ISSN 1683-4720

МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ТОМ 34
2020

ТРУДЫ

Института Прикладной Математики и Механики

УДК 517 : 519 : 531

В сборнике представлены работы по широкому кругу вопросов в разных областях математики, механики и кибернетики: теории функций, дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, теории упругости, анализа данных, а также их приложений.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов соответствующих специальностей.

Объем : 11,5 печ. листов.

Адрес редколлегии:

283114 Донецк, ул. Р. Люксембург, 74
Государственное учреждение «Институт прикладной математики и механики»
Тел. 311 04 31, 311 04 36
E-mail: math.iamm@mail.ru, сайт: iamm.su

Технический редактор: Махно И.В.

Утверждено к печати ученым советом
ГУ «Институт прикладной математики и механики»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 000080 от 22.11.2016 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Том 34
Донецк, 2020

Основан в 1997 г.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.927.2

©2020. **А. В. Агибалова**

О СЕКТОРИАЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА МЕРЫ

Рассматривается оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями и комплексным потенциалом типа меры. В терминах потенциала получено достаточное, а при некотором дополнительном предположении и необходимое, условие секториальности соответствующей квадратичной формы.

Ключевые слова: *секториальность, квадратичная форма, оператор Шрёдингера, точечные взаимодействия.*

1. Введение. Дифференциальные операторы с точечными взаимодействиями возникают в различных физических приложениях как точно разрешимые модели, описывающие сложные физические явления (многочисленные результаты, а также исчерпывающий список ссылок можно найти в [1–4]). Важный класс таких операторов образуют дифференциальные операторы с коэффициентами, имеющими сингулярный носитель на дискретном множестве точек. Самый известный пример – оператор $\mathrm{H}_{X,\alpha,q}$, ассоциированный с формальным дифференциальным выражением

$$\ell_{X,\alpha,q} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x) + \sum_{x_n\in X} \alpha_n\, \delta(x-x_n), \tag{1}$$

где $\delta(x-x_n)$ – дельта-функция Дирака с носителем в точке x_n. Этот оператор описывает δ-взаимодействия на дискретном множестве $X = \{x_n\}_{n\in I} \subset \mathbb{R}$. Коэффициенты $\alpha_n \in \mathbb{C}$ называют интенсивностями в точках x_n.

Существует несколько подходов к строгому определению оператора, соответствующего дифференциальному выражению Штурма – Лиувилля

$$\ell_\nu := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \nu(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с потенциалом-распределением $\nu \in W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$. А. М. Савчук и А. А. Шкаликов [5, 6] предложили следующее определение. Пусть

$$y^{[1]}(x) := y'(x) - V(x)\, y(x), \qquad {}' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \tag{3}$$

где $V(x) = \int \nu(t)\, dt$ – первообразная распределения ν. Переписывая выражение (2) в виде

$$\ell_\nu[y] = -(y^{[1]})' - V(x)y^{[1]} - V^2(x)y, \tag{4}$$

мы определяем минимальный оператор

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}^0_\nu f := \ell_\nu f,\\
&\qquad \mathrm{dom}(\mathrm{H}_\nu) := \{f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_+) :\ f, f^{[1]} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ \ell_\nu[f] \in L^2(\mathbb{R}_+)\},
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathrm{H}_\nu := \overline{\mathrm{H}^0_\nu}. \tag{6}$$

Здесь $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_+)$ обозначает подмножество квадратично интегрируемых на $\mathbb{R}_+$ функций, равных нулю вне некоторого замкнутого интервала $[0, R]$, и $W^{n,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) = \{f : f \in W^{n,p}[0, R]$ для всех $R > 0\}$, где $W^{n,p}[0, R]$ обозначает стандартное соболевское пространство на отрезке и $W^{0,p}[0, R] = L^p[0, R]$.

Операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями привлекли значительный интерес в последние десятилетия, в частности, потому что их можно использовать в качестве решаемых моделей многих явлений.

Например, если ν – линейная комбинация δ-функций, $\nu(x) = \sum \alpha_k \delta(x - x_k)$, то оператор $\mathrm{H}_{X,\alpha,q} := \mathrm{H}_\nu$ описывает δ-взаимодействия интенсивности α_k в точках x_k. Заметим также, что операторы с локальными точечными взаимодействиями могут рассаматриваться как операторы Шрёдингера с редкими сильно флуктуирующими потенциалами (многочисленные результаты по спектральным свойствам таких операторов можно найти в [7–9]).

В случае, когда ν – мера с локально ограниченной вариацией, самосопряжённость и полуограниченность снизу оператора H_ν были впервые рассмотрены Браншем [10] и Минами [11]. Операторы на конечном интервале с $\nu \in W^{-1,2}$ детально были изучены Савчуком и Шкаликовым [5, 6]. Грынив и Микитюк [12, 13] (см. также [14]) существенно развили этот подход для изучения обратных задач.

2. Условия секториальности оператора Шрёдингера. Напомним, что оператор T в гильбертовом пространстве H называется α-секториальным (α – полу-угол), если

$$\mathrm{Re}\,\mathfrak{t}_T[f] \pm \mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{t}_T[f] = \mathrm{Re}(Tf, f) \pm \mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{Im}(Tf, f) \geqslant 0.$$

Пусть $\mu(t) := \mu_R(t) + i\mu_I$ – комплекснозначная мера.

Квадратичная форма

$$\mathfrak{t}_L[u] = (Lu, u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt - \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu(t), \quad \mu = \mu_R + i\mu_I, \tag{7}$$

ассоциирована с оператором

$$Lu = -D^2 u + \mu u.$$

Для изучения секториальности формы $\mathfrak{t}_L[u]$ находим

$$\operatorname{Re}(Lu, u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt + \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_R(t),$$

$$\operatorname{Im}(Lu, u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_I(t).$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(Lu, u) \pm \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{Im}(Lu, u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt + \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_R(t) \pm$$
$$\pm \operatorname{ctg}\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_I(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt + \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_\alpha(t), \quad (8)$$

где

$$d\mu_\alpha(t) := d\mu_R(t) \pm \operatorname{ctg}\alpha \cdot d\mu_I(t) = d\mu_\alpha^+(t) - d\mu_\alpha^-(t), \quad \mu_\alpha^\pm(t) \geqslant 0. \quad (9)$$

Теорема 1. *Пусть μ – комплекснозначная мера и пусть $d\mu_\alpha(t)$ определяется равенством* (9). *Тогда квадратичная форма* (7) *является α-секториальной, если существует константа $c > 0$, такая что*

$$\int\limits_{[n,n+1)} d\mu_\alpha^-(t) \leqslant c, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Если мера $\mu_\alpha(t) = -\mu_\alpha^-(t)$ неположительна, то условие (10) *является также и необходимым для α-секториальности $\mathfrak{t}_L[u]$.*

Доказательство. (i) Достаточность. По теореме вложения Соболева для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено следующее неравенство:

$$|u(t)|^2 \leqslant \varepsilon \int\limits_n^{n+1} |u'(t)|^2 dt + \frac{C}{\varepsilon} \int\limits_n^{n+1} |u(t)|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \|u\|^2_{W^{1,2}_{[n,n+1]}} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|^2_{L^2_{[n,n+1]}}, \quad u \in W^{1,2}[n, n+1]. \quad (11)$$

Зафиксируем $\varepsilon < \frac{1}{c}$. Из (8) с учётом неравенства (11) получаем

$$\operatorname{Re} \mathfrak{t}_L[u] \pm \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{Im} \mathfrak{t}_L[u] = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt + \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_\alpha(t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt + \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_\alpha^+(t) - \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_\alpha^-(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt - \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u(t)|^2 d\mu_\alpha^-(t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{[n,n+1)} |u|^2 d\mu_\alpha^-(t) \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt - c\sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^2_{C[n,n+1]} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 dt - c\left(\varepsilon \|u\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+)} + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right) =$$

$$= \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} - c\varepsilon\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} - c\varepsilon\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} - \frac{cC}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} =$$

$$= (1-c\varepsilon)\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} - c\left(\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \geqslant -c\left(\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Из полученного неравенства следует, что квадратичная форма $\mathfrak{t}_L[u]$ является α-секториальной.

(ii) Необходимость. Пусть условие (10) нарушено. Тогда для произвольной последовательности $\{k_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, $k_j \nearrow \infty$, существует последовательность $\{n_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, такая что

$$\int\limits_{[n_j,n_j+1)} d\mu_\alpha^-(t) > k_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Пусть $\varphi_0 \in C_0^1(\mathbb{R}_+)$, $\varphi_0(x) = 1$ для $x \in [0,1]$ и $\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Положим

$$\varphi_n(x) := \varphi_0(x-n), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi_{n_j}(t)|^2 d\mu_\alpha^-(t) \geqslant \int\limits_{[n_j,n_j+1)} |\varphi_{n_j}(t)|^2 d\mu_\alpha^-(t) = \int\limits_{[n_j,n_j+1)} d\mu_\alpha^-(t) > k_j. \tag{13}$$

Тогда из (8) и (13) следует

$$\operatorname{Re} \mathfrak{t}_L[\varphi_{n_j}] \pm \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{Im} \mathfrak{t}_L[\varphi_{n_j}] = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi'_{n_j}(t)|^2 dt - \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi_{n_j}(t)|^2 d\mu_\alpha^-(t) < \\ < \|\varphi'_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} - k_j \to -\infty$$

при $j \to \infty$.

Значит, оператор L не является α-секториальным. $\square$

1. *Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable Models in Quantum Mechanics, Sec. Edition. – AMS Chelsea Publ, 2005. – 452 p.
2. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular Perturbations of Differential Operators and Schrödinger Type Operators. – Cambridge Univ. Press, 2000. – 429 p.
3. *Exner P.* Seize ans apres. Appendix K to “Solvable Models in Quantum Mechanics” by Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H., Sec. Edition. – AMS Chelsea Publ, 2004. – 503 p.
4. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные Билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 172 с.
5. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. – 1999. – **66**, № 6. – С. 897–912.
6. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды Моск. матем. о-ва. – 2003. – **64**. – С. 159–212.
7. *Исмагилов Р. С.* О самосопряженности оператора Штурма – Лиувилля // Russ. Math. Surv. – 1963. – **18**, № 5. – С. 161–166.
8. *Исмагилов Р. С.* О спектре уравнения Штурма – Лиувилля с колеблющимся потенциалом // Матем. заметки. – 1985. – **37**, № 6. – С. 476–482.
9. *Гордон А. Я., Молчанов С. А., Цагани Б.* Спектральная теория одномерных операторов Шрёдингера с сильно флуктуирующими потенциалами // Функц. анализ и его прил. – 1991. – **25**, Вып. 3. – С. 89–92.
10. *Brasche J. F.* Perturbation of Schrödinger Hamiltonians by measures – selfadjointness and semiboundedness // J. Math. Phys. – 1985. – **26**. – P. 621–626.
11. *Minami N.* Schrödinger operator with potential which is the derivative of a temporally homogeneous Levy process // Probability Theory and Mathematical Sciences (Kyoto, 1986): Proceedings. – Lect. Notes in Math., Vol. 1299. – Berlin: Springer, 1988. – P. 298–304.
12. *Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V.* 1-D Schrodinger operators with periodic singular potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – **7**, No. 4. – P. 31–42.
13. *Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V.* 1-D Schrodinger operators with singular Gordon potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2002. – **8**, No. 1. – P. 36–48.
14. *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators in impedance form // J. Funct. Anal. – 2005. – **222**. – P. 143–177.

A. V. Agibalova

On the sectoriality of the Schrödinger operator with a potential of measure type

The Schrödinger operator with point interactions and a complex potential of the measure type is considered. In terms of the potential a sufficient and under some additional assumptions a necessary condition for the sectoriality of the corresponding quadratic form is obtained.

Keywords: *sectoriality, quadratic form, Schrödinger operator, point interactions.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк
`g.agibalova@donnu.ru`

Получено 29.09.20

УДК 531.38

©2020. **А. Б. Бирюков, А. А. Иванова, П. А. Гнитиев**

СИСТЕМА ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЯ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ ПРИ РАБОТЕ ПЛАМЕННЫХ ПЕЧЕЙ, ПОЗВОЛЯЮЩАЯ ОЦЕНИВАТЬ СТЕПЕНЬ РАЗВИТИЯ ПРОЦЕССОВ ОКИСЛЕНИЯ И ОБЕЗУГЛЕРОЖИВАНИЯ МЕТАЛЛА

Предложена система диагностики газовой фазы при работе пламенной печи, основанная на определении величины присосов воздуха в рабочую камеру печи, расходов кислорода на окисление и обезуглероживание металла в режиме реального времени. Исследована чувствительность предложенной системы к погрешностям установления входных величин. Показано, что для достижения приемлемой точности определения искомых величин необходимо использование измерительных приборов со сверхвысокой точностью.

Ключевые слова: *пламенная печь, присосы воздуха, концентрация газообразного компонента, окисление металла, обезуглероживание металла, диагностика процесса, класс точности прибора.*

1. Введение. В современной газопечной теплотехнике одним из актуальных вопросов при тепловой обработке металла в печи является снижение уровня окисления и обезуглероживания поверхности металлических изделий, подвергающихся тепловой обработке. В названных процессах ключевую роль играет кислород, имеющийся в продуктах сгорания, поскольку, с одной стороны, сжигание топлива обычно ведется при значениях коэффициента расхода воздуха, больших единицы, а с другой стороны, помимо этого имеются неорганизованные присосы воздуха в печную камеру. Концентрация кислорода в продуктах сгорания, соответствующая его организованной подаче при выбранном значении коэффициента расхода воздуха, определяется при помощи стандартного расчета в рамках теории горения топлива. Известны методики, позволяющие на основании сравнения измеренных концентраций кислорода в продуктах сгорания с расчетными значениями установить величину присосов воздуха [1, 2].

В работе [3] предложено сжигание топлива в печи с образованием нейтральной или восстановительной атмосферы (газы CO, H_2), а также разработана математическая модель протекания процесса окисления стали при нагреве под прокатку. Авторами установлено сокращение количества металла, уносимого с угаром, в 2 раза. Однако у данного способа есть недостатки – опасность для работы персонала при наличии неплотностей печи и ее работы около «нулевой» точки разрежения, а также снижение удельных тепловыделений из-за недожога топлива, что влечет за собой перерасход дорогостоящего природного газа.

В работах [4, 5] рассмотрены различные способы снижения окалинообразования, откуда следует, что способов ее снижения не мало, однако отсутствуют универсальные подходы к решению данной проблемы.

В работе [6] на основе анализа теплового баланса рекуператора и баланса кислорода в печной камере и газоходе от пламенного окна до рекуператора даются расчетные оценки присосов воздуха в печную камеру и на участке газохода, а также объемного расхода кислорода на окисление поверхности металла. В известных подходах внимание не уделено процессам обезуглероживания металла.

В связи с этим цель данной работы сформулирована как создание системы диагностики состояния газовой фазы при работе пламенных печей, позволяющей оценивать степень развития процессов окисления и обезуглероживания металла.

2. Система диагностики. При составлении системы диагностики сделано предположение, что продукты сгорания состоят из четырех компонентов: CO_2, H_2O, O_2 и N_2. Расчетные значения концентраций этих компонентов определяются при помощи стандартного расчета горения газообразного топлива в зависимости от его состава и базового значения коэффициента расхода воздуха.

Для решения поставленной задачи предлагается рассмотреть баланс содержания таких компонентов как углекислый газ, кислород и водяные пары, а также разрешить его относительно реальных концентраций названных компонентов в продуктах сгорания, сформированных в результате присосов воздуха в печную камеру, протекания процессов окисления и обезуглероживания.

В результате получаем систему, состоящую из трех уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{CO}_2^{\mathrm{P}} = \dfrac{V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \cdot \mathrm{CO}_2^{\text{расч}} + V_{\mathrm{CO}_2}^{\text{об}}}{V_{\text{пс}}^{\text{расч}} + \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} - V_{\mathrm{O}_2}^{\text{ок}} - V_{\mathrm{CO}_2}^{\text{об}} + V_{\mathrm{CO}_2}^{\text{об}}}; \\ \mathrm{O}_2^{\mathrm{P}} = \dfrac{V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \cdot \mathrm{O}_2^{\text{расч}} + \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} \cdot \mathrm{O}_2^{\text{вл}} - V_{\mathrm{O}_2}^{\text{ок}} - V_{\mathrm{CO}_2}^{\text{об}}}{V_{\text{пс}}^{\text{расч}} + \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} - V_{\mathrm{O}_2}^{\text{ок}}}; \\ \mathrm{H_2O}^{\mathrm{P}} = \dfrac{V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \cdot \mathrm{H_2O}^{\text{расч}} + \alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} \cdot \mathrm{H_2O}^{\text{вл}}}{V_{\text{пс}}^{\text{расч}} + \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} - V_{\mathrm{O}_2}^{\text{ок}}}. \end{cases}$$

где $\mathrm{CO}_2^{\mathrm{P}}$, $\mathrm{O}_2^{\mathrm{P}}$, $\mathrm{H_2O}^{\mathrm{P}}$ – реальное содержание газов CO_2, O_2, H_2O;
$V_{\text{пс}}^{\text{расч}}$, $\mathrm{CO}_2^{\text{расч}}$, $\mathrm{O}_2^{\text{расч}}$, $\mathrm{H_2O}^{\text{расч}}$ – расчетный объем продуктов сгорания, газов CO_2, O_2, H_2O;
$V_{\mathrm{CO}_2}^{\text{об}}$ – количество газа CO_2, полученного в результате обезуглероживания;
$\Delta\alpha_{\text{д}}$ – добавочный коэффициента расхода воздуха, соответствующий его присосам в рабочую камеру печи;
$V_{\text{в}}^{\text{теор}}$ – теоретический объем воздуха, необходимый для сжигания топлива;

$H_2O^{вл}$, $O_2^{вл}$ – количество влажных газов H_2O, O_2;
$V_{O_2}^{ок}$ – количество газа O_2, затрачиваемого на окисление металла.

В этой системе неизвестными величинами являются: $\Delta\alpha_д$, $V_{CO_2}^{об}$, $V_{O_2}^{ок}$.

Так как знаменатель в каждой дроби идентичен, то систему можно представить в следующем виде:

$$\frac{V_{пс}^{расч}\cdot CO_2^{расч}+V_{CO_2}^{об}}{CO_2^{P}}=\frac{V_{пс}^{расч}\cdot O_2^{расч}+\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}\cdot O_2^{вл}-V_{O_2}^{ок}-V_{CO_2}^{об}}{O_2^{P}}=$$
$$=\frac{V_{пс}^{расч}\cdot H_2O^{расч}+\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}\cdot H_2O^{вл}}{H_2O^{P}}.$$

Отсюда выразим $V_{CO_2}^{об}$:

$$V_{CO_2}^{об}=\frac{V_{пс}^{расч}\cdot H_2O^{расч}+\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}\cdot H_2O^{вл}}{H_2O^{P}}\cdot CO_2^{P}-V_{пс}^{расч}\cdot CO_2^{расч}=$$
$$=V_{пс}^{расч}\left(\frac{H_2O^{расч}}{H_2O^{P}}\cdot CO_2^{P}-CO_2^{расч}\right)+\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}\cdot\frac{H_2O^{вл}}{H_2O^{P}}\cdot CO_2^{P}. \quad (1)$$

Итак, (1) – уравнение для определения количества образовавшегося газа CO_2. В результате ряда преобразований

$$V_{пс}^{расч}+\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}-V_{O_2}^{ок}=$$
$$=V_{пс}^{расч}\cdot\frac{O_2^{расч}}{O_2^{P}}+\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}\cdot\frac{O_2^{вл}}{O_2^{P}}-V_{O_2}^{ок}\cdot\frac{1}{O_2^{P}}-V_{CO_2}^{об}\cdot\frac{1}{O_2^{P}},$$
$$\Delta\alpha_д\left(V_в^{теор}-V_в^{теор}\cdot\frac{O_2^{вл}}{O_2^{P}}\right)=V_{пс}^{расч}\left(\frac{O_2^{расч}}{O_2^{P}}-1\right)+V_{O_2}^{ок}\left(1-\frac{1}{O_2^{P}}\right)-$$
$$-V_{пс}^{расч}\left(\frac{H_2O^{расч}}{H_2O^{P}}\cdot CO_2^{P}-CO_2^{расч}\right)\cdot\frac{1}{O_2^{P}}-\Delta\alpha_д\cdot V_в^{теор}\cdot\frac{H_2O^{вл}}{H_2O^{P}}\cdot\frac{CO_2^{P}}{O_2^{P}};$$
$$\Delta\alpha_д\left(V_в^{теор}-V_в^{теор}\cdot\frac{O_2^{вл}}{O_2^{P}}+V_в^{теор}\cdot\frac{H_2O^{вл}}{H_2O^{P}}\cdot\frac{CO_2^{P}}{O_2^{P}}\right)=$$
$$=V_{пс}^{расч}\left(\frac{O_2^{расч}}{O_2^{P}}-1\right)+V_{O_2}^{ок}\left(1-\frac{1}{O_2^{P}}\right)-V_{пс}^{расч}\left(\frac{H_2O^{расч}}{H_2O^{P}}\cdot\frac{CO_2^{P}}{O_2^{P}}-\frac{CO_2^{расч}}{O_2^{P}}\right)$$

итоговое выражение для определения $\Delta\alpha_д$ будет иметь следующий вид:

$$\Delta\alpha_д=\frac{V_{пс}^{расч}\left(\frac{O_2^{расч}}{O_2^{P}}-1\right)+V_{O_2}^{ок}\left(1-\frac{1}{O_2^{P}}\right)-V_{пс}^{расч}\left(\frac{H_2O^{расч}}{H_2O^{P}}\cdot\frac{CO_2^{P}}{O_2^{P}}-\frac{CO_2^{расч}}{O_2^{P}}\right)}{V_в^{теор}\left(1-\frac{O_2^{вл}}{O_2^{P}}+\frac{H_2O^{вл}}{H_2O^{P}}\cdot\frac{CO_2^{P}}{O_2^{P}}\right)}.$$

$$V_{\mathrm{O_2}}^{\text{ок}} = \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} \left(1 - \frac{\mathrm{O_2^{вл}}}{\mathrm{O_2^P}} + \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} - \\ - V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \left(\frac{\mathrm{O_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} + V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \left(\frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}} - \frac{\mathrm{CO_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1}. \tag{2}$$

$$V_{\text{пс}}^{\text{расч}} + \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} - \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} \left(1 - \frac{\mathrm{O_2^{вл}}}{\mathrm{O_2^P}} + \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} + \\ + V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \left(\frac{\mathrm{O_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} - V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \left(\frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}} - \frac{\mathrm{CO_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} = \\ = V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \cdot \frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} + \Delta\alpha_{\text{д}} \cdot V_{\text{в}}^{\text{теор}} \cdot \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}}.$$

$$\Delta\alpha_{\text{д}} = \left(V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \cdot \frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} - V_{\text{пс}}^{\text{расч}} - V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \left(\frac{\mathrm{O_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} + \right. \\ \left. + V_{\text{пс}}^{\text{расч}} \left(\frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}} - \frac{\mathrm{CO_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1}\right) \Bigg/ \left(V_{\text{в}}^{\text{теор}} - \right. \\ \left. - V_{\text{в}}^{\text{теор}} \left(1 - \frac{\mathrm{O_2^{вл}}}{\mathrm{O_2^P}} + \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} - V_{\text{в}}^{\text{теор}} \cdot \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}}\right);$$

$$\Delta\alpha_{\text{д}} = \frac{V_{\text{пс}}^{\text{расч}}}{V_{\text{в}}^{\text{теор}}} \cdot \frac{\frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} - 1 - \left(\frac{\mathrm{O_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} + \left(\frac{\mathrm{H_2O^{расч}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}} - \frac{\mathrm{CO_2^{расч}}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1}}{1 - \left(1 - \frac{\mathrm{O_2^{вл}}}{\mathrm{O_2^P}} + \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}} \cdot \frac{\mathrm{CO_2^P}}{\mathrm{O_2^P}}\right) \cdot \frac{\mathrm{O_2^P}}{\mathrm{O_2^P} - 1} - \frac{\mathrm{H_2O^{вл}}}{\mathrm{H_2O^P}}}. \tag{3}$$

В конечном итоге предлагается следующий алгоритм определения искомых величин:

- при помощи зависимости (3) находим $\Delta\alpha_{\text{д}}$;
- используя найденное значения $\Delta\alpha_{\text{д}}$, из зависимости (2) определяем $V_{\mathrm{O_2}}^{\text{ок}}$;
- значение $V_{\mathrm{CO_2}}^{\text{об}}$ находим из зависимости (1).

3. Проверка адекватности работы предложенной системы диагностики. Проверка системы диагностики выполнена для случая сжигания чистого метана $\mathrm{CH_4} = 100\%$ в атмосферном воздухе и следующего набора исходных данных:

- степень обогащения воздуха кислородом – 0,21 (атмосферный воздух);
- коэффициент расхода воздуха $\alpha = 1{,}18$;
- влажность воздуха $d_{\text{вл}} = 18$ г/м^3.

На основании теории горения установлено, что для полного сжигания 1 м^3 природного газа требуется 2 м^3 кислорода. Требуемое количество атмосферного воздуха составит 9,736 м^3/м^3 топлива, а действительное количество воздуха с учетом коэффициента расхода воздуха составит 11,489 м^3/м^3 топлива.

В результате расчета процесса горения газа установлены расчетные значения концентрации кислорода, углекислого газа и водяных паров в продуктах сгорания, которые составили:

– $O_2 = 2{,}883\%$;

– $CO_2 = 8{,}007\%$;

– $H_2O = 18{,}023\%$.

Суммарное количество продуктов сгорания составит 12,489 м^3/м^3 топлива.

Для проверки работоспособности системы предложено использовать в качестве исходных данных результаты расчета горения топлива:

$CO_2^{\text{Р}} = CO_2^{\text{расч}}$;

$O_2^{\text{Р}} = O_2^{\text{расч}}$;

$H_2O^{\text{Р}} = H_2O^{\text{расч}}$.

Физически такая постановка исходных данных соответствует случаю, когда дополнительный воздух в печную камеру не присасывается, поверхность металла не окисляется и не обезуглероживается.

На основании проведенных расчетов при помощи созданной системы диагностики для такого набора исходных данных получены результаты, согласно которым значения всех искомых величин ($\Delta\alpha_{\text{д}}$, $V_{O_2}^{\text{ок}}$, $V_{CO_2}^{\text{об}}$) равны нулю, что свидетельствует о правильности разработанной методики.

Для проверки чувствительности предложенной системы диагностики к погрешностям определения входных данных выполнено соответствующее исследование. Влияние погрешностей задания входных данных оценено относительно описанной выше «нулевой» точки.

Для проведения исследований с использованием полученных зависимостей составлена матрица планирования эксперимента для трех факторов. В качестве вариации исследуемых параметров выбран уровень погрешности для каждого фактора на уровне 2,5% и 5%. Оценим влияние погрешности на параметры. В таблицах 1 и 2 приводятся полученные абсолютные значения искомых величин.

Следует отметить, что в таблицах 1 и 2 символ «+» отвечает наличию погрешности в 2,5% и 5% соответственно для рассматриваемых величин, символ «−» отвечает отсутствию накладываемой погрешности, т. е. принимается расчетное значение величины.

В таблицах 3 и 4 приведены относительные значения погрешностей. При этом в качестве базиса для величины $\Delta\alpha_{\text{д}}$ выбрано базовое значение коэффициента расхода воздуха $\alpha_{\text{д}}$, равное 1,18. Для величин $V_{O_2}^{\text{ок}}$ и $V_{CO_2}^{\text{об}}$ в качестве

Таблица 1. Матрица планирования эксперимента исследования влияния погрешности 2,5% на результат в абсолютных значениях величин

Номер опыта	O_2	CO_2	H_2O	$\Delta\alpha_д$	$V_{O_2}^{ок}$	$V_{CO_2}^{об}$
1	+	+	+	$1{,}706 \cdot 10^{-3}$	0,367	0,016
2	−	+	+	$-3{,}21 \cdot 10^{-3}$	0,181	−0,03
3	+	−	+	−0,012	−0,133	−2,549
4	−	−	+	−0,017	−0,345	−2,594
5	+	+	−	0,019	0,697	2,685
6	−	+	−	0,014	0,539	2,636
7	+	−	−	$5{,}042 \cdot 10^{-3}$	0,184	0,048
8	−	−	−	0	0	0

Таблица 2. Матрица планирования эксперимента исследования влияния погрешности 5% на результат в абсолютных значениях величин

Номер опыта	O_2	CO_2	H_2O	$\Delta\alpha_д$	$V_{O_2}^{ок}$	$V_{CO_2}^{об}$
1	+	+	+	$3{,}331 \cdot 10^{-3}$	0,711	0,032
2	−	+	+	$-6{,}27 \cdot 10^{-3}$	0,353	−0,059
3	+	−	+	−0,023	−0,219	−4,972
4	−	−	+	−0,033	−0,674	−5,058
5	+	+	−	0,038	1,327	5,38
6	−	+	−	0,028	1,078	5,279
7	+	−	−	0,01	0,351	0,095
8	−	−	−	0	0	0

базиса для определения относительной погрешности выбран теоретический расход кислорода на горение, равный 2 м^3/м^3 топлива.

