

УДК 531.38

©2011. А.В. Елагин

АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В СУММАРНОМ ПОЛЕ ДВУХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ

Получены и исследованы представления функций динамических упругих перемещений в нелинейном ангармоническом возмущении для суммы двух осесимметричных нормальных волн кручения в изотропном упругом цилиндре с жестко закрепленной границей.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, волны кручения, нелинейное взаимодействие.

1. Введение. Проблемы анализа свойств нелинейных вторых гармоник упругих волн в данный момент исследованы преимущественно для объемных волн [2] и по ряду вопросов для нормальных волн в упругом слое [1]. Областями приложения этих исследований являются ультраакустическая волновая диагностика, сейсмология и акустоэлектроника. Нелинейные свойства упругих волн используются в принципиальных схемах работы ряда акустоэлектронных устройств. Они применяются в устройствах для умножения и интегрирования сигналов [3], в ультраакустических конвольверах. Отдельные вопросы о нелинейных эффектах при распространении волн вдоль изотропного упругого цилиндра рассматривались в работах [4, 5]. Анализ в этих работах подвергался вопрос о нелинейном взаимодействии мод крутильных и продольно-сдвиговых осесимметричных нормальных волн при совпадении их фазовых скоростей (т.е. в точке пересечения характеризующих моды этих волн дисперсионных кривых). Выражений для функций напряженности вторых гармоник нормальных крутильных и продольно-сдвиговых волн, позволяющих исследовать амплитудно-частотные и амплитудно-фазовые характеристики нелинейных эффектов, кинематические и энергетические свойства вторых гармоник нормальных волн, в указанных выше работах получено не было. В данной статье рассматривается задача определения и исследования кинетических свойств нелинейных вторых гармоник для суммарного поля двух осесимметричных нормальных волн в изотропном цилиндре с жестко закрепленной границей.

2. Постановка и концепция анализа рассматриваемой задачи. Рассматривается задача получения и исследования представлений для вторых нелинейных гармоник монохроматических нормальных волн кручения, распространяющихся вдоль осевого направления в изотропном цилиндре кругового сечения с радиусом R , который в нормированных цилиндрических координатах $Or\theta z$ и прямоугольных декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ занимает область

$$V = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\} = \left\{ (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq R, -\infty < x_3 < \infty \right\}.$$

Исходные соотношения рассматриваемой задачи формулируются в прямоугольных и цилиндрических координатах. Используемая в данной работе модель нелиней-

ного динамического деформирования изотропных упругих сред с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности основывается на тензорном представлении функции упругого потенциала U с квадратичными и кубическими членами по деформациям ε_{ij} , а коэффициенты этого представления выражаются через компоненты тензоров упругих постоянных второго и третьего порядка. В данной работе в качестве представления U используется представление упругого потенциала Мурнагана, записываемое в форме

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{2} E_1^2 - 2\mu E_2 + \frac{l + 2\mu}{3} E_1^3 - 2m E_1 E_2 + n E_3. \quad (1)$$

Здесь λ, μ – параметры Ламе в линейной модели деформирования материала цилиндра; l, m, n – упругие постоянные третьего порядка в соответствующей модели нелинейного деформирования; $E_i (i = 1, 2, 3)$ – главные инварианты тензора деформации Грина, которые связаны формулами

$$E_1 = I_1, E_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), E_3 = \frac{1}{6}(I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3) \quad (2)$$

с алгебраическими инвариантами

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}, \\ I_2 &= \varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{\theta z}\varepsilon_{z\theta} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rz}\varepsilon_{zr} + \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{r\theta}\varepsilon_{\theta r}, \\ I_3 &= \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rz}\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нелинейные представления компонентов тензора упругих деформаций в соотношениях (1)-(3) задаются в форме

$$\varepsilon_{rk} = \frac{1}{2}(u_{r,k} + u_{k,r} + u_{l,r}u_{l,k}), \quad (4)$$

