

УДК 539.374

©2014. Н. И. Кодак, В. Н. Ложкин

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ

Методом последовательных конформных отображений изучено предельное состояние неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами. Плоскость сжимается равномерными усилиями вдоль и поперек линии центров вырезов. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. На неизвестной границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными. Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей.

Ключевые слова: предельное равновесие, начальный пластический охват, упругая и пластическая области, неизвестная граница раздела, конформное отображение.

1. Введение. Упругопластическое равновесие изотропной среды с круговыми вырезами для плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния при различных условиях пластичности можно описать с помощью аналитических функций. Две из них характеризуют напряженное состояние упругой части плоскости, остальные конформно отображают внешности единичных окружностей на внешности неупругих областей, охватывающих контуры вырезов и несоприкасающихся друг с другом. Напряженные состояния неупругих областей не зависят от внешнего нагружения среды. Последнее определяет только физическое состояние и внешние границы этих областей [1].

Анализ исследований, в которых коэффициенты разложений аналитических функций определялись методом малого параметра из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на неизвестных границах их раздела, сделан в монографии [2].

В данной работе методом последовательных конформных отображений [3–5] изучено возникновение и развитие неупругих областей в изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами от начального неупругого охвата их контуров в случае предельного равновесия [2]. Исходное приближение конформного отображения построено методом малого параметра [1].

Из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на подлежащей определению границе их раздела методом коллокации находятся коэффициенты разложений аналитических функций, характеризующих напряженное состояние упругой части плоскости. Затем этим же методом уточняются коэффициенты отображений для построения следующего приближения к решению задачи.

2. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с двумя одинаковыми круговыми вырезами радиуса R . Их центры расположены на оси Ox_1 на расстояниях lR от центра системы координат Ox_1x_2 . Плоскость сжимается усилиями q_1 вдоль оси Ox_1 и q_2 – вдоль оси Ox_2 . При этом сплошная плоскость

находится в упругом состоянии.

Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. Расстояние между центрами вырезов и интенсивность q_1 и q_2 таковы, что в плоскости возле вырезов возникают пластические области. Они полностью охватывают контуры вырезов, не соприкасаются, и их внешние границы находятся на расстоянии $hR > 0$ друг от друга по оси Ox_1 .

Геометрическая и силовая симметрия равновесия плоскости позволяет исследовать возникновение и развитие пластической области около одного (правого) выреза.

Введем безразмерные координаты:

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta). \quad (1)$$

Напряжения в пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношениям предельного равновесия и условиям на контуре выреза [2, 6]:

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p/\partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p/\partial\theta &= 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p/\partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p/\partial\theta = 0; \\ (\sigma_\theta^p - \sigma_r^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 &= (2k)^2[\cos\chi - (2k)^{-1}(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p)\sin\chi]^2; \\ \sigma_r^p + \sigma_\theta^p &< 2\alpha_m k, \quad \alpha_m = \operatorname{ctg}\chi, \quad 0 \leq \chi < 5\pi/18; \\ |z - l| = r = 1 : \sigma_r^p &= \tau_{r\theta}^p = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь k – постоянная, имеющая размерность напряжений, χ – безразмерный параметр, характеризующий внутреннее трение материала плоскости.

Напряжения в упругой части плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [7]:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e/\partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_2 &= 0, \quad \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_1 + \partial\sigma_{22}^e/\partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) &= 0; \\ |z| \rightarrow \infty : \sigma_{11}^e &= -q_1; \quad \sigma_{22}^e = -q_2, \quad \tau_{12}^e = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными.

3. Аналитическое решение задачи. Для сжимаемой плоскости решение задачи (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= k\alpha_m(1 - r^{2\gamma}) \leq 0, \quad \sigma_\theta^p = k\alpha_m[1 - (1 + 2\gamma)r^{2\gamma}] < 0, \quad \tau_{r\theta}^p = 0; \\ \gamma &= (1 - \sin\chi)^{-1} \sin\chi \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для напряжений (4) условие $\sigma_r^p + \sigma_\theta^p < 2\alpha_m k$ выполняется всегда при рассматриваемом нагружении плоскости.

При $\chi \rightarrow 0$ получим решение для идеальной пластичности.

Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, являющимися решением задачи (3). С учетом геометрической и силовой симметрии задачи их можно представить так [1]:

$$\begin{aligned} \Phi(z), \quad \Psi(z) &= -\alpha/2, \quad \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\psi_n(z), \\ \psi_n(z) &= \zeta^{-(n+1)}(z - l) + (-1)^{n+1}\zeta_1^{-(n+1)}(z + l), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha = (2k)^{-1}(q_1 + q_2), \quad \beta = (2k)^{-1}(q_1 - q_2), \quad |\beta| < \cos \chi + \alpha \sin \chi. \quad (6)$$

Значения $\zeta(z-l)$ и $\zeta_1(z+l)$ находятся из равенств:

$$\begin{aligned} z-l &= r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \sum_{n=-1} c_{n+2}\zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\varphi); \\ z+l &= r_0\omega_1(\zeta_1), \quad \omega_1(\zeta_1) = -\omega(-\zeta_1) = \sum_{n=-1} (-1)^{n+1}c_{n+2}\zeta_1^{-n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функции $z-l = r_0\omega(\zeta)$ и $z+l = r_0\omega_1(\zeta_1)$ конформно отображают внешности единичных окружностей $|\zeta| = 1$ и $|\zeta_1| = 1$ соответственно на внешности правой и левой пластических областей.

В рассматриваемой задаче входящие в равенства (5), (7) коэффициенты a_n, b_n, r_0, c_n будут действительными.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e &= 2k[(\bar{z} - z)\Phi'_z(z) + \Psi(z)], \\ \sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e &= 2k[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

В окрестности правой пластической области функции (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta), \quad \Psi(\zeta) &= -\alpha/2, \quad \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n)\psi_n(\zeta), \\ \psi_n(\zeta) &= \zeta^{-(n+1)} + (-1)^{n+1}\zeta_1^{-(n+1)}(\zeta), \end{aligned} \quad (9)$$

где значения $\zeta_1(\zeta)$ находятся из равенства

$$\zeta_1(\zeta) = 2l/r_0 + \zeta + \sum_{n=0} c_{n+2}[\zeta^{-n} + (-1)^n\zeta_1^{-n}(\zeta)]. \quad (10)$$

Соотношения (8) переписутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\varphi}^e &= k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)], \\ \sigma_\rho^e + \sigma_\varphi^e &= 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Напряжения (4) на внешней границе правой пластической области $z-l = r_0\omega(\sigma)$ принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p - i\tau_{\rho\varphi}^p &= k\alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma} + \gamma r^{2\gamma}\Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \sigma_\rho^p + \sigma_\varphi^p &= 2k\alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma}], \quad r = r_0|\omega(\sigma)|. \end{aligned} \quad (12)$$

В равенствах (11), (12) введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta[\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)]/\bar{\zeta}\omega'(\zeta), \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta\omega'(\zeta)/\bar{\zeta}\omega'(\zeta), \\ \Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}/\bar{\zeta}\omega'(\zeta)\omega(\zeta), \quad \sigma = \exp(i\varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты r_0 , c_n , a_n , b_n разложений (7), (9) находятся из условий непрерывности упругих (11) и пластических (12) напряжений:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\Phi'_\zeta(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\Psi(\sigma) = \\ = \alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma} + \gamma r^{2\gamma}\Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})],\end{aligned}\quad (14)$$

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} = \alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma}]. \quad (15)$$

4. Численное решение задачи. Решение рассматриваемой задачи строится методом последовательных конформных отображений [3–5]. Для фиксированного расстояния l и фиксированных значений параметров β и χ исходное отображение построено методом малого параметра [1]:

$$\begin{aligned}z - l = r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_2 + c_3\zeta^{-1} + c_4\zeta^{-2}; \\ r_0 = \{(1 + \gamma)^{-1}[1 + \alpha_m^{-1}(\alpha - 2\beta\delta^2)]\}^{1/2\gamma}; \quad \delta = r_p/2l, \\ r_p = [(1 + \gamma)^{-1}(1 + \alpha_m^{-1}\alpha)]^{1/2\gamma}; \\ c_2 = c_{23}\delta^3, \quad c_3 = c_{30} + c_{32}\delta^2, \quad c_4 = c_{43}\delta^3; \\ c_{30} = -(\alpha_m + \alpha)^{-1}\beta\gamma^{-1}, \quad c_{32} = (1 + \gamma)^{-1}[1 - (1 + \gamma)c_{30}]^2, \\ c_{23} = -2(1 + c_{30})c_{30}, \quad c_{43} = 2(1 - c_{30})c_{30} - 2c_{32}.\end{aligned}\quad (16)$$

Затем уточняется значение параметра α_n , при котором возможен начальный пластический охват контура правого выреза, когда внешняя граница неупругой области касается этого контура.

