 1973. – **14**, № 3. – С. 525–535.

[168] *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962. – 895 с.

[169] *Джекобс М. (Jacobs M.)* Measurable multivalued mappings and Lusin's theorem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **134**. – P. 471–481.

[170] *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: ИЛ, 1962.

[171] *Дженкинс Дж.А. (Jenkins J.A.)* Some area theorems and a special coefficient theorem // Illinois J. Math. – 1964. – **8**. – P. 80–99.

[172] *Джон Ф. (John F.)* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 391–413.

[173] *Джон Ф., Ниренберг Л. (John F., Nirenberg L.)* On functions of bounded mean oscilation // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415–426.

[174] *Дональдсон С.К. (Donaldson S.K.)* D.P. Sullivan's quasiconformal Yang–Mills theory // Acta Math. – 1989. – **163**, 3–4. – P. 181–252.

[175] *Дрессель Ф.Г., Герген Д.Д. (Dressel F.G., Gergen J.J.)* Mapping for elliptic equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – **77**. – P. 151–178.

[176] *Дрессель Ф.Г., Герген Д.Д., Мак Лиод Р.М. (Dressel F.G., Gergen J.J., Mc. Leod R.M.)* Uniqueness of mapping pairs for elliptic equations // Duke Math. J. – 1957. – **24**. – P. 173–181.

[177] *Дуади А., Ирл С.(Douady A., Earle C.J.)* Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle // Acta Math. – 1986. – **157**. – P. 23–48.

[178] *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 401 с.

[179] *Дуглас А. (Douglis A.)* A function–theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pures Appl. Math. – 1953. – **6**. – P. 259–289.

[180] *Дьюрен П.Л. (Duren P.L.)* Univalent functions. – Springer–Verlag, New York LLC, 2001.

[181] *Дынькин Е.М.* Методы теории сингулярных интегралов (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона–Зигмунда) // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. – 1987. – **15**. – С. 197–300.

[182] *Журавлев И.В.* О многомерном аналоге уравнения Бельтрами // ДАН СССР. – 1988. – **299**, № 4. – С. 801–805.

[183] *Журавлев И.В.* О существовании решения для многомерного аналога уравнения Бельтрами // Сиб. мат .ж. – 1989. – **30**, № 1. – С. 103–113.

[184] *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе. – К.: Наукова думка, 1993. – 264 с.

[185] *Зигмунд А. (Zygmund A.)* On certain integrals // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – **455**. – P. 170–204.

[186] *Зигмунд А. (Zygmund A.)* On singular integrals // Rend. Math. – 1957. – **16**. – P. 468–505.

[187] *Зморович В.А.* О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций // Укр. матем. ж. – 1952. – **4**, № 3. – С. 276–297.

[188] *Зморович В.А.* Внутренние экстремальные свойства однолистных аналитических функций в односвязных и многосвязных областях // В кн. “История Отечественной математики”, К.: Наукова Думка, 1970. – **4**, кн. 1.

[189] *Зорич В.А.* Теорема М.А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Матем. сб. – 1967. – **74** (116), № 3. – С. 417–433.

[190] *Зорич В. А.* Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий // УМН. – 2002. – **57**, № 3. – С. 3–28.

[191] *Иванец Т. (Iwaniec T.)* The best constant in a $BMO-$inequality for the Beurling–Ahlfors transform // *Mich. Math. J.* – 1986. – **33**, 3. – P. 387–394.

[192] *Иванец Т., Мартин Г. (Iwaniec T., Martin G.J.)* Geometric function theory and nonlinear analysis. – Oxford University Press, New York, 2001. – 552 p.

[193] *Иванец Т., Мартин Г. (Iwaniec T., Martin G.J.)* The Beltrami Equation // Memoirs of the Amer. Math. Soc. – 2008. – **191**. – P. 1–92.

[194] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.

[195] *Кальдерон А.П. (Calderon A.P.)* Singular integrals // Bull. Amer. Math. Soc. – 1966. – **72**. – P. 426–465.

[196] *Кальдерон А.П., Вейс М., Зигмунд А. (Calderon A.P., Weiss M., Zygmund A.)* On the existence of singular integrals // Proc. Symp. Pure Math. – 1967. – **10**. – P. 56–73.

[197] *Кальдерон А.П., Зигмунд А. (Calderon A.P., Zygmund A.)* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. – 1952. – **88**. – P. 85–139.

[198] *Кальдерон А.П., Зигмунд А. (Calderon A.P., Zygmund A.)* On singular integrals // Amer. J. Math. – 1956. – **78**. – P. 289–309.

[199] *Кальдерон А.П., Зигмунд А. (Calderon A.P., Zygmund A.)* On problem of Mihlin // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – **78**, 1. – P. 209–224.

[200] *Кальдерон А.П., Зигмунд А. (Calderon A.P., Zygmund A.)* Algebras of certain singular integrals // Amer. J. Math. – 1956. – **78**. – P. 310–320.