где $u_{r,k} = \frac{\partial u_r}{\partial x_k}$, u_r – компоненты вектора волновых упругих перемещений. Соотношения для компонентов тензора механических напряжений Кирхгофа (второго тензора Пиола-Кирхгофа) в общем случае можно записать в виде

$$\sigma_{j,d} = \frac{\partial U}{\partial u_{j,d}}.$$

Для изотропного материала рассматриваемого цилиндрического волновода представления нормированных, отнесенных к μ , компонент второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа на основных площадках цилиндрической системы координат имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(l)} + \sigma_{ij}^{(n)}, \\ \sigma_{ij}^{(l)} &= \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} I \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}, \\ \sigma_{ij}^{(n)} &= \left[\frac{l}{\mu} I_1^2 - \left(2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu} \right) I_2 \right] \delta_{ij} + \left(2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu} \right) I_1 \delta_{ij} + \frac{n}{\mu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}, \\ &(i, j = r, \theta, z). \end{aligned}$$

Представления для компонент тензора напряжений Лагранжа (первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа) на основных площадках цилиндрической системы координат следуют из соотношения

$$\begin{pmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} & S_{rz} \\ S_{\theta r} & S_{\theta\theta} & S_{\theta z} \\ S_{zr} & S_{z\theta} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

и, соответственно, могут быть представлены в форме:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{(l)} + S_{\alpha\beta}^{(n)} \quad (\alpha, \beta = r, \theta, z), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^{(l)} &\equiv \sigma_{\alpha\beta}^{(l)} \\ S_{rr}^{(n)} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \sigma_{rr}^{(l)} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \sigma_{\theta r}^{(l)} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \sigma_{zr}^{(l)} + \sigma_{rr}^{(n)}, \\ S_{r\theta}^{(n)} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \sigma_{r\theta}^{(l)} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \sigma_{\theta\theta}^{(l)} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \sigma_{z\theta}^{(l)}, \\ S_{rz}^{(n)} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \sigma_{rz}^{(l)} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \sigma_{\theta z}^{(l)} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \sigma_{zz}^{(l)}, \\ S_{\theta r}^{(n)} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sigma_{rr}^{(l)} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \sigma_{\theta r}^{(l)} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \sigma_{zr}^{(l)}, \\ S_{\theta\theta}^{(n)} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sigma_{r\theta}^{(l)} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \sigma_{\theta\theta}^{(l)} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \sigma_{z\theta}^{(l)} + \sigma_{\theta\theta}^{(n)}, \\ S_{\theta z}^{(n)} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sigma_{rz}^{(l)} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \sigma_{\theta z}^{(l)} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \sigma_{zz}^{(l)}, \\ S_{zr}^{(n)} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} \sigma_{rr}^{(l)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \sigma_{\theta r}^{(l)} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \sigma_{zr}^{(l)}, \\ S_{z\theta}^{(n)} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} \sigma_{r\theta}^{(l)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta}^{(l)} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \sigma_{z\theta}^{(l)}, \\ S_{zz}^{(n)} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} \sigma_{rz}^{(l)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \sigma_{\theta z}^{(l)} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \sigma_{zz}^{(l)} + \sigma_{zz}^{(n)}. \end{aligned}$$

В работе рассматривается случай жесткого закрепления боковой поверхности волновода, описываемый краевыми условиями

$$(u_r)_{r=R} = (u_\theta)_{r=R} = (u_z)_{r=R} = 0. \quad (6)$$

При существовании ряда численно-аналитических и прямых численных подходов к исследованию уравнений теории нелинейных стационарных волновых процессов, достаточно широко используемой методикой определения нелинейных эффектов в упругих волнах малой интенсивности, которые распространяются в средах значительной жесткости, является методика определения малых нелинейных "добавок" (ангармонических возмущений, вторых гармоник) в представлениях функций волновых упругих перемещений. Полагается, что указанные добавки пропорциональны

малому параметру δ в виде отношения амплитуды рассматриваемой упругой волны к ее длине. По этой методике компоненты вектора упругих волновых перемещений u_j представляются в виде суммы линейных составляющих $u_j^{(l)}$ и нелинейных ангармонических возмущений $u_j^{(n)}$:

$$u_j = u_j^{(l)} + u_j^{(n)},$$

где

$$|u_j^{(n)}| \sim \delta |u_j^{(l)}|. \quad (7)$$

После введения в уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial z} + \frac{S_{r\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0; \end{aligned}$$

и краевые условия (6) представлений (5), (7) с последующим выделением составляющих одного порядка по малому параметру δ , получают рекуррентную последовательность краевых задач для определения $u_j^{(l)}$, $u_j^{(n)}$:

$$\rho \ddot{u}_j^{(l)} - (S_{jd,d}^{(l)})_{u=u^{(l)}} = 0, \quad (u_\alpha^{(l)})_{r=R} = 0 \quad (\alpha = r, \theta, z) \quad (8)$$

$$\rho \ddot{u}_j^{(n)} - (S_{jd,d}^{(l)})_{u=u^{(n)}} = (S_{jd,d}^{(n)})_{u=u^{(l)}} \quad (u_\alpha^{(n)})_{r=R} = 0 \quad (\alpha = r, \theta, z). \quad (9)$$

Исследование краевых задач (8), (9) в охарактеризованных выше частных случаях рассмотрения осесимметричных нормальных волн составляет последующее содержание данной работы.