Полученные данные свидетельствуют о том, что разработанная система диагностики реагирует на изменение параметров не одинаково и в то же время является очень чувствительной. Таким образом, заложенный уровень погрешности в меньшей степени влияет на погрешность определения добавочного коэффициента расхода воздуха (в пределе до 3,22%) и в ряде случаев дает совершенно недопустимые результаты определения $V_{O_2}^{ок}$ и $V_{CO_2}^{об}$ (в пределе 269%).

Принято считать, что для работы системы диагностики приемлемыми являются погрешности определения искомых величин до 10%. В результате проведения ряда численных экспериментов для разных погрешностей определения входных величин установлено, что при классе точности приборов 0,1 максимальная относительная погрешность определения $V_{O_2}^{ок}$ и $V_{CO_2}^{об}$ состав-

Таблица 3. Матрица планирования эксперимента исследования влияния погрешности 2,5% на результат в относительных значениях величин

Номер опыта	O_2	CO_2	H_2O	$\Delta\alpha_д$	$V_{O_2}^{ок}$	$V_{CO_2}^{об}$
1	+	+	+	0,14	18,35	0,8
2	−	+	+	−0,27	9,05	−1,5
3	+	−	+	−1,02	−6,65	−127,45
4	−	−	+	−1,44	−17,25	−129,7
5	+	+	−	1,61	34,85	134,25
6	−	+	−	1,19	26,95	131,8
7	+	−	−	0,43	9,2	2,4
8	−	−	−	0	0	0

Таблица 4. Матрица планирования эксперимента исследования влияния погрешности 5% на результат в относительных значениях величин

Номер опыта	O_2	CO_2	H_2O	$\Delta\alpha_д$	$V_{O_2}^{ок}$	$V_{CO_2}^{об}$
1	+	+	+	0,28	35,55	1,6
2	−	+	+	−0,53	17,65	−2,95
3	+	−	+	−1,95	−10,95	−248,6
4	−	−	+	−2,80	−33,7	−252,9
5	+	+	−	3,22	66,35	269
6	−	+	−	2,37	53,9	263,95
7	+	−	−	0,85	17,55	4,75
8	−	−	−	0	0	0

ляет 5,36%, что допустимо при оценке степени развития процессов окисления и обезуглероживания металла.

В настоящее время типовые погрешности в определении концентраций углекислого газа и водяных паров составляют единицы процентов. Однако измерительная техника стремительно совершенствуется и в ближайшей перспективе можно ожидать широкое применение приборов с требуемым классом точности.

4. Выводы. В данной работе предложена система диагностики состояния газовой фазы при работе пламенных печей, позволяющая оценивать степень развития процессов окисления и обезуглероживания металла. В ее основе лежит рассмотрение баланса содержания таких компонентов как углекислый газ, кислород и водяные пары, а также разрешение системы относительно реальных концентраций перечисленных выше компонентов в продуктах сгорания, сформированных в результате присосов воздуха в печную камеру, протекания процессов окисления и обезуглероживания. В случае использования типовых приборов для определения входящих величин приемлемый уровень погрешности будет получен только при вычислении добавочного коэффициента расхода воздуха. Для обеспечения достаточной точности определения расходов кислорода на протекание процессов окисления и обезуглероживания металла необходим класс точности приборов, определяющих концентрации кислорода, углекислого газа и водяных паров на уровне 0,1.

1. *Бирюков А. Б.* Косвенное определение расхода продуктов сгорания при проведении диагностики тепловых процессов в печи периодического действия // Сталь. – 2020. – № 7. – С. 78–81.
2. *Бирюков А. Б.* Диагностика тепловой работы печного рекуператора // Сталь. – 2019. – № 2. – С. 70–73.
3. *Парахин Н. Ф., Мороз С. С.* Исследование процессов окалинообразования в зависимости от концентрации печных газов при нагреве заготовок в методической печи // Металлургия XXI столетия глазами молодых [Электронный ресурс]: сб. докл. всеукр. науч.-практ. конф. студ. – Донецк: ДонНТУ, 2011. – С. 135–136.
4. *Куницина Н. Г., Турушева А. И.* Снижение окалинообразования при нагреве заготовок в методических печах // Наука и производство Урала. – 2019. – № 15. – С. 15–17.
5. *Шульц Л. А.* О проблемах контроля и снижения высокотемпературного угара стали в нагревательных печах // Изв. высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2016. – **59**, № 7. – С. 470–478.
6. *Бирюков А. Б., Курбатов Ю. Л., Новикова Е. В., Заика А. А.* Диагностика процесса образования окалины при высокотемпературном нагреве стальной заготовки // Черная металлургия. Бюллетень научно-технической и экономической информации. – 2017. – № 11(1415). – С. 65–72.

A. B. Biryukov, A. A. Ivanova, P. A. Gnitiev

Diagnostic system for the state of the gas phase during the operation of flame furnaces, allowing to estimate the degree of development of the oxidation and decarbonization of metal

A system for diagnosing the gas phase during the operation of a combustion furnace, based on determining the magnitude of air suction into the working chamber of the furnace, oxygen consumption for oxidation and de-carbonization of metal in real-time mode is proposed. The sensitivity of the proposed system to errors in establishing input values is investigated. It is shown that in order to achieve an acceptable accuracy in determining the desired quantities, it is necessary to use measuring instruments with ultra-high accuracy.

Keywords: *flame furnace, air suction, concentration of gaseous component, metal oxidation, metal decarburization, process diagnostics, instrument accuracy class.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
ivanova.iamm@mail.ru

Получено 05.10.20

УДК 539.3

©2020. **Л. П. Вовк, Е. С. Кисель**

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В данной статье исследуется математическая модель процесса постоянных симметричных колебаний конечных изотропных кусочно-неоднородных областей с нерегулярной границей. Строится аналитическое решение сформулированной краевой задачи для тела прямоугольного сечения путем модификации метода суперпозиции и асимптотического анализа поведения неизвестных функций в сингулярных точках границы. Предлагаются некоторые численные результаты, полученные при реализации предложенного численно-аналитического алгоритма для прямоугольника с границей раздела двух областей в виде прямой и границей, аппроксимированной некоторой функцией, в частности, найден спектр собственных частот, соответствующие им формы колебаний. Проводится анализ характера концентрации напряжений в особых точках модели и на границе раздела разнородных сред.

Ключевые слова: *гармонические колебания, локальная концентрация напряжений, сингулярные точки.*

1. Введение. Изотропные неоднородные пластины часто используются в качестве элементов современных конструкций в механике горных пород и сейсмологии, строительстве и машиностроении, для защиты от вредных воздействий окружающей среды. Учитывая сложные, быстро изменяющиеся условия работы подобного рода объектов, их структурные особенности и воздействие различного вида нагрузок, применение неоднородных пластин требует выбора новых направлений проектирования и разработки, следовательно, актуальным остается вопрос совершенствования методик их расчета и анализа.

В частности, при изучении динамического поведения неоднородных пластин под действием переменных нагрузок возникает необходимость в расчете собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Распространена ситуация, когда при проектировании требуется убедиться в малой вероятности возникновения в условиях эксплуатации такого механического явления, как резонанс, крайне нежелательного в плане обеспечения общей надежности изделия.

Многократное увеличение амплитуд колебаний при резонансе и вызываемые этим высокие скачки напряжений – одна из основных причин выхода из строя изделий, эксплуатируемых в условиях вибрационных нагрузок. Резонансы наблюдаются на частотах, близких к частотам собственных колебаний, и если при проектировании изделия имеется возможность оценить спектр собственных частот конструкции, можно прогнозировать риск возникновения резонансов в известном диапазоне частот внешних воздействий [1, 2].

Актуальность исследования подобных задач заключается еще и в том, что их решение позволит оптимизировать конструкционные параметры пластины таким образом, чтобы вывести большую часть собственных частот из рабочего диапазона вибровоздействий.

В работах [3–6] разработаны методы исследования волновых полей в упругих прямоугольных областях, использующие асимптотическое поведение общих решений в особых точках границы. Коэффициенты при особенности в сингулярных слагаемых асимптотики решения, определяющего волновое поле в этих особых точках, исследовались в работе [7] только для случая однородной, прямоугольной в сечении модели.

В работах [5, 6] на основе модифицированного метода суперпозиции построено решение задачи о гармонических колебаниях бесконечной в направлении одной из осей кусочно-неоднородной призмы с гладкой границей раздела сред. Для тел подобной геометрии граница имеет направляющую для потока энергии роль, происходят элементарные процессы отражения от границы, но они не связаны с изменением направления общего потока энергии. В представленных работах рассматривается упрощенная математическая модель с гладкими внутренними и внешними границами.

В связи с активным внедрением в инженерную практику вычислительной техники, наиболее эффективным приближенным методом анализа реальных моделей, обладающих высокой степенью детализации и содержащих различные виды геометрических сингулярностей, является метод конечных элементов, реализованный во многих программных средствах. Однако для описания более сложных геометрически моделей, содержащих различные виды сингулярностей, необходима конечно-элементная модель большой размерности, что приводит к значительному увеличению временных и аппаратных ресурсов для проведения численного моделирования [1, 2].

Поэтому актуальной задачей является повышение эффективности механического анализа по определению собственных частот за счет разработки и усовершенствования аналитических методов решения упрощенных математических моделей и последующего их обобщения и расширения путем проведения конечно-элементного анализа.

Целью данной работы является: 1) изучение свойств колебательной системы в виде упрощенной модели, – конечного неоднородного прямоугольника с прямым стыковым соединением двух сред, на основе проведенного численно-аналитического решения задачи о колебаниях тонкой неоднородной прямоугольной пластины и знания явного вида и свойств нормальных мод бесконечного слоя; 2) численное моделирование прямоугольника с границей раздела двух областей в виде прямой и границей, аппроксимированной некоторой функцией, с целью определения спектра собственных частот, соответствующих им форм колебаний, а также анализ характера концентрации напряжений в особых точках модели и на границе раздела разнородных сред.

2. Постановка задачи. Рассмотрим сечение бесконечной в направлении оси α_3 неоднородной упругой призмы, которое занимает в системе координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (рис. 1), где области $G^{(m)}$ $(m = 1, 2)$ жестко состыкованы друг с другом, изотропны, в общем случае имеют различные упругие постоянные и определяются неравенствами: $G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon |\alpha_1| \leqslant c;\ |\alpha_2| \leqslant b\}$, $G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a];\ |\alpha_2| \leqslant b\}$.

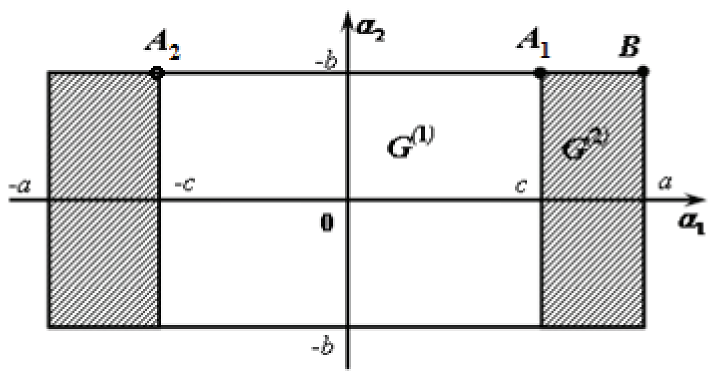

Рис. 1. Геометрия области сечения

Пусть на внешних сторонах пластины $\alpha_1 = \pm a$ задана гармонически изменяющаяся во времени с частотой ω нагрузка интенсивности $q(\alpha_2)$. В работах [3, 4] при помощи модификации метода суперпозиции все характеристики волнового поля, определяемого безразмерным частотным параметром $\Omega^{(1)} = \omega a / c_S^{(1)}$ ($c_S^{(1)}$ – скорость сдвиговых волн в области $G^{(1)}$), выражаются через введенные вспомогательные функции (в данной работе использованы обозначения, принятые в [3, 4]) $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $\varphi_1(y)$. Эти функции определяют перемещения и касательные напряжения на границе раздела сред и на внешней границе области. Именно,

$$f_1(y) = U_1^{(1)}(\delta, y), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = \varphi_1(y), \quad f_2(x) = U_2^{(1)}(x, \eta),$$
$$f_3(y) = U_1^{(2)}(\delta_2, y), \quad f_4(\hat{x}) = U_2^{(2)}(\hat{x}). \tag{1}$$

Здесь $U_i^{(m)} = v_i^{(m)}/a$, $\sigma_{12}^{(m)} = t_{12}^{(m)}/\mu_m$ – безразмерные перемещения и напряжения в областях $G^{(m)}$, соответствующие амплитудным компонентам $v_i^{(m)}$,

$t_{12}^{(m)}$ вектора перемещений и тензора напряжений, μ_m – модуль сдвига материала области $G^{(m)}$ $(m = 1, 2)$, $x = \alpha_1/a$, $y = \alpha_2/a$, $\hat{x} = (\alpha_1 - c)/a$, $\hat{x} \in [0, \delta_2]$, $\delta_2 = 1 - \delta$, $\delta = c/a$, $\eta = b/a$.

Проведем исследование особенности напряжений в угловой точке области $B(1, \eta)$ и в угловой точке стыка областей $A_1(\delta, \eta)$ (рис. 1), что эквивалентно предположению о наличии особенностей следующего вида у функций φ_1, f_i' $(i = 1, 2)$:

$$\varphi_1(y) = P_1(\eta - y)^{\alpha-1},\ f_1'(y) = Q_1(\eta - y)^{\alpha-1},\ f_3'(y) = Q_3(\eta - y)^{\gamma-1}\ \text{при}\ y \to \eta;$$
$$f_2'(x) = Q_2(\delta - x)^{\alpha-1}\ \text{при}\ x \to \delta; \quad f_4'(\hat{x}) = \bar{Q}_4(\hat{x})^{\alpha-1}\ \text{при}\ \hat{x} \to 0;$$
$$f_4'(\hat{x}) = Q_4(\delta_2 - \hat{x})^{\gamma-1}\ \text{при}\ \hat{x} \to \delta_2. \tag{2}$$

Здесь через α и γ обозначены параметры, характеризующие особенности искомых функций в угловых точках, а через P_1, Q_1, …, Q_4 – произвольные постоянные. Определяя асимптотику коэффициентов Фурье рассматриваемых функций в окрестности точек A_1 и B, учитывая отсутствие у внешней нагрузки особенностей в этих точках, приходим к системе однородных уравнений, определяющих характер особенностей характеристик волнового поля в этих точках (1)–(3):

$$-m_{12}\sin\frac{\pi\alpha}{2}H_1 + 2(2 - m_{12})\sin\frac{\pi\alpha}{2}R_1 + 2n^{(1)}\alpha R_2 + 2n^{(2)}\alpha\bar{R}_4 = 0,$$
$$(m_{12} + 2)\sin\frac{\pi\alpha}{2}H_1 + 2m_{12}\sin\frac{\pi\alpha}{2}R_1 - 2(1 - n^{(1)}\alpha)R_2 - 2(1 - n^{(2)}\alpha)\bar{R}_4 = 0,$$
$$\left(\left(n^{(1)}\right)^{-1} + \alpha\right)H_1 + 2\alpha R_1 + 2\sin\frac{\pi\alpha}{2}R_2 = 0,$$
$$\left(\left(n^{(2)}\right)^{-1} + \alpha\right)H_1 + 2\alpha R_1 + 2\sin\frac{\pi\alpha}{2}\bar{R}_4 = 0,$$
$$\sin\frac{\pi\gamma}{2}R_3 + \gamma R_4 = 0, \quad \gamma R_3 + \sin\frac{\pi\gamma}{2}R_4 = 0. \tag{3}$$

Здесь $m_{12} = \left(C_{11}^{(1)}\right)^{-1} + \left(C_{11}^{(2)}\right)^{-1}$, $n^{(\beta)} = \frac{(C_{11}^{(\beta)} - 1)}{C_{11}^{(\beta)}}$, $H_1 = -2P_1\,\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$, $R_i = 2Q_i\,\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$, $\bar{R}_4 = 2\bar{Q}_4\,\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$, $R_l = 2Q_l\,\Gamma(\gamma)\sin\frac{\pi\gamma}{2}$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $C_{i\beta}^{(m)}$ – безразмерные упругие параметры областей $G^{(m)}$ [3–5], $i = 1, 2$; $l = 3, 4$; $\beta = 1, 2$.

Систему (3) целесообразно рассмотреть как две отдельные системы для исследуемых точек. Пятое и шестое уравнение характеризуют особенности волнового поля во внешней угловой точке B, определяемые константами R_3 и R_4 и параметром γ. Эти особенности изучены достаточно полно в работах [3–5]. Характер особенности механического поля в точке B не зависит от упругих постоянных областей $\bar{G}^{(m)}$. В угловой точке стыковки областей A_1

особенности неизвестных функций определяются первыми четырьмя уравнениями системы (3), включающими H_1, R_1, R_2, $\overline{R_4}$. Учитывая условие существования нетривиального решения этих уравнений, можно численно найти параметр α и тем самым определить характер поведения вспомогательных функций при подходе к точке A_1.

Процедура численного анализа достаточно полно описана в [4].

3. Исследование характера концентрации напряжений. Остановимся на определении характера напряженно-деформированного состояния в окрестности границы раздела состыкованных прямоугольников с различными упругими свойствами. Представляет интерес влияние формы и протяженности границы раздела сред на характер и интенсивность локальной концентрации напряжений. Расчет выполним методом асимптотического интегрирования СИУ, а в тех случаях, когда рассматриваемая геометрия области не позволяет применить аналитическую обработку решения, расчет выполняется методом конечных элементов путем компьютерного моделирования и проведения модального анализа в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical 2019 R2. В данной работе приведен расчет свободных колебаний без учета предварительных напряжений, однако возможно проведение конечноэлементного анализа с учетом преднапряженного состояния (конструкционные и/или температурные нагрузки).

Материалы областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, титановый сплав (Titanium Alloy) и конструкционная сталь (Structural Steel), представлены в библиотеке материалов программного комплекса. Тестовая модель представляет собой прямоугольную пластину, линейные размеры которой по оси x (или α_1): $a = 0{,}2$ м (1/2 длины прямоугольника), по оси y (или α_2): $b = 0{,}05$ м (1/2 ширины прямоугольника), $c = 0{,}05$ м (ширина прикрепленной области) (рис. 1).

Для данной пластины выполнялся расчет первых 15 собственных частот и соответствующих им форм колебаний для гладкой прямой границы раздела и при ее модификации. Также изучалось распределение нормальных линеаризованных напряжений σ_x на найденных частотах по внешней границе, длине рассматриваемой области. Был проведен анализ влияния модифицированной формы границы раздела сред на напряженно-деформированное состояние прямоугольника, в частности, на локальную концентрацию напряжений вблизи границы раздела.

Результаты исследования для неоднородного прямоугольника с гладкой внутренней границей раздела сред представлены на рис. 2, где изображены кривые линеаризированных нормальных напряжений σ_x вдоль верхней границы прямоугольника для частот 7–13 с прямолинейной границей раздела. Кривые симметричны по пути линеаризации. В окрестности границы раздела наблюдается некоторое нарушение гладкости кривых. На 10-ой частоте в особых точках A_1 и A_2 можно отметить максимальные значение напряжений по длине прямоугольника.

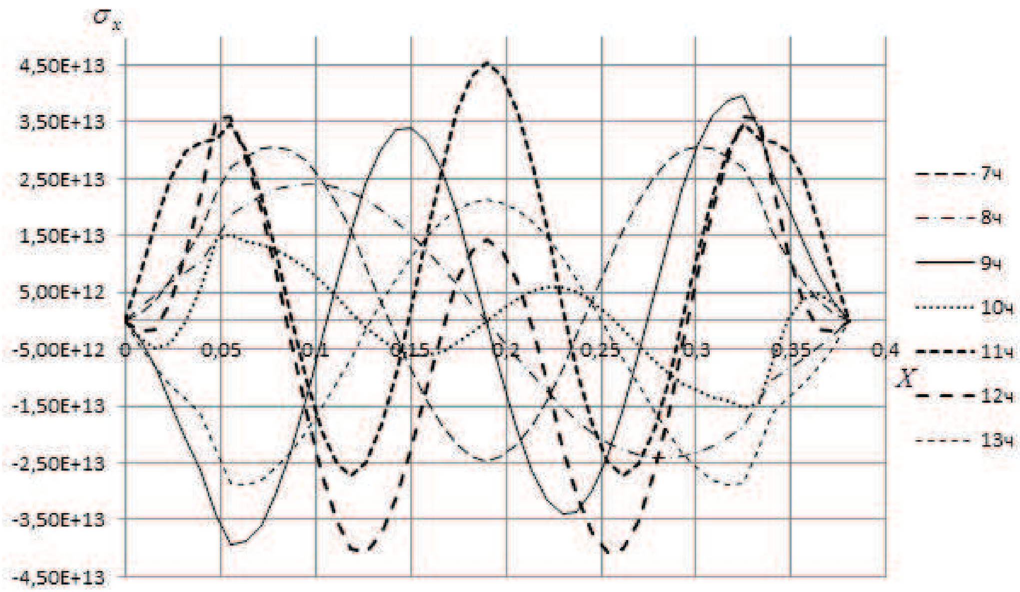

Рис. 2. Линеаризированные нормальные напряжения σ_x вдоль верхней границы (длины) прямоугольника для частот 7–13, гладкая граница

В случае, когда кривая границы раздела задавалась функцией $f(y) = A\sin(y)$, где $A = \{1; 5\}$ м$^{-3}$, имеем вариации геометрии, изображенной на рис. 3.

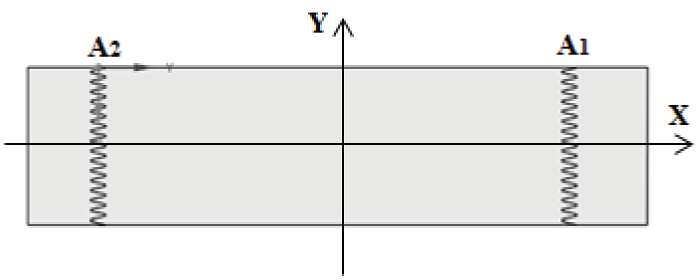

Рис. 3. Геометрия области сечения, $A = 5$ м$^{-3}$

Рассмотрим изменение линеаризированных нормальных напряжений σ_x по длине прямоугольника для частот 7–9, 13 при $A = 1$ м$^{-3}$. В данном случае под линеаризацией понимается метод постобработки, при котором в моделируемом теле выделяется тонкий срез, и поле напряжений в нем представляется как сумма постоянного касательного напряжения и линейно меняющегося напряжения изгиба.

На всех представленных на рис. 4 графиках имеем изменение характера поведения кривой при приближении к вертикальным границам раздела сред $x = 0{,}05$ м и $x = 0{,}35$ м, причем для 8, 9 и 13-й частот в окрестности границ имеем пиковые значения напряжений. Следует отметить, что такого рода значения напряжений наблюдаются со стороны более «мягкого» материала, которым в данном случае является сталь. Максимальное значение напряжения наблюдаем для 9-й частоты: $\sigma_x = 2{,}6 \cdot 10^{13}$ Па.

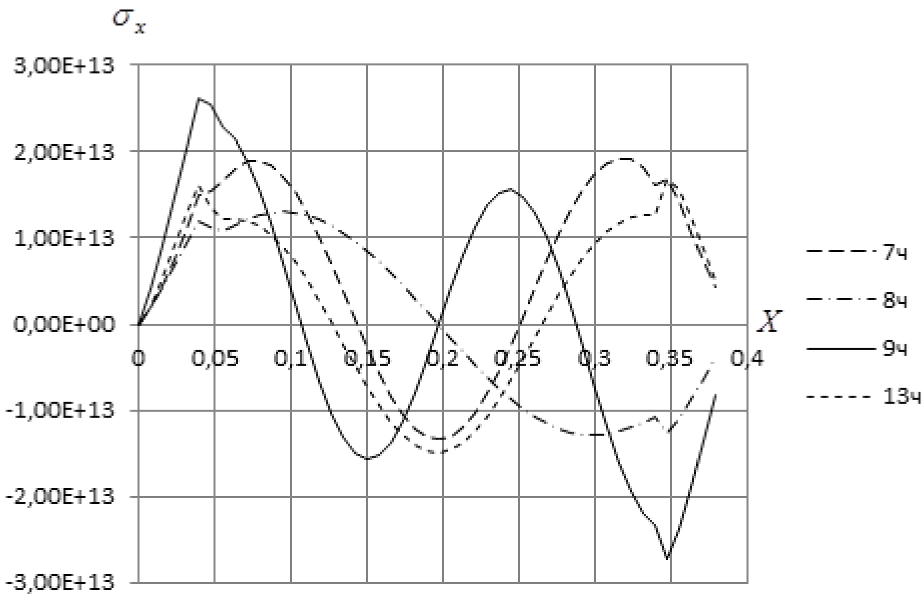

Рис. 4. Линеаризированные нормальные напряжения σ_x вдоль верхней границы (длины) прямоугольника для частот 7–9, 13, $A = 1$ м$^{-3}$

Изменяя амплитуду функции, задающей линию раздела, $f(y) = A\sin(y)$, $A = 5$ м$^{-3}$, и рассматривая аналогичные линеаризированные нормальные напряжения σ_x вдоль верхней границы (рис. 5), отмечаем их значительный рост на всех рассматриваемых частотах. Максимальное значение отмечается также на 9-й частоте, $\sigma_x = 3{,}72 \cdot 10^{13}$ Па, что в 1,43 раз превышает аналогичное значение напряжения при $A = 1$ м$^{-3}$. На всех представленных частотах наблюдается сосредоточение ярко выраженных пиковых значений напряжений на линии раздела двух сред.

На рис. 4–5 следует отметить общую закономерность – отсутствие симметрии в распределении нормальных напряжений для левой и правой внутренних границ, при $x = 0{,}05$ и $x = 0{,}35$ соответственно. Это объясняется физическими свойствами материала, которому принадлежат внутренние точки

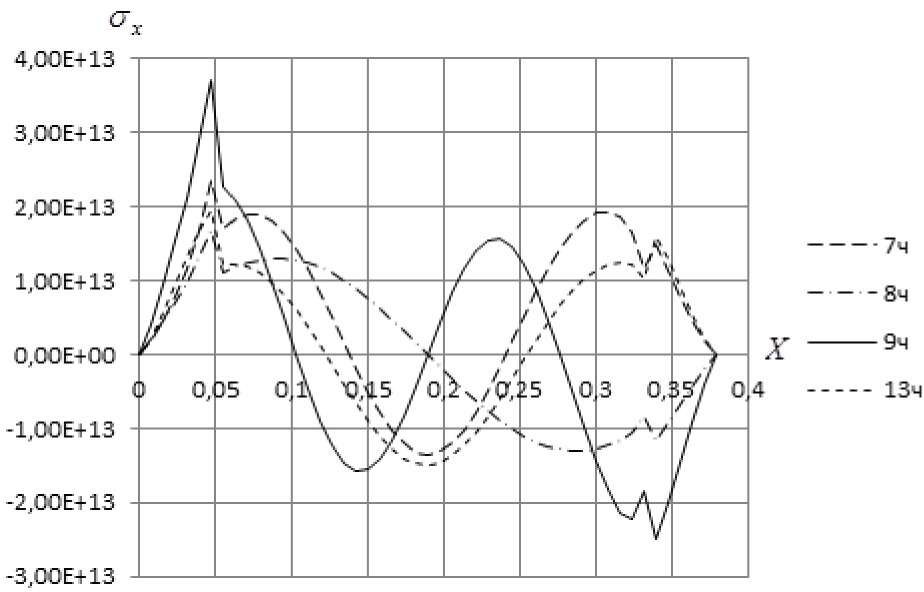

Рис. 5. Линеаризированные нормальные напряжения σ_x вдоль верхней границы (длины) прямоугольника для частот 7–9, 13, $A = 5$ м$^{-3}$

A_1 и A_2 (рис. 1). Для левой границы это более «мягкий» материал – сталь, а для правой – более «жесткий» титан. Пиковые значения напряжений оказываются смещены относительно линий раздела сред (рис. 1) в сторону более «мягкого» материала. Относительно $x = 0{,}05$ – влево, а $x = 0{,}35$ – вправо, соответственно (рис. 6). Также асимметрия обусловлена геометрическими характеристиками границ, которые нарушают общую геометрическую симметрию области и ее НДС (напряженно-деформированное состояние).