[201] *Кальдерон А.П., Зигмунд А. (Calderon A.P., Zygmund A.)* Singular integral operators and differential equations // Amer. J. Math. – 1957. – **79**. – P. 801–821.

[202] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

[203] *Караман П. (Caraman P.)* n-dimensional quasiconformal mappings. – Bucuresti–Kent, 1974. – 553 p.

[204] *Каратеодори К.С. (Caratheodory K.C.)* Über den Variabilitatsbereich der Fourierschen Konstanten von positiv harmonischen Function // Rendiconti di Palermo. – 1911. – **32**. – P. 193–217.

[205] *Каратеодори К. (Caratheodory C.)* Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten // Math. Ann. – 1912. – **72**. – P. 107–144.

[206] *Карлесон Л. (Carleson L.)* On mappings conformal at the boundary // J. Analyse Math. – 1967. – **19**. – P. 1–13.

[207] *Кастен Ч., Валадье М. (Castaing C., Valadier M.)* Convex Analysis and Measurable Multifunctions // Lect. Not. Math. – 1977. – **580**. – P. 1–278.

[208] *Кёбе П.(Koebe P.)* Über die Uniformisierung beliebiger analytischen Kurven // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. – 1907. – P. 191–210.

[209] *Кирнан Д.П. (Kiernan J.P.)* Quasiconformal mappings and Schwartz's lemma // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – **148**. – P. 185–197.

[210] *Копылов А. П.* Устойчивость в С-норме классов отображений. – Новосибирск: Наука, 1990.

[211] *Кошелев А.И.* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем // УМН. –1958. – **3**, № 4. – С. 29–88.

[212] *Красносельский М.А. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 500 с.

[213] *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 272 с.

[214] *Кругликов В.И.* О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем // Метрические вопросы теории функций и отображений. – К.: Наук. думка, 1973. – **6**. – С. 213-147.

[215] *Кругликов В.И., Борчук С.М.* Сходящиеся последовательности отображений с искажением, ограниченным в среднем // Доклады АН УССР. – 1990 .– № 10. – С. 6–9.

[216] *Крушкаль С.Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. – 1964. – **157**, № 3. – С. 517–519.

[217] *Крушкаль С.Л.* Метод вариаций в теории квазиконформных отображений замкнутых римановых поверхностей // ДАН СССР. – 1964. – **157**, № 4. – С. 781–783.

[218] *Крушкаль С.Л.* К теории экстремальных задач для квазиконформных отображений замкнутых римановых поверхностей // ДАН СССР. – 1966. – **171**, № 4. – С. 784–787.

[219] *Крушкаль С.Л.* Об отображениях, $\varepsilon-$квазиконформных в среднем // Сиб. мат. ж. – 1967. – **8**, № 4. – С. 798–806.

[220] *Крушкаль С.Л.* Некоторые экстремальные задачи для однолистных аналитических функций // ДАН СССР. – 1968. – **182**, № 4. – С. 754–757.

[221] *Крушкаль С.Л.* Некоторые локальные теоремы для квазиконформных отображений римановых поверхностей // ДАН СССР. – 1971. – **199**, № 2. – С. 269–272.

[222] *Крушкаль С.Л.* Некоторые экстремальные задачи для конформных отображений // Сиб. мат. ж. – 1971. – **12**, № 4. – С. 760–784.

[223] *Крушкаль С.Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. – Новосибирск: Наука, 1975.

[224] *Крушкаль С.Л.* Замечание об областях значений аналитических функционалов на классах конформных и квазиконформных отображений // Сиб. мат. ж. – 1982. – **23**, № 4. – С. 90–98.

[225] *Крушкаль С.Л.* Новые методы решения вариационных задач теории квазиконформных отображений // Сиб. мат. ж. – 1988. – **29**, № 2. – С. 105–114.

[226] *Крушкаль С.Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения – новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.

[227] *Кудъявин В.С.* Локальная структура плоских отображений, квазиконформных в среднем // Доклады АН Украины. – 1991. – № 3. – С. 10–12.

[228] *Кузъмина Г.В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциаллы // Труды Матем. ин–та АН СССР. – 1980. – **139**. – Р. 1–240.

[229] *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.

[230] *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.

[231] *Куратовский К., Рульь-Нардзевский С. (Kuratowski K., Rull-Nardzewski C.)* A general theorem on selectors // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. Phys. – 1965. – **13**. – P. 397–403.

[232] *Курта В.В.* О произведении конформных радиусов неналегающих областей // Ин-т математики АН УССР. Препринт 85.16, г. Киев. – 1985. – С. 29–35.

[233] *Курта В.В.* Теорема искажения для однолистных аналитических функций с квазиконформным продолжением // Известия вузов. Математика. – 1985. – № 6. – С. 77–78.

[234] *Куфарев П.П.* Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. – 1943. – **13**(55):1. – С. 87–118.

[235] *Куфарев П.П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля // ДАН СССР. – 1947. – **57**, № 6. – С. 535–537.

[236] *Куфарев П.П.* Теорема о решениях одного дифференциального уравнения // Уч. зап. Томск. ун–та. – 1947. – **5**. – С. 20–21.

