УДК 517.95

Н. В. Крылов

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

В работе [1], которую автор закончил в декабре 1983 г., имеется гл. VIII, посвященная уравнениям Беллмана в области. Ее некоторые результаты казались, как теперь выяснилось справедливо, далекими от окончательных. Например, в § VIII.1, VIII.2 [1] доказана разрешимость и приведены многочисленные примеры уравнений Беллмана в шаре с постоянными старшими и нулевыми младшими коэффициентами. Для таких же уравнений даже в строго выпуклой области, отличной от шара (и, разумеется, от эллипсоида), разрешимость в замечании VIII.8.9 [1] получена только когда коэффициент при неизвестной функции обязательно отличен от нуля и, более того, является отрицательным и достаточно большим по абсолютной величине. В течение двух лет до начала 1986 г. автор прилагал значительные усилия, чтобы отказаться от этого условия. Все это время ошибочно казалось, что дело в какой-то арифметике, что недостает точности в уже имеющейся методике. Только весной 1986 г. с помощью вероятностных соображений удалось найти одну совершенно новую идею, которая позволила не только добиться поставленной цели для уравнений с постоянными коэффициентами, но и рассмотреть широкий класс уравнений Беллмана с переменными коэффициентами.

Соответствующая общая теорема опубликована в трудах Международного конгресса математиков, который состоялся в 1986 г. в г. Беркли. Надо сказать, что ее доказательство очень сильно использует вероятностные рассуждения. Это доказательство автор надеется опубликовать в журнале «Известия АН СССР». Только для частного случая постоянных старших коэффициентов и нулевых коэффициентов при первых производных неизвестной функции удалось дать доказательство в терминах теории дифференциальных уравнений. К сожалению, доказательство в частном случае не распространяется на общий случай и, хотя использует основную идею, как это часто бывает в теории дифференциальных уравнений, производит впечатление набора просто технических приемов, причем в духе описанных в гл. VIII [1]. Рассмотрение частного случая, которое, по-видимому, появится в журнале «Математический сборник», основано на слабых внутренних оценках (ср. ниже теорему 1), но основная идея «спрятана» не в их использовании, а в способе их доказательства.

В этой работе мы хотим сначала привести две теоремы, весьма близкие к результатам из доклада автора в Беркли, а затем обсудить их применение в нескольких частных случаях.

Пусть A — некоторое сепарабельное метрическое пространство, целые $d, d_1, d_0 \geqslant 1$ и при $\alpha \in A, p \in E_{d_0}, x \in E_d, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, d_1$ заданы действительные $\sigma^{ij}(\alpha, p, x)$, $b^i(\alpha, p, x)$, $c(\alpha, p, x)$, $f(\alpha, p, x)$, $g(x)$. Обозначим (σ^j, b — векторы-столбцы, σ — матрица размера $d \times d_1$)

$$\sigma^j = (\sigma^{ij}), \sigma = (\sigma^j), \quad a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^*, \quad b = (b^i),$$

$$L^0 u = L^0(\alpha, p, x)\, u(x) = a^{ij} u_{x^i x^j} + b^i u_{x^i}, \quad Lu = L^0 u + cu$$

Фиксируем некоторую область $\mathscr{D} \in E_d$, три действительные функции $\psi_1 \in C^4(E_d)$, $\psi_0 \in C^2(E_d)$, $\psi_2 \in C^2_{loc}(E_d)$ и постоянные $\delta \in (0, 1)$, $K \in (1, \infty)$. Положим

$$\mathscr{D}_1 = \{x \in E_d : \psi_1(x) > 0\}, \quad \Sigma_- = (\partial\mathscr{D}) \setminus (0\mathscr{D}_1), \quad \Sigma_+ = (\partial\mathscr{D}) \cap (\partial\mathscr{D}_1).$$

