УДК 517.95

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

При изучении довольно широкого класса задач со свободной границей для параболических и эллиптических уравнений (задача Стефана, задача кристаллизации при наличии примеси, задачи фильтрации в пористой среде) доказательство разрешимости в малом по времени проводится по следующей схеме (см. [1, 2]). С помощью того или иного преобразования задача редуцируется к исследованию нелинейного функционального уравнения, в котором искомые функции определены на фиксированных областях. Затем это уравнение линеаризуется, изучаются условия разрешимости линейной задачи и устанавливаются оценки для ее решения, которые затем используются для доказательства применимости к нелинейному уравнению того или иного принципа существования неподвижной точки.

В работе изучается линейная задача, возникающая при исследовании математической модели фильтрации в пористой среде двух несмешивающихся компонент при наличии свободной (неизвестной) границы, разделяющей эти компоненты. При этом искомое распределение давления в одной из компонент описывается эллиптическим уравнением, в другой—параболическим. Изучение задачи сопряжения для разнотипных уравнений вносит трудности, связанные с выбором функциональных пространств и необходимостью в некоторых дополнительных предельных переходах, и имеет самостоятельный интерес. Предлагаемые методы могут быть использованы и при изучении других задач со свободной границей, описываемых системой уравнений в частных производных второго порядка эллиптического и параболического типов.

Постановка задачи. Пусть Ω — заданная область в R^n, граница которой состоит из двух связных компонент Γ^+ и Γ^-, причем Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$. Пусть $\Gamma \subset \Omega$ — поверхность диффеоморфная $\Gamma^\pm$ и разделяющая Ω на две связные подобласти $\Omega^\pm$, $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \Gamma^\pm$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$. Обозначим $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ — некоторые координаты на Γ, $\vec{n}(\omega)$ — нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+.

В работе используются пространства функций $H^{e,\, e/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\underset{0}{H}{}^{e,\, e/2}(\bar{\Omega}_T)$ с нормой $|u|_{\Omega_T}^{(e)}$, введенные в [4, с. 16, 349]. Определим полунорму [3]

$$[u]^{(\gamma,\beta)} = \sup_{\substack{(x,t),\\ (y,\tau)\in\Omega_T}} \frac{|u(x, t) - u(y, t) - u(x, \tau) + u(y, \tau)|}{|x-y|^\gamma |t-\tau|^\beta}, \quad (\gamma, \beta) \in (0, 1),$$

и введем банаховы пространства функций $\Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$, $\Pi^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$, $E^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$ и $P^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$, получающиеся замыканием бесконечно дифференцируемых функций соответственно в нормах

$$|u|_{\Pi^{1+\alpha}} = |u|^{(1+\alpha)} + [u]^{\left(\alpha,\, \frac{1+\alpha}{2}\right)} + [u_x]^{\left(\alpha,\, \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$|u|_{\Pi^{2+\alpha}} = |u|^{(2+\alpha)} + [u_x]^{\left(\alpha,\, \frac{1+\alpha}{2}\right)} + [u_{xx}]^{\left(\alpha,\, \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$|u|_{E^{2+\alpha}} = |u|^{(1+\alpha)} + |u_x|^{(1+\alpha)} + [u_x]^{\left(\alpha,\, \frac{1+\alpha}{2}\right)} + [u_{xx}]^{\left(\alpha,\, \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$|u|_{P^{2+\alpha}} = |u|_{\Pi^{2+\alpha}} + |u_t|_{\Pi^{1+\alpha}}.$$

Аналогично определяются пространства функций на поверхностях $\Gamma_T^{\pm}$, Γ_T и пространства $\underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}$, $\underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}$, $\underset{0}{E}^{2+\alpha}$, $\underset{0}{P}^{2+\alpha}$. Пусть $M^{\pm}(x, t) \equiv M^{\pm} \equiv -$

$$-a^{\pm}(x, t)\Delta + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\pm}(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c^{\pm}(x, t), \quad L^{+}(x, t) \equiv L^{+} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + M^{+},$$

$$L^{-}(x, t) \equiv L^{-} \equiv M^{-}, \; L_{\varepsilon}^{-}(x, t) \equiv L_{\varepsilon}^{-} \equiv \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + M^{-}.$$