[237] *Куфарев П.П.* Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций // ДАН СССР. – 1956. – **107**, № 5. – С. 633–635.

[238] *Куфарев П.П.* О вариационной формуле Г.М. Голузина // Вопросы математики и механики. Труды Томск. ун–та. – 1963. – **163**. – С. 58–62.

[239] *Кюнау Р. (Kühnau R.)* Quasiconforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien // J. reine angew. Math. – 1968. – **231**. – P. 101–113.

[240] *Кюнау Р. (Kühnau R.)* Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatations – beschränkung // Math. Nachr. – 1969. – **40**. – P. 1–11.

[241] *Кюнау Р. (Kühnau R.)* Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien // J. reine angew. Math. – 1969. – **238**. – P. 61–66.

[242] *Кюнау Р. (Kühnau R.)* Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für qusikonforme Abbildungen // Math. Nachrichten. – 1971. – **48**, № 1–6. – С. 77–105.

[243] *Кюнау Р. (Kühnau R.)* Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit kreisringweise konstanter Dilatationsbeschränkung // Math. Nachr. – 1975. – **66**. – P. 269–282.

[244] *Кюнау Р. (Kühnau R.)* Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien // Comm. Math. Helv. – 1978. – **53**, 3. – P. 408–428.

[245] *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Труды физ.-мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 195–246.

[246] *Лаврентьев М.А.* Sur une classe de representations continues // Матем. сб. – 1935. – **42**, 4. – С. 407–423.

[247] *Лаврентьев М.А.* Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Матем. сб. – 1947. – **21** (63). – С. 285–320.

[248] *Лаврентьев М.А.* Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1948. – **12**, № 6. – С. 513–554.

[249] *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М.: Изд–во АН СССР, 1962. – 136 с.

[250] *Лаврентьев М.А., Белинский П.П.* Некоторые проблемы геометрической теории функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1972. – **128**. – С. 34–40.

[251] *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. – М.–Л.: ОНТИ, 1938.

[252] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными // ДАН СССР. – 1957. – **112**. – С. 810–811.

[253] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 688 с.

[254] *Лебедев Н.А.* Метод вариаций в конформном отображении // ДАН СССР. – 1951. – **76**, № 1. – С. 25–27.

[255] *Лебедев Н.А.* Мажорантная область для выражения $I = z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}/f(z)^\lambda$ в классе S // Вестник ЛГУ, серия матем., физики и химии. – 1955. – **8**, 3. – С. 29–41.

[256] *Лебедев Н.А.* Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях // Труды Мат. ин–та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 211–231.

[257] *Лебедев Н.А.* Некоторые следствия из неравенства Грунского // Вестник ЛГУ. – 1972. – **7**. – С. 45–55.

[258] *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.

[259] *Лебедев Н.А., Александров И.А.* К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интегралов Стильтьеса // В кн. "Экстремальные задачи геометрической теории функций", Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1968. – **XCIV**. – С. 79–89.

[260] *Лебедев Н.А., Милин И.М.* О коэффициентах некоторых классов аналитических функций // Матем. сб. – 1951. – **28**(70), № 2. – С. 359–400.

[261] *Летинен М. (Lehtinen M.)* On extremal quasiconformal mappings in the presense of a dilatation bound // Rev. roum. math. pures et appl. – 1987. – **32**, 10. – P. 915–922.

[262] *Лехто О. (Lehto O.)* On the differentiability of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1960. – **275**. – P. 1–28.

[263] *Лехто О. (Lehto O.)* Remarks on the integrability of the derivatives of quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1965. – **371**. – P. 1–8.

[264] *Лехто О. (Lehto O.)* Entwicklung der Theorie quasiconformer Abbildungen // Mitt. Mat. Ges. DDR. – 1970. – **3/4**. – P. 36–47.

[265] *Лехто О. (Lehto O.)* Homeomorphisms with given dilatation // Lect. Not. Math. – 1970. – **118**. – P. 58–73.

[266] *Лехто О. (Lehto O.)* Remarks on generalized Beltrami equation and conformal mappings // Proc. Rom.-Finn. Sem., Rom., 1969. – Bucharest, 1971. – P. 203–214.

[267] *Лехто О. (Lehto O.)* Quasiconformal mappings and singular integrals // Symp. Math. – 1976. – **18**. – P. 429–453.

[268] *Лехто О. (Lehto O.)* Schlicht functions with a quasiconformal extension // An. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. – 1971. – **1**, 500. – 10 p.

[269] *Лехто О. (Lehto O.)* Univalent functions and Teichmüller spaces. – Springer–Verlag, New York, 1987. – 257 p.

[270] *Лехто О., Виртанен К. (Lehto O., Virtanen K.)* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin etc.: Springer, 1973. – 258 p.

[271] *Лешингер К. (Leschinger K.)* Untersuchungen über Jacobi-Determinanten von Zweidimensionalen Quasiconformen Abbildungen // Bonn. Math. Schriften. – 1974. – **72**. – S. 1–58.