Будем считать, что при $p=0$ и всех $\alpha \in A$ а) $L\psi_0 \leqslant -\delta$, $\psi_0 \geqslant \delta$ в $\mathscr{D}$, б) $K\psi_1(x) \geqslant \operatorname{dist}(x, \Sigma_+)$ на $\mathscr{D}$, $L\psi_1 \leqslant -\delta$ на Σ_+, в) $L^0\psi_2 \leqslant K(\psi_2+1)$, $\psi_2 \geqslant 0$ в $\mathscr{D}$. Предположим также, что $|\psi_{1x}| \geqslant \delta$ на $\partial\mathscr{D}_1$ (естественно, если $\partial\mathscr{D}_1 \neq \varnothing$), и для любой точки $y \in \Sigma_-$

$$\lim_{\mathscr{D} \ni x \to y} \psi_2(x) = +\infty.$$

Кроме того, считается, что $\sigma^{ij}, b^i, c, f, g$ непрерывны по (α, p, x), по абсолютной величине не превосходит K, все (частные) производные ψ_0 (соответственно, g) до второго (соответственно, до четвертого) порядка и сама $\psi_0(g)$ по абсолютной величине не превосходит K в E_d, все обобщенные производные σ^{ij}, b^i, c по (p, x) до второго порядка включительно по абсолютной величине не превосходят K на $E_{d_0} \times E_d$ (п. в.) для любого $\alpha \in A$, первые обобщенные производные f по (p, x) по абсолютной величине не превосходят K (п. в.) на $E_{d_0} \times E_d$, функция $f + K(|x|^2 + |p|^2)$ выпукла вниз по (p, x) при всяком $\alpha \in A$.

Следующее предположение показывает, что параметры p играют вспомогательную роль. Пусть при $x \in \mathscr{D}$ и всех u_{ij}, u_i, u

$$F(u_{ij}, u_i, u, x) := \sup_{\alpha \in A} [a^{ij}(\alpha, 0, x) u_{ij} + b^i(\alpha, 0, x) u_i + c(\alpha, 0, x) u +$$
$$+ f(\alpha, 0, x)] = \sup_{\alpha, p} [a^{ij}(\alpha, p, x) u_{ij} + b^i(\alpha, p, x) u_i + c(\alpha, p, x) u + f(\alpha, p, x)]. \tag{1}$$

Нам понадобятся еще несколько объектов. Пусть в $\overline{\mathscr{D}}$ определены неотрицательные симметричные матрицы B_1, B_0 размера $d \times d$, а на $A \times \overline{\mathscr{D}}$ — матрицы P_1, P_0 размера $d_0 \times d$ и вектор $r_0(\alpha, x) \in E_d$ борелевские по своим аргументам. При $\xi \in E_d$ обозначим

$$u_{(\xi)}(\alpha, x) = (\xi, u_x(\alpha, 0, x)), \quad \partial_k(\xi) u(\alpha, x) = u_{(\xi)}(\alpha, x) +$$
$$+ (P_k(\alpha, x)\xi, u_p(\alpha, 0, x)), \quad k = 0, 1,$$

где u_x, u_p — градиенты $u = u(\alpha, p, x)$ по x и p соответственно.

Будем считать, что B_k^{ij} дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathscr{D}$, они, все их производные до второго порядка включительно, а также P_k^{ij}, r_0^i по абсолютной величине не превосходят K в $\mathscr{D}$ и на $A \times \mathscr{D}$ соответственно. Пусть также $|B_1^{ij}(x) - B_1^{ij}(y)| \leqslant K|x-y|$ при всех $x, y \in \overline{\mathscr{D}}, i, j$.

Следующее предположение выполнено, например, если $c \leqslant -\delta$, B_0 — единичная матрица, σ, b не зависят от x, $P_0 = 0$, $r_0 = 0$. Пусть при всех $x \in \mathscr{D}, \alpha \in A, p = 0, \xi \in E_d$

$$L(B_0\xi, \xi) + 2(B_0\xi, \partial_0(\xi) b + 2(r_0, \xi) b) + 2(B_{0(\sigma^j)}\xi, \partial_0(\xi)\sigma^j +$$
$$+ (r_0, \xi)\sigma^j) + (B_0(\partial_0(\xi)\sigma^j + (r_0, \xi)\sigma^j), \partial_0(\xi)\sigma^j + (r_0, \xi)\sigma^j) \leqslant$$
$$\leqslant -\delta|\xi|^2 + K\sum_j (B_0\xi, \sigma^j)^2, \quad (B_0\xi, \xi) \geqslant \delta|\xi|^2.$$