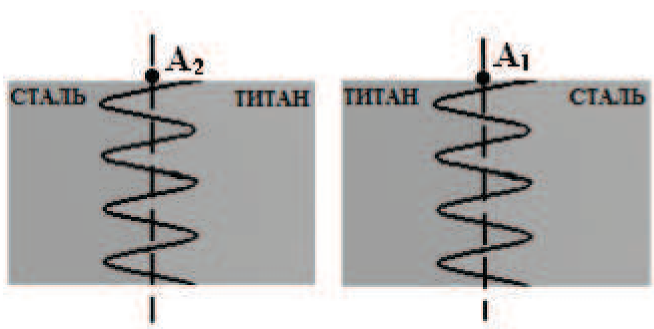

Рис. 6. Масштабированные фрагменты сечения в окрестности точек A_1 и A_2 для левой и правой внутренних границ

Эпюры распределения эквивалентных напряжений для соответствующих частот области $G^{(2)}$ (рис. 7–8) свидетельствуют о ярко выраженной концентрации напряжений в окрестности угловых точек A_1 и A_2, точек стыковки двух сред (для ω_7, ω_9, ω_{13}) и выраженном граничном резонансе для ω_8. Эпюры на рис. 7 и 8 соответствуют следующим частотам:

а) ω_7	б) ω_8	в) ω_9	г) ω_{13}

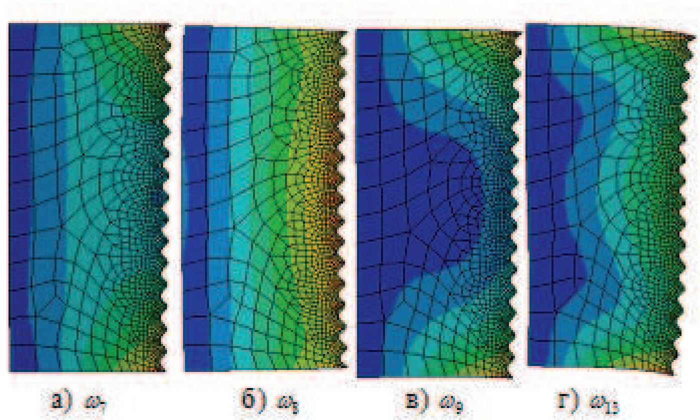

Рис. 7. Распределение эквивалентных напряжений для соответствующих частот по области $G^{(2)}$, $A = 1$ м$^{-3}$

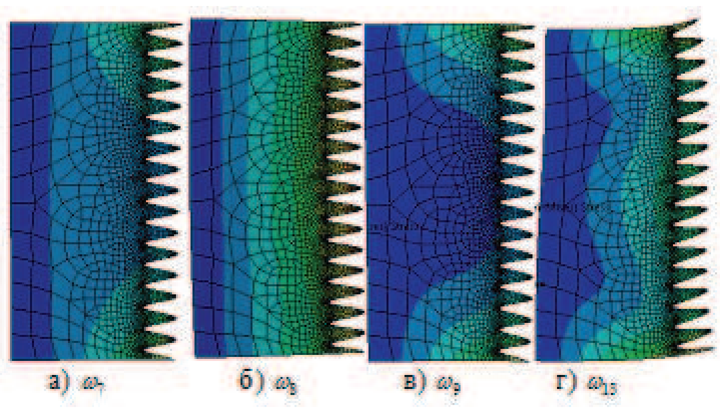

Рис. 8. Распределение эквивалентных напряжений для соответствующих частот по области $G^{(2)}$, $A = 5$ м$^{-3}$

Максимальные значения эквивалентных напряжений для данных частот по области $G^{(2)}$ отображены в таблице 1.

Таким образом, отмечается рост значений эквивалентных напряжений с ростом номера частоты, на более высоких частотах влияние геометрической неоднородности ослабляется. Увеличение амплитуды функции $f(y) = A\sin(y)$,

Таблица 1. Максимальные значения эквивалентных напряжений области $G^{(2)}$, $A = 1$ м$^{-3}$, $A = 5$ м$^{-3}$.

	σ_7, Па	σ_8, Па	σ_9, Па	σ_{13}, Па
Гладкая граница	$2{,}1361 \cdot 10^{13}$	$1{,}4811 \cdot 10^{13}$	$3{,}2692 \cdot 10^{13}$	$3{,}1265 \cdot 10^{13}$
$A = 1$	$1{,}8449 \cdot 10^{13}$	$1{,}6123 \cdot 10^{13}$	$3{,}1798 \cdot 10^{13}$	$4{,}6894 \cdot 10^{13}$
$A = 5$	$2{,}9595 \cdot 10^{13}$	$2{,}0724 \cdot 10^{13}$	$4{,}6596 \cdot 10^{13}$	$6{,}0061 \cdot 10^{13}$

задающей кривую раздела сред, способствует увеличению значений напряжений, поскольку «уменьшая скругление» вершин «приближает» сингулярность. Участок максимальных напряжений при увеличении амплитуды кривой $f(y)$ локализируется во внутренней граничной точке A_1 (рис. 8).

Выводы:

1. По проведённому в работе анализу состояния рассматриваемых вопросов можно сказать, что существующие модели динамических задач упругости неоднородных тел не всегда точно и полно способны описать напряженно-деформированное состояние при появлении большого числа дополнительных концентраторов напряжения, ввиду серьезных математических трудностей, и, как следствие, не удовлетворяют современным требованиям практики.

2. Учитывая локальный характер особенности, можно сказать, что предложенный алгоритм решения сформулированной в работе задачи носит достаточно универсальный характер и может быть применён для расчета волновых полей в нерегулярных зонах области при различных силовых граничных условиях и наличии сложной неоднородности внутренней структуры исследуемых объектов.

3. В работе был проведен анализ влияния возмущения формы границы раздела сред на локализацию волновых движений для неоднородных упругих областей. Как показали результаты исследования, сложность формы исследуемых областей (геометрическая неоднородность) и наличие дополнительных концентраторов напряжения вносят дополнительные математические трудности в расчет распределения напряжений в неоднородном теле с учётом концентрации напряжений в окрестности внутренних и внешних границ области.

4. Предложенная методика конечно-элементного анализа позволяет определять собственные (резонансные) частоты, осуществляя проверку наличия резонансных частот в рабочем частотном диапазоне изделия и оптимизируя конструкцию таким образом, чтобы исключить возникновение резонансов и повысить надежность вновь создаваемого изделия.

1. *Banerjee J. R., Papkov S. O., Liu X., Kennedy D.* Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case // J. of Sound and Vibration. – 2015. – **342**. – P. 177–199.

2. *Nefovska-Danilovich M., Petronijevic M.* In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using the dynamic stiffness method // Computers & Structures. – 2015. – **152**. – P. 82–95.
3. *Вовк Л. П., Соболь Б. В.* О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред // Прикладная математика и механика. – 2005. – **69**, Вып. 2. – С. 269–278.
4. *Вовк Л. П., Кисель Е. С.* Анализ характеристик волнового поля в задачах диагностики неоднородных термоупругих областей // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2017. – № 1. – С. 28–44.
5. *Вовк Л. П.* Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
6. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
7. *Папков С. О.* Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями: анализ и решение бесконечной системы // Акустический журнал. – 2015. – **61**, № 2. – С. 152–160.

L. P. Vovk, K. S. Kisel

Analysis of characteristics of a wave field in researches of inhomogeneous bodies

This article investigates the mathematical model of the process of constant symmetric vibrations of finite isotropic piecewise-inhomogeneous regions with an irregular boundary. An analytical solution of the formulated boundary value problem for a rectangular body is constructed by modifying the superposition method and asymptotic analysis of the behavior of unknown functions at singular points of the boundary. Some numerical results obtained in the implementation of the proposed numerical-analytical algorithm for a rectangle with a boundary between two regions in the form of a straight line and a boundary approximated by a certain function are proposed, in particular, the spectrum of natural frequencies and the corresponding vibration modes are found. An analysis is made of the nature of the stress concentration at specific points of the model and at the interface of dissimilar media.

Keywords: *harmonic oscillations, local stress concentration, singular points.*

АДИ ГОУ ВПО «ДонНТУ», Горловка
Получено 24.02.20
e.s.kisel@gmail.com
lv777@list.ru

УДК 517.5

©2020. **В. В. Волчков, Вит. В. Волчков**

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

Пусть $V_r(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, – множество функций $f \in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам из $\mathbb{R}^n$ радиуса r. В работе изучаются интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ и некоторых его обобщений. В случае, когда множество узлов интерполяции является конечным, получена теорема о существовании решения интерполяционной задачи при общих предположениях.

Ключевые слова: *интерполяционные задачи, сферические средние, периодичность в среднем.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $f \in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ и выполнено равенство

$$\int_{|x|\leqslant r} f(x+y)\,dx = 0 \tag{1}$$

при некотором фиксированном $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$. Верно ли, что $f = 0$? Этот вопрос был рассмотрен в 1929 году известным румынским математиком Д. Помпейю [1], который утверждал, что при $n = 2$ ответ является положительным. Однако, спустя пятнадцать лет Л. Чакалов [2] обнаружил, что доказательство Д. Помпейю содержит ошибку. Более того, он показал, что функция $f(x_1, x_2) = \sin(\lambda x_1)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным кругам в $\mathbb{R}^2$, если число λ является нулём функции Бесселя J_1. Впоследствии выяснилось, что аналогичные примеры ненулевых функций с условием (1) можно построить, используя метод, предложенный И. Радоном [3] ещё в 1917 году. Этот метод основан на теореме о среднем для собственных функций оператора Лапласа и может быть распространён на произвольное двухточечно-однородное пространство X (см. [4, часть 2, п. 2.4]). Кроме того, он позволяет строить ненулевые функции на X, имеющие нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса.

Для области $G \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $V_r(G)$ множество функций $f \in L_{\rm loc}(G)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, содержащимся в G (если область G не содержит таких шаров, то полагаем $V_r(G) = L_{\rm loc}(G)$). Данный класс функций, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и других авторов (см. обзоры [5–7] и монографии [4, 8, 9], содержащие обширную библиографию). Укажем основные направления в этих исследованиях.

1. Изучение нулевых множеств и соответствующие теоремы единственности для класса $V_r(G)$ [4, 8–11]. Данное направление восходит к теореме единственности Ф. Йона [10] для функций с нулевыми сферическими средними.

2. Исследование допустимых ограничений на рост ненулевых функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ и его аналогов на неограниченных областях (теоремы типа Лиувилля и Фрагмена – Линделёфа [4, 8–13]).

3. Изучение функций с условиями типа (1), в которых r принадлежит заданному двухэлементному множеству [4–9, 11, 14, 15] (теоремы о двух радиусах). Первым результатом в этом направлении является классическая теорема Д. Дельсарта [16, 17] о характеризации гармонических функций посредством уравнения средних значений, выполненного только для двух фиксированных радиусов.

4. Описание функций класса $V_r(G)$ в виде рядов по сферическим гармоникам [4, 8, 9, 18] (аналоги разложений Тейлора и Лорана из теории аналитических функций).

5. Теоремы о стирании особенностей [4, 8, 9, 18, 19].

6. Задачи интегральной геометрии о восстановлении функций из заданных классов по известным шаровым средним [4, 9, 20–23].

7. Аппроксимация функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями специальных функций [4, 8, 9].

8. Изучение аналогов и обобщений класса $V_r(G)$ на различных однородных пространствах и группах (например, на римановых симметрических пространствах) [4–9, 13–15, 21–23].

В данной работе изучаются интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ и некоторых его обобщений. В случае, когда множество узлов интерполяции является конечным, получена теорема о существовании решения интерполяционной задачи при общих предположениях.

2. Формулировка основного результата. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора попарно различных точек $a_1, \dots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ и любого набора констант $b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \dots, q)$ существует вещественно аналитическая функция $G \in V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям*

$$G(a_k) = b_k, \quad k = 1, \dots, q. \tag{2}$$

Из доказательства теоремы 1 видно (см. § 3), что аналогичный результат имеет место не только для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$, а и для классов решений уравнений свёртки $f * T = 0$, где T – радиальное распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем и непустым множеством нулей его сферического преобразования.

Данные уравнения свертки включают, например, классы решений эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$P(\Delta) = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа, P – алгебраический многочлен, отличный от тождественной константы.

Из теоремы 1 получаем следующее следствие, которое, в частности, показывает, что решение интерполяционной задачи (2) для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ не единственно.

Следствие 1. *Пусть $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора попарно различных точек $a_1, \ldots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям*

$$f(a_k) = 0 \quad \text{при всех} \quad k.$$

Отметим также, что в теореме 1 существенно, что в определении класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ рассматривается интегрирование по шарам, которое приводит к инвариантности рассматриваемого класса относительно группы вращений. Можно показать, что аналог теоремы 1 для класса функций, определяемого наличием нулевых интегралов по всем сдвигам фиксированного параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, является неверным. Действительно, всякая такая непрерывная функция удовлетворяет некоторому линейному разностному уравнению, связывающему значения функции в вершинах этого параллелепипеда (см. [8, часть 4, гл. 2]). Поэтому, если взять в качестве узлов интерполяции вершины данного параллелепипеда, то числа b_k в условии (2) не могут быть заданы произвольно.

3. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $w_k = (w_{k,1}, \ldots, w_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, \ldots, q\}$. Предположим, что

$$w_{i,1} \neq w_{j,1} \quad \text{при} \quad i, j \in \{1, \ldots, q\}, \quad i \neq j. \tag{3}$$

Символом $\sqrt{z}$ обозначается однозначная и непрерывная ветвь данной функции в области $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{C}$,

$$f(x,t) = e^{i(x_1 t_1 + \ldots + x_{n-1} t_{n-1})} e^{i x_n \sqrt{z - t_1^2 - \ldots - t_{n-1}^2}}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть существуют постоянные $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, q$, такие что*

$$\sum_{k=1}^{q} c_k \, f(w_k, t) = 0 \tag{5}$$

для всех t, принадлежащих области

$$U_{a,b} = \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : a < t_1^2 + \ldots + t_{n-1}^2 < b\}.$$

Тогда $c_k = 0$ при всех k.

Доказательство. Из определения f и равенства (5) имеем

$$\sum_{k=1}^{q} c_k e^{i(w_{k,1}t_1+\ldots+w_{k,n-1}t_{n-1})} e^{iw_{k,n}\sqrt{z-t_1^2-\ldots-t_{n-1}^2}} = 0$$

при $t \in U_{a,b}$. Зафиксируем $t_2, \ldots, t_{n-1}$ и рассмотрим левую часть последнего равенства как функцию переменного t_1. Эта функция допускает аналитическое продолжение в область, содержащую точки $t_1 = \lambda + i\mu$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех достаточно больших $\mu > 0$. Учитывая условие (3), отсюда при $\mu \to +\infty$ заключаем, что

$$c_k e^{iw_{k,n}\sqrt{z-t_1^2-\ldots-t_{n-1}^2}} = 0 \quad \text{при любых} \quad t \in U_{a,b},\ k \in \{1, \ldots, q\}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение. □

Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – радиальное распределение и $\widetilde{T}$ – его сферическое преобразование (см. [8, часть 1, гл. 6]). Предположим, что $\widetilde{T}(\zeta) = 0$ при некотором $\zeta \in \mathbb{C}$.

Лемма 2. *Для любого $q \in \mathbb{N}$ и любого набора констант $\gamma_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, \ldots, q$) существует вещественно аналитическая функция $F \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию*

$$F(w_k) = \gamma_k \quad \textit{при всех} \quad k.$$

Доказательство. Положим $z = \zeta^2$ и рассмотрим функции

$$g_k(t) = f(w_k, t), \quad t \in U_{a,b},$$

где $k = 1, \ldots, q$ и f определена равенством (4). Из леммы 1 следует, что функции g_k линейно независимы на $U_{a,b}$. Пусть $m \in \{1, \ldots, q\}$. Обозначим через L_m линейное подпространство в $L^2(U_{a,b})$, порожденное функциями g_k, такими что $k \neq m$. Так как $g_m \notin L_m$, по теореме Хана – Банаха существует линейный непрерывный функционал Φ_m на $L^2(U_{a,b})$, такой что

$$\Phi_m|_{L_m} = 0 \quad \text{и} \quad \Phi_m(g_m) = 1. \tag{6}$$

Из теоремы Рисса следует, что Φ_m имеет вид

$$\Phi_m(u) = \int_{U_{a,b}} u(t)\,\varphi_m(t)\,dt, \quad u \in L^2(U_{a,b}),$$

для некоторой функции $\varphi_m \in L^2(U_{a,b})$. Положим теперь

$$F(x) = \sum_{m=1}^{q} \gamma_m \int_{U_{a,b}} f(x,t)\,\varphi_m(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Используя (6), отсюда имеем

$$\begin{aligned} F(w_k) &= \sum_{m=1}^{q} \gamma_m \int_{U_{a,b}} f(w_k,t)\,\varphi_m(t)\,dt = \\ &= \sum_{m=1}^{q} \gamma_m \,\Phi_m(g_k) = \gamma_k \end{aligned} \tag{8}$$

при всех k. Кроме того, из определения $f(x,t)$ следует, что $f * T = 0$. Отсюда, из (7) и (8) получаем, что F удовлетворяет всем требованиям леммы 2. $\square$

4. Доказательство основного результата. Перейдем к доказательству теоремы 1. Нетрудно видеть, что существует $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что

$$(\xi, a_i - a_j) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i,j \in \{1,\ldots,q\}, \quad i \neq j. \tag{9}$$

Поскольку группа $SO(n)$ действует транзитивно на $\mathbb{S}^{n-1}$, для некоторого $\tau \in SO(n)$ выполняется условие $\tau\xi = (1,0,\ldots,0)$. Полагая $w_k = \tau a_k$, $k \in \in \{1,\ldots,q\}$, из (9) получаем, что

$$(\tau\xi, w_i - w_j) \neq 0, \quad i,j \in \{1,\ldots,q\}, \quad i \neq j.$$

Это означает, что выполнено условие (3). Согласно лемме 2, существует вещественно аналитическая функция $F \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, такая что $F(w_k) = b_k$ при всех $k = 1,\ldots,q$. Полагая $G(x) = F(\tau x)$, имеем

$$G(a_k) = F(\tau a_k) = F(w_k) = b_k$$

при всех k. Кроме того, G вещественно аналитична и принадлежит классу $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

1. *Pompeiu D.* Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réeles // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique. – 1929. – **15**, Sér. 5. – P. 265–269.
2. *Chakalov L.* Sur un problème de D. Pompeiu // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. – 1944. – **40**. – P. 1–14.
3. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. – 1917. — **69**. – P. 262–277.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.

5. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
6. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. ВИНИТИ. – 1989. – **54**. – С. 5–111.
7. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" // Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – Vol. 278. – P. 69–74.
8. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 672 p.
10. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
11. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – **72**. – P. 403–416.
12. *Rawat R., Sitaram A.* The injectivity of the Pompeiu transform and L^p-analogues of the Wiener Tauberian theorem // Israel J. Math. – 1995. – **91**. – P. 307–316.
13. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Analyse Math. – 1994. – **63**. – P. 255–286.
14. *Ungar P.* Freak theorem about functions on a sphere // J. London Math. Soc. (2). – 1954. – **29**. – P. 100–103.
15. *Schneider R.* Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres // J. Math. Anal. Appl. – 1969. – **26**. – P. 381–384.
16. *Delsarte J.* Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. – 1969. – **246**. – P. 1358–1360.
17. *Netuka I., Vesely J.* Mean value property and harmonic functions // Classical and Modern potential Theory and Applications / Comri Sankaran et al., ed. Kluwer Acad. Publ. – 1994. – P. 359–398.
18. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сборник – 1997. – **188**, № 9. – С. 13–30.
19. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними // Сиб. матем. журн. – 2017. – **58**, № 3. – С. 543–552.
20. *Berenstein C. A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. – 1990. – **54**. – P. 259-287.
21. *Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique – Cas des deux boules // J. Complex Variables. — 2000. – **43**. – P. 29–57.
22. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН. – 2001. – **379**, № 5. – С. 587–590.
23. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ. – 2003. – **15**, № 5. – С. 169–197.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Interpolation of functions with zero ball means

Let $V_r(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, be the set of functions $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ with zero integrals over all balls in $\mathbb{R}^n$ of radius r. Interpolation problems for the class $V_r(\mathbb{R}^n)$ and its generalizations are studied. In the case when the set of interpolation nodes is finite we solve the interpolation problem under general conditions.

Keywords: *interpolation problems, spherical means, mean periodicity.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк
valeriyvolchkov@gmail.com
volna936@gmail.com

Получено 12.11.20

UDC 517.984.5

©2020. **Ya. I. Granovskyi**

TO THE SPECTRAL THEORY OF QUANTUM GRAPHS WITH SUMMABLE MATRIX POTENTIALS

Let $\mathcal{G}$ be a metric noncompact connected graph with finitely many edges. The main object of the paper is the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ associated in $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ with a matrix Sturm – Liouville expression and boundary delta-type conditions at each vertex. Assuming that the potential matrix is summable and applying the technique of boundary triplets and the corresponding Weyl functions, we show that the singular continuous spectrum of the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ as well as any other self-adjoint realization of the Sturm – Liouville expression is empty. We also indicate conditions on the graph ensuring pure absolute continuity of the positive part of $\mathbf{H}_\alpha$.

Keywords: *Quantum graphs, matrix Sturm – Liouville expression, delta-type conditions, absolutely continuous spectrum, singular continuous spectrum, point spectrum, boundary triplet, Weyl function.*

1. Introduction. The spectral theory of quantum graphs with a finite or infinite number of edges has been actively developed over the last three decades (see [1–8] and the references therein). In particular, Schrödinger and Laplace operators on the lattices, carbon nano-structures and periodic metric graphs have attracted a lot of attention (see e.g. [9–12]).

In this paper we consider a noncompact connected quantum graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ with finitely many edges $\mathcal{E}$ and vertices $\mathcal{V}$ assuming that at least one of its edges is infinite. We assume that $\mathcal{G}$ has no "loops" ("tadpoles") and multiple edges, i.e. no edge starts and ends at the same vertex, and no edges connecting two same vertices; this can always be achieved by introducing additional vertices, if necessary. The main object of the paper is the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ associated in $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ with the matrix Sturm – Liouville expression $\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q$ with summable potential matrix $Q \in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$ and boundary delta-type conditions at each vertex $v \in \mathcal{V}$:

$$\begin{cases} f \quad \text{is continuous at} \quad v, \\ \sum_{e\in\mathcal{E}_v} f_e'(v) = \alpha(v)f(v), \end{cases} \qquad v \in \mathcal{V}, \tag{1}$$

(see [2, 8], and formula (32) below), where $\alpha\colon \mathcal{V} \to \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)^*$ is a matrix function. For $\alpha = 0$, condition (1) turns into the well-known Kirchhoff condition, and we denote by $\mathbf{H}_{\text{kir}} := \mathbf{H}_{0,Q}$ the corresponding Hamiltonian. To treat the Hamiltonian $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ in the framework of extension theory we introduce the minimal operator $A_{\min} = A = \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} A_e$ associated with the expression $\mathcal{A}$ on $\mathcal{G}$ and being a direct sum of the minimal operators A_e on each edge $e \in \mathcal{E}$.

In the present work we consider certain spectral problems for arbitrary noncompact connected quantum graphs $\mathcal{G}$ with finitely many edges. Namely, we show that each realization $\widetilde{A}$ of $\mathcal{A}$ (each extension of A), including $\mathbf{H}_\alpha$, has no singular continuous spectrum although it may have a discrete set of positive eigenvalues embedded in the absolutely continuous spectrum $\sigma_{\rm ac}(\widetilde{A}) = [0,\infty)$.

Notation. Through the paper $\mathfrak{H}$ and $\mathcal{H}$ denote separable Hilbert spaces; $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ and $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ denote the spaces of bounded and closed operators in $\mathfrak{H}$, respectively. As usual $\sigma_{\rm ac}(T)$, $\sigma_{\rm sc}(T)$, $\sigma_{\rm p}(T)$, and $\sigma_{\rm d}(T)$ denote the absolutely continuous, singular continuous, point and discrete spectra of an operator $T = T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$; $\sigma_{\rm p}(T)$ is the closure of $\sigma_{\rm pp}(T)$, the set of eigenvalues of T. $E_T(\cdot)$ is the spectral measure of T, and $\kappa_-(T) := \dim E_T(-\infty,0)$; $T^{\rm ac}$ is the absolutely continuous part of T.

2. Preliminaries.

2.1. Boundary triplets and Weyl functions. Let us recall some basic facts of the theory of abstract boundary triplets and the corresponding Weyl functions, cf. [13–15].

The set $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ of closed linear relations in $\mathcal{H}$ is the set of closed linear subspaces of $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Recall that $\mathrm{dom}(\Theta) = \bigl\{f : \{f,f'\}\in\Theta\bigr\}$, $\mathrm{ran}(\Theta) = \bigl\{f' : \{f,f'\}\in\Theta\bigr\}$, and $\mathrm{mul}(\Theta) = \bigl\{f' : \{0,f'\}\in\Theta\bigr\}$ are the domain, the range, and the multivalued part of Θ. A closed linear operator A in $\mathcal{H}$ is identified with its graph $\mathrm{gr}(A)$, so that the set $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ of closed linear operators in $\mathcal{H}$ is viewed as a subset of $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. In particular, a linear relation Θ is an operator if and only if $\mathrm{mul}(\Theta)$ is trivial. We recall that the adjoint relation $\Theta^*\in\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ of $\Theta\in\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ is defined by

$$\Theta^* = \left\{\begin{pmatrix} h \\ h'\end{pmatrix} : (f',h)_{\mathcal{H}} = (f,h')_{\mathcal{H}} \text{ for all } \begin{pmatrix} f \\ f'\end{pmatrix}\in\Theta\right\}.$$

A linear relation Θ is said to be *symmetric* if $\Theta\subset\Theta^*$ and self-adjoint if $\Theta=\Theta^*$.

For a symmetric linear relation $\Theta\subseteq\Theta^*$ in $\mathcal{H}$ the multivalued part $\mathrm{mul}(\Theta)$ is the orthogonal complement of $\mathrm{dom}(\Theta)$ in $\mathcal{H}$. Therefore setting $\mathcal{H}_{\rm op} := \overline{\mathrm{dom}(\Theta)}$ and $\mathcal{H}_\infty = \mathrm{mul}(\Theta)$, one arrives at the orthogonal decomposition $\Theta = \Theta_{\rm op}\oplus\Theta_\infty$ where $\Theta_{\rm op}$ is a symmetric operator in $\mathcal{H}_{\rm op}$, the operator part of Θ, and $\Theta_\infty = \bigl\{\bigl(\begin{smallmatrix}0\\ f'\end{smallmatrix}\bigr) : f'\in\mathrm{mul}(\Theta)\bigr\}$, a "pure" linear relation in $\mathcal{H}_\infty$.

Let A be a densely defined closed symmetric operator in a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices $\mathrm{n}_\pm(A) = \dim(\mathcal{N}_{\pm\mathrm{i}}) \leqslant \infty$, where $\mathcal{N}_z := \ker(A^*-z)$ is the defect subspace.