[272] *Лёвнер К. (Löwner K.)* Über Extremumsätze bei der Konformen Abbildungen des aüβeren des Einheitskreises // Math. Z. – 1919. – **3**. – C. 65–77.

[273] *Лёвнер К. (Löwner K.)* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. – 1923. – **89**. – P. 103–121.

[274] *Лёвнер Ч. (Lowner Ch.)* Charles Loewner, Collected Papers. – Boston - Basel, Birkhauser, 1988. – 518 p.

[275] *Ломако Т.В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 341–349.

[276] *Ломако Т.В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бультрами с ограничениями теоретико–множественного типа // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1227–1240.

[277] *Ломако Т.В., Рязанов В.И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вестник. – 2011. – **8**, № 4. – С. 1–25.

[278] *Лоран П.Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

[279] *Мак Ливи Дж.О. (Mc Leavey J.O.)* Extremal problems analytic univalent function with quasiconformal extensions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **195**, 468. – P. 327–345.

[280] *Мане Р., Сад П., Салливан Д. (Mane R., Sad P., Sallivan D.)* On the dinamics of rational maps // Ann. sci. Ec. norm. super. – 1983. – **16**, 2. – P. 193–217.

[281] *Мартио О. (Martio O.)* Boundary values and injectiveness of the solutions of Beltrami equations // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. – 1967. – **402**. – 26 p.

[282] *Мартио О., Рикман С., Вяйсяля Ю. (Martio O., Rickman S., Väisälä J.)* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. – 1969. – **448**. – P. 1—40.

[283] *Мартерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. – М.: Мир, 1978. – 318 с.

[284] *Мельниченко И.П., Плакса С.А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.

[285] *Меньшов Д. (Menchoff D.)* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – С. 75–85.

[286] *Миклюков В.М.* О некоторых классах отображений на плоскости // ДАН СССР. – 1968. – **183**, № 4. – С. 772–774.

[287] *Миклюков В.М., Кругликов В.И.* О некоторых классах плоских топологических отображений с обобщенными производными // Метрические вопросы теории функций и отображений. – К.: Наук. думка, 1973. – **6**. – С. 102–122.

[288] *Милин И.М.* Метод площадей в теории однолистных функций // ДАН СССР. – 1964. – **154**. – С. 264–267.

[289] *Милин И.М.* Однолистные функции и ортонормированные системы. – М.: Наука, 1971.

[290] *Митюк И.П.* Принцип симметризации для многосвязных областей // ДАН СССР. – 1964. – **157**. – С. 268–270.

[291] *Михлин С.Г.* Сингулярные интегральные уравнения // УМН. – 1948. – **3**, № 3(25). – С. 29–112.

[292] *Михлин С.Г.* Вариационные методы решения задач математической физики // УМН. – 1950. – **5**, № 6 (40). – С. 3–51.

[293] *Михлин С.Г.* К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1956. – № 1. – С. 3–24.

[294] *Михлин С.Г.* Сингулярные интегралы в пространствах L^p // ДАН СССР. – 1957. – **117**, № 1. – С. 28–31.

[295] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 254 с.

[296] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.

[297] *Мокану П.Т., Рид М.О. (Mocanu P.T., Reade M.O.)* The radius of α-convexity for the class of starlike univalent functions // $\alpha - real$, Notices of A.M.S. – 1973. – **20**, 1; Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1975. – **XX**, 5. – P. 561–565.

[298] *Моррн К. (Morrey C.)* On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – **43**. – P. 126–166.

[299] *Морс М.* Топологические методы теории функций комплексного переменного. – М.: ИЛ, 1951. – 248 с.

[300] *Натансон И.П.* Терия функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

[301] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 408 с.

[302] *Ниренберг Л. (Nirenberg L.)* On nonlinear elliptic differential equations and Hölder continuity // Comm. Pure and Appl. Math. – 1953. – **6**. – P. 103–156.

[303] *Ниренберг Л. (Nirenberg L.)* On a generalization of the quasiconformal mappings and its application to the elliptic differential equations // Ann. Math. Stud. – 1954. – **33**. – P. 95–100.

[304] *Ньюмен М. (Newman M.)* Elements of topology of plane sets of points. – Cambridge Univ. Press., 1954. – 214 p.

[305] *Олех Ч. (Olech C.)* A note concerning set-valued measurable functions // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math. Astr. Phys. – 1965. – **13**. – P. 317–321.

[306] *Партука Д. (Partyka D.)* An alternative proof of a result due to Douady and Earle // Annales Univ. Mariae Curie–Sklodowska. – 1988. – **42**. – P. 59–68.

[307] *Педерсон Р.Н., Шиффер М. (Pederson R.N., Schiffer M.)* Further generalization of the Grunsky inequalities // J. Anal. Math. – 1970. – **23**. – P. 353–380.

[308] *Песин И.Н.* Метрические свойства $Q-$квазиконформных отображений // Матем. сб. – 1956. – **40** (82). – С. 281–294.