При высказанных предположениях справедлива

Теорема 1. Пусть $u \in C^2(\overline{\mathscr{D}} \setminus \Sigma_-)$, $|u|, |u_x| \leqslant K$,

$$F(u_{x^i x^j}, u_{x^i}, u, x) = 0 \tag{2}$$

в $\mathscr{D}$, $\varepsilon > 0, \gamma > 0$. Тогда существует постоянная $N = N(\varepsilon, \gamma, K, \delta, d, d_0, d_1)$ такая, что при всех $x \in \{\psi_1 > \varepsilon\} \cap D, |\xi| = 1$

$$u_{(\xi)(\xi)}(x) \leqslant \gamma \sup (u_{(n)(n)}(y))_+ + N[1 + \sup (u_{(\eta)(\tau)}(y))_+],$$

где верхние грани берутся по $y \in \Sigma_+$, всем единичным η и единичным $\tau \perp \psi_{1x}(y)$, n — вектор единичной нормали.

Для формулировки теоремы существования нам понадобится еще одно предположение. Пусть при $x \in \Sigma_+, \xi \perp \psi_{1x}(x), |\xi| = 1, \alpha \in A, p = 0$

$$2L\psi_1 + (B_1\sigma^j, \sigma^j) \leqslant -\delta + K(a\psi_{1x}, \psi_{1x}), \tag{3}$$

$$(B_1\xi, \xi) L\psi_1 + \sum_j [\partial_1(\xi)(\psi_{1(\sigma^j)})]^2 + 2(B_1\xi, \sigma^j)\partial_1(\xi)(\psi_{1(\sigma^j)}) \leqslant$$

$$\leqslant -\delta + K(a\psi_{1x}, \psi_{1x}). \tag{4}$$

Теорема 2. Если выполнены все высказанные выше предположения, то в $\mathscr{D} \cup \Sigma_+$ существует и притом единственная функция, обладающая следующими свойствами: а) u непрерывна и ограничена в $\mathscr{D} \cup \Sigma_+$, б) для некоторой постоянной $N = N(K, \delta, d, d_1, d_0)$ функция $u + N|x|^2$ выпукла вниз в любой выпуклой подобласти области $\mathscr{D}$, в) для любого направления в E_d первая правосторонняя производная по направлению от функции u существует в каждой точке $\mathscr{D}$, ограничена по абсолютной величине постоянной, зависящей только от K, δ, d, d_1, d_0 и почти всюду в $\mathscr{D}$ дифференцируема, г) $u = g$ на $\Sigma_+, F(u_{ij}, u_i, u, x) = 0$ (п. в.) в $\mathscr{D}$, где u_i — правая производная u по x^i, u_{ij} — коэффициенты при dx^j в du_i, д) $Lu + f \leqslant 0$ в $\mathscr{D}$ в смысле теории обобщенных функций при любых $\alpha \in A, p = 0$. Кроме того, если область $Q < \mathscr{D}$, $\eta \in E_d$, $|\eta| = 1$ и в Q

$$\inf_{\xi:(\xi,\eta)=1} \sup_\alpha (a(\alpha, 0, x)\xi, \xi) \geqslant \delta,$$

то обобщенная производная вида $u_{(\eta)(\eta)}$ ограничена в Q (п. в.). Если в Q

$$\inf_{|\xi|=1} \sup_\alpha (a(\alpha, 0, x)\xi, \xi) \geqslant \delta, \tag{5}$$

то все обобщенные производные вида $u_{x^i x^j}$ ограничены в Q и (п. в.) в Q выполнено (2).

В качестве первого примера применения теоремы 2 рассмотрим так называемое комплексное уравнение Монжа — Ампера. Пусть $C_d = \{z = x + iy : x, y \in E_d\}$, $d \geqslant 2$, ψ — действительная функция класса $C^4_{loc}(C_d)$, являющаяся строго плюрисупергармонической (т. е. комплексная матрица $(\psi_{z\bar z}) < 0$) и такой, что область $\mathscr{D} := \{\psi > 0\}$ непуста, ограничена и $|\psi_z| > 0$ на $\partial\mathscr{D}$. Пусть также имеются $f \in C^2(C_d)$, $g \in C^4(C_d)$. Утверждается, что существует и притом единственная (действительная) функция $u \in C^{1,1}(\bar{\mathscr{D}})$, равная g на $\partial\mathscr{D}$, плюрисубгармоническая в $\mathscr{D}$ и такая, что почти всюду в $\mathscr{D}$