3. Построение решений, описывающих ангармонические возмущения в суммарном поле двух нормальных волн кручения в изотропном цилиндре. В частном случае задачи о вторых гармониках осесимметричных комбинационных волн кручения в рассматриваемом цилиндре, искомое поле волновых перемещений в линейной волне имеет структуру $u_r^{(l)} \equiv u_z^{(l)} \equiv 0$, $u_\theta^{(l)}(r, z, t) = (u_\theta^{(1,l)}(r) + u_\theta^{(2,l)})e^{-i(\omega_1 + \omega_2 t) - (k_1 + k_2)z}$. На первом шаге описанного выше итерационного алгоритма проблема сводится к однородной задаче относительно функции линейных волновых упругих перемещений $u_\theta^{(l)}(r)$, включающей уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(l)})) + \frac{\partial S_{\theta z}^{(l)}(u_\theta^{(l)})}{\partial z} + \frac{S_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(l)})}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta^{(l)}}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

преобразуемое к виду

$$(D^2 + (\frac{w^2}{v_s^2} - k^2)) u_\theta^{(l)} = 0, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

с граничными условиями

$$(u_\theta^{(l)})_{r=R} = 0. \quad (11)$$

На втором шаге алгоритма из соотношений (9) для рассматриваемого варианта задачи, в частности, следует

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{\theta r}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)})) + \frac{\partial S_{\theta z}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)})}{\partial z} + \frac{S_{\theta r}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)})}{r} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\theta^{(n)} = 0$$

или

$$(D^2 + (\frac{w^2}{v_s^2} - k^2)) u_\theta^{(n)} = 0, \quad (12)$$

откуда с учетом граничных условий $(u_\theta^{(n)})_{r=R} = 0$, можно заключить, что соответствующее частное решение неоднородного уравнения (12), описывающего вторую гармонику $u_\theta^{(n)}$, является тождественно нулевым. Вследствие этого, анализу подлежит неоднородная краевая задача по определению нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения, которая включает систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_z^{(n)})) - \frac{\partial S_{rz}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_z^{(n)})}{\partial z} + \frac{S_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_z^{(n)})}{r} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}^{(n)}(u_\theta^{(1,l)} + u_\theta^{(2,l)})) + \frac{\partial S_{rz}^{(n)}(u_\theta^{(1,l)} + u_\theta^{(2,l)})}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}^{(n)}(u_\theta^{(1,l)} + u_\theta^{(2,l)})}{r}, \\ & \rho \frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{zr}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_z^{(n)})) - \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\theta}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_z^{(n)})}{\partial \theta} - \frac{\partial S_{zz}^{(l)}(u_r^{(n)}, u_z^{(n)})}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{zr}^{(n)}(u_\theta^{(1,l)} + u_\theta^{(2,l)})) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\theta}^{(n)}(u_\theta^{(1,l)} + u_\theta^{(2,l)})}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zz}^{(n)}(u_\theta^{(1,l)} + u_\theta^{(2,l)})}{\partial z}, \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(u_r^{(n)})_{r=R} = 0, \quad (u_z^{(n)})_{r=R} = 0.$$

Решение уравнения линейной граничной задачи (10), (11), которое описывает амплитудную функцию осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндре, имеет представление

$$\begin{aligned} u_\theta^{(l)} &= u_\theta^{(0,l)} J_1(\alpha r) e^{-i(\omega t - k z)}, \quad \alpha = (k^2(v^2/v_s^2 - 1))^{1/2}, \quad \nu_s = (\frac{\mu}{\rho})^{1/2}, \\ u_\theta^{(0,l)} &= u^{(0)} J_1(\alpha r). \end{aligned}$$