[309] *Песин И.Н.* Отображения, квазиконформные в среднем // ДАН СССР. – 1969. – **187**, № 4. – С. 740–742.

[310] *Поммеренке Х. (Pommerenke Ch.)* Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen // Math. Zs. – 1964. – **85**. – P. 197–208.

[311] *Поммеренке Х. (Pommerenke Ch.)* Univalent functions. – Vandenhoeck u. Ruprecht, Gottingen, 1975. – 376 p.

[312] *Поммеренке Х. (Pommerenke Ch.)* Über die Subordination analytischer Functionen // J. Reine. Angew. Math. – 1964. – **218**. – P. 159–173.

[313] *Поммеренке Х. (Pommerenke Ch.)* On univalent functions, Bloch functions and VMOA // Math. Ann. – 1978. – **236**. – P. 199–208.

[314] *Попов В.И.* Область значений одной системы функционалов на классе S // Труды Томск. ун–та. – 1964. – **182**. – С. 107–132.

[315] *Потемкин В., Рязанов В.И. (Potyemkin V., Ryazanov V.)* On noncompactness of the David classes // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A 1. Math. – 1998. – **23**, 1. – P. 191–204.

[316] *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.

[317] *Прохоров Д.В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Матем. сб. – 1990. – **181**:12. – С. 1659–1677.

[318] *Пфлюгер А. (Pfluger A.)* Über die Aquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasiconformer Abbildungen // Comment. Math. Helv. – 1959. – **33**. – P. 23–33.

[319] *Радо Т. (Rado T.)* Sur la representation conforme de domaines variables // Acta Szeged. – 1922/1923. – 1, 3. – P. 180–186.

[320] *Радо Т. (Rado T.)* Über den Begriff der Riemannschen Fläche // Acta Szeged. – 1925. – **2**. – P. 101–121.

[321] *Райман Г.М. (Reimann H.M.)* Ordinary differential equations and quasiconformal mappings // Inventiones Math. – 1976. – **33**. – С. 247–270.

[322] *Райх Э., Вальчак Х. (Reich E., Walczak H.)* On the behavior of quasiconformal mappings at a point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **117**, 5. – P. 338–351.

[323] *Ренельт Г. (Renelt H.)* Modifizierung und Erweiterung einer Schifferschen variationsmethode für quasiconforme Abbildungen // Math. Nachr. – 1973. – **55**. – P. 353–379.

[324] *Ренельт Г. (Renelt H.)* Asymptotische Entwicklungen, Teichmüller-Wittichscher Verzerrungssatz und Kompaktheit in Klassen quasikonformer Abbildungen // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. Math. – 1981. – **6**. – P. 3–14.

[325] *Ренельт Г. (Renelt H.)* Quasikonforme Abbildungen und elliptische systeme erster Ordnung in der Ebene // Teubner Texte Math. – 1982. – **46**. – 140 s.

[326] *Решетняк Ю.Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. мат. ж. – 1966. – **7**, № 5. – С. 886–919.

[327] *Решетняк Ю.Г.* Общие теоремы о полунепрерывности и о сходимости с функционалом // Сиб. мат. ж. – 1967. – **8**, № 5. – С. 1052–1071.

[328] *Решетняк Ю.Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Матем. сб. – 1968. – **75**, № 3. – С. 323–334.

[329] *Решетняк Ю.Г.* Локальная структура отображений с ограниченным искажением // Сиб. мат. ж. – 1969. – **10**, № 6. – С. 1319-1333.

[330] *Решетняк Ю.Г.* О множестве точек ветвления отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. ж. – 1970. – **11**, № 6. – С. 1333–1339.

[331] *Решетняк Ю.Г.* Дифференциальные свойства квазиконформных отображений и конформных отображений римановых пространств // Сиб. мат. ж. – 1978. – **19**, № 5. – С. 1166–1183.

[332] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

[333] *Решетняк Ю.Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. – Новосибирск: Наука. – 229 с.

[334] *Риджер (Rieger J.H.)* Families of maps from the plane to the plane // J. London Math. Soc. – 1987. – **36**, 2. – P. 351–369.

[335] *Рокафеллар Р. Т. (Rockafellar R.T.)* Measurable dependence of convex sets and functions on parameters // J. Math. Ann. Appl. – 1969. – **28**, 1. – P. 4–25.

[336] *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.

[337] *Рохлин В.А., Фукс Д.В.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.

[338] *Рязанов В.И.* Вариационный метод для квазиконформных отображений с ограничениями на характеристики // Теория отображений и приближение функций. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 145–153.

[339] *Рязанов В.И.* Вариационный метод для общих классов квазиконформных отображений // Доклады АН УССР. – 1982. – № 8. – С. 25–28.

[340] *Рязанов В.И.* Критерий дифференцируемости оп Белинскому и его следствия // Укр. мат. ж. – 1992. – **44**, № 2. – С. 295–300.

[341] *Рязанов В.И.* Критерий сходимости характеристик квазиконформных отображений // Тезисы докладов 3-ей Междунар. конф. по компл. анал. и его прил. – Варна, 1985. – С. 28.