$$\det(u_{z^j\bar z^k}) = (f_+)^d. \tag{6}$$

Кстати говоря, это утверждение при $f \equiv 0$ дает положительный ответ на вопрос, поставленный во введении в [2]. Для вывода этого утверждения заметим, что (см. лемму III.2.2 [1]) уравнение (6) вместе с требованием $(u_{z\bar z}) \geqslant 0$ эквивалентно следующему уравнению Беллмана:

$$\inf_{\alpha \in A} (\operatorname{tr} \alpha^2 (u_{z\bar z}) + (\det \alpha)^{2/d} f d) = 0, \tag{7}$$

где A — множество всех неотрицательных эрмитовых матриц α размера $d \times d$, удовлетворяющих условию $\operatorname{tr}(\alpha^2) = 1$. Возьмем в качестве E_{d_0} множество всех комплексных матриц p размера $d \times d$ таких, что $\bar p = -p^*$. Обозначим $\mu(\alpha, p) = e^p\alpha$,

$$b \equiv 0, c \equiv 0, f(\alpha, p, z) = (\det \alpha^2)^{1/d} f(z)\, d,$$

$$\sigma(\alpha, p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\mu(\bar\alpha, \bar p), & -\operatorname{Im}\mu(\bar\alpha, \bar p) \\ \operatorname{Im}\mu(\bar\alpha, \bar p), & \operatorname{Re}\mu(\bar\alpha, \bar p) \end{pmatrix}, \quad (u_{kj}) = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix},$$

где $C, \mathcal{D}, E, F$ — действительные матрицы размера $d \times d$. Нетрудно проверить, что в этих обозначениях

$$\sum_{k, j \leqslant 2d} a^{ij}(\alpha, p)\, u_{ij} + f(\alpha, p, z) = \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}\, e^p \alpha^2 e^{-p} v + (\det e^p \alpha^2 e^{-p})^{\frac{1}{d}} f(z)\, d,$$

где $v = (c + F + C^* + F^*) + i(E - E^* + \mathcal{D}^* - \mathcal{D})$. Отсюда видно, что условие (1) выполнено и уравнение (2) для определенных выше $\sigma, b, c, f(\alpha, p, z)$ совпадает с (7). Все остальные предположения, кроме (3), (4), легко удовлетворить, если взять $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = 0$, $r_0 = 0$, $P_0 = 0$, $\psi_0 = R^2 - |z|^2$, $B_0 = \psi_0(\delta^{kr})$ в $\mathcal{D}$, где R достаточно велико. При этом оказывается, что $\Sigma_+ = \partial\mathcal{D}$. Для того чтобы обеспечить выполнение предположений (3), (4), возьмем в качестве B_1 единичную матрицу и при всяком $z \in \partial\mathcal{D}$ определим линейный оператор $P_1(z)$, действующий на точки $\xi = \mathrm{Re}\,\xi + i\,\mathrm{Im}\,\xi \in C_d$ и переводящий их в точки E_{d_0}, по формуле

$$P_1(z)\,\xi = |\psi_z|^{-2}\,[(\psi_z)_{(\xi)}\,\psi^*_{\bar z} - \psi_z\,(\psi^*_{\bar z})_{(z)}],$$

где $u_{(\xi)} := u_{z^k}\xi^k + u_{\bar z^k}\bar\xi^k$; ψ_z — вектор-столбец; $\psi^*_{\bar z}$ — вектор-строка (с координатами $\psi_{z^k}, \psi_{\bar z^k}$).