Строится упругое решение (9) для полученного отображения. Из преобразованного условия (14) методом коллокации находятся коэффициенты a_n и b_n :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1} \{a_n[2\operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\psi'_n(\sigma)] - b_n\Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\psi_n(\sigma)\} = f(\sigma, \bar{\sigma}); \\ f(\sigma, \bar{\sigma}) = \alpha + \alpha_m[1 - (1 + \gamma)r^{2\gamma}] + (\beta + \alpha_m\gamma r^{2\gamma})\Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}).\end{aligned}\quad (17)$$

Первое отображение (7) представим в виде

$$\begin{aligned}r_0\omega(\sigma) = \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta), \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{n=-1} t_{n+2}\zeta^{-n}, \\ t_n = r_0c_n, \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2}\zeta^{-n}.\end{aligned}\quad (18)$$

Тогда условие (15) перепишется так [3–5]:

$$\begin{aligned}2 \sum_{n=-1} h_{n+2}[\operatorname{Re} \omega_0(\sigma) \cos n\varphi - \operatorname{Im} \omega_0(\sigma) \sin n\varphi] = s(\varphi); \\ s(\varphi) = (\gamma\mu)^{-1}[|\omega_0(\sigma)|^{2(1-\gamma)}g(\varphi) - |\omega_0(\sigma)|^2]; \\ g(\varphi) = (1 + \gamma)^{-1}\{1 + \alpha_m^{-1}[\alpha - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma)]\},\end{aligned}\quad (19)$$

где μ – произвольная постоянная.

Из него методом коллокации найдем постоянные h_n . Новые коэффициенты r_0 и c_0 определяются равенствами:

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1}(t_n + h_n). \quad (20)$$

Выбор точек коллокации предложен в работах [3–5].

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с приемлемой точностью.

Затем параметр α увеличивается на заданную величину, параметр β остается неизменным, вычисляется коэффициент r_0 :

$$\begin{aligned} r_0 &= \{(1 + \gamma)^{-1}[1 + \alpha_m^{-1}(\alpha - 2\beta\delta^2)]\}^{1/2\gamma}, \quad \delta = r_p/2l, \\ r_p &= [(1 + \gamma)^{-1}(1 + \alpha_m^{-1}\alpha)]^{1/2\gamma}; \end{aligned} \quad (21)$$

постоянные c_n сохраняются от предыдущего шага.

Определяющим критерием решения рассматриваемой задачи является относительная погрешность удовлетворения условия непрерывности напряжений (11), (12) на границе их раздела

$$z - l = r_0\omega(\sigma) : \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \quad \sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p, \quad \tau_{\rho\varphi}^e = \tau_{\rho\varphi}^p. \quad (22)$$

Сходимость приближений обеспечивается выбором постоянной μ .

Таблица

m	1	1.75		2.0			3.0		
	β	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	β	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	β	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$
0		1.29	1.351		1.46	1.509		1.93	2.106
1		1.76	2.235		1.83	2.713		2.21	4.662
2	-0.05	2.25	4.737	-0.15	2.23	6.632	-0.35	2.60	17.138
3		3.03	20.542		3.09	40.193		3.23	294.800
0		1.54	1.755		1.72	2.079		1.75	2.892
1		1.87	2.527		1.94	3.287		1.99	5.458
2	0.30	2.37	5.145	0.35	2.39	7.214	0.35	2.38	17.947
3		3.17	20.976		3.17	40.812		3.19	295.684

С увеличением параметра α при фиксированных значениях β , χ последующая пластическая область полностью охватывает предыдущую.

Результаты вычислений сведены в таблице. В ней для указанных значений $L, \beta, \chi^{(m)} = m\pi/12$ ($m = \overline{0, 3}$) приведены:

- значения параметра $\alpha_n^{(m)}$, при котором происходит начальный пластический охват контура отверстия;
- значения параметра $\alpha_k^{(m)}$, до которого предложенный метод позволил довести вычисления.

Для параметра β взяты предельные значения, для которых была решена аналогичная задача в случае идеальной пластичности [3]. Результаты этих решений приведены в таблице и соответствуют значению $m = 0$.

Относительная погрешность удовлетворения условий непрерывности напряжений (22) доведена до 10^{-3} , а внешние границы пластических областей сближены до расстояния, меньшего одной десятой радиуса выреза $h < 0.1$.