[342] *Рязанов В.И.* Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений // Доклады АН УССР. – 1982. – № 6. – С. 24–26.

[343] *Рязанов В.И.* Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений // Теория отображений и приближение функций. – К.: Наука. думка, 1983. – С. 50–62.

[344] *Рязанов В.И.* О замыкании классов квазиконформных отображений с интегральными ограничениями // Укр. мат. ж. – 1991. – **43**, № 4. – С. 435–440.

[345] *Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с локально суммируемой границей деформации // Доклады РАН. – 1993. – **332**, № 6. – С. 693–695.

[346] *Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. ж. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009–1019.

[347] *Рязанов В.И.* О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Сиб. мат. ж. – 1992. – **33**, № 1. – С. 87–104.

[348] *Рязанов В.И.* О необходимых и достаточных условиях дифференцируемости по Белинскому // Доклады РАН. – 1992. – **323**, № 2. – С. 241–244.

[349] *Рязанов В.И.* О сходимости характеристик квазиконформных отображений // Укр. мат. ж. – 1986. – **38**, № 2. – С. 200–204.

[350] *Рязанов В.И.* О сходимости характеристик, преобразовании Фурье и проблеме Райха-Волькзака // Доклады РАН. – 1992. – **323**, № 2. – С. 150–152.

[351] *Рязанов В.И.* О теоремах сходимости и компактности для соболевских гомеоморфизмов // Препринт АН Украины. Ин-т прикладной математики и механики; 93.07.– Донецк, 1993. – 27 с.

[352] *Рязанов В.И.* О точности некоторых теорем сходимости // ДАН СССР. – 1990. – **315**, № 2. – С. 317–319.

[353] *Рязанов В.И.* Об усилении теоремы сходимости Штребеля // Известия АН России. Сер. матем. – 1992. – **56**, № 3. – С. 636–653.

[354] *Рязанов В.И.* Оператор Гильберта и сходимость характеристик квазиконформных отображений // Доклады АН УССР. – 1985. – № 3. – С. 24–26.

[355] *Рязанов В.И.* Решение проблемы Райха–Волькзака о конформности по Белинскому–Лаврентьеву // Укр. мат. ж. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1406–1411.

[356] *Рязанов В.И.* Теорема замыкания для квазиконформных отображений с интегральными ограничениями // ДАН СССР. – 1990. – **315**, № 3. – С. 540–543.

[357] *Рязанов В.И. (Ryazanov V.I.)* Questions of Convergence and Compactness for Quasiconformal Mappings // Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – **131**, № 2. – P. 7–19.

[358] *Рязанов В.И. (Ryazanov V.I.)* On necessary and sufficient condition for convergence of complex dilatations // Pliska: Studia mathematica bulgarica. – 1989. – **10**. – P. 39–44.

[359] *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений // Дис... д-ра физ.-мат. наук, ИПММ АН Украины. – Донецк, 1993. – 281 с.

[360] *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 494 с.

[361] *Салливан Д.П., Тёрстон В.П. (Sullivan D.P., Thurston W.P.)* Extending holomorphic motions // Acta Math. – 1986. – **157**, 3-4. – P. 243–257.

[362] *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – М.: Наука, 1983. – 358 с.

[363] *Солынин А.Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. – 1999. – **11:1**, – С. 3-–86.

[364] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

[365] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир., 1974. – 333 с.

[366] *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 228 с.

[367] *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. – М.: ИЛ, 1962. – Т. 1. – 364 с.

[368] *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. – М.: ИЛ, 1962. – Т. 2. – 416 с.

[369] *Суворов Г.Д.* Семейства плоских топологических отображений. – Новосибирск: СО АН СССР, 1965. – 266 с.

[370] *Суворов Г.Д.* Простые концы и последовательности плоских отображений. – К.: Наук. думка, 1986. – 190 с.

[371] *Сычёв А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. – Новосибирск : Наука, 1983. – 152 с.

[372] *Тамразов П.М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наукова Думка, 1975. – 270 с.

[373] *Тейхмюллер О. (Teichmüller O.)* Untersuchungen über konforme und quasiconforme Abbildung // Deutsch. Math. – 1938. – **3**. – S. 621–678.

[374] *Тейхмюллер О. (Teichmüller O.)* Extremal quasiconforme Abbildungen und quadratische Differentiale // Abh. Preuss. Akad. Wiss. – 1939. – **22**. – S. 1–197.

[375] *Трефесен Л.(Trefethen L.)* Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation // SIAM J. Sct. Stat. Comput. – 1980. – **1**, 1. – P. 82–102.

[376] *Трохимчук Ю.Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 212 с.

[377] *Трохимчук Ю.Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. – Киев: ИМ НАН Украині, 2008. – 538 с.

[378] *Трохимчук Ю. Ю., Зелинский Ю. Б., Шарко В. В.* О некоторых результатах в топологии многообразий, теории многозначных отображений и теории Морса // Тр. МИАН СССР. – 1983. – **154**. – С. 222—230.