Здесь $u_\theta^{(l)}$ – комплексная функция динамических перемещений в первой линейной гармонике нормальной волны кручения с круговой частотой ω , волновым числом k и фазовой скоростью ν ; $J_n(\alpha r)$ – цилиндрическая функция Бесселя индекса n ; u_o – произвольный амплитудный множитель. Дисперсионное уравнение для линейных осесимметричных волн кручения в цилиндре, соответственно, имеет форму

$\Omega = (\tilde{k}^2 + \xi_p^2)^{\frac{1}{2}}$ ($p = 1, \infty$), где $\Omega = \frac{\omega R}{\nu_s}$ – безразмерный нормированный частотный параметр, $\tilde{k} = kR$ – безразмерное нормированное волновое число, ξ_p – корни трансцендентного уравнения $J_1(\xi) = 0$. В рассматриваемом случае нелинейными вторыми гармониками комбинационных нормальных волн кручения в цилиндре являются осесимметричные волны продольно-сдвигового типа с волновыми функциями упругих смещений $u_r^{(n)} = u_r^{(0,n)}(r)e^{-i((\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)z)}$ и $u_z^{(n)} = u_z^{(0,n)}(r)e^{-i((\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)z)}$. Неоднородная краевая задача для определения составляющих этих функций с правой частью, которая выражается через комплексные функции упругих перемещений $u_\theta^{(1,l)}(r)$, $u_\theta^{(2,l)}(r)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} & \Delta_{11}^{(1)} u_r^{(0,n)} + \Delta_{12}^{(1)} \frac{u_r^{(0,n)}}{r^2} + \Delta_{13}^{(1)} \frac{(u_r^{(0,n)})'}{r} + \Delta_{14}^{(1)} (u_z^{(0,n)})' + \Delta_{15}^{(1)} (u_r^{(0,n)})'' = \\ & \Delta_{11}^{(2)} \frac{u_\theta^{(1,l)} u_\theta^{(2,l)}}{r} + \Delta_{12}^{(2)} \frac{u_\theta^{(1,l)} (u_\theta^{(2,l)})'}{r^3} + \Delta_{13}^{(2)} (u_\theta^{(1,l)})' (u_\theta^{(2,l)}) + \Delta_{14}^{(2)} \frac{u_\theta^{(2,l)} (u_\theta^{(1,l)})'}{r^2} + \\ & \Delta_{15}^{(2)} u_\theta^{(1,l)} (u_\theta^{(2,l)})' + \Delta_{16}^{(2)} \frac{u_\theta^{(1,l)} (u_\theta^{(2,l)})'}{r^2} + \Delta_{17}^{(2)} (u_\theta^{(1,l)})' (u_\theta^{(2,l)})' r + \Delta_{18}^{(2)} \frac{u_\theta^{(2,l)} (u_\theta^{(1,l)})''}{r} + \\ & \Delta_{19}^{(2)} (u_\theta^{(2,l)})' (u_\theta^{(1,l)})'' + \Delta_{110}^{(2)} \frac{u_\theta^{(1,l)} (u_\theta^{(2,l)})''}{r} + \Delta_{111}^{(2)} \frac{(u_\theta^{(1,l)})' (u_\theta^{(2,l)})''}{r} + \\ & \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} \frac{u_r^{(0,n)}}{r} + \Delta_{23}^{(1)} (u_r^{(0,n)})' + \Delta_{24}^{(1)} \frac{(u_z^{(0,n)})'}{r} + \Delta_{25}^{(1)} (u_z^{(0,n)})'' = \\ & \Delta_{21}^{(2)} u_\theta^{(1,l)} u_\theta^{(2,l)} + \Delta_{22}^{(2)} \frac{u_\theta^{(2,l)} (u_\theta^{(1,l)})'}{r} + \Delta_{23}^{(2)} \frac{u_\theta^{(2,l)} (u_\theta^{(1,l)})'}{r} + \Delta_{24}^{(2)} (u_\theta^{(2,l)})' (u_\theta^{(1,l)})' + \\ & + \Delta_{25}^{(2)} u_\theta^{(2,l)} (u_\theta^{(1,l)})'' + \Delta_{26}^{(2)} u_\theta^{(1,l)} (u_\theta^{(2,l)})'', \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta_{ij}^{(p)}$ – коэффициенты.