Требуется найти функции $u^{\pm}(x, t)$ и $\rho(\omega, t)$ по условиям

$$L^{\pm}u^{\pm}(x, t) = \underset{0}{\mathcal{F}}^{\pm}(x, t), \;\; (x, t) \in \Omega_T^{\pm};$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + k^{\pm}(\omega, t)\frac{\partial u^{\pm}}{\partial n} + \sum_{i=1}^{n-1} e_i^{\pm}(\omega, t)\rho_{\omega_i} = \mathcal{F}_1^{\pm}(\omega, t); \tag{1}$$

$$u^{+} - u^{-} + d(\omega, t)\rho(\omega, t) = \mathcal{F}_2(\omega, t), \;\; (x, t) \in \Gamma_T;$$

$$u^{\pm} = \mathcal{F}_3^{\pm}(x, t), \;\; (x, t) \in \Gamma_T^{\pm}; \;\; u^{+}(x, 0) = u_0^{+}(x), \;\; \rho(\omega, 0) = \rho_0(\omega).$$

Пусть данные задачи (1) удовлетворяют следующим условиям: Γ, $\Gamma^{\pm}$ — принадлежат классу $H^{4+\alpha}$, $u_0(x) \in H^{4+\alpha}(\bar{\Omega}^{+})$,

$$\rho_0(\omega) \in H^{4+\alpha}(\Gamma); \; a^{\pm}; \; a_i^{\pm}; \; c^{\pm} \in \Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{\pm}); \; a^{\pm} > 0, \; c^{-} \geqslant 0;$$

$$e_i^{\pm}(\omega, t); \; K^{\pm}(\omega, t) \in \Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T); \; K^{\pm} > 0; \; d(\omega, t) \in P^{2+\alpha}(\Gamma_T);$$

$$d > 0; \; \underset{0}{\mathcal{F}}^{\pm}(x, t) = \sum_{k,e}\sum_{i} b_{k,e}^{\pm} f_{k,i}^{\pm}(x, t)\frac{\partial f_{e,i}^{\pm}}{\partial x_i}; \; b_{ke}^{\pm} \in \{0, 1\}, \; k, l = \overline{1, N};$$

$$f_{k,i}^{\pm} \in \Pi^{1+\alpha}; \; \mathcal{F}_1^{\pm} \in \Pi^{1+\alpha}; \; \mathcal{F}_2 \in P^{2+\alpha}; \; \mathcal{F}_3^{+} \in \Pi^{2+\alpha}; \; \mathcal{F}_3^{-} \in E^{2+\alpha}.$$

Предполагаются также выполненными условия согласования при $t = 0$, $x \in \Gamma$, $\Gamma^{\pm}$ до первого порядка. Тогда справедлива

Теорема. Задача (1) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$|u^{+}|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{+})} + |u^{-}|_{E^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{-})} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \leqslant c\,(\mathfrak{M}^{+}(T) + \mathfrak{M}^{-}(T) + $$
$$+ |u_0|_{\Omega^{+}}^{(4+\alpha)} + |\rho_0|_{\Gamma}^{(4+\alpha)}), \tag{2}$$

где

$$\mathfrak{M}^{+}(T) \equiv \sum_{k}\sum_{i} f|_{k,i}^{+}|^2_{\Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{+})} + |\mathcal{F}_1^{+}|_{\Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T)} + |\mathcal{F}_2|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} +$$
$$+ |\mathcal{F}_3^{+}|_{\Pi^{2+\alpha}(\Gamma_T^{+})},$$

а $\mathfrak{M}^{-}(T)$ имеет такой же вид с заменой последнего слагаемого на $\mathcal{F}_3^{-}|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T^{-})}$. Константа c в (2) зависит от коэффициентов соотношений (1) и поверхностей Γ, $\Gamma^{\pm}$.