[379] *Тукиа П. (Tukia P.)* The space of quasisymmetric mappings // Math. Scand. – 1977. – **40**. – P. 127–142.

[380] *Тукиа П. (Tukia P.)* Compactness properties of $\mu-$homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1991. – **16**. – P. 47–69.

[381] *Улина Г.В.* Об областях значений некоторых систем функционалов в классах однолистных функций // Вестник ЛГУ, сер. матем., механ. и астр. – 1960. – **1**, № 1. – С. 35–54.

[382] *Урысон П.С.* Sur les classes (L) de M. Frechet // Ens. Math. – 1926. – **25**. – P. 77–83.

[383] *Фин Р., Серрин Дж. (Finn R., Serrin J.)* On the Hölder continuity of quasiconformal and elleptic mappings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – **89**. – P. 1–5.

[384] *Фелман Р. (Fehlmann R.)* Über extremale quasikonforme Abbildungen // Comment. Math. Helv. – 1981. – **56**. – P. 558–580.

[385] *Халмош П.* Теория меры. – М.: ИЛ, 1953. – 291 с.

[386] *Хаммель Д.А. (Hummel J.A.)* A variational method for starlike functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – **9**, 1. – P. 82–87.

[387] *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.

[388] *Хейман У.* Многолистные функции. – М.: ИЛ, 1960.

[389] *Хейман У.К. (Hayman W.K.)* The asymptotic behavior of K q.s. functions // Mathematical structures–Computational mathematics–Mathematical modelling , Sofia, Publishing House of BAS. – 1984. – **2**. – P. 198–207.

[390] *Хейнонен Ю., Килпеляйнен Т., Мартио О. (Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.)* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 363 p.

[391] *Хопкинс Т.Р., Робертс Д.И. (Hopkins T.R., Roberts D.E.)* Kufarev's method for determining the Schwartz–Christoffel parameters // Numer. Math. – 1979. – **33**. – P. 353–365.

[392] *Чирка Е.М.* О продолжении голоморфных движений // Dokl. Akad. Nauk. – 2004. – **397**, No. 1. – P. 37–40.

[393] *Чирка Е.М., Росэй Ё.П. (Chirka E.M., Rosay J.-P.)* Remarks on the proof of a generalized Hartogs lemma // Complex analysis and applications, (Warsaw, 1997). Ann. Polon. Math. – 1998. – **70**. – P. 43–47.

[394] *Шабат Б.В.* Об обощенных решениях одной системы уравнений в частных производных // Матем. сб. – 1945. – **17**(59), № 2. – С. 193–209.

[395] *Шабат Б.В.* Геометрический смысл понятия эллиптичности // УМН. – 1957. – **12**, № 6. – С. 181–188.

[396] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

[397] *Шатс А. (Schatz A.)* On the local behavior of homeomorphic solutions of Beltrami's equation // Duke Math. J. – 1968. – **35**, 2. – P. 289–306.

[398] *Шеретов В.Г.* Об одном варианте теоремы площадей // Научн. труды Кубанского ун–та. – 1976. – **217**. – Р. 100–112.

[399] *Шеретов В.Г.* Об экстремальных квазиконформных отображениях с ограничением на характеристику // ДАН СССР. – 1968. – **179**, № 5. – С. 1060–1063.

[400] *Шинзингер Р., Лаура П. (Schinzinger R., Laura P.)* Conformal Mapping: Methods and Applications // Amsterdam-Oxford-New York-Tokio, Elsevier, 1991. – 581 p.

[401] *Шиффер М. (Schiffer M.)* A method of variation within the family of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1938. – **44**, № 2. – P. 432–449.

[402] *Шиффер М. (Schiffer M.)* A variational method for univalent quasiconformal mappings // Duke Math. J. – 1966. – **33**, 2. – P. 395–412.

[403] *Шиффер М., Шобер Г. (Schiffer M., Schober G.)* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1976. – **2**. – P. 501–531.

[404] *Шиффер М., Шобер Г. (Schiffer M., Schober G.)* A variational method for general families of quasiconformal mappings // J. analyse math. – 1978. – **34**. – P. 240–264.

[405] *Шиффер М., Шобер Г. (Schiffer M., Schober G.)* An application of the calculus of variations for general families of quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1979. – **747**. – P. 349–357.

[406] *Шлык В.А.* О равенстве р-емкости и р-модуля // Сиб. матем. журн. – 1993. – **34**:6. – С. 216—221.

[407] *Шобер Г. (Schober G.)* Univalent Functions // Lect. Notes Math. – 1975. – **478**. – P. 1–199.

[408] *Шоке Г. (Choquet G.)* Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier. – 1953/54. – **5**. – P. 131–295.

[409] *Штребель К. (Strebel K.)* Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. Math. Helv. – 1969. – **44**, 4. – P. 469–475.

[410] *Шур И. (Shur I.)* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // *J. Reine und Angew. Math.* – 1917. – **147**. – P. 205–232.