Внешние усилия q_1, q_2 определяются равенствами:

$$q_1 = k(\alpha + \beta), \quad q_2 = k(\alpha - \beta).$$

5. Анализ численных результатов. С учетом внутреннего трения материала сжимаемой плоскости развитие областей неупругих напряжений от начального охвата контуров, ослабляющих ее круговых вырезом, до максимального сближения границ этих областей происходит при более интенсивных внешних воздействиях (на порядок или на два порядка выше в зависимости от расстояния между центрами вырезом) по сравнению с идеальной пластичностью (см. табл.).

При этом компактность этих областей неупругих напряжений позволила построить решение рассматриваемой задачи для меньших расстояний между центрами вырезом.

Для $l = 1.3$ установлено, что развитие пластических областей от начального охвата контуров вырезом до наибольшего их сближения возможно для таких значений параметров $\chi, \beta, \alpha_n, \alpha_k$:

$$\begin{aligned} \chi = \pi/4 : \quad & -0.1 \leq \beta \leq 2.5; \\ \beta^{(1)} = -0.1 : \quad & \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 3.95; \quad \beta^{(2)} = 2.5 : \quad \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 7.02. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $l = 1.5$ найдено:

$$\begin{aligned} \chi = \pi/12 : \quad & 0.02 \leq \beta \leq 0.528; \\ \beta^{(1)} = 0.02 : \quad & \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 1.69; \quad \beta^{(2)} = 0.529 : \quad \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 2.23; \\ \chi = \pi/6 : \quad & -0.235 \leq \beta; \quad \beta = -0.235 : \quad \alpha_n = \alpha_k = 2.778; \\ \chi = \pi/4 : \quad & -1.75 \leq \beta; \quad \beta = -1.75 : \quad \alpha_n = \alpha_k = 7.10. \end{aligned} \quad (24)$$

При $\chi = \pi/6, \pi/4$ правые границы изменения параметра β предложенным методом установить не удалось.

Области параметров α, β , в которых существует искомое решение поставленной задачи, изображены на рис. 1 для значений $l = 1.3, \chi = \pi/4$ и на рис. 2 – для значений $l = 1.5, \chi = \pi/12$. На них нижние кривые соответствуют параметру α_n , при котором возникает начальный пластический охват контуров, верхние – параметру α_k , при котором происходит наибольшее сближение пластических областей.

В координатах $o\xi_1\xi_2$ на рис. 3 изображены границы правых пластических областей для значений (23):

$$l = 1.3; \quad \chi = \pi/4; \quad \beta = \beta^{(m)}, \quad \alpha = \alpha_n^{(m)} = \alpha_k^{(m)}, \quad m = 1, 2,$$

а на рис. 4 – для значений (24):

$$l = 1.5; \quad \chi = \pi/12; \quad \beta = \beta^{(m)}, \quad \alpha = \alpha_n^{(m)} = \alpha_k^{(m)}, \quad m = 1, 2.$$

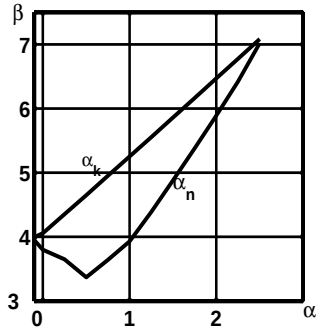


Рис. 1

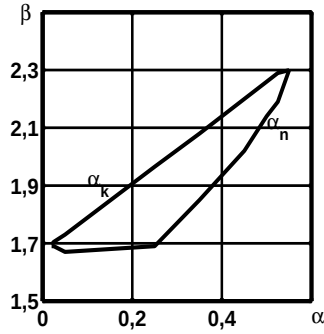


Рис. 2

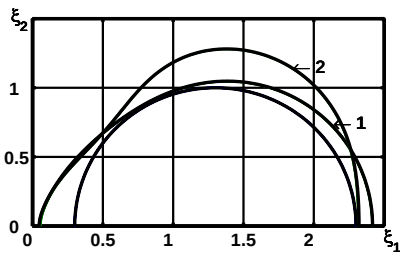


Рис. 3

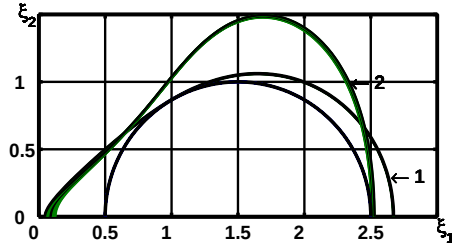


Рис. 4

Для этих значений границы начального охвата и наибольшие пластические границы совпадают.

Отметим, что для значений $l = 1.3, 1.5$ искомое решение рассматриваемой задачи в случае идеальной пластичности отсутствует [3].