Модельная задача. Нам понадобятся оценки решения следующей модельной задачи:

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial t} - a^{+}\nabla^2 u^{+} = f_1^{+}\frac{\partial f_2^{+}}{\partial z_i}, \; (z, t) \in R_{n,T}^{+} \equiv \{(z, t) \in R^n \times (0, T) : z_n > 0\};$$

$$\varepsilon\frac{\partial u^-}{\partial t}-a^-\nabla^2 u^-=f_1^-\frac{\partial f_2^-}{\partial z_i},\ (z,t)\in R^-_{n,T}\equiv\{(z,t)\in R^n\times(0,T):z_n<0\};$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+K^\pm\frac{\partial u^\pm}{\partial z_n}+\sum_{i=1}^{n-1}l_i^\pm\rho_{z_i}=\mathcal{F}_1^\pm(z,t),\tag{3}$$

$$u^+-u^-+d\rho=\mathcal{F}_2(z,t),\ (z,t)\in R_{n-1,T}\equiv\{(z,t)\in R^n\times[0,T]:z_n=0\};$$

$$u^+\in\overset{0}{\Pi}{}^{2+\alpha}(R^+_{n,T}),\ u^-\in\overset{0}{E}{}^{2+\alpha}(R^-_{n,T}),\ \rho\in\overset{0}{P}{}^{2+\alpha}(R_{n-1,T}),$$

где $l_i^\pm\in R$, $k^\pm$, $a^\pm$, d — заданные положительные постоянные, $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, $\varepsilon=\mathrm{const}$, и правые части соотношений (3) предполагаются достаточно гладкими финитными функциями.

Лемма 1. Задача (3) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$|u^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar R^+_{n,T})}+|u^-|_{E^{2+\alpha}(\bar R^-_{n,T})}+|\rho|_{P^{2+\alpha}(\bar R_{n-1,T})}\leqslant c\{|f_2^+|_{\Pi^{1+\alpha}}R[f_1^+]+$$

$$+|f_2^-|_{\Pi^{1+\alpha}}R[f_1^-]+|\mathcal{F}_1^-|_{\Pi^{1+\alpha}}+|\mathcal{F}_1^+|_{\Pi^{1+\alpha}}+|\mathcal{F}_2|_{P^{2+\alpha}}\},\tag{4}$$

где c зависит только от $a^\pm$, $k^\pm$, $l_i^\pm$, d, T, размеров носителей правых частей в (3) и не зависит от ε; $R[f]\equiv\langle f\rangle_t^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\max|\nabla f|+\max|f|$.

Доказательство. Оценки объемного потенциала

$$v_\varepsilon(z,t)=\int_0^t\int_{R^n}\frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}}e^{-\frac{(z-\zeta)^2\varepsilon}{4(t-\tau)}}f_1(\zeta,\tau)\frac{\partial f_2}{\partial\zeta_i}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau$$

показывают, что $|v_\varepsilon|_{E^{2+\alpha}}\leqslant cR[f_1]|f_2|_{\Pi^{1+\alpha}}$, где c не зависит от ε. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $f_i^\pm=0$, $i=1,2$, $\mathcal{F}_2=0$. Используя преобразования Фурье и Лапласа, для неизвестной функции ρ можно получить соотношение

$$\tilde\rho\{1+[i(\lambda,c_1)+c_2\sqrt{p+a^+\lambda^2}]p(\varepsilon a^+-a^-)[p+c_3\sqrt{p+a^+\lambda^2}+i(\lambda,c_4)]^{-1}\times$$

$$\times[c_5\sqrt{p+a^+\lambda^2}+c_6\sqrt{\varepsilon p+a^-\lambda^2}]^{-1}[\sqrt{a^+}\sqrt{\varepsilon p+a^-\lambda^2}+\sqrt{a^-}\times$$

$$\times\sqrt{p+a^+\lambda^2}]^{-1}\}=[\tilde{\mathcal{F}}_1^+c_6\sqrt{\varepsilon p+a^-\lambda^2}+\tilde{\mathcal{F}}_1^-c_5\sqrt{p+a^+\lambda^2}][c_5\sqrt{p+a^+\lambda^2}+$$

$$+c_6\sqrt{\varepsilon p+a^-\lambda^2}]^{-1}[p+c_3\sqrt{p+a^+\lambda^2}+i(\lambda,c_4)]^{-1},$$

где $c_1,c_4\in R^{n-1}$, c_2, c_3, c_5, c_6, — некоторые положительные постоянные; $\tilde\rho$, $\tilde{\mathcal{F}}_1^\pm$ — преобразования соответствующих функций. Отсюда следует, что функция $\rho(z,t)$, $(z,t)\in R_{n-1,T}$, удовлетворяет уравнению $(I+K)\rho=\mathcal{F}$ с вполне непрерывным оператором K в пространстве $\overset{0}{P}{}^{2+\alpha}(R_{n-1,T})$. Наиболее существенным при доказательстве полной непрерывности K являются свойства оператора, определяемого символом $[p+c_3\sqrt{p+a^+\lambda^2}+i(\lambda,c_4)]^{-1}$, изученного ранее в работах [1, 2]. Утверждение леммы, следовательно, вытекает из теории Фредгольма.