Definition 2.1 ([15]). A triplet $\Pi = \{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ is called a *boundary triplet* for the adjoint operator A^* if $\mathcal{H}$ is an auxiliary Hilbert space and

$$\Gamma_0,\Gamma_1\colon\ \mathrm{dom}(A^*)\to\mathcal{H}$$

are linear mappings such that the abstract Green identity

$$(A^*f,g)_{\mathfrak{H}} - (f,A^*g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f,\Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f,\Gamma_1 g)_{\mathcal{H}},\quad f,g\in\mathrm{dom}(A^*),\tag{2}$$

holds and the mapping $\Gamma := \begin{pmatrix}\Gamma_0\\ \Gamma_1\end{pmatrix} : \operatorname{dom}(A^*) \to \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ is surjective.

Note that a boundary triplet for A^* exists whenever $\mathrm{n}_+(A) = \mathrm{n}_-(A)$. Moreover, $\mathrm{n}_\pm(A) = \dim(\mathcal{H})$ and $\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0)\cap\ker(\Gamma_1) = \operatorname{dom}(A)$. Note also that Γ is a bounded mapping from $\mathfrak{H}_+ = \operatorname{dom}(A^*)$ equipped with the graph norm of A^* to $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

A boundary triplet for A^* is not unique.

Definition 2.2. (i) A closed extension A' of A is called a *proper extension*, if $A\subset A'\subset A^*$. The set of all proper extensions of A completed by the (non-proper) extensions A and A^* is denoted by Ext_A.

(ii) Two extensions $A', A''\in\mathrm{Ext}_A$ are called disjoint if $\operatorname{dom}(A')\cap\operatorname{dom}(A'') = \operatorname{dom}(A)$ and transversal if in addition $\operatorname{dom}(A')+\operatorname{dom}(A'') = \operatorname{dom}(A^*)$.

Any self-adjoint extension $\widetilde{A}$ of A is proper, i.e. $\widetilde{A}\in\mathrm{Ext}_A$. Fixing a boundary triplet Π one can parameterize the set Ext_A in the following way.

Proposition 2.3 ([14]). *Let A be as above and let $\Pi = \{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^*. Then the mapping*

$$\mathrm{Ext}_A \ni \widetilde{A} \to \Gamma\operatorname{dom}(\widetilde{A}) = \{\{\Gamma_0 f,\Gamma_1 f\} :\ f\in\operatorname{dom}(\widetilde{A})\} =: \Theta\in\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \tag{3}$$

establishes a bijective correspondence between the sets Ext_A and $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. We put $A_\Theta := \widetilde{A}$ where Θ is defined by (3), i.e. $A_\Theta := A^*\upharpoonright\Gamma^{-1}\Theta = A^*\upharpoonright\big\{f\in\operatorname{dom}(A^*) : \{\Gamma_0 f,\Gamma_1 f\}\in\Theta\big\}$. Moreover:

(i) *A_Θ is symmetric (self-adjoint) if and only if Θ is symmetric (self-adjoint), i.e. $\Theta\subseteq\Theta^*$ $(\Theta=\Theta^*)$. Besides, $\mathrm{n}_\pm(A_\Theta) = \mathrm{n}_\pm(\Theta)$.*

(ii) *The extensions A_Θ and A_0 are disjoint (transversal) if and only if Θ is the graph of an operator $B\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. In this case $A_B := A_\Theta$ is given by*

$$\widetilde{A} = A_B = A^*\upharpoonright\ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0). \tag{4}$$

Moreover, the extensions A_B and A_0 are transversal if and only if $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

The linear relation Θ (the operator B) in the correspondence (3) (resp. (4)) is called *the boundary relation (the boundary operator)*. We emphasize that for differential operators parametrization (3)–(4) leads to a description of the set of proper extensions directly in terms of boundary conditions.

It follows immediately from Proposition 2.3 (i) that the extensions

$$A_0 := A^*\upharpoonright\ker(\Gamma_0) \quad\text{and}\quad A_1 := A^*\upharpoonright\ker(\Gamma_1) \tag{5}$$

are self-adjoint. Indeed, $A_j = A_{\Theta_j}$, $j\in\{0,1\}$, where the subspaces $\Theta_0 := \{0\}\times\mathcal{H}$ and $\Theta_1 := \mathcal{H}\times\{0\}$ are self-adjoint relations in $\mathcal{H}$.

Moreover, for any self-adjoint extension $\widetilde{A} := \widetilde{A}^*\in\mathrm{Ext}_A$ there exists a boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ for A^* such that $\ker(\Gamma_0) = \operatorname{dom}(\widetilde{A})$.

Next following [13, 14] we introduce the concept of abstract Weyl function. Emphasize that the role of abstract Weyl function in the extension theory is similar to that of the classical Weyl – Titchmarsh m-function in the spectral theory of singular Sturm – Liouville operators.

Definition 2.4 ([13])**.** Let A be a densely defined closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices and let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^*. The operator valued functions $\gamma(\cdot)\colon \rho(A_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ and $M(\cdot)\colon \rho(A_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ defined by

$$\gamma(z) := \big(\Gamma_0 \upharpoonright \mathcal{N}_z\big)^{-1} \quad \text{and} \quad M(z) := \Gamma_1 \gamma(z), \qquad z \in \rho(A_0), \tag{6}$$

are called the γ-*field* and the *Weyl function*, respectively, corresponding to the boundary triplet Π.

The γ-field $\gamma(\cdot)$ and the Weyl function $M(\cdot)$ in (6) are well defined. Moreover, both $\gamma(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are holomorphic on $\rho(A_0)$ and the following relations hold (see [13])

$$\gamma(z) = \big(I + (z-\zeta)(A_0 - z)^{-1}\big)\gamma(\zeta), \qquad z, \zeta \in \rho(A_0), \tag{7}$$

$$M(z) - M(\zeta)^* = (z - \overline{\zeta})\gamma(\zeta)^*\gamma(z), \qquad z, \zeta \in \rho(A_0). \tag{8}$$

Identities (7) and (8) mean that $\gamma(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are the γ-field and the Q-function of the operator A_0, respectively, in the sense of M. Krein (see [16, 17]). It follows from (8) that $M(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$, i.e. it is $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-valued *Nevanlinna function*, i.e. $M(\cdot)$ is holomorphic function on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfying

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} M(z) \geqslant 0, \qquad M(z)^* = M(\overline{z}), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{9}$$

Moreover, due to (8) $M(\cdot) \in R^u[\mathcal{H}]$, i.e. it satisfies $0 \in \rho(\operatorname{Im} M(i))$.

It is well known that each $R[\mathcal{H}]$-function, in particular, the Weyl function $M(\cdot)$, admits an integral representation (see, for instance, [18, 19])

$$M(z) = C_0 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\Sigma_M(t), \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Sigma_M(t)}{1+t^2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tag{10}$$

for $z \in \rho(A_0)$, where $\Sigma_M(\cdot)$ is an operator-valued Borel measure on $\mathbb{R}$ and $C_0 = C_0^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. The integral in (10) is understood in the strong sense. A linear term $C_1 z$ is missing in (10) because A is densely defined (see [13]).

Recall that a symmetric operator A in $\mathfrak{H}$ is said to be *simple* if it does not admit a non-trivial orthogonal decomposition $A = A' \oplus S$ where A' is a symmetric operator and $S = S^*$. It is well-known that A is simple if and only if the closed linear span of $\{\mathfrak{N}_z(A) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ coincides with $\mathfrak{H}$.

If A is simple, then the Weyl function $M(\cdot)$ determines the boundary triplet Π uniquely up to the unitary equivalence (see [13]). In particular, $M(\cdot)$ contains the full information about the spectral properties of A_0. Moreover, the spectrum of any proper (not necessarily self-adjoint) extension $A_\Theta \in \mathrm{Ext}_A$ can be described by means of $M(\cdot)$ and the boundary relation Θ.

Proposition 2.5 ([13, Theorem 2.2]). *Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* and let $M(\cdot)$ and $\gamma(\cdot)$ be the corresponding Weyl function and the γ-field. Let also $\widetilde{A} = A_\Theta \in \mathrm{Ext}_A$ and $\rho(A_\Theta) \neq \emptyset$. Then:*

(i) *The following Krein type formula holds*

$$(A_\Theta - z)^{-1} - (A_0 - z)^{-1} = \gamma(z)(\Theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\overline{z}), \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A_\Theta). \tag{11}$$

(ii) *If A is simple, then for any $z \in \rho(A_0)$ the following equivalence holds*

$$z \in \sigma_j(A_\Theta) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \sigma_j(\Theta - M(z)), \qquad j \in \{\mathrm{pp}, \mathrm{c}, \mathrm{r}\}. \tag{12}$$

We complete formula (11) for $\Theta = \ker\,(C\ \ D)$ (see [17, 20]). Then

$$(\Theta - M(z))^{-1} = (C - DM(z))^{-1}\,D. \tag{13}$$

Formula (11) generalizes the classical Krein formula for canonical resolvents (cf. [16, 17]). It establishes a one-to-one correspondence between the set of proper extensions $\widetilde{A} = A_\Theta$ with $\rho(A_\Theta) \neq \emptyset$ and the set of linear relations Θ in $\mathcal{H}$. Note also that all parameters entered in (11) are expressed in terms of the boundary triplet Π (see formulas (4) and (6)) (cf. [13, 14]).

Remark 2.6 ([18, Ch. VIII], [21]). In the case of $\mathrm{n}_\pm(A) = m < \infty$, the set of all self-adjoint extensions of the operator A is parameterized as follows:

$$\begin{gathered} \mathrm{Ext}_A \ni \widetilde{A} = \widetilde{A}^* = A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \\ \text{where} \quad CD^* = DC^*, \quad \det(CC^* + DD^*) \neq 0, \quad C, D \in \mathbb{C}^{m\times m}. \end{gathered} \tag{14}$$

In the following proposition describing self-adjoint extensions with finite negative spectrum we restrict ourselves to the case of finite deficiency indices.

Proposition 2.7 ([13, 14]). *Let A be a densely defined non-negative symmetric operator in $\mathfrak{H}$, $\mathrm{n}_\pm(A) = m < \infty$, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* such that $A_0 = \widehat{A}_F$ is the Friedrichs extension of A. Further, let $M(\cdot)$ be the corresponding Weyl function and let $A_{C,D}$ be a selfadjoint extension of A given by* (14). *Then*

$$\kappa_-(A_{C,D}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*). \tag{15}$$

In particular, $A_{C,D} \geqslant 0$ if and only if $CD^* - DM(0)D^* \geqslant 0$.

2.2. Weyl function and spectrum. In the following we are going to characterize the spectrum of the extension A_0 in terms for the Weyl function. To this end let $\Phi(\cdot)$ be a scalar Nevanlinna function. In what follows by $\lim_{z \to\!\!\!\succ x} \Phi(z)$ we mean that the limit $\lim_{r\downarrow 0} \Phi(x+re^{i\theta})$, $x \in \mathbb{R}$, exists uniformly in $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ for each $\varepsilon \in (0, \pi/2)$. Let us introduce the following sets:

$$\Omega_{\mathrm{s}}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(z)| \to +\infty \text{ as } z \to\!\!\!\succ x\}, \tag{16}$$

$$\Omega_{\mathrm{pp}}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : \lim_{z \to\!\!\!\succ x} (z-x)\,\Phi(z) \neq 0\}, \tag{17}$$

$$\Omega_{\mathrm{sc}}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(z)| \to +\infty \text{ and } (z-x)\,\Phi(z) \to 0 \text{ as } z \to\!\!\!\succ x\}, \tag{18}$$

$$\Omega_{\mathrm{ac}}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im}\Phi(x+i0) < +\infty\}, \quad \Phi(x+i0) = \lim_{y\downarrow 0} \Phi(x+iy). \tag{19}$$

Any scalar R-function $\Phi(\cdot)$ admits the representation

$$\Phi(z) = C_0 + C_1 z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{20}$$

with C_0 is real constant, $C_0 \in \mathbb{R}$, $C_1 \geqslant 0$, and the scalar Borel measure $\mu(\cdot)$ satisfies $\int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^{-1} d\mu(t) < \infty$.

Lemma 2.8 ([22, Lemma 4.1])**.** *Let $\Phi(\cdot)$ be a scalar R-function which has the representation* (20)*. Then $S_{\mathrm{ac}}(\mu) = \mathrm{cl}_{\mathrm{ac}}(\Omega_{\mathrm{ac}}(\Phi))$.*

Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* and let $M(\cdot)$ be the corresponding Weyl function. We set $M_h(z) := (M(z)h, h)$, $h \in \mathcal{H}$, $z \in \mathbb{C}_\pm$.

Theorem 2.9 ([22, Theorem 4.3])**.** *Let A be a simple closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with $\mathrm{n}_\pm(A) = n < \infty$. Further, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet of A^*, let $M(\cdot)$ be the corresponding Weyl function, let $A_0 = A_0^* \in \mathrm{Ext}_A$ be given by* (5)*, and let $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^n$ be a basis in $\mathcal{H}$. Then:*

(i) *the extension A_0 has no point spectrum within the interval (a,b), i.e. $\sigma_{\mathrm{pp}}(A_0) \cap (a,b) = \emptyset$, if and only if*

$$\lim_{y\downarrow 0} y\, M_{h_k}(x+iy) = 0 \quad \textit{for each} \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{21}$$

for all $x \in (a,b)$. In this case the following relation holds

$$\sigma(A_0) \cap (a,b) = \sigma_{\mathrm{c}}(A_0) \cap (a,b) = \left(\overline{\textstyle\bigcup_{k=1}^n \Omega_{\mathrm{sc}}(M_{h_k})} \cup \overline{\textstyle\bigcup_{k=1}^n \Omega_{\mathrm{ac}}(M_{h_k})} \right) \cap (a,b).$$

(ii) *The operator A_0 has no singular continuous spectrum within the interval (a,b), i.e. $\sigma_{\mathrm{sc}}(A_0) \cap (a,b) = \emptyset$, if for each $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ the set $\Omega_{\mathrm{sc}}(M_{h_k}) \cap (a,b)$ is at most countable, in particular, if $(a,b) \setminus \Omega_{\mathrm{ac}}(M_{h_k})$ is at most countable.*

3. General non-compact quantum graphs with finitely many edges.

3.1. Framework. Let us set up the framework. Let $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ be a noncompact metric and connected graph, consisting of finitely many edges $\mathcal{E}$ and vertices $\mathcal{V}$. Since graph $\mathcal{G}$ is noncompact, at least one of the edges has infinite length. For two vertices $v, u \in \mathcal{V}$ we write $v \sim u$ if there is an edge $e_{u,v} \in \mathcal{E}$ connecting v with u. For every $v \in \mathcal{V}$, we denote the set of edges incident to the vertex v by $\mathcal{E}_v$ and

$$\deg(v) = \#\{e : e \in \mathcal{E}_v\} \tag{22}$$

is called the degree of a vertex $v \in \mathcal{V}$. Let us note that the vertices $v \in \mathcal{V}$: $\deg(v) = 1$ are called the loose ends. A path $\mathcal{P}$ of length $n \in \mathbb{N}$ is a subset of vertices $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{V}$ such that n vertices $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ are distinct and $v_{k-1} \sim v_k$ for all $k \in \{1, \ldots, n\}$. A graph $\mathcal{G}$ is called connected if for any two vertices u and v there is a path $\mathcal{P} = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ connecting u and v, that is, $u = v_0$ and $v = v_n$.

Let us assign each finite edge $e \in \mathcal{E}_{\rm fin}$ with length $|e| \in (0, \infty)$ and direction, that is, each finite edge $e \in \mathcal{E}_{\rm fin}$ has one initial v_o and one terminal vertex v_{in}. Also we assign each infinite edge (lead) $e \in \mathcal{E}_\infty$ with $[0, \infty)$, and every finite edge $e \in \mathcal{E}_{\rm int}$ with the interval $(0, |e|)$; we also denote $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rm fin} \cup \mathcal{E}_\infty$. In the sequel we assume that graph $\mathcal{G}$ consists of $p_1 > 0$ leads and $p_2 \geqslant 0$ finite edges, i.e. $|\mathcal{E}_\infty| = p_1$ and $|\mathcal{E}_{\rm fin}| = p_2$, and put $p := p_1 + p_2$. Let $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ be a maximal compact subgraph of the metric graph $\mathcal{G}$, i.e. $\mathcal{G}_0$ consists of p_2 edges. Moreover, each edge is equipped with coordinate (denoted x) that identifies this edge with a bounded interval. We choose some subset $\mathcal{V}_{\rm ext}$ of vertices of $\mathcal{G}_0$, to be called external vertices, and attach one or more copies of $[0, \infty)$ to each external vertex; the point 0 in a lead is thus identified with the relevant external vertex. Denote by $\mathcal{V}_{\rm int} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{\rm ext}$ the set of internal vertices.

First we introduce the Hilbert space $L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ of functions $f\colon \mathcal{G} \to \mathbb{C}^m$ by setting:

$$L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m) = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} L^2(e; \mathbb{C}^m) = \left\{ f = \{f_e\}_{e \in \mathcal{E}} : f_e \in L^2(e; \mathbb{C}^m) \right\}, \tag{23}$$

where

$$f_e = (f_{e,1}, \ldots, f_{e,m})^T = \begin{pmatrix} f_{e,1} \\ \vdots \\ f_{e,m} \end{pmatrix} \in L^2(e; \mathbb{C}^m). \tag{24}$$

Let us equip $\mathcal{G}$ with the Sturm – Liouville operator. Assume also that for each edge $e \in \mathcal{E}$

$$Q_e(\cdot) = Q_e(\cdot)^* \in L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m}), \tag{25}$$

and equality in (25) is understood in the following sense: $Q_e(x) = Q_e(x)^*$ for a.e. $x \in e$.

For every $e \in \mathcal{E}$ consider the maximal operator $A_{e,\max}$ associated with the Sturm – Liouville differential expression

$$\mathcal{A}_e := -\frac{d^2}{dx^2} + Q_e \tag{26}$$

on the domain

$$\mathrm{dom}(A_{e,\max}) = \left\{ f_e \in L^2(e;\mathbb{C}^m) : \begin{array}{c} f_e, f_e' \in AC_{\mathrm{loc}}(e;\mathbb{C}^m), \\ \mathcal{A}_e(f_e) \in L^2(e;\mathbb{C}^m) \end{array} \right\}, \quad e \in \mathcal{E}. \tag{27}$$

It is well known (see for instance [17, Proposition 9.5(i)]) that for each $e \in \mathcal{E}_{\mathrm{fin}}$ $A_{e,\max}$ has the following regularity property:

$$\mathrm{dom}(A_{e,\max}) = \{f_e \in W^{2,1}(e;\mathbb{C}^m) : \mathcal{A}_e(f_e) \in L^2(e;\mathbb{C}^m)\} \subset W^{2,1}(e;\mathbb{C}^m). \tag{28}$$

Therefore there exist the limit values $f_e(v_o), f_e(v_{in}), f_e'(v_o), f_e'(v_{in})$ for each $e \in \mathcal{E}_{\mathrm{fin}}$. Moreover, the regularity property similar to (28) remains valid for infinite edges (leads) $e \in \mathcal{E}_\infty$ provided that $Q_e \in L^1(e;\mathbb{C}^{m\times m})$. Therefore there exist the limit values $f_e(v), f_e'(v)$ for each $e \in \mathcal{E}_\infty$ and $v \in \mathcal{V}_{\mathrm{ext}}$.

For every $e \in \mathcal{E}$ we define the minimal operator $A_e := A_{e,\min}$ associated in $L^2(e;\mathbb{C}^m)$ with differential expression (26). In the case of lead $e \in \mathcal{E}_\infty$ the domain of the minimal operator A_e is of the form

$$\mathrm{dom}(A_e) = \left\{f_e \in \mathrm{dom}(A_{e,\max}) : f_e(v) = f_e'(v) = 0, \quad v \in \mathcal{V}_{\mathrm{ext}}\right\}. \tag{29}$$

In the case of finite edge $e \in \mathcal{E}_{\mathrm{fin}}$ the domain of the minimal operator A_e is

$$\mathrm{dom}(A_e) = \left\{f_e \in \mathrm{dom}(A_{e,\max}) : f_e(v_o) = f_e(v_{in}) = f_e'(v_o) = f_e'(v_{in}) = 0\right\}. \tag{30}$$

Clearly, A_e is closed symmetric operator, and $A_e^* = A_{e,\max}$ (see Section 3).

Note also that for $Q_e(\cdot) \in L^2(e;\mathbb{C}^{m\times m})$, instead of (28) we have equality

$$\mathrm{dom}(A_{e,\max}) = W^{2,2}(e;\mathbb{C}^m), \quad e \in \mathcal{E}.$$

Finally, in $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ we define the closed minimal symmetric operator

$$A := A_{\min} := \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} A_e = A_{\mathcal{E}_\infty} \bigoplus A_{\mathcal{E}_{\mathrm{fin}}} \tag{31}$$

associated with the expression $\mathcal{A} := \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} \mathcal{A}_e$. Since $A_{e,\max} = A_e^*$, $e \in \mathcal{E}$, the adjoint operator is given by $A^* = A_{\max} = \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} A_e^*$.

3.2. Absence of singular continuous spectrum. Now we state the main result of the section ensuring the absence of singular continuous spectrum for each self-adjoint extension $\widetilde{A} \in \mathrm{Ext}_A$. The following theorem was recently proved in [23] (see also [24]).

Theorem 3.1 ([23]). *Assume that graph $\mathcal{G}$ consists of $p_1 > 0$ leads and $p_2 \geqslant 0$ edges. Let $Q_{e_j} := Q_j \in L^1(e_j; \mathbb{C}^{m\times m})$ for $j \in \{1, \dots, p\}$. Let also $\widetilde{A}$ be an arbitrary self-adjoint extension of the minimal operator $A := \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} A_e$ defined by (31). Then:*

(i) *The singular continuous spectrum $\sigma_{\mathrm{sc}}(\widetilde{A})$ is empty, i.e. $\sigma_{\mathrm{sc}}(\widetilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$;*

(ii) *The absolutely continuous spectrum $\sigma_{\mathrm{ac}}(\widetilde{A})$ fills in the half-line $\mathbb{R}_+$, $\sigma_{\mathrm{ac}}(\widetilde{A}) = [0, \infty)$, and is of the constant multiplicity mp_1;*

(iii) *Operator $\widetilde{A}$ is semi-bounded from below and its negative spectrum is either finite or forms countable sequence tending to zero.*

(iv) *Possible positive eigenvalues embedded in the ac-spectrum $\sigma_{\mathrm{ac}}(\widetilde{A})$ form a discrete set, i.e. the set $\sigma_{\mathrm{pp}}(\widetilde{A}) \cap \mathbb{R}_+$ is discrete.*

Theorem 3.1 generalizes the main result of the paper [25] to the case of quantum graphs under discussion. A special case of Theorem 3.1 with $Q = 0$ was established by B.-S. Ong [26] by using the limit absorption principle.

3.3. Positive point spectrum for Hamiltonian with delta-interactions. Let $\alpha\colon \mathcal{V} \to \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)^*$, be given. In this subsection we consider quantum graph with δ-type vertex condition (see Introduction):

$$\begin{cases} f \quad \text{is continuous at} \quad v, \\ \sum_{e\in\mathcal{E}_v} f_e'(v) = \alpha(v) f(v), \end{cases} \qquad v \in \mathcal{V}. \tag{32}$$

We underline that derivatives in (32) are *outgoing*.

Let also $Q(\cdot) = \bigoplus_{j=1}^{p} Q_j(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m\times m})$.

The Hamiltonian with delta-interactions $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ is defined as follows:

$$\begin{gathered} \mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q} = A_{\max} \restriction \mathrm{dom}(\mathbf{H}_\alpha), \quad A_{\max} = A^*, \\ \mathrm{dom}(\mathbf{H}_\alpha) = \{f \in \mathrm{dom}(A^*) : \ f \text{ satisfies (32)}, \ v \in \mathcal{V}\}. \end{gathered} \tag{33}$$

Our aim here is to complete Theorem 3.1 by finding conditions ensuring the absence/presence of positive point spectrum of the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$.

Since $\mathrm{dom}(A_{\max}) = \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} \mathrm{dom}(A_{e,\max})$, it follows from (28) that $\mathrm{dom}(A_{\max}) \subset W^{2,1}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$. Note that in the case of $Q \in L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m\times m})$ we have $\mathrm{dom}(A_{\max}) = W^{2,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$.

Since $\alpha = \alpha^*$ the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ is the symmetric extension of the minimal operator A. Taking into account that

$$\mathrm{n}_\pm(A) = \dim\left(\mathcal{H}_\infty \bigoplus \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}\right) = (p_1 + 2p_2)m,$$

and that the number of conditions in (32) is $(p_1 + 2p_2)m$, we conclude that the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ is self-adjoint, i.e. $\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha^*$. In particular, if $\alpha = 0$, then condition (32) is called the Kirchhoff vertex condition, and the corresponding operator $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{\rm kir}$ is called the Kirchhoff operator.

In the sequel $\deg_\infty(v)$ denotes the number of leads incident to the vertex $v \in \mathcal{V}_{\rm ext}$, and $\deg(v) - \deg_\infty(v)$ denotes the number of finite edges incident to the vertex $v \in \mathcal{V}$. Clearly,

$$\begin{gathered} \deg_\infty(v) := \#\{e \in \mathcal{E}_\infty : e \in \mathcal{E}_{v,\infty}\}, \quad \deg_\infty(v) = 0 \quad \text{for} \quad v \in \mathcal{V}_{\rm int}, \\ \deg(v) - \deg_\infty(v) := \#\{e : e \in \mathcal{E}_{v,\rm fin}\}. \end{gathered} \tag{34}$$

Our first result on absence of positive point spectrum reads as follows.

Proposition 3.2. *Let $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m\times m})$ and let $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ be the Hamiltonian of the form* (33). *Let also the following conditions hold:*

(i) *For each vertex $v \in \mathcal{V}_{\rm int}$ the number of incident finite edges does not exceed two, i.e.*

$$\deg(v) \leqslant 2 \quad \textit{for all} \quad v \in \mathcal{V}_{\rm int}. \tag{35}$$

(ii) *For each vertex $v \in \mathcal{V}_{\rm ext}$ the number of incident finite edges does not exceed one, i.e.*

$$\deg(v) - \deg_\infty(v) \leqslant 1 \quad \textit{for all} \quad v \in \mathcal{V}_{\rm ext}. \tag{36}$$

Then the operator $\mathbf{H}_\alpha$ has no positive eigenvalues, i.e. $\sigma_{\rm p}(\mathbf{H}_\alpha) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Proof. 1. Let $\lambda_0 \in \sigma_{\rm p}(\mathbf{H}_\alpha) \cap \mathbb{R}_+$ and let

$$f_j = (f_{j,1}, \ldots, f_{j,m})^T \in L^2(e_j; \mathbb{C}^m), \quad j \in \{1, \ldots, p\}, \tag{37}$$

be the corresponding eigenfunction. By definition, f satisfies the equation

$$\mathbf{H}_\alpha f = \lambda_0 f \tag{38}$$

on the graph $\mathcal{G}$. Here $f_1, \ldots, f_p$ are given by (24) on each edge. This vector equation splits into the following p "scalar" equations

$$-\frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} + \{Q_j(x) - \lambda_0 I_m\} f_j(x) = 0, \qquad j \in \{1, \ldots, p\}, \tag{39}$$

on each edge $e_j \in \mathcal{E}$.

Let us consider an arbitrary lead $e \in \mathcal{E}_\infty$. In accordance with [25, Proposition 4.1] the corresponding maximal operator A_e^* has no positive eigenvalues. Thus $f_e \equiv 0$, for each lead $e \in \mathcal{E}_\infty$.