$$(u_r^{(0,n)})_{r=R} = 0, (u_z^{(0,n)})_{r=R} = 0. \quad (14)$$

Решение неоднородной граничной задачи (13), (14) на основе разработанного алгоритма аналитических преобразований в среде специализированного пакета Mathematica 6.0 получено в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= -A_1 \tilde{\alpha} J_1(\tilde{\alpha} r) + A_2 i k J_1(\tilde{\beta} r) + F_1(r), \\ u_z &= A_1 i k J_0(\tilde{\alpha} r) - 2A_2 \tilde{\beta} J_0(\tilde{\beta} r) + F_2(r), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(r) &= \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p, F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p, \tilde{\alpha}^2 = \Omega_3^2 / \zeta^2 - k_3^2, \tilde{\beta}^2 = \Omega_3^2 - k_3^2, \\ \Omega_3^2 &= \omega_1 + \omega_2, k_3 = k_1 + k_2, \\ \zeta^2 &= 2(1-v)/(1-2v), \\ A_1 &= (\chi_{12} F_2(R) - \chi_{22} F_1(R)) / (\chi_{11} \chi_{22} - \chi_{21} \chi_{12}), \\ A_2 &= (\chi_{11} F_2(R) - \chi_{21} F_1(R)) / (\chi_{12} \chi_{21} - \chi_{11} \chi_{22}), \\ \chi_{11} &= -\tilde{\alpha} J_1(\tilde{\alpha} r), \chi_{12} = i k J_1(\tilde{\beta} r), \chi_{21} = i k J_0(\tilde{\alpha} r), \chi_{22} = -\tilde{\beta} J_0(\tilde{\beta} r); \end{aligned}$$

a_p, b_p – коэффициенты степенных рядов, в виде которых получены частные решения неоднородных уравнений (13). Для расчета этих коэффициентов были построены следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 / \Delta_{13}^{(n)}, b_1 = \beta_1 / \Delta_{23}^{(n)}; \\ a_2 &= \frac{\alpha_2 - b_1 \Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)} + 2\Delta_{13}^{(n)} + 2\Delta_{15}^{(n)}}, b_2 = \frac{\beta_2 - a_1(\Delta_{22}^{(n)} - \Delta_{24}^{(n)})}{2\Delta_{23}^{(n)} + 2\Delta_{25}^{(n)}}; \\ a_{p+2} &= \frac{\alpha_{p+2} - \Delta_{11}^{(n)} a_p - \Delta_{14}^{(n)}(p+1)b_{p+1}}{\Delta_{12}^{(n)} + \Delta_{13}^{(n)}(p+2) + \Delta_{15}^{(n)}(p+2)(p+1)}, \\ b_{p+2} &= \frac{\beta_{p+2} - \Delta_{21}^{(n)} b_p - \Delta_{22}^{(n)} a_{p+1} - \Delta_{24}^{(n)}(p+1)a_{p+1}}{\Delta_{23}^{(n)}(p+2) + \Delta_{25}^{(n)}(p+2)(p+1)} \\ &(p = \overline{1, \infty}). \end{aligned}$$

4. Численные результаты. При численных исследованиях с использованием разработанного алгоритма в среде специализированного пакета Mathematica были рассчитаны радиальные распределения безразмерных нормированных амплитуд для волновых смещений в ангармоническом возмущении двух нормальных волн с относительными длинами (и, соответственно, волновыми числами) в случаях, когда обе волны одновременно принадлежат первой и второй моде дисперсионного спектра. Численные исследования нелинейных ангармонических эффектов были сделаны для волновода из дюралюминия со следующими физико-механическими характеристиками:

$$\begin{aligned} \rho &= 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \sigma = 0.31; \quad \mu = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \tilde{\lambda} = \frac{2\sigma\mu}{1-2\sigma} = 4.2 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \\ l &= -26.46 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad m = -38.22 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad n = 36.26 \cdot 10^{10} \text{ Па}. \end{aligned}$$

Результаты этих исследований отражены на рис. (1)-(7).

Следует отметить, что амплитудные формы волновых перемещений в линейных волнах кручения из некоторой определенной моды не зависят от их относительной длины. Для нормальных волн первой и второй мод в рассматриваемом волноводе эти формы представлены на рис.1.