Тогда неравенства (3), (4) при $|\xi| = 1$ приобретают вид

$$2\mathrm{tr}\,\alpha^2(\psi_{z\bar z}) + 1 \leqslant -\delta + K|\alpha\psi_z|^2,$$

$$\mathrm{tr}\,\alpha^2(\psi_{z\bar z}) + 2|\psi_z|^{-4}\,|\psi_{z^k}(\psi_{\bar z^k})_{(\xi)}|^2\,|\alpha\psi_z|^2 +$$

$$+ 2|\psi_z|^{-2}\,\mathrm{Re}\,\psi_{z^k}(\psi_{\bar z^k})_{(\xi)}\,(\bar\alpha\xi)^j\,(\alpha\psi_z)^j \geqslant -\delta + K|\alpha\psi_z|^2.$$

Эти неравенства легко удовлетворить на $\partial\mathcal{D}$, если ψ заменить на $N\psi$ и взять постоянные N, K достаточно большими, а δ достаточно малым. Наконец, левая часть неравенства (5) равна $4^{-1}\sup(\lambda^2(\alpha) : \alpha \in A) \geqslant 4^{-1}d^{-1}$, где $\lambda(\alpha)$ — наибольшее собственное число матрицы α, и из теоремы 2 мы получаем наше утверждение относительно уравнения (7) и относительно уравнения (6).

Применим теорему 2 к линейному уравнению

$$u_{x^1} + u_{x^2x^2} + \ldots + u_{x^dx^d} + f = 0 \tag{8}$$

в шаре $\mathcal{D} = \{|x| < R\}$ при $d \geqslant 2$. Естественно, что это уравнение вкладывается в схему уравнений Беллмана, когда A состоит из одной точки и σ, b, c определяются очевидным образом. Кроме того, теорему 2 можно применить к u и к $(-u)$ и, значит, при выполнении ее условий и при $f \in C^2(E_d)$, $g \in C^4(E_d)$ уравнение (8) будет иметь решение в $\mathcal{D}$, равное g на $\partial\mathcal{D}$ и имеющее ограниченные вторые производные. Оказывается условия теоремы 2 выполнены, если $R < (3 - \sqrt{6})(d - 1)$. В этом легко убедиться, если взять $\psi_1 = R^2 - |x|^2$, $\psi_0 = \psi_1 + 1$ в $\mathcal{D}$, $\psi_2 \equiv 0$, $r_0 = 0$, $(B_0\xi, \xi) = \psi_0|\xi|^2$ в $\bar{\mathcal{D}}$, $B_1 = -(\sqrt{6} - 2)(\psi_{1xx})$ в $\bar{\mathcal{D}}$.

Интересно, что условие $R < (3 - \sqrt{6})(d - 1)$, полученное из теории нелинейных уравнений, является точным в том смысле, что при $R = (3 - \sqrt{6})(d - 1)$, $f \equiv 0$ функция $u_{x^1x^1}$ может оказаться неограниченной. При $d = 2$ это можно увидеть из примера Вейнбергера (см. [2]), где надо взять $m = 3/2$ и сделать замену $t \to -t$, $x \to ix$. Отметим также, что условие $R < (3 - \sqrt{6})(d - 1)$ не намного, но все же слабее условия $2R < d - 1$, при котором справедливость сделанных утверждений относительно уравнения (8) следует из теоремы VIII.8.4 [1].

При доказательстве теоремы 2 автор пользуется вспомогательными переменными и вспомогательным многообразием, введенными в гл. VIII [1]. Интересно было бы знать, можно ли без них обойтись. Если читателя также заинтересует эта возможность, то попробовать отыскать ее мы советуем на примере уравнения

$$\min(u_{x^1x^1}, u_{x^2x^2}) = f.$$

Из теоремы 2 вытекает, что это уравнение при $f \in C^2(E_2)$, $g \in C^4(E_2)$ с граничным данным $u = g$ на $\partial\mathcal{D}$ имеет единственное решение с ограниченными вторыми производными в гладкой области $\mathcal{D}$ типа «собачьей кости», лежащей на плоскости под углом $\pi/4$ к координатным осям. На самом деле пригодна любая гладкая ограниченная область, граница которой строго выпукла наружу в любой точке, в которой касательная к ней параллельна одной из координатных осей.

1. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.— М. : Наука, 1985.— 376 с.
2. *Kohn J. J., Nirenberg L.* Degenerate elliptic-parabolic equations of second order // Communs Pure Appl. Math.— 1967.— **20**, N 4.— P. 551—585.

Моск. гос. ун-т Получено 28.09.87