2. It remains to show that $f_e \equiv 0$ for every finite edge $e \in \mathcal{E}_{\rm fin}$. Let us choose the vertex v_1 such that $\deg(v_1) - \deg_\infty(v_1) = 1$ and consider the finite edge $e_1 \in \mathcal{E}_{\rm fin}$ incident to v_1. Due to the conditions (35), (36) and connectivity of the

graph there is a finite path $\mathcal{P} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ connecting v_1 with v_k via edges $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$. Due to (32) the inclusion $f \in \mathrm{dom}(\mathbf{H}_\alpha)$ yields

$$f_{e_1}(v_1) = f_e(v_1) = 0, \quad f'_{e_1}(v_1) = \alpha(v_1) f_{e_1}(v_1) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} f'_e(v_1) = 0 \tag{40}$$

for each lead $e \in \mathcal{E}_\infty$ incident to v_1. Therefore equation (39) on the edge e_1 leads to the Cauchy problem

$$-f''_{e_1}(x) + Q_{e_1}(x) f_{e_1}(x) = \lambda_0 f_{e_1}(x), \quad x \in e_1, \quad f_{e_1}(v_1) = f'_{e_1}(v_1) = 0. \tag{41}$$

By the Cauchy uniqueness theorem this problem has a trivial solution on e_1, i.e. $f_{e_1}(x) = 0$ for $x \in e_1$. Further, taking into account condition (32) and restricting equation (39) to the next finite edge $e_2 \in \mathcal{E}_{\mathrm{fin}}$ we get:

$$-f''_{e_2}(x) + Q_{e_2}(x) f_{e_2}(x) = \lambda_0 f_{e_2}(x), \quad x \in e_2, \quad f_{e_2}(v_2) = f'_{e_2}(v_2) = 0. \tag{42}$$

Again, applying the Cauchy uniqueness theorem we derive that $f_{e_2}(x) = 0$ for $x \in e_2$. Repeating this procedure $k-2$ times we prove that $f \equiv 0$ on $\mathcal{G}$ by induction. Thus, $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_\alpha) \cap \mathbb{R}_+$. $\square$

Combining Theorem 3.1 with Proposition 3.2 we summarise our main results on the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$.

Theorem 3.3. *Assume the conditions of Theorem 3.1. Then:*

(i) *The singular continuous spectrum of the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ is empty, i.e. $\sigma_{\mathrm{sc}}(\mathbf{H}_\alpha) = \emptyset$.*

(ii) *Possible positive eigenvalues (embedded in the* ac-*spectrum) forms a discrete set.*

(iii) *Assume in addition conditions* (35), (36). *Then the positive part $\mathbf{H}_{\alpha,+} := \mathbf{H}_\alpha \mathrm{E}_{\mathbf{H}_\alpha}(0,\infty)$ of the operator $\mathbf{H}_\alpha$ is purely absolutely continuous, i.e. $\mathbf{H}_{\alpha,+} = \mathbf{H}^{\mathrm{ac}}_{\alpha,+} = \mathbf{H}^{\mathrm{ac}}_\alpha$. Moreover, the* ac-*spectrum of $\mathbf{H}_\alpha$ is of constant multiplicity mp_1, i.e. $N_{\mathbf{H}^{\mathrm{ac}}_\alpha}(t) = mp_1$ for all $t \in \mathbb{R}_+$.*

(iv) *Negative spectrum of the operator $\mathbf{H}_\alpha$ is either finite or discrete with the only accumulation point at zero. The inclusion $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_\alpha)$ is possible.*

Remark 3.4. By Theorem 3.3 (iii), $0 \in \sigma_{\mathrm{ac}}(\mathbf{H}_\alpha)$ while the inclusion $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_\alpha)$ is also possible, i.e. zero can occur as an eigenvalue of the multiplicity $k \leqslant mp_1$. For instance, this holds for the operator associated with expression:

$$\begin{gathered}\mathcal{A} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q, \quad Q := -\mathrm{diag}\left\{(x+a_1)^{-2}, \dots, (x+a_m)^{-2}\right\}, \\ a_j > 0, \quad j \in \{1, \dots, m\},\end{gathered} \tag{43}$$

subject to the boundary condition $y'(0) = Ty(0)$, $T = -\mathrm{diag}\{a_1, \dots, a_m\}$.

Next we show that the property of absence of positive point spectrum is generic.

Proposition 3.5. *Let $\mathcal{G}$ be a star graph with the common vertex $v_0 := 0$, p_1 (> 0) leads, and p_2 ($\geqslant 2$) finite edges. Let also $Q_{l_k} \in L^1(l_k; \mathbb{C}^{m\times m})$ for every lead $l_k \in \mathcal{E}_\infty$, $k \in \{1,\dots,p_1\}$, and $Q_{e_j} \equiv 0$ for each finite edge $e_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}$, $j \in \{1,\dots,p_2\}$. Assume also that for every pair of finite edges the ratio of their lengths is irrational. Then the positive part $\mathbf{H}_{\alpha,+}$ of the operator $\mathbf{H}_\alpha$ is its purely absolutely continuous part, $\mathbf{H}_{\alpha,+} = \mathbf{H}_\alpha^{\mathrm{ac}} = \mathbf{H}_{\alpha,+}^{\mathrm{ac}}$. Moreover, the* ac*-spectrum of $\mathbf{H}_\alpha$ is of constant multiplicity mp_1.*

Proof. Since $\mathcal{G}$ is the star graph with common vertex $v_0 := 0$, the following inequalities hold:

$$\begin{cases} \deg_\infty(v_0) = p_1 > 0, \\ \deg(v_0) - \deg_\infty(v_0) = p_2 \geqslant 2. \end{cases} \tag{44}$$

Assume that $e_j = \overrightarrow{v_0 v_j}$, $j \in \{1,\dots,p_2\}$.

We should show that for any $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ the following system has only trivial L^2-solution

$$\begin{aligned} &-f_e''(x) + Q_e(x) f_e(x) = \lambda_0 f_e(x), \quad x \in e, \quad e \in \mathcal{E}, \\ &\sum_{e\in\mathcal{E}} f_e'(0) = 0, \quad f_{e_j}'(|e_j|) = 0, \quad j \in \{1,\dots,p_2\}. \end{aligned} \tag{45}$$

In accordance with [25, Proposition 4.1] the assumption $\lambda_0 > 0$ implies $f_{l_k} \equiv 0$ for each lead $l_k \in \mathcal{E}_\infty$, $k \in \{1,\dots,p_1\}$. In particular, $f_{l_k}(0) = 0$ for each lead $l_k \in \mathcal{E}_\infty$, $k \in \{1,\dots,p_1\}$. Hence due to the continuity condition at $v_0 := 0$ (see the first condition in (32)) $f_{e_j}(0) = f_{l_1}(0) = 0$ for each $j \in \{1,\dots,p_2\}$. Therefore system (45) is reduced to the following system on finite edges:

$$\begin{aligned} &-f_{e_j}''(x) = \lambda_0 f_{e_j}(x), \quad x \in e_j, \quad j \in \{1,\dots,p_2\}, \\ &\sum_{j=1}^{p_2} f_{e_j}'(0) = 0, \quad f_{e_j}(0) = 0, \quad f_{e_j}'(|e_j|) = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

It is easily seen that problem (46) has a non-trivial solution if and only if there exist $n_j \in \mathbb{N}$ and $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1,\dots,p_2\}$, with $\sum_{j=1}^{p_2} |c_j| > 0$, such that

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi(2n_1+1)}{2|e_1|}\right)^2, \quad n_1 \in \mathbb{N}, \tag{47}$$

$$f_{e_j}(x) = c_j \sin\left(\frac{\pi(2n_1+1)}{2|e_1|} x\right), \quad x \in e_j, \quad \sum_{j=1}^{p_2} c_j = 0, \tag{48}$$

$$\frac{|e_1|}{|e_j|} = \frac{2n_1+1}{2n_j+1}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j \in \{1,\dots,p_2\}. \tag{49}$$

If at least one (hence at least two) of the coefficients c_j differs from zero, one has $c_{j_1} c_{j_2} \neq 0$. Therefore (49) yields $\frac{|e_{j_1}|}{|e_{j_2}|} = \frac{2n_{j_1}+1}{2n_{j_2}+1}$. This contradicts the assumption of the irrationality of this ratio and we are done. $\square$

Next we demonstrate sharpness of the conditions of Proposition 3.5.

Corollary 3.6. *Let $\mathcal{G}$ be the star graph described in Proposition 3.5. Assume in addition conditions* (49)*. Then the positive point part of the Hamiltonian $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$ is non-trivial, i.e. $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty) \neq \emptyset$. Moreover, the positive point spectrum is discrete, i.e. $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty) = \sigma_{\mathrm{d}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty)$.*

Proof. Since conditions (49) hold, problem (46) has a non-trivial L^2-solution given by (47), (48). Clearly, alongside with $\lambda_0 = \left(\frac{\pi(2n_1+1)}{2|e_1|}\right)^2$, any

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2n_1+1)(2k+1)}{2|e_1|}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

is also an eigenvalue of the operator $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$. Moreover, for each $k \in \mathbb{N}$ the system of functions

$$f_{e_j,k}(x) = c_j \sin\left(\frac{\pi(2n_1+1)(2k+1)}{2|e_1|}x\right), \quad x \in e_j, \quad \sum_{j=1}^{p_2} c_j = 0, \qquad (50)$$

with $j \in \{1,\ldots,p_2\}$, satisfies the problem (46) with λ_k instead of λ_0.

Thus, the vector $f_k := (0,\ldots,0,f_{e_1,k},\ldots,f_{e_{p_2},k})^T$ ($\in \mathbb{C}^{mp}$) is the eigenvector of the operator $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$ corresponding to the eigenvalue λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, and $\{\lambda_k\}_0^\infty \subseteq \sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty)$. To prove discreteness of the positive point spectrum it remains to note that $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty)$ is a part of the spectrum of the Dirichlet – Neumann problem for $-\frac{d^2}{dx^2}$ on each edge e_j, $j \in \{1,\ldots,p_2\}$. □

By definition, a double star graph is a graph consisting of the union of two star graphs and the edge connecting their centers. The following result is an analog of Proposition 3.5 for certain double star graph.

Proposition 3.7. *Assume that $\widetilde{\mathcal{G}}$ is a double star graph consisting of p_1 (>0) leads $l_1,\ldots,l_{p_1}$, incident to the center v_0, and p_2 (>2) finite edges incident to the center v_1 (including the edge $e_1 := \overrightarrow{v_0v_1}$). Let also $Q_e \in L^1(e;\mathbb{C}^{m\times m})$ for every lead $e \in \mathcal{E}_\infty$ and the finite edge $e_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}$, and let $Q_{e_j} \equiv 0$ for each finite edge $e_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}$, $j \in \{2,\ldots,p_2\}$. Assume that for every pair of finite edges e_1 and e_j, $j \in \{2,\ldots,p_2\}$, the ratio of their lengths is irrational.*

Then the positive part of Kirchhoff realization $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}} = \mathbf{H}_{0,Q}$ is its purely absolutely continuous part, $\mathbf{H}_{\mathrm{kir},+} = \mathbf{H}_{\mathrm{kir}}^{\mathrm{ac}}$. Moreover, the ac*-spectrum of $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$ is of constant multiplicity mp_1.*

Proof. The proof is similar to that of Proposition 3.5. □

Corollary 3.8. *Let $\widetilde{\mathcal{G}}$ be the double star graph described in Proposition 3.7. Assume that the following conditions hold:*

$$\frac{|e_1|}{|e_j|} = \frac{2n_1}{2n_j+1}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j \in \{2,\ldots,p_2\}. \qquad (51)$$

Then the positive point part of the Hamiltonian $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$ *is non-trivial and discrete, i.e.* $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty) = \sigma_{\mathrm{d}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty) \neq \emptyset$.

Proof. The proof is similar to the proof of Corollary 3.6, and we omit it. $\square$

Remark 3.9. (i) Let $\widetilde{\mathcal{G}}$ be the graph described in Proposition 3.7. Assume that $Q_{e_j}(x) \not\equiv 0$, $j \in \{2,\dots,p_2\}$. For the edge e_j we have the Dirichlet – Neumann problem:

$$-f''_{e_j}(x) + Q_{e_j}(x) f_{e_j}(x) = \lambda_0 f_{e_j}(x), \quad \begin{cases} f_{e_j}(|e_1|) = 0, \\ f'_{e_j}(|e_j|) = 0. \end{cases} \tag{52}$$

Since the eigenvalue λ_0 depends continuously on the length $|e_j|$, then decreasing of $|e_j|$ implies increasing of λ_0. Therefore the Kirchhoff operator has positive eigenvalues, i.e. $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \cap (0,\infty) \neq \emptyset$ only in exceptional cases.

(ii) It follows from the proof of Propositions 3.2, 3.5 and 3.7, that possible eigenfunctions corresponding to positive eigenvalues are supported on the maximal compact subgraph $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$.

Remark 3.10. It follows from the conditions of Theorem 3.1 that

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(\mathbf{H}_\alpha) = \mathbb{R}_+ \quad \text{and} \quad \sigma_{\mathrm{sc}}(\mathbf{H}_\alpha) = \emptyset.$$

However these relations do not exclude positive embedded eigenvalues for $\mathbf{H}_\alpha$. In this connection we mention the paper by G. Berkolaiko and W. Liu [27] devoted to investigation of genericity conditions of simplicity of spectrum of quantum graph. Their main result reads as follows.

Theorem 3.11 ([27, Theorem 3.6])**.** *Let* $\mathcal{G}$ *be a connected graph with zero potential* $Q = 0$ *and* δ*-type conditions at vertices. If* $\mathcal{G}$ *is not equivalent to a circle, then, after a small modification of edge lengths, the new graph* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *will satisfy the following genericity conditions:*

(i) *The spectrum* $\sigma(\widetilde{\mathcal{G}})$ *is simple.*

(ii) *For each eigenfunction* f *of* $\widetilde{\mathcal{G}}$*, either* $f(v) \neq 0$ *for each vertex* v*, or* $\operatorname{supp} f = L$ *for only one loop* L *of* $\widetilde{\mathcal{G}}$*. More precisely, in the space of all possible edge length, the set on which the above conditions are satisfied is residual (comeagre).*

This theorem implies that in the scalar case ($m = 1$) the positive point spectrum of $\mathbf{H}_\alpha$ for graphs with $p_1 > 0$ leads and $Q = 0$ is generically absent, i.e. the positive part $\mathbf{H}_\alpha \mathrm{E}_{\mathbf{H}_\alpha}(0,\infty)$ of $\mathbf{H}_\alpha$ is generically purely absolutely continuous. Apparently Theorem 3.11 as well as its just mentioned consequence on embedded positive eigenvalues remains valid also in the matrix case for summable potentials $Q \in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$. It will be discussed elsewhere.

Note also that L. Friedlander [28] showed that the set $\mathcal{M}$ in the parameter space $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$ of metrics, for which all eigenvalues of connected metric graph $\mathcal{G}$ are simple, is residual under certain simple conditions.

Y. Colin de Verdiére and F. Truc [29, 30] give an explicit classification of graphs that can possibly support embedded eigenvalues. Also the set of non-normalized semi-classical measures on quantum graphs is described, and the set of resonances $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}^{\vec{l}}$ of the Laplacian $\Delta_{\mathcal{G}}^{\vec{l}}$ is studied.

1. *Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S., Kuchment P.* Quantum Graphs and Their Applications. – Providence, RI: Am. Math. Soc., 2006. – 307 p.
2. *Berkolaiko G., Kuchment P.* Introduction to Quantum Graphs. – Providence, RI: Am. Math. Soc., 2013. – 270 p.
3. *Davies E., Pushnitski A.* Non-Weyl Resonance Asymptotics for Quantum Graphs // J. Analysis and PDE. – 2011. – **4**, No. 5. – P. 729–755.
4. *Exner P., Kostenko A. S., Malamud M. M., Neidhardt H.* Spectral theory of infinite quantum graphs // Ann. Henri Poincaré. – 2018. – **19**, No. 11. – P. 3457–3510.
5. *Gerasimenko N. I.* Inverse scattering problem on a noncompact graph // J. Theor. Math. Phys. – 1988. – **75**. – P. 460–470.
6. *Gerasimenko N. I., Pavlov B. S.* Scattering problems on non-compact graphs // J. Theor. Math. Phys. – 1988. – **74**, No. 3. – P. 230–240.
7. *Pankrashkin K.* Unitary dimension reduction for a class of self-adjoint extensions with applications to graph-like structures // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **396**. – P. 640–655.
8. *Post O.* Spectral analysis on graph-like spaces. – Berlin: Springer, 2012. – 431 p.
9. *Korotyaev E., Laptev A.* Trace formulae for Schrödinger operators with complex potentials on cubic lattices // Bull. Math. Sci. – 2018. – **8**, No. 3. – P. 453–475.
10. *Korotyaev E., Saburova N.* Scattering on Periodic Metric Graphs // `arXiv:1507.06441`. – 2015. – P. 1–42.
11. *Kuchment P., Post O.* On the Spectra of Carbon Nano-Structures // J. Comm. in Math. Phys. – 2007. – **275**, No. 3. – P. 805–826.
12. *Kuchment P., Zeng H.* Asymptotics of Spectra of Neumann Laplacians in Thin Domains // J. Contemp. Math. – 2003. – **327**. – P. 199–213.
13. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**. – P. 1–95.
14. *Derkach V. A., Malamud M. M.* The extension theory for Hermitian Operators and the moment problem // J. Math. Sci. – 1995. – **73**, No. 2. – P. 141–242.
15. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991. – 360 p.
16. *Krein M.G., Langer H.* On defect subspaces and generalized resolvents of a Hermitian operator in a space $\Pi_\varkappa$ // J. Funct. Anal. Appl. – 1971. – **5/6**. – P. 136–146.
17. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Extension theory of symmetric operators and boundary value problems. – Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – 573 p.
18. *Akhiezer N. I., Glazman I. M.* Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces. – Boston: Pitman, 1981. – 544 p.
19. *Brodskii M. S.* Triangular and Jordan representations of linear operators. – Providence, RI: Am. Math. Soc., 2006. – 246 p.
20. *Malamud M. M., Mogilevskii V. I.* Krein type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2002. – **8**, No. 4. – P. 72–100.
21. *Rofe-Beketov F. S.* Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector-valued functions // Teor. Funkcii Funkcional. Anal. Prilozh. (in Russian). – 1969. – **8**. – P. 3–24.
22. *Brasche J.F., Malamud M. M., Neidhardt H.* Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Integr. Eq. Oper. Theory. – 2002. – **43**. – P. 264–289.

23. *Granovskyi Ya., Malamud M., Neidhardt H.* Non-compact quantum graphs with summable matrix potentials // Ann. Henri Poincaré. – 2020. – *Online First*, URL: `https://doi.org/10.1007/s00023-020-00977-3`.
24. *Granovskyi Ya., Malamud M., Neidhardt H.* Quantum Graphs with Summable Matrix Potentials // Doklady Mathematics. – 2019. – **100**, No. 2. – P. 405–410.
25. *Granovskyi Ya., Malamud M., Neidhardt H., Posilicano A.* To the spectral theory of vector-valued Sturm – Liouville operators with summable potentials and point interactions // Func. Anal. and Oper. Theory for Quantum Phys. Pavel Exner Anniversary V. EMS Series of Congress Reports. – 2017. – **12**. – P. 271–313.
26. *Ong B.-S.* On the limiting absorption principle and spectra of quantum graphs // Contemp. Math. Quantum graphs and their applications. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. – Vol. 415. – P. 241–249.
27. *Berkolaiko G., Liu W.* Simplicity of eigenvalues and non-vanishing of eigenfunctions of a quantum graph // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – **445**, No. 1. – P. 803–818.
28. *Friedlander L.* Genericity of simple eigenvalues for a metric graph // Israel J. Math. – 2005. – **146**. – P. 149–156.
29. *Colin de Verdiére Y.* Semi-classical measures on quantum graphs and the Gauss map of the determinant manifold // Ann. Henri Poincaré. – 2015. – **16**, No. 2. – P. 347–364.
30. *Colin de Verdiére Y., Truc F.* Topological resonances on quantum graphs // Ann. Henri Poincaré. – 2018. – **19**, No. 5. – P. 1419–1438.

Я. И. Грановский

К спектральной теории квантовых графов с суммируемыми матричными потенциалами

Пусть $\mathcal{G}$ – метрический некомпактный связный граф с конечным числом рёбер. Главным объектом исследования является гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$, порождённый в $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ матричным выражением Штурма – Лиувилля и граничными условиями типа дельта в каждой вершине. Предполагая, что потенциальная матрица является суммируемой, и применяя технику граничных троек и соответствующих функций Вейля, мы показываем, что сингулярный непрерывный спектр гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ пуст, так же как и спектр произвольной самосопряжённой реализации выражения Штурма – Лиувилля. Мы также указываем условия, обеспечивающие чистую абсолютную непрерывность положительной части $\mathbf{H}_\alpha$.

Ключевые слова: *квантовые графы, матричное выражение Штурма – Лиувилля, условия типа дельта, абсолютно непрерывный спектр, сингулярный непрерывный спектр, точечный спектр, граничная тройка, функция Вейля.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
yarvodoley@mail.ru

Получено 23.09.20

УДК 531.38:531.39

©2020. **Д. А. Данилюк, Ю. Ю. Пилпани**

АСИМПТОТИЧЕСКИ-РАВНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В РЕШЕНИЯХ А. КЛЕБША, А. М. ЛЯПУНОВА, В. А. СТЕКЛОВА УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА – ПУАССОНА

Рассмотрена задача о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил. Исследованы условия существования асимптотически-равномерных движений тела относительно оси симметрии силовых полей. С помощью первого метода Ляпунова получены алгебраические уравнения на параметры задачи, которыми характеризуются асимптотически-равномерные движения вокруг главной оси эллипсоида инерции.

Ключевые слова: *асимптотически-равномерные движения, решение А. Клебша, решение А. М. Ляпунова, решение В. А. Стеклова, первый метод Ляпунова.*

1. Введение. Первый метод А. М. Ляпунова [1] позволяет не только исследовать задачи устойчивости движений механических систем, но и получать условия существования асимптотических движений. Наиболее полно в динамике твердого тела изучены равномерные вращения Б. К. Млодзеевского [2] – О. Штауде [3]. Е. Меттлер [4] рассмотрел некоторые частные случаи асимптотически-равномерных движений в классической задаче. В статьях [5–7] установлены новые свойства асимптотически-равномерного движения твердого тела, имеющего неподвижную точку.

Устойчивость равномерных вращений тяжелого твердого тела рассмотрена в монографии [8]. Равномерные вращения тяжелого гиростата изучены в [9, 10]. В статье [11] данные движения исследованы в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, уравнения которой обсуждены в [12–15].

В данной статье продолжено изучение асимптотически-равномерных движений гиростата, которые рассмотрены в [11]. Получены условия существования данных движений в решениях А. Клебша, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова. При этом использованы обозначения и постановка задачи, изложенные в [11].

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил [11]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathrm{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции; $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – постоянная матрица, которая характеризует гироскопические силы; $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – постоянная матрица, определяющая потенциальные силы; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Следуя статье [11], в данной задаче мы исследуем асимптотически-равномерные движения, предельным движением которых являются равномерные движения гиростата относительно главной оси эллипсоида гиростата, т. е. движения, для которых угловая скорость имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \omega_0 \nu^{(0)}, \qquad \boldsymbol{\nu}^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, 0, 0), \tag{3}$$

где ω_0 – постоянная, а $\nu_1^{(0)} = \pm 1$ в силу геометрического интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ уравнений (1), (2). Как показано в [11], условиями существования решений (3) уравнений (1), (2) являются равенства

$$\varepsilon_0 = \omega_0^2 A_1 - \omega_0 B_1 - C_1 + (\omega_0 \lambda_1 + s_1)\nu_1^{(0)}, \tag{4}$$

$$\omega_0 \lambda_2 + s_2 = 0, \qquad \omega_0 \lambda_3 + s_3 = 0. \tag{5}$$

В уравнении (4) ε_0 – произвольная постоянная.

Для исследования асимптотически-равномерных движений гиростата в [11] введены возмущения Ω_i, γ_i $(i = \overline{1,3})$,

$$\omega_i = \omega_i^{(0)} + \Omega_i, \qquad \nu_i = \nu_i^{(0)} + \gamma_i, \tag{6}$$

и рассмотрены уравнения в вариациях, которые выпишем для случая (3):

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \dfrac{1}{A_1}(-\lambda_3\Omega_2 + \lambda_2\Omega_3 - s_3\gamma_2 + s_2\gamma_3), \\ \Omega_2 = \dfrac{1}{A_2}\Big[\lambda_3\Omega_1 - \big((A_3 - A_1)\omega_0\nu_1^{(0)} - \lambda_1 + B_1\nu_1^{(0)}\big)\Omega_3 + \\ \qquad\qquad + s_3\gamma_1 + \big((C_1 - C_3)\nu_1^{(0)} - B_3\omega_0\nu_1^{(0)} - s_1\big)\gamma_3\Big], \\ \Omega_3 = \dfrac{1}{A_3}\Big[-\lambda_2\Omega_1 + \big((A_1 - A_2)\omega_0\nu_1^{(0)} + \lambda_1 - B_1\nu_1^{(0)}\big)\Omega_2 - \\ \qquad\qquad - s_2\gamma_1 + \big((C_2 - C_1)\nu_1^{(0)} + B_2\omega_0\nu_1^{(0)} + s_1\big)\gamma_2\Big], \end{cases} \tag{7}$$

$$\dot{\gamma}_1 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 = \nu_1^{(0)}(\omega_0\gamma_3 - \Omega_3), \qquad \dot{\gamma}_3 = \nu_1^{(0)}(\Omega_2 - \omega_0\gamma_2). \tag{8}$$

Свойства асимптотичности решения по Ляпунову зависят от корней характеристического уравнения системы (7), (8). Следуя [11], имеем

$$\mu^2(\mu^4 + a\mu^2 + b) = 0, \tag{9}$$

где μ – корень характеристического уравнения, а коэффициенты a и b – имеют вид

$$\begin{aligned} a = -\frac{1}{A_1A_2A_3}\Big[&A_1(A_2\varepsilon_2 + A_3\varepsilon_3) - \\ &- A_1\big[\nu_1^{(0)}\big(\omega_0(A_2 + A_3 - A_1) + B_1\big) - \lambda_1\big]^2 - A_2\lambda_2^2 - A_3\lambda_3^2\Big], \end{aligned} \tag{10}$$

$$b = \frac{1}{A_1A_2A_3}(A_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \lambda_2^2\varepsilon_3 - \lambda_3^2\varepsilon_2). \tag{11}$$

Здесь

$$\varepsilon_2 = \omega_0^2A_2 - \omega_0B_2 - C_2 - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_3 = \omega_0^2A_3 - \omega_0B_3 - C_3 - \varepsilon_0. \tag{12}$$

Обозначая $\mu^2 = z$ и опуская кратный нулевой корень, из (9) получим

$$z^2 + az + b = 0. \tag{13}$$

Целью настоящей статьи является исследование характеристического уравнения (13) для решений А. Клебша, А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова (см. обзорную монографию [16]).

3. Первый случай А. Клебша. Запишем условия существования предельного решения А. Клебша [16]

$$\mathbf{s} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad A_3 = A_2 = A_1, \qquad B_3 = B_2 = B_1. \tag{14}$$

Здесь рассмотрим вначале более общий вариант асимптотически-равномерного движения тела, положив в (4), (5) $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$. Из равенств (4), (12) в силу (14) следует

$$\varepsilon_0 = \omega_0^2A_1 - \omega_0B_1 - C_1 + s_1\nu_1^{(0)}, \;\; \varepsilon_2 = C_1 - C_2 - s_1\nu_1^{(0)}, \;\; \varepsilon_3 = C_1 - C_3 - s_1\nu_1^{(0)}. \tag{15}$$

Соотношения (15) позволяют упростить значения коэффициентов (10), (11):

$$a = -\frac{1}{A_1^2}\big[A_1(2C_1 - C_2 - C_3 - 2s_1\nu_1^{(0)}) - (\omega_0A_1 + B_1)^2\big], \tag{16}$$

$$b = \frac{1}{A_1^2}(C_1 - C_2 - s_1\nu_1^{(0)})(C_1 - C_3 - s_1\nu_1^{(0)}). \tag{17}$$

Рассмотрим дискриминант уравнения (13), в котором коэффициенты a и b имеют вид (16), (17). Тогда

$$\mathrm{D} = \frac{1}{A_1^4}\big[(\omega_0 A_1 + B_1)^4 - 2A_1(\omega_0 A_1 + B_1)^2(2C_1 - C_2 - C_3 - 2s_1\nu_1^{(0)}) + A_1^2(C_2 - C_3)^2\big]. \tag{18}$$

При анализе уравнения (13) возникает особый случай

$$\omega_0 = -\frac{B_1}{A_1}. \tag{19}$$

Характеристическое уравнение (13) в силу (19) имеет два действительных корня

$$z_1 = \frac{1}{A_1}(C_1 - C_2 - s_1\nu_1^{(0)}), \quad z_2 = \frac{1}{A_1}(C_1 - C_3 - s_1\nu_1^{(0)}). \tag{20}$$

Случай А. Клебша получим из (20) при $s_1 = 0$. То есть

$$z_1 = \frac{1}{A_1}(C_1 - C_2), \quad z_2 = \frac{1}{A_1}(C_1 - C_3). \tag{21}$$

Если в равенствах (21) выполняются условия

$$C_1 > C_2, \quad C_1 > C_3, \tag{22}$$

то $z_1 > 0,\ z_2 > 0$. Тогда $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{z_1},\ \mu_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$. На основании полученного результата заключаем, что при наличии неравенств (22) имеет место двухпараметрический ряд Ляпунова с характеристическими числами $-\sqrt{z_1},\ -\sqrt{z_2}$, который в решении А. Клебша описывает асимптотически-равномерное движение тела, предельным движением которых служат движения (3).