Для $l = 1.75$ имеем:

$$\chi = \pi/12 : -0.20 \leq \beta; \beta^{(1)} = -0.20 : \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 1.98;$$

$$\chi = \pi/6 : -0.75 \leq \beta; \beta^{(2)} = -0.75 : \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 3.85;$$

$$\chi = \pi/4 : -4.51 \leq \beta; \beta^{(3)} = -4.51 : \alpha_n^{(3)} = \alpha_k^{(3)} = 15.01.$$

На рис. 5 изображены границы правых пластических областей для значений параметров $\beta^{(m)}, \alpha_n^{(m)}, \chi_m = m\pi/12, m = 1, 2, 3$.

Для $l = 2$ установлено:

$$\chi = \pi/12 : -0.40 \leq \beta; \beta^{(1)} = -0.40 : \alpha_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} = 2.42;$$

$$\chi = \pi/6 : -1.28 \leq \beta; \beta^{(2)} = -1.28 : \alpha_n^{(2)} = \alpha_k^{(2)} = 5.22.$$

На рис. 6 изображены границы правых пластических областей для значений параметров $\beta^{(m)}, \alpha_n^{(m)}, \chi = m\pi/12, m = 1, 2$.

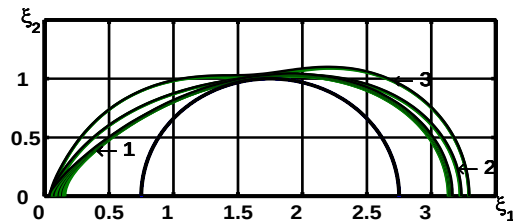


Рис. 5

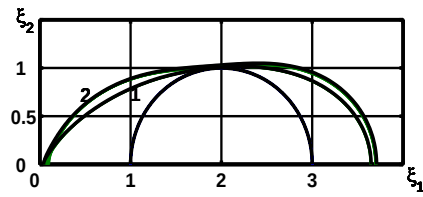


Рис. 6

6. Выводы. Для пластичности, учитывающей внутреннее трение, метод последовательных конформных отображений совместно с методом коллокации позволил исследовать возникновение и развитие неупругих областей в сжимаемой неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами для расстояний между их контурами от шести десятых радиуса и сблизить внешние границы охватывающих эти контуры неупругих областей до расстояний, меньших десятой радиуса выреза.

Относительная погрешность удовлетворения условиям непрерывности пластических и упругих напряжений указанным методом доведена до 10^{-3} . Кроме того, учет внутреннего трения позволил рассмотреть внешние усилия и расстояния между центрами ослабляющих плоскость вырезов, при которых соответствующая задача для идеальной пластичности не имеет искомого решения. В случаях, когда это решение существует, наличие внутреннего трения приводит к более компактному развитию неупругих областей при повышенной интенсивности сжимающих плоскость усилий.

Для различных расстояний между центрами и значений постоянной внутреннего трения установлены области изменений безразмерных параметров внешних сжимающих усилий, при которых искомое решение поставленной задачи можно построить методом последовательных конформных отображений.

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.
2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
3. Кодак Н.И., Ложкин В.Н. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами при двустороннем сжатии // Вісник Донецького національного ун-ту. Сер.А. – 2012. – № 1. – С.73–78.
4. Кодак Н.И., Ложкин В.Н. Изотропная плоскость с двумя круговыми вырезами в случае экспоненциальной пластичности // Вісник Донецького національного ун-ту. Сер.А. – 2013. – № 1. – С. 49–54.
5. Кодак Н.И., Ложкин В.Н. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя эллиптическими вырезами // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Том 24. – С. 147–156.
6. Новик Г.Я., Ржевская С.В. Физико-техническое обеспечение горного производства. – Москва: Наука, 1995. – 255 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва: Наука, 1966. – 707 с.

N. I. Kodak, V. N. Lozhkin

Limiting equilibrium of an isotropic plane with two circular cutouts.

By the method of successive conformal mapping, a limiting state of an infinite isotropic plane with two equal circular cutouts is studied. The plane is compressed by an uniform loads along and across the line of centers of the cutouts. Theirs contours are free from external force. Stresses on unknown interface between elastic and plastic domains are continuous. Conditions under which the initial plastic coverage of cutouts contours takes place and the maximal convergence of plastic domains is possible are determined.

Keywords: *limiting equilibrium, initial plastic enclusien, elastic and plastic domains, unknown border of separating, conformal mapping.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
lozhkin@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.04.14