Априорные оценки решения задачи (1). Рассмотрим задачу $(1)_\varepsilon$, получающуюся из (1) заменой оператора L^- на L_ε^-. Пусть задача $(1)_\varepsilon$ имеет решение, обладающее гладкостью, указанной в оценке (2). Будем считать, не ограничивая общности, что $u_0(x)=0$, $\rho_0(\omega)=0$, и правые части соотношений (1) обращаются в нуль при $t=0$. Общий случай легко сводится к указанному заменой неизвестных функций $u^\pm\to v^\pm=u^\pm-w^\pm(x,t)$;

$\rho \to \sigma = \rho - s(\omega, t)$, где $w^+ - w^- = 0$; $x \in \Gamma$; $w^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x)$; $\dfrac{\partial w^+}{\partial t}(x, 0) = \mathcal{F}_0^\pm(x, 0) + M^+ u_0^+(x)$; $s(\omega, 0) = \rho_0(\omega)$; $\dfrac{\partial s}{\partial t}(\omega, 0) = -k^\pm(\omega, 0)\dfrac{\partial u_0^\pm}{\partial \vec{n}} - \sum\limits_{i=1}^{n-1} l_i^\pm \times (\omega, 0)\rho_{0\omega_i} + \mathcal{F}_1^\pm(\omega, 0)$, а функция $u_0^-(x)$ есть, по определению, решение задачи $-M^-(x, 0)u_0^-(x) = \mathcal{F}_0^-(x, 0)$, $u_0^-(x)|_{\Gamma^-} = \mathcal{F}_3^-(x, 0)$, $u_0^-(x)|_\Gamma = u_0^+(x)$. Способ построения функций $w^\pm$ и s указан в [4, гл. 4].

Пусть $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_N(x)$ — разбиение единицы на $\bar{\Omega}$, состоящее из бесконечно дифференцируемых неотрицательных финитных функций с носителями в шарах $B_r(x_k)$ радиуса r (величина которого будет уточнена ниже) с центром в точках x_k.

Предполагаем, что либо $B_r(x_k) \cap (\Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-) = \varnothing$, либо $x_k \in \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Следуя [5], функции $u^\pm$ и ρ представим в виде $u^\pm(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k^\pm(x, t)$, $\rho(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \rho_k(x, t)$, $u_k^\pm = u^\pm \eta_k$, $\rho_k = \rho\eta_k$. Рассмотрим такое k, что $x_k \in \Gamma$. Умножим соотношения задачи $(1)_\varepsilon$ на η_k и представим их в виде:

$$\frac{\partial u_k^\pm}{\partial t} - a^+(x_k, 0)\nabla^2 u_k^+ = \tilde{\mathcal{F}}_0^+(x, t),\ (x, t) \in \Omega_{k,T}^+ = (B_r \cap \Omega^+) \times (0, T);$$

$$\varepsilon\frac{\partial u_k^-}{\partial t} - a^-(x_k, 0)\nabla^2 u_k^- = \tilde{\mathcal{F}}_0^-(x, t),\ (x, t) \in \Omega_{k,T}^- = (B_r \cap \Omega^-) \times (0, T);$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + k^\pm(x_k, 0)\frac{\partial u_k^\pm}{\partial n} + \sum_i l_i^\pm(x_k, 0)\rho_{k\omega_i} = \tilde{\mathcal{F}}_1^\pm(\omega, t), \tag{5}$$

$$u_k^+ - u_k^- + d(x_k, 0)\rho_k = \tilde{\mathcal{F}}_2(\omega, t),\ x \in \Gamma_{k,T} = (\Gamma \cap B_2) \times (0, T);$$

$$u_k^+ \in \underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+),\ u_k^- \in \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^-),\ \rho_k \in \underset{0}{P}^{2+\alpha}(\Gamma_T),$$

где, например, $\tilde{\mathcal{F}}_0^\pm(x, t) = \eta_k \mathcal{F}_0^\pm - 2a^\pm(x, t)\nabla u^\pm \nabla \eta_k - a^\pm u^\pm \nabla^2 \eta_k - \eta_k \times \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^\pm}{\partial x_i} a_i^\pm - c^\pm u_k^\pm + [a^\pm(x, t) - a^\pm(x_k, 0)]\nabla^2 u_k^\pm$.