Когда выполнены условия

$$C_1 > C_2, \qquad C_1 < C_3, \tag{23}$$

то также существуют асимптотически-равномерные движения тела, но ряды Ляпунова характеризуются только одним характеристическим числом $-\sqrt{z_1}$.

Случай $C_1 < C_2,\ C_1 > C_3$ является симметричным по отношению к случаю (23), а при выполнении условий $C_1 < C_2,\ C_1 < C_3$ асимптотические решения по Ляпунову нелинейной системы отсутствуют.

Если в формулах (20) полагать, что разности $C_1 - C_2$ и $C_1 - C_3$ малы по сравнению с параметром s_1, то корни (20) имеют одинаковые знаки, которые зависят от значений $\nu_1^{(0)} = \pm 1$ (параметр s_1 можно полагать положительным в силу выбора подвижной системы координат). Из вида параметров (20) следует, что асимптотически-равномерные движения тела существуют только в случае $\nu_1^{(0)} = -1$. Этот результат соответствует известному результату, полученному в классической задаче [3].

Анализ знаков корней (20) уравнения (13) при значении ω_0 из (19) в других случаях выполняется аналогично вышеизложенному.

Рассмотрим соотношения (16)–(18) при $\omega_0 \neq -\dfrac{B_1}{A_1}$, $s_1 = 0$. Выпишем значение (17)

$$b = \frac{1}{A_1^2}(C_1 - C_2)(C_1 - C_3). \tag{24}$$

Для получения асимптотически-равномерных движений тела будем полагать $b < 0$. Тогда $D = a^2 - 4b > 0$, т. е. корни уравнения (13) действительны и $z_1 > 0$, $z_2 < 0$. Это означает, что при выполнении условия

$$(C_1 - C_2)(C_1 - C_3) < 0 \tag{25}$$

корни уравнения (13) имеют разные знаки. В силу замены $\mu^2 = z$ получим $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$, значит, уравнение (9) имеет один отрицательный корень: $\mu_2 = -\sqrt{z_1}$. Следовательно, когда имеет место неравенство (25), существует асимптотический однопараметрический ряд Ляпунова, который описывает асимптотически-равномерные движения тела относительно главной оси инерции.

Если неравенство (25) не выполняется, то, согласно формуле (17), $b > 0$, и при $a > 0$ оба корня уравнения (13) – отрицательны, т. е. асимптотически-равномерные движения тела по Ляпунову не существуют.

Рассмотрим соотношения (16)–(18) при условии, что параметр $\omega A_1 + B_1$ является малым параметром, тогда знак параметра a из (16) зависит от знака параметра $-(g_1 + g_2)$, а знак параметра b – от знака величины $g_1 g_2$, где

$$g_1 = C_1 - C_2 - s_1\nu_1^{(0)}, \qquad g_2 = C_1 - C_3 - s_1\nu_1^{(0)}. \tag{26}$$

В силу вышеуказанного предположения, дискриминант D из (18) положителен, т. е. корни уравнения (13) действительны. Так как $z_1 z_2 = \dfrac{1}{A_1^2} g_1 g_2$, $z_1 + z_2 = \dfrac{1}{A_1^2}(g_1 + g_2)$, то приходим к очевидным обобщениям результатов, которые получены при $s_1 = 0$. Например, при $g_1 > 0$, $g_2 > 0$ имеет место двухпараметрический ряд Ляпунова, при $g_1 > 0$, $g_2 < 0$ – однопараметрический ряд Ляпунова, при $g_1 < 0$, $g_2 < 0$ оба корня z_1 и z_2 – отрицательны.

Таким образом, для обобщенного случая Клебша указаны достаточные условия существования асимптотически-равномерных движений тела. Очевидно, существуют и другие условия, при которых будет работать первый метод Ляпунова, но они имеют более сложные ограничения на параметры и не являются столь наглядными по сравнению с указанными выше.

4. Второй случай А. Клебша. Он характеризуется следующими условиями на параметры задачи:

$$s_i = 0, \qquad \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \tag{27}$$

$$B_1 = n(A_2 + A_3 - A_1), \quad B_2 = n(A_3 + A_1 - A_2), \quad B_3 = n(A_1 + A_2 - A_3), \tag{28}$$

$$C_1 = (\beta^2 - n^2)A_1, \qquad C_2 = (\beta^2 - n^2)A_2, \qquad C_3 = (\beta^2 - n^2)A_3, \tag{29}$$

где n и β – некоторые постоянные.

Рассмотрим асимптотически-равномерные движения твердого тела в случае (6). Из (4), (12) имеем

$$\begin{gathered} \varepsilon_0 = \omega_0^2 A_1 - \omega_0 B_1 - (\beta^2 - n^2)A_1, \\ \varepsilon_2 = (A_2 - A_1)\big[(\omega_0 + n)^2 - \beta^2\big], \quad \varepsilon_3 = (A_3 - A_1)\big[(\omega_0 + n)^2 - \beta^2\big]. \end{gathered} \tag{30}$$

Запишем коэффициенты характеристического уравнения (13), используя соотношения (10), (11), (27)–(30):

$$a = \frac{1}{A_2A_3}\Big[\beta^2\big[A_2^2 + A_3^2 - A_1(A_2 + A_3)\big] + (\omega_0 + n)^2\big[2A_2A_3 - A_1(A_2 + A_3 - A_1)\big]\Big], \tag{31}$$

$$b = \frac{1}{A_2A_3}(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)\big[(\omega_0 + n)^2 - \beta^2\big]^2. \tag{32}$$

Дискриминант уравнения (13) с коэффициентами (31), (32) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{D} = \frac{1}{A_2^2A_3^2}\Big[&A_1^2(A_2 + A_3 - A_1)^2(\omega_0 + n)^4 + \\ &+ 2\beta^2(\omega_0 + n)^2(A_2 + A_3 - A_1)^2\big[2A_2A_3 - A_1(A_2 + A_3)\big] + \\ &+ \beta^4\big[A_2^2 - A_3^2 + A_1(A_3 - A_2)\big]^2\Big]. \end{aligned} \tag{33}$$

Рассмотрим значение выражения

$$f(A_1, A_2, A_3) = 2A_2A_3 - A_1(A_2 + A_3 - A_1) = A_1^2(2x_2x_3 - x_2 - x_3 + 1), \tag{34}$$

где

$$x_2 = \frac{A_2}{A_1} > 0, \qquad x_3 = \frac{A_3}{A_1} > 0. \tag{35}$$

Покажем, что при выполнении неравенств треугольника на моменты инерции, которые в силу (35) можно записать так

$$G(x_2, x_3):\ 1 + x_2 - x_3 > 0,\ x_2 + x_3 - 1 > 0,\ x_3 - x_2 + 1 > 0, \tag{36}$$

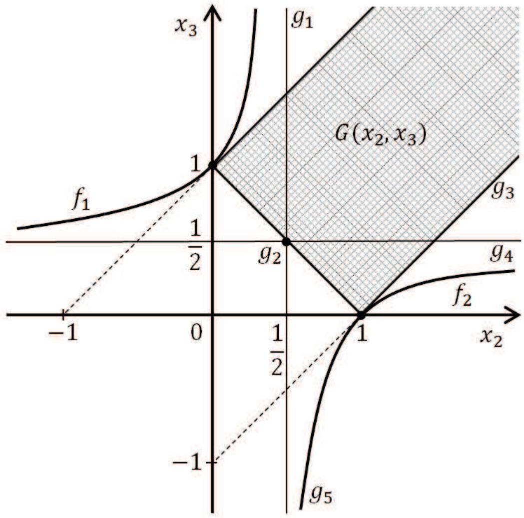

Рис. 1

функция (34) принимает положительные значения. Область G из (36) ограничена прямыми

$$g_1: \ x_3 = x_2 + 1; \qquad g_2: \ x_3 = 1 - x_2; \qquad g_3: \ x_3 = x_2 - 1 \tag{37}$$

и на рис. 1 выделена штриховкой.

Очевидно, что $f(x_2, x_3) = 0$ – гипербола, которая состоит из двух ветвей $f_1(x_2, x_3)$ и $f_2(x_2, x_3)$, имеет асимптоты $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$ и в точках $(0, 1)$, $(1, 0)$ касается прямых g_1, g_3. Поскольку $f(0, 0) > 0$, то в области $G(x_2, x_3)$, заданной соотношениями (36), функция $f(x_2, x_3)$ принимает положительные значения. Таким образом, утверждение доказано. Следовательно, дискриминант уравнения (13) неотрицателен, и корни z_1, z_2 – действительны.

Достаточно просто исследовать особый случай

$$\omega_0 = -n. \tag{38}$$

Полагая, что ω_0 удовлетворяет равенству (38), из (31)–(33) получим

$$a = \frac{\beta^2}{A_2 A_3}\bigl[A_2(A_2 - A_1) + A_3(A_3 - A_1)\bigr], \tag{39}$$

$$b = \frac{\beta^4}{A_2 A_3}(A_2 - A_1)(A_3 - A_1), \tag{40}$$

$$D = \beta^4\bigl[A_2(A_2 - A_1) - A_3(A_3 - A_1)\bigr]^2. \tag{41}$$

Следовательно,

$$z_1 = \frac{A_1 - A_3}{A_2}, \qquad z_2 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}. \tag{42}$$

Значит, если $A_1 < A_2$ и $A_1 < A_3$, то асимптотические движения тела по Ляпунову отсутствуют; если $A_1 > A_2$ и $A_1 > A_3$, то имеют место асимптотические решения, которые характеризуются двумя характеристическими числами $-\sqrt{z_1}$, $-\sqrt{z_2}$ и описывают асимптотически-равномерные движения тела в случае Клебша асимптотическими рядами А. М. Ляпунова.

Рассмотрим соотношения (31)–(33) в предположении, что ω_0 является большим параметром по сравнению с другими параметрами задачи. Из формулы (33) следует, что $\mathrm{D} > 0$, т. е. корни уравнения (13) действительны. В силу доказанного свойства функции (34) параметр a из (31) положителен. Поэтому асимптотически-равномерные движения тела имеют место только при $b < 0$, т. е. если

$$(A_2 - A_1)(A_3 - A_1) < 0,$$

причем ряды Ляпунова зависят только от одного характеристического показателя – отрицательного корня уравнения (13).

Замечание. В случае, когда параметр $\omega_0 + n$ является малым по сравнению с другими параметрами, то получим тот же результат, который был установлен при рассмотрении условия (38).

5. Случай А. М. Ляпунова. Решение А. М. Ляпунова уравнений движения гиростата (1), (2) характеризуется следующими условиями на параметры: $\lambda_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$ и

$$A_3 = A_2 = A_1, \quad C_1 = -\frac{B_2 B_3}{A_1}, \quad C_2 = -\frac{B_3 B_1}{A_1}, \quad C_3 = -\frac{B_1 B_2}{A_1}. \tag{43}$$

Исследуем условия существования асимптотически-равномерных движений гиростата, предельным движением которых является равномерное движение (3). Отметим, что при $s_i \neq 0$ $(i = \overline{1,3})$ имеем решение [14], которое является обобщением решения А.М. Ляпунова. Из равенств (3) в силу $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ получим $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, т. е. вектор обобщенного центра масс тела лежит на оси равномерного вращения. Используя результаты статьи [11] и соотношения (43), запишем значения параметров a и b уравнения (13):

$$a = \frac{1}{A_1^2}\big[A_1^2\omega_0^2 + A_1\omega_0(B_1 + B_3) + (B_1^2 + B_2B_3 - B_1B_2) + 2A_1 s_1 \nu_1^{(0)}\big], \tag{44}$$

$$b = \frac{1}{A_1^2}\big[\omega_0 A_1(B_1 - B_2) + B_3(B_1 - B_2) - A_1 s_1 \nu_1^{(0)}\big]\big[\omega_0 A_1(B_2 - B_3) + {} + B_1(B_2 - B_3) - A_1 s_1 \nu_1^{(0)}\big]. \tag{45}$$

Для получения результата, который бы позволил выполнять сравнительный анализ выводов, полученных в [11], о существовании асимптотически-равномерных движений тела, будем в (44), (45) полагать, что параметр ω_0 является большим по отношению к другим параметрам задачи. Тогда величина (44) принимает положительные значения, а знак величины b из (45) зависит от знака выражения

$$H(B_1, B_2, B_3) = (B_1 - B_2)(B_2 - B_3). \tag{46}$$

Следовательно, в силу того, что дискриминант уравнения (13) при больших значениях ω_0 положителен, асимптотические решения А. М. Ляпунова существуют при выполнении условия $H(B_1, B_2, B_3) < 0$, например, когда в (46) имеют место неравенства

$$B_1 < B_2, \qquad B_2 > B_3. \tag{47}$$

На основании полученных свойств и неравенств (47) заключаем, что существуют однопараметрические ряды Ляпунова, которые описывают асимптотически-равномерные движения тела в решении [14].

6. Случай В. А. Стеклова. Следуя П. В. Харламову [14], обобщившему решение В. А. Стеклова, считаем, что параметры уравнений (1), (2) удовлетворяют условиям

$$\mathbf{s} = n\boldsymbol{\lambda}, \quad B = n\big(\mathrm{Sp}(A)\delta - 2A\big) - \varkappa A^{-1}, \quad C = -n^2 A - n\varkappa A^{-1},$$

где n и $\varkappa$ – постоянные. Изучим асимптотически-равномерные движения гиростата при условиях (3). Будем полагать в равенствах (5) $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$, т. е. вектор $\mathbf{s}$ имеет вид $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$. Распишем условия Стеклова – Харламова в скалярной форме:

$$s_1 = n\lambda_1, \quad C_i = -n\Big(nA_i + \frac{\varkappa}{A_i}\Big) \quad (i = \overline{1,3}), \tag{48}$$

$$B_1 = n(A_2 + A_3 - A_1) - \frac{\varkappa}{A_1}, \qquad B_2 = n(A_3 + A_1 - A_2) - \frac{\varkappa}{A_2}, \tag{49}$$

$$B_3 = n(A_1 + A_2 - A_3) - \frac{\varkappa}{A_3}. \tag{50}$$

Характеристическое уравнение (13), в силу (3), (48)–(50), имеет, как вытекает из (10)–(12), (4), следующие значения коэффициентов $a,\ b$:

$$a = -\frac{1}{A_2 A_3}(A_2\varepsilon_2 + A_3\varepsilon_3 - \beta_1^2), \qquad b = \frac{1}{A_2 A_3}\varepsilon_2\varepsilon_3, \tag{51}$$

где

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1A_2}\big[\omega_0^2 A_1A_2(A_2-A_1) + \\ + \omega_0(A_2-A_1)(2nA_1A_2-\varkappa) + A_1A_2(C_1-C_2) - \lambda_1A_1A_2(\omega_0+n)\nu_1^{(0)}\big], \tag{52}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{A_1A_3}\big[\omega_0^2 A_1A_3(A_3-A_1) + \\ + \omega_0(A_3-A_1)(2nA_1A_3-\varkappa) + A_1A_3(C_1-C_3) - \lambda_1A_1A_3(\omega_0+n)\nu_1^{(0)}\big], \tag{53}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{A_1}\Big[\nu_1^{(0)}\big[A_1(\omega_0+n)(A_2+A_3-A_1)-\varkappa\big] - \lambda_1A_1\Big]. \tag{54}$$

Здесь

$$C_1 = -n\Big(nA_1 + \frac{\varkappa}{A_1}\Big), \quad C_2 = -n\Big(nA_2 + \frac{\varkappa}{A_2}\Big), \quad C_3 = -n\Big(nA_3 + \frac{\varkappa}{A_3}\Big). \tag{55}$$

Исследование уравнения (13) с параметрами (51)–(55) будем проводить в предположении, что параметр ω_0 является большим по сравнению с другими параметрами задачи. Укажем только одно достаточное условие существования отрицательных значений корней уравнения (13): знак коэффициента при ω_0^2 в выражении для a зависит от знака величины $2A_2A_3 - A_1(A_2+A_3-A_1)$. Как доказано выше, в силу неравенств треугольника, это выражение положительно. Можно показать, что на основании данных предположений дискриминант уравнения (13) положителен, т. е. уравнение (13) имеет действительные корни. Поскольку значение a из (51) при больших значениях ω_0 положительно, то сумма корней z_1, z_2 отрицательна и для получения достаточных условий существования асимптотических решений по Ляпунову уравнений (1), (2) необходимо полагать $b < 0$, т. е. должно выполняться условие $(A_2-A_1)(A_3-A_1) < 0$. Таким образом, например, при наличии неравенств $A_2 - A_1 > 0$, $A_3 - A_1 < 0$ имеют место однопараметрические ряды Ляпунова, которые описывают асимптотически-равномерные движения гиростата. Другие достаточные условия этих движений можно установить на основании (51)–(54), предположив в качестве дополнительных ограничений, что имеют место различные случаи (например, считать, что разности $A_2 - A_1$ и $A_3 - A_1$ малы по сравнению с другими параметрами и полагать $\omega_0 + n \neq 0$).

7. Заключение. В статье продолжено исследование асимптотически-равномерных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое начато в [11]. Основное внимание уделено исследованию движений, предельным движением которых служат равномерные вращения гиростата относительно главной оси инерции. Рассмотрены решения

А. Клебша, А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова с обобщениями П. В. Харламова. Наиболее полные результаты установлены в предположении, что угловая скорость гиростата может быть принята за большой параметр по сравнению с другими параметрами задачи. Данное условие допустимо, так как в рассматриваемых решениях уравнений Кирхгофа – Пуассона равномерные движения гиростата могут происходить с произвольной, но с конечной угловой скоростью.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч.: В 5 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
2. *Млодзеевский Б. К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд-ния физ.-мат. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **7**, Вып. 1. – С. 46–48.
3. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. reine angew. Math. – 1894. – **113**, H. 4. – S. 318–334.
4. *Mettler E.* Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels // Math. Zeitschrift. – 1937. – **43**, H. 1. – S. 59–100.
5. *Горр Г. В.* Новый класс асимптотических движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6. – С. 1316–1317.
6. *Вархалев Ю. П., Горр Г. В.* Об асимптотически равномерных движениях твердого тела с одной неподвижной точкой // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1989. – **46**, вып. 12. – С. 4–9.
7. *Вархалев Ю. П., Ковалев В. М.* Об асимптотически-равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 43–48.
8. *Холостова О. В.* Об устойчивости перманентных вращений Штауде в общем случае геометрии масс твердого тела // Нелинейная динамика. – 2009. – **5**, № 3. – С. 357–375.
9. *Харламов П. В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, Вып. 2. – С. 373–375.
10. *Ковалев А. М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
11. *Горр Г. В., Балаклицкая Т. В., Ткаченко Д. Н.* Об асимптотически-равномерных движениях гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 24–42.
12. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **6**, вып. 2. – С. 20–42.
13. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. – 1897. – **20**, вып. 1. – С. 115–170; вып. 2. – С. 173–246.
14. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
15. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. The reduction of order and further transformation // J. Méc. Théor. Appl. – 1986. – **5**, № 6. – P. 935–939.
16. *Горр Г. В., Мазнев А. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

D. A. Danilyuk, Y. Y. Pilpani

Asymptotically uniform motions of a rigid body in A. Klebsch, A. M. Lyapunov and V. A. Steklov solutions of Kirchhof – Poisson equations

The subject of consideration is the problem of motion of a rigid body with a fixed point under the action of potential and gyroscopic forces. Existence conditions are investigated for asymptotically uniform body motions relative to the symmetry axis of the force fields. With use of the first Lyapunov method, algebraic equations are obtained for parameters, characterizing asymptotically uniform motions around the principal axis of the ellipsoid of inertia.

Keywords: *asymptotically uniform motions, A. Klebsch solution, A. M. Lyapunov solution, V. A. Steklov solution, first Lyapunov method.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
`daniljuk@iamm.su`

Получено 28.09.20

ISSN 1683-4720 Труды ИПММ. 2020. Том 34

УДК 517.9:517.5

©2020. **Д. А. Зарайский**

НОВАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СВЁРТКИ

Доказана теорема единственности для одномерного уравнения свёртки специального вида, в которой множество единственности является объединением окрестностей двух точек, находящихся на расстоянии, равном длине носителя свёртывателя (являющегося отрезком).

Ключевые слова: *уравнения свёртки, периодичность в среднем.*

1. Введение. Для ненулевого распределения T с компактным носителем и открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать $\mathscr{D}'_T(\mathcal{U})$ множество распределений $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$, являющихся решениями уравнения свёртки $f * T = 0$.

Будем говорить, что открытое множество $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ является *множеством единственности* для $\mathscr{D}'_T(\mathcal{U})$, если распределение $f \in \mathscr{D}'_T(\mathcal{U})$ однозначно определяется по своему ограничению на $\mathcal{U}_0$, или, что эквивалентно, если из того, что $f \in \mathscr{D}'_T(\mathcal{U})$ равно 0 на $\mathcal{U}_0$ следует, что $f = 0$ на всём $\mathcal{U}$.

Если носитель T является отрезком $[-r, r]$ (либо, более общим образом, если $\pm r \in \operatorname{supp} T \subset [-r, r]$), то, как вытекает из теоремы о носителях (теоремы Титчмарша о свёртке), см. [1, т. 4.3.3], распределение $f \in \mathscr{D}'_T(\mathcal{U})$ однозначно определяется по своему ограничению на окрестность $[-r, r]$. При различных дополнительных условиях на T и f (например, гладкости) окрестность отрезка $[-r, r]$ можно заменить здесь интервалом $(-r, r)$, [2, § 13.2], [3]. Подобные результаты имеют место и в $\mathbb{R}^n$ для уравнений свёртки с радиальным свёртывателем, [4, гл. VI; 2, Ch. 14; 3, 5, 6]; множеством единственности является в этом случае окрестность наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель T, либо – при некоторых дополнительных условиях – сам шар, точнее, его внутренность, если речь идёт о распределениях f не принадлежащих L^1_{loc}.

В настоящей работе мы рассматриваем класс одномерных свёртывателей T, носитель которых есть $[-r, r]$, для которых можно указать существенно меньшее по сравнению с указанными выше результатами множество единственности. В качестве такового можно взять объединение двух произвольно малых окрестностей точек r и $-r$, а не интервал длины $\geqslant 2r$ как в известных ранее теоремах единственности.

Полученный в работе результат применим, в частности, к функциям с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса, определённым в евклидовом пространстве чётной размерности и зависящим только от одной координаты.

2. Формулировка основного результата. Будем рассматривать одномерные уравнения свёртки со свёртывателем вида

$$T(x) = (r^2 - x^2)_+^\lambda \varphi(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – ненулевая чётная функция, вещественно-аналитическая в окрестности отрезка $[-r, r]$, $r > 0$, и $\lambda > -1$. (Через t_+^λ мы обозначаем функцию, равную t^λ при $t > 0$ и нулю при $t \leqslant 0$.)

Теорема. *Пусть свёртыватель T имеет вид* (1)*, где число $\lambda > -1$ – нецелое, (α, β) – интервал длины большей $2r$, и $\mathcal{U}_0$ – его открытое подмножество, содержащее окрестности двух точек, удалённых на расстояние $2r$. Тогда $\mathcal{U}_0$ является множеством единственности для $\mathscr{D}'_T(\alpha, \beta)$ (т. е. для уравнения свёртки $f * T = 0$).*

Отметим, что для целых значений λ теорема, вообще говоря, неверна. Например, если $T(x) = (r^2 - x^2)_+^0 = \chi_{(-r,r)}(x)$, то $\mathscr{D}'_T(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ состоит из $2r$-периодических функций с нулевым интегралом по периоду, среди которых, очевидно, существуют обращающиеся в ноль в окрестностях точек $\pm r$, но не нулевые. Если $T(x) = (r^2 - x^2)_+^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, то любое распределение с носителем в $[-r + \varepsilon, r - \varepsilon]$, ортогональное всем полиномам степени не выше 2λ, принадлежит $\mathscr{D}'_T(-r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Его можно продолжить до распределения из $\mathscr{D}'_T(\mathbb{R})$ (гладкого, если исходное распределение было гладким), [2, Th. 13.16], хотя вид продолжения уже не столь очевиден, как для $\lambda = 0$. Это даёт контрпример к утверждению теоремы для любого $\lambda \in \mathbb{Z}_+$.

Следствие. *Пусть локально-интегрируемая функция f определена на слое $\mathcal{U} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A < x_1 < B\}$, $A < -r$, $B > r$, зависит только от первой координаты: $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)$ и равна нулю при $|x_1 \pm r| < \varepsilon$. Если размерность пространства n чётна, и f имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, целиком лежащим в $\mathcal{U}$, то f равна нулю п. в.*

Аналогичное утверждение имеет место для функций f, имеющих нулевые интегралы по п. в. сферам радиуса r, лежащим в $\mathcal{U}$.

Доказательство. Функция одного переменного f_1 удовлетворяет условиям теоремы и уравнению $f_1 * (r^2 - t^2)_+^{(n-1)/2} = 0$ (либо $f_1 * (r^2 - t^2)_+^{(n-3)/2} = 0$ для случая функции с нулевыми интегралами по сферам). □

Отметим некоторую аналогию полученных результатов с теоремой единственности В. В. Волчкова для преобразования Радона по гиперплоскостям в чётномерном евклидовом пространстве [7, Th. 1.8.4] (схема доказательства, однако, существенно отличается).

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Выберем и зафиксируем до конца настоящего раздела настолько малое значение ε, что функция

φ из равенства (1) аналитически продолжается с $(-r, r)$ на прямоугольник

$$\{\, z \in \mathbb{C}\colon\ |\operatorname{Re} z| < r + \varepsilon,\ |\operatorname{Im} z| < \varepsilon \,\}$$

(продолженную функцию также будем обозначать φ), и абсолютная величина φ ограничена на нём константой M. Очевидно, φ останется чётной и на этом прямоугольнике.

Далее, определим функцию F равенством

$$F(z) = (r^2 - z^2)^\lambda \varphi(z) = (r - z)^\lambda (r + z)^\lambda \varphi(z), \tag{2}$$

где первый множитель аналитичен в $\mathbb{C} \setminus [r, \infty)$ и ветвь степенной функции выбрана таким образом, чтобы на $(-\infty, r)$ она была положительна; соответственно, второй множитель аналитичен в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -r]$ и положителен на $(-r, \infty)$. Тогда F голоморфна в области

$$\mathcal{U} = \{\, z \in \mathbb{C}\colon\ |\operatorname{Re} z| < r + \varepsilon,\ |\operatorname{Im} z| < \varepsilon \,\} \setminus \big((-\infty, r] \cup [r, \infty)\big) \tag{3}$$

и на интервале $(-r, r)$ совпадает с T.