[411] *Яковлев В.И.* Использование конформного отображения при численном методе расчета электромагнитных полей // В сб.: Проблемы создания турбо– и гидрогенегаторов большой мощности. – Л.: Наука, 1971. – С. 27–37.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Часть I. Однолистные аналитические функции

Введение и обзор результатов 5

Глава 1. Определения и элементарные оценки

1.1 Однолистные функции и конформные отображения 19
1.2 Принцип площадей 21
1.3 Теоремы о росте и искажении 23
1.4 Последовательности однолистных функций 27

Глава 2. Специальные классы аналитических функций

2.1 Принцип подчинения и класс $\mathcal{C}$ – Каратеодори 30
2.2 Звездообразные и выпуклые функции 34
2.3 Вариационный метод 38
2.4 Экстремальные задачи на классе $\mathcal{C}$ 41
2.5 Области значений функционалов и геометрические свойства конформных отображений 47
2.6 Геометрия выпуклых отображений 61
2.7 Решение задачи И.Е. Базилевича и Г.В. Корицкого 63

Глава 3. Параметрический метод Лёвнера

3.1 Полугруппы конформных отображений 66
3.2 Параметрическое представление конформных отображений 68
3.3 Уравнение Лёвнера и экстремальные задачи 72

Глава 4. Решение общей проблемы искажения и вращения

4.1 Параметрическое представление функционалов 75
4.2 Теоремы редукции 79
4.3 Исследование сопряженной задачи 82
4.4 Основное неравенство 87
4.5 Геометрия множества значений системы функционалов . . 90
4.6 Экстремальные функции 94
4.7 Взаимный рост аргументов однолистной функции и её производной 99

Глава 5. Конформное отображение полигональных областей

5.1 Постановка задачи 108
5.2 Уравнение Лёвнера для полуплоскости 111
5.3 Уравнения для аксессорных параметров 114
5.4 Существование и единственность аналитического решения 117
5.5 Случай ступенчатой области 122

Часть II. К теории квазиконформных отображений

Введение и обзор результатов 127

Глава 6. Локальные свойства

6.1 Квазиконформные отображения на плоскости 139
6.2 Об асимптотической однородности 148
6.3 Об асимптотической симметрии 159
6.4 Асимптотически конформные кривые 166
6.5 К проблеме Райха–Вальчака 170

Глава 7. Вариация квазиконформных отображений

7.1 Вариационные формулы 172
7.2 Необходимые условия экстремума 173
7.3 Произведение конформных радиусов неналегающих областей 175

7.4 Обобщенная система Коши–Римана 180

Глава 8. Теорема площадей для однолистных функций с квазиконформным продолжением

8.1 Неравенство площадей 186
8.2 Приложения 189

Глава 9. Вращение при квазиконформных отображениях

9.1 Задача вращения и класс BMO 193
9.2 Точное решение задачи вращения Джона 194
9.3 Интегральные оценки углового смещения 196
9.4 Конформная дифференцируемость 204
9.5 Усиление классической теоремы Тейхмюллера–Виттиха–Белинского 205

Глава 10. Вариация однолистных аналитических функций

10.1 Квазиконформные деформации 207
10.2 Теорема Шиффера–Голузина 208

Часть III. Топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений

Введение и обзор результатов 210

Глава 11. Теоремы сходимости

11.1 О полунепрерывности деформации гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$ 235
11.2 Об области значений предельной комплексной характеристики 248
11.3 Критерии сходимости 261

Глава 12. О классах отображений с ограничениями теоретико-множественного типа

12.1 Теорема замыкания 276
12.2 Критерий компактности 283
12.3 К теории вариационного метода 285

Глава 13. О классах отображений с ограничениями интегрального типа

13.1 Теорема замыкания 294
13.2 Критерий компактности 305
13.3 К теории вариационного метода 310

Глава 14. О поведении квазиконформных отображений в точке

14.1 Критерии конформности по Белинскому 317
14.2 К проблеме Райха–Вальчака 323
14.3 О дальнейших следствиях и приложениях 328

Приложение А.
Об инвариантно-выпуклых множествах 334

Приложение Б.
О семействах множеств, измеримых по параметру 343

Приложение В.
О пространствах со сходимостями. 366

Приложение Г.
О голоморфных операторах. 378

Список литературы 390

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ:
«ЗАДАЧІ І МЕТОДИ:
МАТЕМАТИКА, МЕХАНІКА, КІБЕРНЕТИКА»

Том 5

Гутлянський Володимир Якович,
Рязанов Володимир Ілліч

ГЕОМЕТРИЧНА ТА ТОПОЛОГИЧНА ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ І ВІДОБРАЖЕНЬ

(Російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2011

Комп'ютерна верстка О.П. Ткаченко

Підп. до друку 08.10.2011. Формат 70x100/16. Папір офс.№ 1.
Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 34,51. Обл.-вид. арк. 25,12. Тираж 300~прим.
Зам. №
НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

Видруковано в типографії ТОВ "Цифрова типографія"
м. Донецьк, вул. Челюскінців, 291а
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001