Вводя теперь координаты (z, t), в которых распрямляется $\Gamma \cap B_r(x_k)$, для функций $u_k^\pm(z, t)$, $\rho_k(z, t)$ получаем задачу вида (3). Пользуясь оценками

$$\langle f \rangle_{t, B_r}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \leqslant cr^\alpha [f]_{x,t}^{\left(\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)},\ f \in \Pi^{1+\alpha}(B_r \times (0, T)),$$

$$R\,[a^\pm(x(z), t) - a^\pm(x_k, 0)] \leqslant c\,(r^\alpha + T^{\alpha/2})\,|a^\pm|_{\Pi^{1+\alpha}},$$

$$R\left[a^\pm(x(z), t)\,\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x(z))\right] \leqslant c\,(r),$$

с помощью неравенства (4) имеем

$$|u_k^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{k,T}^+)} + |u_k^-|_{E^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{k,T}^-)} + |\rho_k|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_{k,T})} \leqslant$$

$$\leqslant c\,(r^\alpha + T^{\alpha/2})\,[\,|u_k^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{k,T}^+)} + |u_k^-|_{E^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{k,T}^-)} + |\rho_k|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_{k,T})} +$$

$$+ c\,(r)\,[\,|u^+|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+)} + |u^-|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^-)} + |\rho|_{\Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T)}] +$$

$$+ c\,(r)\,(\mathfrak{M}^+(T) + \mathfrak{M}^-(T)).$$

Выбирая сначала r достаточно малым, а затем полагая T настолько малым, чтобы $c(r^{\alpha}+T^{\frac{\alpha}{2}})\leqslant\frac{1}{2}$, получаем

$$|u_k^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar\Omega_{k,T}^+)}+|u_k^-|_{E^{2+\alpha}(\bar\Omega_{k,T}^-)}+|\rho_k|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_{k,T})}\leqslant c\,[\,|u^+|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T^+)}+$$
$$+|u^-|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T^-)}+|\rho|_{\Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T)}]+c\,(\mathfrak{M}^+(T)+\mathfrak{M}^-(T)). \tag{6}$$

Совершенно аналогично получается оценка для $u_k^{\pm}$ и ρ_k при $x_k\in\Gamma^{\pm}$ или $x_k\in\Omega^{\pm}$. Суммируя (6) по всем k, имеем

$$|u^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar\Omega_T^+)}+|u^-|_{E^{2+\alpha}(\bar\Omega_T^-)}+|\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)}\leqslant c\,[\,|u^+|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T^+)}+$$
$$+|u^-|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T^-)}+|\rho|_{\Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T)}]+c\,(\mathfrak{M}^+(T)+\mathfrak{M}^-(T)). \tag{7}$$

Пользуясь теперь неравенствами

$$|u^+|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T^+)}\leqslant cT^{1/2}\,|u^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar\Omega_T^+)},$$
$$|\rho|_{\Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T)}\leqslant cT^{1/2}\,|\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)},$$
$$|u^-|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T^-)}\leqslant cT^{1/2}\,|u^-|_{E^{2+\alpha}(\bar\Omega_T^-)}+c\,\langle u^-\rangle_{t,\bar\Omega_T^-}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \tag{8}$$

примененными к (7), при достаточно малых T получаем

$$|u^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar\Omega_T^+)}+|u^-|_{E^{2+\alpha}(\bar\Omega_T^-)}+|\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)}\leqslant$$
$$\leqslant c\,(\mathfrak{M}^+(T)+\mathfrak{M}^-(T))+c\,\langle u^-\rangle_{t,\bar\Omega_T^-}^{(\frac{1+\alpha}{2})}. \tag{9}$$