Лемма 1. *Пусть f – непрерывная функция на вещественной оси с носителем, содержащемся в отрезке $[a, b] \subset (-r, r)$ и свёртка $f * T$ равна нулю в окрестности начала координат. Тогда, если ε выбран как указано в начале настоящего раздела, и $\lambda \in (-1, \infty)\setminus\mathbb{Z}$, то $f = 0$ на $(-\infty, a+\varepsilon)$ и на $(b-\varepsilon, \infty)$.*

Доказательство. Для $x \in (b - r, a + r)$ ввиду чётности φ имеем

$$\begin{aligned}(f * T)(x) &= \int_{-r}^{r} T(x - t)\, f(t)\, dt = \\ &= \int_{-r}^{r} (r^2 - |t - x|^2)^\lambda\, \varphi(t - x)\, f(t)\, dt = \int_a^b F(t - x)\, f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Однако, правая часть (4) как функция от x совпадает на $(b - r, a + r)$ с голоморфной функцией

$$h(z) = \int_a^b F(t - z)\, f(t)\, dt,$$

определённой, как видно из (2), (3), на множестве

$$\{\, z \in \mathbb{C}\colon b - r - \varepsilon < \operatorname{Re} z < a + r + \varepsilon,\ |\operatorname{Im} z| < \varepsilon \,\} \setminus \big((-\infty, b - r] \cup [a + r, \infty)\big).$$

Поскольку это множество связно, и левая часть выражения (4), по условию, равна нулю в некоторой вещественной окрестности начала координат, то функция h тождественно нулевая, и

$$\int_a^b F(t - z)\, f(t)\, dt = 0, \quad b - r - \varepsilon < \operatorname{Re} z < a + r + \varepsilon, \quad 0 < |\operatorname{Im} z| < \varepsilon.$$

При $\lambda > 0$ функция F ограничена, а при $\lambda \in (-1, 0)$ для $z = x + iy$ выполнено неравенство

$$|F(x+iy)| = |r-z|^{\lambda}\,|r+z|^{\lambda}\,|\varphi(z)| \leqslant M\,|r-x|^{\lambda}\,|r+x|^{\lambda}.$$

Поэтому при $b - r - \varepsilon < x < a + r + \varepsilon$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\int_a^b F_{\pm}(t-x)\,f(t)\,dt = \lim_{y\to+0}\int_a^b F(t-x\pm iy)\,f(t)\,dt = 0,$$

где, ввиду (2),

$$F_{+}(x) = \lim_{y\to+0} F(x+iy) = \begin{cases} (r^2-x^2)^{\lambda}\,\varphi(x), & -r<x<r,\\ e^{i\pi\lambda}\,(x^2-r^2)^{\lambda}\,\varphi(x), & -r-\varepsilon<x<-r,\\ e^{-i\pi\lambda}\,(x^2-r^2)^{\lambda}\,\varphi(x), & r<x<r+\varepsilon \end{cases} \tag{5}$$

и

$$F_{-}(x) = \lim_{y\to+0} F(x-iy) = \begin{cases} (r^2-x^2)^{\lambda}\,\varphi(x), & -r<x<r,\\ e^{-i\pi\lambda}\,(x^2-r^2)^{\lambda}\,\varphi(x), & -r-\varepsilon<x<-r,\\ e^{i\pi\lambda}\,(x^2-r^2)^{\lambda}\,\varphi(x), & r<x<r+\varepsilon. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть функция $v(x)$ равна $(x^2-r^2)^{\lambda}\,\varphi(x)$ на интервале $(r, r+\varepsilon)$ и продолжена нулём вне этого интервала. Тогда $v \in L^1(\mathbb{R})$, и, в силу (5), (6),

$$v(-x) - v(x) = (F_{+}(x) - F_{-}(x))/2i\sin\pi\lambda \quad \text{при } x \in (-r-\varepsilon, r+\varepsilon).$$

Поэтому при $x \in (a+r, a+r+\varepsilon)$

$$(v*f)(x) = \int_a^b v(x-t)\,f(t)\,dt = \frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\int_a^b (F_{+}(t-x) - F_{-}(t-x))\,f(t)\,dt = 0,$$

и, значит, $\operatorname{supp} v*f \subset [a+r+\varepsilon, b+r+\varepsilon]$. Поскольку, ввиду аналитичности функции φ, $\operatorname{supp} v = [r, r+\varepsilon]$, то по теореме о носителях, см. [1, т. 4.3.3], $f = 0$ на $(-\infty, a+\varepsilon)$. (Это же заключение можно вывести также и из того, что, как можно показать, v имеет фундаментальное решение с носителем, содержащимся в $[-r, \infty)$.)

Аналогично, при $x \in (b-r-\varepsilon, b-r)$

$$(\check{v}*f)(x) = \int_a^b v(t-x)\,f(t)\,dt = \frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\int_a^b (F_{-}(t-x) - F_{+}(t-x))\,f(t)\,dt = 0,$$

где обозначено $\check{v}(s) = v(-s)$. Отсюда получаем, что $f = 0$ на $(b-\varepsilon, \infty)$. $\square$

4. Доказательство основного результата. Пусть распределение u принадлежит $\mathscr{D}'_T(\alpha,\beta)$ и равно 0 в окрестностях точек $p,q\in(\alpha,\beta)$, $q-p=2r$.

Рассмотрим сначала случай, когда u является непрерывной функцией. Положим $f(x)=u(x+(p+q)/2)$ при $|x|<r$ и $f(x)=0$ в противном случае. В предположении, что f отлична от нуля, обозначим a и b соответственно наименьший и наибольший элементы носителя f. Функция f удовлетворяет тогда доказанной выше лемме и потому равна 0 в окрестностях точек a и b, что противоречит их выбору. Полученное противоречие доказывает равенство $f=0$. Поэтому $u=0$ в окрестности отрезка $[p,q]$, а, значит, и на всём интервале (α,β).

Общий случай получается теперь методом сглаживания. Выберем некоторую неотрицательную функцию $\psi_1\in C^\infty(\mathbb{R})$, интеграл которой равен 1, а носитель совпадает с $[-1,1]$, и положим $\psi_n(x)=n\,\psi_1(nx)$. Тогда свёртка $u*\psi_n$ принадлежит $\mathscr{D}'_T(\alpha+1/n,\beta-1/n)$, является бесконечно гладкой и при достаточно больших n равна 0 в окрестностях точек p и q. Поэтому по доказанному она равна 0 на интервале $(\alpha+1/n,\beta-1/n)$. Так как $u*\psi_n$ сходится к u в $\mathscr{D}'(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, то отсюда следует, что распределение u нулевое, что и доказывает теорему.

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 672 p.
3. *Зарайский Д. А.* Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свёртки // Труды ИПММ. – 2006. – **12**. – С. 69–75.
4. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
5. *Зарайский Д. А.* Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ. – 2012. – **25**. – С. 77–83.
6. *Зарайский Д. А.* Класс функций, периодических в среднем, однозначно определяющихся своими значениями на «периоде» // Труды ИПММ. – 2019. – **33**. – С. 38–41.
7. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic, 2003. – 454 p.

D. A. Zaraisky

A new uniqueness theorem for one-dimensional convolution equation

An uniqueness theorem for one-dimensional convolution equation is proved. The uniqueness set in the theorem is union of neighbourhoods of two points lying at distance which equals to the diameter of the convolutor support.

Keywords: *convolution equations, mean periodicity.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
`d.zaraisky@gmail.com`

Получено 28.10.20

УДК 531.38:531.39

©2020. **А. В. Зыза**

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ ПРЕЦЕССИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА

Построено решение полиномиальной структуры уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Доказано, что для этого решения движение гиростата характеризуется свойством прецессионности относительно оси симметрии силового поля.

Ключевые слова: *гиростат, полиномиальные решения, прецессионные движения.*

1. Введение. В динамике твердого тела большое внимание уделяется построению частных решений уравнений движения [1]. Полиномиальные решения относятся к наиболее изученному классу таких решений (см. обзоры [2–4]). Терминология частных решений введена П. В. Харламовым в статье [5], посвященной исследованию условий существования решений уравнений Эйлера – Пуассона в задаче о движении тяжелого гиростата. К настоящему времени автором построено несколько классов полиномиальных решений задачи о движении гиростата в полях сложной структуры [6–8].

В настоящей статье найдено новое решение в задаче о движении гиростата в магнитном поле сил с учетом эффекта Барнетта – Лондона [9]. В численном примере построенного полиномиального решения проведен анализ свойств движения гиростата, которые имеют место и для уравнений Кирхгофа – Пуассона. Показано, что такое движение гиростата обладает свойством прецессионности и описывается частным случаем решения А. В. Мазнева [9].

2. Постановка задачи. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. Известно, что нейтральный ферромагнетик при вращении в магнитном поле становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта) [10]. Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Подобное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона) [11]. В обоих случаях механизм намагничивания обусловлен различными физическими причинами, но формулы для магнитного момента одинаковы. При взаимодействии с внешним магнитным полем магнитный момент тела будет стремиться по направлению вектора напряженности магнитного поля, что приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля.

При математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, обусловленный эффектом Барнетта – Лондона. Это обстоятельство приводит к тому, что уравнения движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона, в отличие от уравнений классической задачи динамики твердого тела и уравнений класса Кирхгофа, не допускают интеграл энергии из-за диссипации энергии: перехода — «перекачки» энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения твердого тела.

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона в векторном виде таковы [9]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0. \tag{2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением [6]

$$\left[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\right]^{\boldsymbol{\cdot}} = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

В уравнениях (1)–(3) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\ \nu_2, \nu_3)$ – орт напряженности магнитного поля; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ – гиростатический момент; $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата; $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая магнитный момент гиростата $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$; $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, которая характеризует ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; k_0 – постоянная интеграла площадей; точка над переменными обозначает относительную производную.

Если для динамического уравнения из системы (1) имеет место $B = \gamma E$ (E – единичная матрица, γ – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений движения (1). Тогда уравнения (1) по своей структуре будут совпадать с уравнениями задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [9].

Поставим задачу о нахождении условий существования у уравнений (1) решений следующей структуры:

$$\begin{gathered} p = \sigma^M, \qquad q = Q(\sigma), \qquad r^2 = R(\sigma), \\ \nu_1 = \varphi(\sigma), \qquad \nu_2 = \psi(\sigma), \qquad \nu_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma^N} r, \end{gathered} \tag{4}$$

где M, N – натуральные числа; $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\varkappa(\sigma)$ – функции, дифференцируемые по σ на своем множестве задания.

Подставим (4) в уравнения (1) и геометрический интеграл из (2). Имеем

$$\dot{\sigma} = (\psi'(\sigma))^{-1} P(\sigma)\sqrt{R(\sigma)}, \qquad P(\sigma) = \sigma^{M-N}\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma); \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\psi'(\sigma)\big(\psi(\sigma) - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)\sigma^{-N}\big) = \varphi'(\sigma)P(\sigma), \\
(R(\sigma)\varkappa^2(\sigma)\sigma^{-2N})' P(\sigma)\sigma^N = 2\psi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \sigma^M\psi(\sigma)), \\
MA_1\sigma^{M+N-1}P(\sigma) = \psi'(\sigma)\Big[\varkappa(\sigma)\big((C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_2 Q(\sigma) + s_2\big) + \\
+ \sigma^N\big((A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_3\psi(\sigma) + \lambda_2\big)\Big], \\
A_2 Q'(\sigma)\sigma^N P(\sigma) = \psi'(\sigma)\Big[\varkappa(\sigma)\big((C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_1\sigma^M - s_1\big) + \\
+ \sigma^N\big((A_3 - A_1)\sigma^M + B_3\varphi(\sigma) - \lambda_1\big)\Big], \\
A_3 R'(\sigma)P(\sigma) = 2\psi'(\sigma)\Big[\sigma^M\big((A_1 - A_2)Q(\sigma) + B_1\psi(\sigma) - \lambda_2\big) + \\
+ (C_2 - C_1)\varphi(\sigma)\psi(\sigma) + (\lambda_1 - B_2\varphi(\sigma))Q(\sigma) + s_1\phi(\sigma) - s_2\varphi(\sigma)\Big];
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\big(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1\big)\sigma^{2N} + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \tag{7}$$

В уравнениях (5), (6) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной σ. После определения функций $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\varkappa(\sigma)$ зависимость $\sigma = \sigma(t)$ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (5).

3. Полиномиальное решение уравнений (1)**.** Исследуем случай, когда $M = 3,\ N = 1$ в соотношениях (4), а функции, задающие инвариантные соотношения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$, таковы:

$$\begin{gathered}
Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\
R(\sigma) = c_6\sigma^6 + c_5\sigma^5 + c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\
\varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \quad \varkappa(\sigma) = f_0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Коэффициенты алгебраических многочленов из (8) – это параметры, подлежащие определению.

Подставим полиномы из (8) в уравнения (6), (7) и потребуем их выполнения при всех σ. Получим систему условий на параметры рассматриваемой задачи и искомые коэффициенты решения (4), (8):

$$
\begin{gathered}
3A_1(f_0-a_2)-2g_2d_4=0, \qquad 3A_1a_1+g_1d_4+2g_2d_3=0, \qquad g_1d_0=0,\\
3A_1a_0+g_1d_3+2g_2d_2=0, \qquad g_1d_2+2g_2d_1=0, \qquad g_1d_1+2g_2d_0=0,\\
3A_1(g_2-b_3f_0)-2a_2d_4=0, \qquad 3A_1(g_1-b_2f_0)-a_1d_4-2a_2d_3=0,\\
3A_1(g_0-b_1f_0)-a_1d_3-2a_2d_1=0, \qquad 3A_1b_0f_0+a_1d_2+2a_2d_0=0,\\
a_1d_0=0, \qquad 2c_6f_0d_4-3A_1(b_3a_2-g_2)=0,\\
f_0(4c_6d_3+3c_5d_4)-6A_1(b_3a_1+b_2a_2-g_1)=0,\\
f_0(4c_6d_2+3c_5d_3+2c_4d_4)-6A_1(b_3a_0+b_2a_1+b_1a_2-g_0)=0,\\
f_0(4c_6d_1+3c_5d_2+2c_4d_3+c_3d_4)-6A_1(b_2a_0+b_1a_1+b_0a_2)=0, \quad c_1=0,\\
c_0=0, \qquad f_0(4c_6d_0+3c_5d_1+2c_4d_2+c_3d_3)-6A_1(b_1a_0+b_0a_1)=0,\\
f_0(3c_5d_0+2c_4d_1+c_3d_2)-6A_1b_0a_0=0, \qquad f_0(2c_4d_0+c_3d_1)=0,\\
f_0c_3d_0=0, \qquad A_2b_3d_4-A_1(A_3-A_1)=0, \qquad (9)\\
A_2(3b_3d_3+2b_2d_4)+3A_1(B_1f_0-B_3a_2)=0,\\
A_2(3b_3d_2+2b_2d_3+b_1d_4)-3A_1(\beta f_0a_2+B_3a_1)=0,\\
A_2(3b_3d_1+2b_2d_2+b_1d_3)-3A_1(\beta f_0a_1+B_3a_0-\lambda_1)=0,\\
A_2(3b_3d_0+2b_2d_1+b_1d_2)-3A_1f_0(\beta a_0-s_1)=0,\\
2b_2d_0+b_1d_1=0, \qquad b_1d_0=0, \qquad A_3c_6d_4-A_1(A_1-A_2)b_3=0,\\
A_3(6c_6d_3+5c_5d_4)-6A_1((A_1-A_2)b_2+B_1g_2-B_2b_3a_2)=0,\\
A_3(6c_6d_2+5c_5d_3+4c_4d_4)-6A_1((A_1-A_2)b_1+B_1g_1-\\
-B_2(b_3a_1+b_2a_2)-(\alpha+\beta)a_2g_2)=0,\\
A_3(6c_6d_1+5c_5d_2+4c_4d_3+3c_3d_4)-6A_1((A_1-A_2)b_0+B_1g_0-\\
-B_2(b_2a_1+b_1a_2)-(\alpha+\beta)(a_2g_1+a_1g_2)+\eta b_3-\lambda_2)=0,\\
A_3(6c_6d_0+5c_5d_1+4c_4d_2+3c_3d_3+2c_2d_4)+6A_1(B_2(b_1a_1+b_0a_2)+\\
+(\alpha+\beta)(a_2g_0+a_1g_1+a_0g_2)-\eta b_2+s_2a_2-s_1g_2)=0,\\
A_3(5c_5d_0+4c_4d_1+3c_3d_2+2c_2d_3)+6A_1(B_2b_0a_1+(\alpha+\beta)(a_1g_0+a_0g_1)-\\
-\eta b_1+s_2a_1-s_1g_1)=0,
\end{gathered}
$$

$$A_3(4c_4d_0+3c_3d_1+2c_2d_2)+6A_1((\alpha+\beta)a_0g_0-\eta b_0+s_2a_0-s_1g_0)=0,$$
$$3c_3d_0+2c_2d_1=0,\qquad c_2d_0=0,\qquad a_0^2+g_0^2+c_2f_0^2-1=0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\alpha=C_3-C_2,\qquad \beta=C_1-C_3,\qquad \eta=\lambda_1-B_2a_0,\\
&d_4=(A_2-A_3)b_3,\qquad d_3=(A_2-A_3)b_2-B_3g_2+B_2b_3f_0,\\
&d_2=(A_2-A_3)b_1-B_3g_1+(\alpha g_2+B_2b_2)f_0,\\
&d_1=(A_2-A_3)b_0-B_3g_0+(\alpha g_1+B_2b_1)f_0+\lambda_2,\quad d_0=(\alpha g_0+B_2b_0+s_2)f_0.
\end{aligned}$$

Запишем решение системы (9), считая свободными параметры A_1, B_1, b_3, f_0, α:

$$\begin{aligned}
&A_2=A_3=A_1,\qquad B_2=B_3=B_1,\qquad \beta=\alpha b_3^2,\\
&\lambda_1=-\frac{2\alpha B_1b_3^2f_0^3}{3A_1},\qquad \lambda_2=\frac{2\alpha B_1b_3f_0^3}{3A_1},\\
&s_1=-\frac{9A_1^2+(2b_3f_0^3\alpha)^2(2b_3^2-1)}{18A_1f_0^3},\qquad s_2=\frac{(2b_3^2f_0^3\alpha)^2-9A_1^2}{6A_1f_0^3b_3},\\
&b_2=0,\qquad b_1=\frac{9A_1^2-(2b_3f_0^3\alpha)^2(b_3^2+1)}{6A_1f_0^4b_3\alpha},\qquad b_0=0,\\
&c_6=-(b_3^2+1),\qquad c_5=0,\qquad c_4=\frac{(2b_3f_0^3\alpha)^2(b_3^2+1)-9A_1^2}{3A_1f_0^4\alpha},\\
&c_3=0,\qquad c_2=\frac{\big(9A_1^2-(2b_3f_0^3\alpha)^2\big)\big((2b_3f_0^3\alpha)^2(b_3^2+1)-9A_1^2\big)}{(6A_1f_0^4b_3\alpha)^2},\\
&c_1=0,\qquad c_0=0,\qquad a_2=f_0,\qquad a_1=0,\qquad a_0=-\frac{2b_3^2f_0^3\alpha}{3A_1},\\
&g_2=b_3f_0,\qquad g_1=0,\qquad g_0=\frac{9A_1^2-(2b_3^2f_0^3\alpha)^2}{6A_1b_3f_0^3\alpha}.
\end{aligned}\tag{10}$$

Решение (4), (8) при выполнении условий (10) будет действительным, например, при

$$c_2>0.\tag{11}$$

Зависимость σ от времени найдем из дифференциального уравнения (5):

$$\dot\sigma=\frac{d_2}{3A_1}\sqrt{R^*(\sigma)},\tag{12}$$

где $R^*(\sigma)=c_6\sigma^4+c_4\sigma^2+c_2$.

Приведем численный пример решения (4), (8), (12) при выполнении условий (10), (11). Пусть

$$
\begin{aligned}
&A_1 = a, \qquad B_1 = b, \qquad b_3 = \frac{11}{10},\\
&f_0 = \frac{a}{b}, \qquad \alpha = \frac{b^3}{a^2} \qquad (a > 0,\ b > 0).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Тогда на основании (10) получим

$$
\begin{aligned}
&A_1 = A_2 = A_3 = a, \qquad B_1 = B_2 = B_3 = b, \qquad \beta = \frac{121}{100}\frac{b^3}{a^2},\\
&\boldsymbol{\lambda} = \frac{11b}{15}\left(-\frac{11}{10}, 1, 0\right), \qquad \boldsymbol{s} = -\frac{b^3}{1500a^2}\left(\frac{19841}{15}, \frac{7859}{11}, 0\right);
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&p = \sigma^3, \qquad q = \frac{11}{10}\sigma^3 - \frac{4241b}{16500a}\sigma, \qquad r = \sigma\sqrt{R^*(\sigma)},\\
&R^*(\sigma) = -\frac{221}{100}\sigma^4 + \frac{4241b}{7500a}\sigma^2 + \frac{33330019b^2}{27225\cdot 10^4 a^2},\\
&\nu_1 = \frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{121}{150}, \qquad \nu_2 = \frac{11a}{10b}\sigma^2 + \frac{7859}{16500}, \qquad \nu_3 = \frac{a}{b}\sqrt{R^*(\sigma)}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\dot\sigma = \frac{11b}{30a}\sqrt{R^*(\sigma)}. \tag{16}
$$

При выполнении условий (13), (14) решение (15), (16) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a, b и описывается полиномиальными функциями вспомогательной переменной σ. Зависимость σ от времени получим обращением эллиптического интеграла, вытекающего из (16).

4. Исследование движения гиростата в построенном решении в случае, когда параметры задачи и решения удовлетворяют условиям (10)–(12)**.** Запишем исследуемое решение на основании соотношений (4)

$$
p = \sigma^3, \qquad q = \frac{11}{10}\sigma^3 - \frac{4241b}{16500a}\sigma, \qquad r = \sigma F(\sigma); \tag{17}
$$

$$
\nu_1 = \frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{121}{150}, \quad \nu_2 = \frac{11a}{10b}\sigma^2 + \frac{7859}{16500}, \quad \nu_3 = \frac{a}{b}F(\sigma), \quad \dot\sigma = \frac{11b}{30a}F(\sigma), \tag{18}
$$

где

$$
F(\sigma) = \sqrt{-\frac{221}{100}\sigma^4 + \frac{4241b}{7500a}\sigma^2 + \frac{33330019b^2}{27225\cdot 10^4 a^2}}.
$$

Подчеркнем, что параметры задачи удовлетворяют условиям

$$
A_3 = A_2 = A_1 = a, \qquad B_3 = B_2 = B_1 = b, \tag{19}
$$

$$C_3 - C_2 = \frac{b^3}{a^2}, \qquad C_1 - C_3 = \frac{121b^3}{100a^2}. \tag{20}$$

Из (19) следует, что эллипсоид инерции гиростата является сферой, а уравнения (1) переходят в уравнения движения сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [9]. Важное значение в характеристике решения (17), (18) имеют значения векторов

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{11b}{15}\left(-\frac{11}{10}, 1, 0\right), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{s} = -\frac{b^3}{1500a^2}\left(\frac{19841}{15}, \frac{7859}{11}, 0\right). \tag{22}$$

Докажем, что движение гиростата в решении (17), (18) является прецессионным. Для этой цели проверим условие прецессионности, которое описывается инвариантным соотношением [9]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0 \qquad (\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)), \tag{23}$$

где вектор $\boldsymbol{a}$ неизменно связан с телом-носителем, $a_0 = \cos\theta_0$ $(\theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}))$ – постоянный параметр. Внесем компоненты ν_1, ν_2, ν_3 из равенств (18) в левую часть уравнения (23) и потребуем, чтобы полученное условие выполнялось для всех значений переменной σ. Тогда имеем

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{221}}(11, -10, 0), \qquad a_0 = -\frac{150}{11\sqrt{221}}. \tag{24}$$

Это означает, что движение тела-носителя – прецессия относительно вертикали.

Прецессионные движения в динамике твердого тела изучены для многих классов решений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [9]. Поэтому представляются актуальными задачи: является ли прецессия (23) новой в динамике твердого тела, и какому типу прецессий, согласно классификации [9], она принадлежит.

Для решения данной задачи воспользуемся вторым соотношением для прецессий гиростата [9], которое следует из (23) в силу уравнения Пуассона системы (1). Запишем его в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{25}$$

где, соответственно, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ – скорость собственного вращения гиростата и скорость прецессии.

Преобразуем (25) на основании значений (24):

$$(p, q, r) = \frac{1}{\sqrt{221}}\dot{\varphi}(11, -10, 0) + \dot{\psi}(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \tag{26}$$

Внесем в левую часть равенства (26) p, q, r из (17), а в правую часть ν_1, ν_2, ν_3 из (18). Тогда получим

$$\dot{\varphi} = \frac{11\sqrt{221}}{150}\frac{b}{a}\,\sigma, \qquad \dot{\psi} = \frac{b}{a}\,\sigma. \tag{27}$$

В соотношениях (27) переменная $\sigma(t)$ удовлетворяет третьему дифференциальному уравнению из (18). Следовательно, прецессия гиростата относится к прецессии общего вида [9]. При этом величины (27) в силу (24) удовлетворяют уравнению

$$a_0\dot{\varphi} + \dot{\psi} = 0. \tag{28}$$

Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата со сферическим распределением масс (см. формулу из (19)) изучены А. В. Мазневым [9, с. 283–285]. Им получены два класса таких прецессий. Метод получения этих классов основывался на первых интегралах уравнений Кирхгофа – Пуассона (в нашем случае интеграл энергии следует из (3) в силу условия $B = \mathrm{diag}(B_1, B_1, B_1)$) и уравнении, которое следует из динамического уравнения в (1) при проектировании их левой и правой частей на вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu} \neq 0$ (очевидно, что вначале указанное уравнение было преобразовано с помощью инвариантных соотношений (23), (25)). В книге [9] оно названо основным уравнением для прецессии гиростата. Первый класс прецессий А. В. Мазнева характеризуется условием, что основное уравнение становится тождеством на инвариантных соотношениях (23), (25). На основании соотношений (19), (20) и формул (27) можно сделать заключение, что для прецессий гиростата, которые изучаются в данной статье, выполняется условие А. В. Мазнева для первого класса. Причем, в силу (28) полученный здесь результат относится к частному случаю прецессии общего вида [9]. Остается выяснить, как параметры (21), (22) связаны с a_1, a_2, a_3 – компонентами единичного вектора $\boldsymbol{a}$. Очевидны следующие условия: $\boldsymbol{a}$ коллинеарен $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{a}$ неколлинеарен $\boldsymbol{s}$, которые имеют место и в частном случае решения [9]

Таким образом, показано, что построенный пример полиномиального решения уравнений (1) характеризуется свойством прецессионности движения гиростата. Данное свойство представляет интерес в силу того, что аналогичные свойства в динамике гиростата не рассматривались.

1. *Харламов П. В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
2. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
3. *Харламова Е. И., Мозалевская Г. В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
4. *Горр Г. В., Ковалев А. М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. *Харламов П. В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 26–34.

6. *Зыза А. В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – **10**, № 1. – С. 7–25.
7. *Зыза А. В.* Об обобщенных уравнениях Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – **29**, вып. 1. – С. 73–83.
8. *Зыза А. В.* Полиномиальные решения двух задач динамики гиростата // XII Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, Россия, 19–24 августа 2019 г.): Матер. конф., Т. 1. Общая и прикл. механика. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 75–77.
9. *Горр Г. В., Мазнев А. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
10. *Barnett S. I.* Gyromagnetic and Electron – Inertia Effects // Rev. Modern. Phys. – 1935. – **7**, issue 2. – P. 129–166.
11. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.

A. V. Zyza

Polynomial solution of gyrostat motion equations under the potential and gyroscopic forces for the precessions of spherical gyrostat

In this paper the solution of the polynomial structure of gyrostat motion equations under the influence of potential and gyroscopic forces is constructed. We prove that for this solution the gyrostat movement is characterized by the property of precessioness with respect to the axis of symmetry of the force field.

Keywords: *gyrostat, polynomial solutions, precession motions.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк
`z9125494@mail.ru`

Получено 02.11.20

УДК 517.983.36

©2020. **Д. В. Лиманский**

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫХ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Рассматриваются минимальные дифференциальные полиномы от двух переменных с главными l-квазиоднородными частями, $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$. Получено представление слабо коэрцитивных неквазиэллиптических операторов в анизотропных пространствах Соболева $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ в случае, когда l_1 кратно l_2.

Ключевые слова: *априорная оценка, дифференциальный полином, слабая коэрцитивность, квазиэллиптичность, пространство Соболева.*

1. Введение. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := := (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \ldots + + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Пусть, далее, $P^l_j(x, D) := \sum\limits_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$ – l-главная часть оператора $P_j(x, D)$, а $P^l_j(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\xi^\alpha$ – его главный l-квазиоднородный символ. Напомним следующие определения.

Определение 1 ([1, 2]). Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *l-квазиэллиптической*, если

$$(P^l_1(x, \xi), \ldots, P^l_N(x, \xi)) \neq 0, \qquad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

и, в частности, *эллиптической* порядка l, если $l_1 = \ldots = l_n = l$.