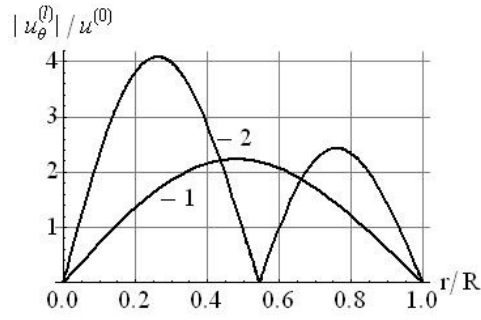


Рис. 1. Распределение нормированных значений линейных волн $|u_\theta^{(l)}|/u^{(0)}$ в первой и второй моде

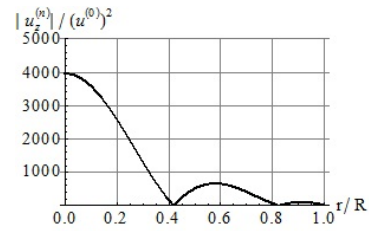
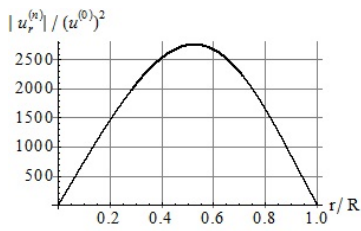


Рис. 2. Амплитудные формы перемещений $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ для 1 моды при $\omega = 3.80864$, $k = \pi/5$

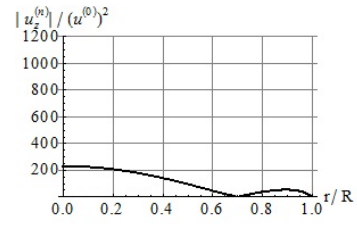
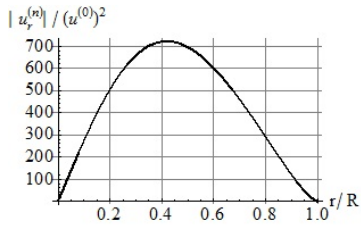


Рис. 3. Амплитудные формы перемещений $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ для 1 моды при $\omega = 12.8915$, $k = 4\pi$

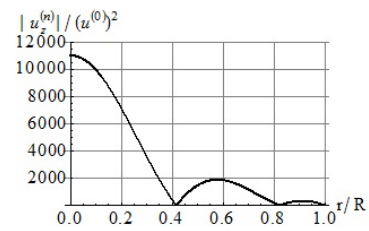
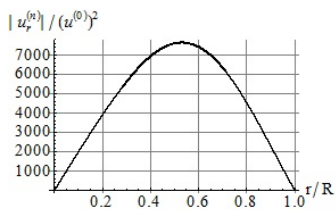


Рис. 4. Амплитудные формы перемещений $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ для 2 моды при $\omega = 3.80864$, $k = \pi/5$

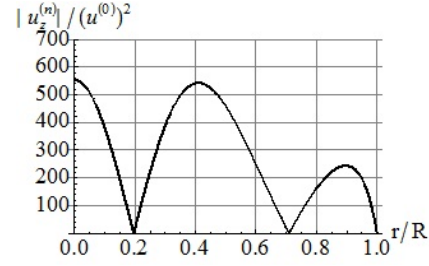
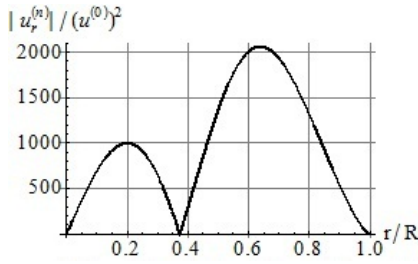


Рис. 5. Амплитудные формы перемещений $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ для 2 моды при $\omega = 12.8915$, $k = 4\pi$

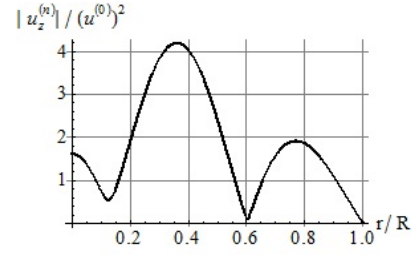
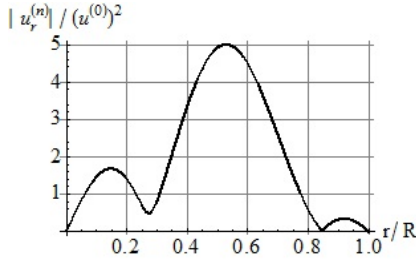