Для оценки последнего слагаемого в (9) будем считать все функции продолженными нулем в область $t<0$ и введем обозначения

$$f_{\Delta t}(x,t)=\frac{f(x,t)-f(x,t-\Delta t)}{(\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}}.$$

Легко понять, что функция $u_{\Delta t}^-(x,t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\varepsilon\frac{\partial u_{\Delta t}^-}{\partial t}-a^-\nabla^2u_{\Delta t}^-+\sum_{i=1}^n a_i^-\frac{\partial u_{\Delta t}^-}{\partial x_i}+c^-u_{\Delta t}^-=a_{\Delta t}^-\nabla^2u^-(x,t-\Delta t)-$$
$$-\sum_{i=1}^n a_{i,\Delta t}^-\frac{\partial u^-}{\partial x_i}(x,t-\Delta t)-c_{\Delta t}^-u^-(x,t-\Delta t)+\sum_{k,l}\sum_{i=1}^n b_{kl}f_{ki,\Delta t}^-\frac{\partial f_{li}^-}{\partial x_i}+$$
$$+\sum_{k,l}\sum_{i=1}^n b_{kl}f_{ki}^-(x,t-\Delta t)\frac{\partial}{\partial x_i}f_{li,\Delta t}^-,\quad (x,t)\in\Omega_T^-; \tag{10}$$

$$u_{\Delta t}^-=u_{\Delta t}^++\rho_{\Delta t}d+\rho(\omega,t-\Delta t)\,d_{\Delta t},\quad (x,t)\in\Gamma_T;$$
$$u_{\Delta t}^-=F_{3,\Delta t}^-,\quad (x,t)\in\Gamma_T^-;\qquad u_{\Delta t}^-=0,\quad t=0.$$

Ввиду ограниченности всех функций, входящих в правые части (10), производя замену $t=\varepsilon\tau$, при которой максимумы всех функций остаются неизменными, и используя теорему 7.1 в [4, гл. 3], получаем оценку

$$\max_{\bar\Omega_T^-}|u_{\Delta t}^-|\leqslant c\,(\mathfrak{M}^-(T)+\max_{\bar\Omega_T^-}|\nabla^2u^-|+\max_{\bar\Omega_T^-}|\nabla u^-|+\max_{\bar\Omega_T^-}|u^-|+\max_{\Gamma_T}|u_{\Delta t}^+|+$$

$$+\max_{\Gamma_T}|\rho_{\Delta t}|) \leqslant c\,(\mathfrak{M}^-(T) + T^{\frac{\alpha}{2}}\,|u^-|_{E^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^-)} + \langle u^+\rangle_{t,\Gamma_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle\rho\rangle_{t,\Gamma_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} +$$

$$+\max|\rho|) \leqslant c\,[\mathfrak{M}^-(T) + T^{\frac{\alpha}{2}}(|u^-|_{E^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^-)} + |u^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+)} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)})], \tag{11}$$

где мы снова воспользовались соотношениями (8). Из (11) и (9) легко следует

Лемма 2. Пусть задача $(1)_\varepsilon$ (с L_ε^- вместо L^- в (1) имеет решение, для которого определена левая часть (2). Тогда оценка (2) справедлива с константой c, не зависящей от ε.

Из доказанной леммы 2 вытекает утверждение теоремы. Рассмотрим задачу $(1)_\varepsilon$, в которой коэффициенты и правые части принадлежат классу $H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}$. Тогда разрешимость задачи (1), $\varepsilon > 0$, в этих же классах доказывается аналогично [4], как это сделано, например в [2, 3], и для первых производных решения справедлива оценка, аналогичная (2). Отсюда следует, что в задаче $(1)_\varepsilon$ можно совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и получить решение (1), для которого справедлива оценка (2). Для произвольных данных задачи (1), удовлетворяющих условиям теоремы, доказательство получается приближением коэффициентов и правых частей функциями из $H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}$ и предельным переходом в силу оценки (2).

1. *Базалий Б. В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 11.— С. 3—7.
2. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб.— 1987.— 132, № 1.— С. 3—19.
3. *Солонников В. А.* Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье—Стокса // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— 59.— С. 178—254.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1964.— 538 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР,
Донецк

Получено 23.09.87