Рис. 6. Амплитудные формы перемещений $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ в суммарном поле волн для моды 1

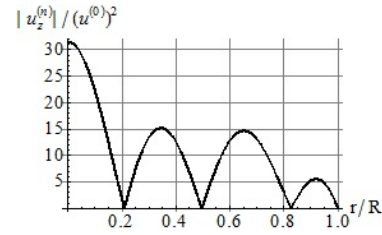
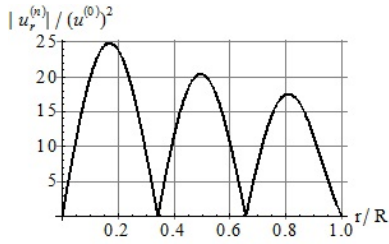


Рис. 7. Амплитудные формы перемещений $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ в суммарном поле волн для моды 2

Анализируемые ангармонические возмущения являются, соответственно, суммами вторых гармоник монохроматических нормальных волн с рассматриваемыми относительными длинами и слагаемого, соответствующего "комбинационной" второй гармонике с волновым числом $k_1 + k_2$, характеризующего степень нелинейного взаимодействия рассматриваемых линейных волн кручения. Амплитудные формы во вторых гармониках волн с волновыми числами $2k_1$ и $2k_2$, соответственно, представлены на рис. (2)-(3) для случая, когда линейные волны кручения принадлежат первой моде и на рис. (4)-(5) – для случая, когда линейные волны принадлежат второй моде. Характерным для рассматриваемого случая является подобие амплитудных форм для $u_r^{(n)}$ и $u_z^{(n)}$ в волне с волновым числом $2k_1$ и существенные изменения в указанных формах для волн с волновым числом $2k_2$. Распределения, отраженные на рисунках (6)-(7), позволяют сделать вывод о том, что степень нелинейного взаимодействия волн кручения первой моды существенно ниже, чем для волн второй

моды. В частности, максимальные амплитудные показатели взаимодействия для линейных крутильных волн с одинаковыми амплитудами в случае волн второй моды в 5 раз больше по характеристике $u_r^{(n)}$ и в более чем 7 раз больше по характеристике $u_z^{(n)}$. Вместе с тем соотношения амплитудных уровней составляемых волновыми числами $2k_1, 2k_2$ и $k_1 + k_2$ позволяют сделать вывод, что в рассматриваемом случае степень нелинейного взаимодействия рассматриваемых нормальных волн является незначительной.

1. Kurennya K. I. Analysis of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal layer / Kurennya K. I., Storozhev V. I. // Journal of Computational and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 6, No. 1. – P. 67-82.
2. Lemanov V. V. Nonlinear effects in the propagation of high frequency elastic waves in crystals. / V. V. Lemanov, G. A. Smolenskii // Soviet Physics Acoustics. – 1974. – Vol. 20. – P. 259-267.
3. Красильников В. А. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журнал. / Красильников В. А., Лямов В. Е. – 1993. – Т. 19, Вып. 5. – С. 801-804.
4. Sugimoto N. Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves / Sugimoto N. // J. Acoust. Sos. Am. – 1978. – Vol. 64, N 4. – P. 1190-1195.
5. Sugimoto N. Nonlinear mode coupling of elastic waves / Sugimoto N., Hirao M. // J. Acoust. Sos. Am. – 1977. – Vol. 62, N 1. – P. 23-32.

A. V. Yelagin

Anharmonic excitation in the combined field of the two normal waves of torsion in isotropic cylinder.

Representations of the functions dynamic elastic displacement in the nonlinear anharmonic perturbation for the sum of two axisymmetric normal waves of torsion in isotropic elastic cylinder with fixed boundary are obtained.

Keywords: cylindrical waveguide, waves of torsion, nonlinear interaction.

О. В. Єлагін

Ангармонічні збурення в сумарному полі двох нормальних хвиль крутіння в ізотропному циліндрі.

Отримано та досліджено зображення функцій динамічних пружних переміщень у нелінійному ангармонічному збуренні для суми двох осесиметричних нормальних хвиль крутіння в ізотропному пружному циліндрі з жорстко закріпленою границею.

Ключові слова: циліндричний хвилевід, хвилі крутіння, нелінійна взаємодія.

Донецкий национальный ун-т
deluyagin@inbox.ru

Получено 15.04.11