Определение 2 ([1]). Система дифференциальных операторов вида (1) называется *коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}^l_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C^\infty_0(\Omega)$.

Хорошо известно [1–4], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω система (1) l-квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1; \infty$ оценка (2) для l-квазиэллиптической системы утрачивает силу. Так, из результатов М. М. Маламуда [5] (в случае $p = \infty$) и Орнстейна [6] (в случае $p = 1$) следует, что l-квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $\mathring{W}_\infty^l(\Omega)$ и $\mathring{W}_1^l(\Omega)$ лишь в исключительных случаях.

Впрочем, для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) верна более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3}$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [5].

Отметим также, что невозможность оценки вида (2) при $p = 1$ вытекает из результатов Орнстейна [6]. В то же время наличие оценки (3) при $p = 1$ доказано (для случая операторов с постоянными коэффициентами) в работах [7, 8].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [9] определение.

Определение 3 ([9])**.** Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (3), в которой C_1 и C_2 не зависят от f.

В случае изотропного пространства Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, т. е. при $l_1 = \ldots = l_n = l$, неравенство $|\alpha : l| < 1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая $N = 1$ еще ранее де Лю и Миркил [10] показали, что при $n \geqslant 3$ оператор $P(D) = P_1(D)$ порядка $l \geqslant 2$ эллиптичен тогда и только тогда, когда он слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$. При $n = 2$ этот критерий утрачивает силу. Так, в [10] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$. В работе [9] получен следующий результат, обобщающий пример Мальгранжа.

Теорема 1 ([9])**.** (i) *Произвольный слабо коэрцитивный оператор $P(D)$ порядка $l \geqslant 2$ в изотропном пространстве $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ имеет вид*

$$P(D) = R(D) \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k) + Q(D), \tag{4}$$

где $m \leqslant l$; $R(D)$ – эллиптический оператор порядка $l - m$; $Q(D)$ – оператор порядка $\leqslant l - 2$; $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; $\{(\lambda_k, \mu_k)\}_1^m \in \mathbb{R}^2$ суть попарно неколлинеарные векторы.

(ii) *Обратно, всякий оператор вида* (4) *слабо коэрцитивен в* $\mathring{W}^l_p(\mathbb{R}^2)$ *для всех* $p \in [1, \infty]$.

В «анизотропном» случае, когда $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$, не всегда существуют неквазиэллиптические слабо коэрцитивные в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ операторы. Так, если l_1 не кратно l_2, то l-квазиэллиптичность оператора $P(D)$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, т. е. справедлив аналог теоремы де Лю и Миркила. В случае же, когда l_1 кратно l_2, построены примеры широких классов слабо коэрцитивных в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, но не l-квазиэллиптических операторов (см. [11, теоремы 1 и 2]).

Следующей теоремой мы завершаем описание слабо коэрцитивных неквазиэллиптических операторов с постоянными коэффициентами от двух переменных в анизотропном пространстве $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, рассматривая случай, когда l_1 делится на l_2.

Теорема 2. *Пусть* $l := (km, k)$, $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *и* $P(D)$ *– оператор вида*

$$P(D) = \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_\alpha D^\alpha. \tag{5}$$

(i) *Если оператор* $P(D)$ *слабо коэрцитивен в анизотропном пространстве* $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, *но не является* l-*квазиэллиптическим, то он имеет вид*

$$P(D) = S(D_1)R(D) + Q(D), \tag{6}$$

где $S(D_1)$ *– невырожденный обыкновенный дифференциальный оператор порядка* m, *т. е.* $S(\xi_1) \neq 0$ *при всех* $\xi_1 \in \mathbb{R}$; $R(D)$ *–* l'-*квазиэллиптический оператор,* $l' := ((k-1)m, k-1)$; $Q(D)$ *– оператор вида* $\sum\limits_{|\alpha:l'|<1} b_\alpha D^\alpha$.

(ii) *Обратно, всякий оператор вида* (6) *слабо коэрцитивен в* $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Отметим, что этот результат является «анизотропным» аналогом «изотропной» теоремы 1. Теорема 2 будет доказана ниже, в п. 3.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^n_+ := \mathbb{Z}_+ \times \ldots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей), $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$. Далее, $D_k := := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \ldots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, то $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \ldots + \alpha_n/l_n$.

Через $C^\infty(\Omega)$ обозначим множество функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а через $C_0^\infty(\Omega)$ – его подмножество финитных функций в Ω. Замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W^l_p(\Omega)$ обозначим $\mathring{W}^l_p(\Omega)$.

Предложение 1 ([5, 10]). *Пусть* $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $Q(D)$ *и* $P(D)$ – *дифференциальные полиномы вида* (5) *с* l*-главными символами* $Q^l(\xi)$ *и* $P^l(\xi)$ *соответственно. Тогда из априорной оценки*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \left[\|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right], \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{7}$$

вытекает тождество $Q^l(\xi) \equiv c\, P^l(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, *где* $c \in \mathbb{C}$ – *константа.*

Предложение 2 ([8, 11]). *Пусть* $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$ *и оператор* $P(D)$ *вида* (5) *слабо коэрцитивен в* $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. *Тогда:*

(i) $a_{l_1,0} \neq 0$, *т. е.* $P^l(1,0) \neq 0$;

(ii) *если, к тому же,* l_2 *не является делителем* l_1, *то* $a_{0,l_2} \neq 0$, *т. е.* $P^l(0,1) \neq 0$.

Установим теперь некоторый общий алгебраический факт.

Предложение 3. *Пусть* $l := (km, k)$, $k, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ *и* $R(\xi) = \sum\limits_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha \xi^\alpha$ – *полином со старшей* l*-однородной частью*

$$R^l(\xi) = c \prod_{j=1}^{s} (\xi_1^m + \varkappa_j \xi_2)^{k_j}, \tag{8}$$

где $c \neq 0$; $\sum_{j=1}^{s} k_j = k$; $\{\varkappa_j\}_1^s$ *суть различные комплексные числа.*

Тогда полином $R(\xi)$ *можно представить в виде*

$$R(\xi) = c \prod_{j=1}^{s} \left[(\xi_1^m + \varkappa_j \xi_2)^{k_j} + Q_j(\xi)\right] + Q(\xi), \tag{9}$$

в котором полиномы $\{Q_j(\xi)\}_1^s$ *и* $Q(\xi)$ *имеют вид*

$$Q_j(\xi) = \sum_{|\alpha:l^j|<1} b_{j\alpha} \xi^\alpha, \qquad Q(\xi) = \sum_{|\alpha:l'|<1} c_\alpha \xi^\alpha, \tag{10}$$

где $l^j := (k_j m, k_j)$, $j = \overline{1,s}$; $l' := ((k-1)m, k-1)$.

Доказательство. Обозначим через $R_1(\xi)$ сумму мономов $a_\alpha \xi^\alpha$ из $R(\xi)$, для которых $|\alpha : l| < 1$ и $|\alpha : l'| \geqslant 1$. Полином $R_1(\xi)$ можно представить в виде суммы $R_1(\xi) = \sum_{r=0}^{m-1} \xi_1^r R_{1r}(\xi)$, где $\{R_{1r}(\xi)\}_{r=0}^{m-1}$ суть l'-однородные полиномы. Рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{R_1(\xi)}{R^l(\xi)} = \sum_{r=0}^{m-1} \xi_1^r \, \frac{R_{1r}(\xi)}{R^l(\xi)}\,. \tag{11}$$

Покажем сначала, что она раскладывается в сумму «простейших»

$$\frac{R_1(\xi)}{R^l(\xi)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{Q_j(\xi)}{(\xi_1^m + \varkappa_j \xi_2)^{k_j}}\,, \tag{12}$$

где полиномы $\{Q_j(\xi)\}_1^s$ имеют вид (10).

Показатели α_1 мономов $\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$, входящих в каждый из полиномов $R_{1r}(\xi)$, $r = \overline{0, m-1}$, делятся на m. Поэтому, совершая замену $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\zeta_1, \zeta_2)$ вида

$$\zeta_1 := \xi_1^m, \qquad \zeta_2 := \xi_2, \tag{13}$$

придем к однородным полиномам $\widetilde{R}_{1r}(\zeta) := R_{1r}(\zeta_1^{1/m}, \zeta_2)$ степени $k-1$. После указанной замены полином $R^l(\xi)$ станет однородным степени k и примет вид $\widetilde{R}^l(\zeta) = c\prod_{j=1}^s(\zeta_1 + \varkappa_j\zeta_2)^{k_j}$. Тогда в силу [9, теорема 5.1, (i)] получим разложение функции $\widetilde{R}_{1r}(\zeta)/\widetilde{R}^l(\zeta)$ в сумму «простейших»:

$$\frac{\widetilde{R}_{1r}(\zeta)}{\widetilde{R}^l(\zeta)} = \sum_{j=1}^s \frac{\widetilde{Q}_{jr}(\zeta)}{(\zeta_1 + \varkappa_j\zeta_2)^{k_j}}\,, \qquad r \in \{0, \ldots, m-1\}, \tag{14}$$

где $\{\widetilde{Q}_{jr}(\zeta)\}_{j=1}^s$ – некоторые полиномы степени $< k_j$.

Совершая в (14) обратную к (13) подстановку, придем к разложению

$$\frac{R_{1r}(\xi)}{R^l(\xi)} = \sum_{j=1}^s \frac{Q_{jr}(\xi)}{(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j}}\,, \qquad r \in \{0, \ldots, m-1\}, \tag{15}$$

где $Q_{jr}(\xi) := \widetilde{Q}_{jr}(\xi_1^m, \xi_2)$, $j = \overline{1, s}$.

Из (11) и (15) получаем, что

$$\frac{R_1(\xi)}{R^l(\xi)} = \sum_{j=1}^s \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\xi_1^r Q_{jr}(\xi)}{(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j}}\,. \tag{16}$$

Для завершения доказательства представления (12) осталось показать, что полиномы $Q_j(\xi) := \sum\limits_{r=0}^{m-1} \xi_1^r Q_{jr}(\xi)$, $j = \overline{1, s}$, в числителях дробей в (16) имеют вид (10). В самом деле, показатели $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ мономов $\xi_1^{\gamma_1}\xi_2^{\gamma_2}$, входящих в $Q_j(\xi)$, имеют вид $\gamma_1 = r + \alpha_1 m$, $\gamma_2 = \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha_1 + \alpha_2 < k_j$. Отсюда $(\alpha_1 + \alpha_2)m + r \leqslant (k_j - 1)m + (m-1) = k_j m - 1 < k_j m$ и, значит,

$$|\gamma : l^j| = \frac{\gamma_1}{k_j m} + \frac{\gamma_2}{k_j} = \frac{r + \alpha_1 m}{k_j m} + \frac{\alpha_2}{k_j} < 1.$$

Таким образом, представление (12) доказано.

Рассмотрим теперь полином

$$\widetilde{R}(\xi) := R^l(\xi)\prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{Q_j(\xi)}{(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j}}\right].$$

Для него $\widetilde{R}^l(\xi) = R^l(\xi)$ и $\widetilde{R}_1(\xi) = R_1(\xi)$ (в силу (8) и (12)). Поэтому разность $Q(\xi) := R(\xi) - \widetilde{R}(\xi)$ содержит мономы $a_\alpha\xi^\alpha$ полинома $R(\xi)$, показатели α которых удовлетворяют условию $|\alpha : l'| < 1$. Представление (9) доказано. $\square$

Предложение 4 ([12]). *Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, причем $l_j \geqslant 2$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, и система $\{P_j(D)\}_1^N$ дифференциальных операторов вида (1) слабо коэрцитивна в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда множество совместных нулей $\bigl\{\xi : \ P_j(\xi) = 0, \ j = \overline{1, n}\bigr\}$ ее «полных» символов компактно.*

Предложение 5. *Пусть $l = (km, k)$, $\ k, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, и оператор $P(D)$ вида (5) слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого оператора $Q(D)$ вида*

$$Q(D) := \sum_{|\alpha : l'| < 1} b_{j\alpha} D^\alpha, \qquad \text{где} \quad l' := ((k-1)m, k-1),$$

«возмущенный» оператор $P(D) + Q(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^{l'}_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Из теорем вложения [1, гл. III] вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что справедлива априорная оценка

$$\|Q(D)f\| \leqslant \varepsilon \left[\|D_1^{(k-1)m} f\| + \|D_2^{k-1} f\|\right] + C_\varepsilon \|f\|. \tag{17}$$

Здесь и ниже везде предполагается, что нормы рассматриваются в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, а f пробегает множество функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Поэтому из неравенств слабой коэрцитивности (7) и (17) следует, что

$$\|P(D)f + Q(D)f\| + \|f\| \geqslant (C_1^{-1} - \varepsilon) \left[\|D_1^{(k-1)m} f\| + \|D_2^{k-1} f\|\right] - C_\varepsilon \|f\|. \tag{18}$$

Выберем $\varepsilon < C_1^{-1}$ в (17). Тогда из (18) вытекает оценка

$$\|D_1^{(k-1)m} f\| + \|D_2^{k-1} f\| \leqslant \frac{1}{C_1^{-1} - \varepsilon} \|P(D)f + Q(D)f\| + C_\varepsilon \|f\|,$$

из которой следует слабая коэрцитивность «возмущенного» оператора $P(D) + Q(D)$ в $\mathring{W}^{l'}_\infty(\mathbb{R}^2)$. В самом деле, система операторов $\{D_1^{(k-1)m}, D_2^{k-1}\}$ является l'-квазиэллиптической и, значит, слабо коэрцитивной в $\mathring{W}^{l'}_\infty(\mathbb{R}^2)$. Поэтому

$$\|D^\alpha f\| \leqslant C\Bigl[\|D_1^{(k-1)m} f\| + \|D_2^{k-1} f\| + \|f\|\Bigr] \leqslant \frac{C}{C_1^{-1} - \varepsilon} \|P(D)f + Q(D)f\| + C'\|f\|$$

для всех $|\alpha : l'| < 1$, что и требовалось. $\square$

3. Доказательство теоремы 2. (i) Пусть оператор $P(D)$ вида (5) неквазиэллиптичен и слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. Докажем, что он имеет вид (6).

В силу предложения 2, (i) коэффициент $c := a_{km,0}$ полинома $P(\xi)$ при ξ_1^{km} отличен от нуля. Если мультииндекс α удовлетворяет соотношению $|\alpha : l| = 1$, то $\alpha_1 + m\alpha_2 = km$, и α_1 делится на m. Поэтому, выполняя в полиноме $P^l(\xi)$ замену (13), придем к полиному $\widetilde{P}^k(\zeta) := P^l(\zeta_1^{1/m}, \zeta_2)$, который является однородным степени k с коэффициентом $c \neq 0$ при ζ_1^k. Значит, $\widetilde{P}^k(\zeta)$ может быть представлен в виде $\widetilde{P}^k(\zeta) = c\prod_{j=1}^{s}(\zeta_1 + \varkappa_j\zeta_2)^{k_j}$, где $\{\varkappa_j\}_1^s$ суть различные комплексные числа, $\sum_{j=1}^{s} k_j = k$. Выполняя теперь в полиноме $\widetilde{P}^k(\zeta)$ ту же замену (13), придем к разложению

$$P^l(\xi) = c\prod_{j=1}^{s}(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j}. \tag{19}$$

Так как полином $P^l(\xi)$ неквазиэллиптичен, то $P^l(\xi^0) = 0$ для некоторого $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \neq 0$. Значит, согласно (19), $(\xi_1^0)^m + \varkappa_{j_0}\xi_2^0 = 0$ для некоторого $j_0 \in \{1, \ldots, s\}$. В силу предложения 2, (i) имеем $\xi_1^0 = 0$, откуда $\xi_2^0 \neq 0$ и $\varkappa_{j_0} = 0$. Значит, $P^l(\xi)$ делится на ξ_1^m. Не нарушая общности, можно считать, что $j_0 = 1$.

Покажем, что $k_1 = 1$ и $\varkappa_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ при $j \in \{2, \ldots, s\}$. Действительно, если $k_1 \geqslant 2$, то в полиноме $P^l(\xi)$, кроме ξ_2^k, отсутствует также моном $\xi_1\xi_2^{k-1}$, что легко приводится к противоречию с предложением 1 (см. [11]). Далее, если бы $\varkappa_{j_1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ для некоторого $j_1 \geqslant 2$, то полином $P^l(\xi)$ имел бы вещественный нуль $(1; -1/\varkappa_{j_1})$, определяемый уравнением $\xi_1^m + \varkappa_{j_1}\xi_2 = 0$, что противоречит предложению 2, (i).

Таким образом, $P^l(\xi)$ представляется в виде

$$P^l(\xi) = c\prod_{j=1}^{s}(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j} = c\,\xi_1^m\prod_{j=2}^{s}(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j}, \tag{20}$$

где $c \neq 0$, $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $j = \overline{2, s}$, суть различные числа, $\sum_{j=2}^{s} k_j = k - 1$.

Применяя предложение 3 к полиному $P(\xi)$, l-главная форма $P^l(\xi)$ которого имеет вид (20), т. е. вид (19) при $\varkappa_1 = 0$, получим, что $P(\xi)$ представляется в виде (9), т. е. в виде

$$P(\xi) = c\,(\xi_1^m + Q_1(\xi_1))\prod_{j=2}^{s}\left[(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j} + Q_j(\xi)\right] + Q(\xi) := S_1(\xi_1)R(\xi) + Q(\xi),$$

где $c \neq 0$, $Q_1(\xi_1)$ – полином от переменной ξ_1 степени $< m$, полиномы $\{Q_j(\xi)\}_2^s$ и $Q(\xi)$ имеют вид (10) и

$$S_1(\xi_1) := \xi_1^m + Q_1(\xi_1), \qquad R(\xi) := c\prod_{j=2}^{s}\left[(\xi_1^m + \varkappa_j\xi_2)^{k_j} + Q_j(\xi)\right].$$

Оператор $R(D)$ является l'-квазиэллиптическим, поскольку $\varkappa_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ при $j \in \{2, \ldots, s\}$. Далее, в силу предложения 5, оператор $S_1(D_1)R(D) = P(D) - Q(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_\infty^{l'}(\mathbb{R}^2)$. Значит, в силу предложения 4, множество нулей полинома $S_1(\xi_1)R(\xi)$ компактно. Отсюда $S_1(\xi_1) \neq 0$ при любом $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Таким образом, доказано, что оператор $P(D)$ имеет вид (6).

(ii) Это утверждение доказано в [11, теорема 2].

Таким образом, теорема 2 – основной результат настоящей работы – полностью доказана.

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
2. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. *Бесов О. В.* О коэрцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева // Матем. сборник. – 1967. – **73(115)**, № 4. – С. 585–599.
4. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Мир, 1959. – 252 с.
5. *Маламуд М. М.* Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Труды Моск. матем. о-ва. – 1995. – **56**. – С. 206–261.
6. *Ornstein D.* A non-equality for differential operators in the L_1 norm // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – **11**. – P. 40–49.
7. *Belinsky E. S., Dvejrin M. Z., Malamud M. M.* Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators // Russian J. Math. Phys. – 2005. – **12**, № 1. – P. 6–16.
8. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞ // Докл. РАН. – 2004. – **397**, № 4. – С. 453–458.
9. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. – 2008. – **199**, № 11. – С. 75–112.
10. *De Leeuw K., Mirkil H.* A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Illinois J. Math. – 1964. – **8**, № 1. – P. 112–124.
11. *Лиманский Д. В.* О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева // Труды ИПММ. – 2016. – **30**. – С. 109–119.
12. *Лиманский Д. В.* О нулях слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева неквазиэллиптических систем дифференциальных операторов // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 76–85.

D. V. Limanskii

On representation of minimal differential polynomials in two variables weakly coercive in the anisotropic Sobolev spaces

Minimal differential polynomials in two variables with principal l-quasi-homogeneous parts, $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$, are considered. The representation of weakly coercive non-quasi-elliptic operators in the anisotropic Sobolev spaces $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ in the case when l_1 is divisible by l_2 is obtained.

Keywords: *a priori estimate, differential polynomial, weak coercivity, quasi-ellipticity, Sobolev space.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк,
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
d.limanskiy@donnu.ru

Получено 27.10.20

УДК 517.988.28

©2020. **П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко**

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ИЗ ТРЕУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА

Локальный вариант проблемы Помпейю рассматривается для семейства из прямоугольного равнобедренного треугольника и квадрата. Получены значения радиуса Помпейю для упомянутого треугольника и указанного семейства.

Ключевые слова: *проблема Помпейю, радиус Помпейю, множество Помпейю, семейство Помпейю из треугольника и квадрата.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, часть этой группы, оставляющая компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ внутри B, традиционно обозначаем $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$, $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ – шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если для любой локально суммируемой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ из условий

$$\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ следует, что она равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A.

Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы. Пусть функция $f\colon \mathbb{B}_R \to \mathbb{C}$ локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R$, и для каждого $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ выполняется равенство $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$. Если отсюда следует, что $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}_R$, будем говорить, что A является множеством Помпейю в $\mathbb{B}_R$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$. Для любого $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ это имеет место, если размеры $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с A, см. [1, 2]. В связи с этим в работе [3] поставлена следующая

Проблема 1 (4.1.1 из [3], локальный вариант проблемы Помпейю)**.** Для данного A найти $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{R}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

Ряд общих результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренстейном и Р. Гэем (см. [1, 2]), а также В. В. Волчковым (см. [3, Глава 4, §1–2]). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, можно найти в [3–9].

Рассмотрим некоторые примеры множеств A, для которых известно точное значение $\mathcal{R}(A)$.

1. Пусть A – правильный треугольник со стороной a. Тогда $\mathcal{R}(A) = a\sqrt{3}/2$ ([10], В. В. Волчков, 1996).

2. Пусть A – правильный m-угольник со стороной длины l. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} l\,\mathrm{ctg}(\pi/2m)/2, & \text{если } m \text{ – нечетно;} \\ l\sqrt{1+4\mathrm{ctg}^2(\pi/m)}/2, & \text{если } m \text{ – четно} \end{cases}$$

([3], В. В. Волчков, 2000–2003).

3. Пусть A – треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}(A) = 1$ ([11], П. А. Машаров, 2001).

4. Пусть A – куб в $\mathbb{R}^n$ с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{n+3}/2$ ([12], В. В. Волчков, 1996).

5. Пусть A – полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{5}/2$ ([3], В. В. Волчков, 1996).

6. Пусть $A(h)$ – сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h-3h^2}\,/2, & 1 < h \leqslant 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

([13], П. А. Машаров, 2011).

7. Пусть $A(h)$ – невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(\sqrt{3}/2, -1/2)$, $(\sqrt{3}/2 - h, 0)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $h \in (0, \sqrt{3}/2)$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0, \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

([14], Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров, 2014).

Известны также значения величины $\mathcal{R}(A)$ для случаев, когда A – плоский круговой сектор ([15], П. А. Машаров, 2000), параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ ([12], В. В. Волчков, 1998–2000), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ ([3], В. В. Волчков, 2001), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ ([16], Л. В. Елец, П. А. Машаров, 2009), замыкание разности двух плоских квадратов (П. А. Машаров, 2016, [17]), другие множества.

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. В [9, 18, 19] рассмотрены аналоги проблемы Помпейю для множеств, размерность которых $m < n$. В этом случае интегралы в определении множества Помпейю понимаются как m-кратные, а функции первоначально считаются непрерывными. Значение аналогичной радиусу Помпейю величины $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}^n_R)$ было получено для трехмерного куба, плоского квадрата, отрезка.

Рассмотрим теперь локальный вариант проблемы Помпейю для набора множеств. Совокупность компактных множеств $\{A_1, \ldots, A_m\} = \{A_j\}_{j=1}^m$ будем называть семейством Помпейю в B и обозначать $\{A_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{P}(B)$, если для комплекснозначной локально суммируемой функции f из того, что интегралы $\int_{\lambda A_j} f(x)\,dx = 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$ и $\lambda \in \mathrm{Mot}(A_j, B)$, следует, что f равна нулю почти всюду в B.

Аналогично проблеме 1 возникает

Проблема 2. Для данной совокупности $\{A_j\}_{j=1}^m$ найти

$$\mathcal{R}\big(\{A_j\}_{j=1}^m\big) = \inf\{R > 0\colon \{A_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)\}.$$

Поставленная проблема не новая. Ее решение для совокупности из двух шаров содержится в [3, § 2.1.4]. В [20] проблема 2 рассмотрена для семейства круговых секторов.

В данной работе решение проблемы 1 получено для прямоугольного равнобедренного треугольника, проблемы 2 – для семейства из треугольника и квадрата. Всюду далее размерность пространства $n = 2$. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами единичной длины

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\},$$

$\tilde{K}(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| \leqslant a/2,\ |y| \leqslant a/2\}$ – квадрат со стороной a,

$$K = \tilde{K}\Big(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\Big/\sqrt{5}\Big).$$

Основными результатами работы являются

Теорема 1. *Имеет место равенство* $\mathcal{R}(T) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}\big(\{T, K\}\big) = \sqrt{228 - 70\sqrt{2}}\Big/16\,.$$

2. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим множество $\mathbb{B}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon r < |x| < R\}$ – кольцо, если $r \geqslant 0$, или круг $\mathbb{B}_R$, если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества $B \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B, $C(B)$ – класс непрерывных на B функций, пространство $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(B)$.

Под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс локально суммируемых в B функций, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(A, B)$ – класс радиальных функций из

$\mathfrak{P}^\infty(A,B)$, то есть таких, что для любых $x, y \in B$, для которых $|x| = |y|$, выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частной производной функции $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ по переменным x и y будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответствнно. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для произвольного непустого $A \subset \mathbb{R}^2$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^2$ положим $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x - y| < \varepsilon,\ y \in A\}$, $A + t = \{x + t \in \in \mathbb{R}^2 \colon x \in A\}$.

Обозначим вершины треугольника T: $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(0,1)$, и дифференциальные операторы $\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_3 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$. Непосредственными вычислениями получаем

Лемма 1. *Пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$ $f \in C^3(T_\varepsilon)$. *Тогда имеют место равенства*

$$\int_T \nu_1\nu_3\, f(x,y)\,dx\,dy = f(V_2) - f(V_1) - \int_0^1 \nu_1\, f(0,y)\,dy;$$
$$\int_T \nu_1\nu_2\, f(x,y)\,dx\,dy = f(V_1) - f(V_3) + \int_0^1 \nu_2\, f(1-y,y)\,dy;$$
$$\int_T \nu_1\nu_2\nu_3\, f(x,y)\,dx\,dy = \nu_3\, f(V_1) + \nu_2\, f(V_2) - \nu_1\, f(V_3).$$

Так как $\mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R) \neq \varnothing$ только если $R > \sqrt{2}/2$, то далее имеет смысл рассматривать только такие значения R. Пусть $O(0,0)$, $\rho(O, \lambda e)$ – расстояние от центра круга, точки O, до элемента λe треугольника λT (e – вершина прямого или острого угла, катет или гипотенуза). Рассмотрим максимальные возможные расстояния до соответствующих элементов:

$$\begin{aligned}
\max\nolimits_{\text{п}} &= \sup\{\rho(O, \lambda V_1) \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)\},\\
\max\nolimits_{\text{о}} &= \sup\{\rho(O, \lambda V_2) \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)\},\\
\max\nolimits_{\text{к}} &= \sup\{\rho(O, \lambda V_1V_2) \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)\},\\
\max\nolimits_{\text{г}} &= \sup\{\rho(O, \lambda V_2V_3) \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)\}
\end{aligned}$$

и аналогичные минимально возможные: $\min_{\text{п}}$, $\min_{\text{о}}$, $\min_{\text{к}}$, $\min_{\text{г}}$. Рассмотрев различные расположения треугольника в круге, получаем следующее.

Лемма 2. *Пусть* $\sqrt{2}/2 < R < 1$. *Тогда имеют место равенства*

$$\min\nolimits_{\text{к}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 1}, \quad \min\nolimits_{\text{п}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}, \quad \min\nolimits_{\text{г}} = 0,$$
$$\min\nolimits_{\text{о}} = \sqrt{2} - R, \quad \max\nolimits_{\text{к}} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, \quad \max\nolimits_{\text{о}} = \max\nolimits_{\text{п}} = R, \quad \max\nolimits_{\text{г}} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}.$$

Перед формулировкой необходимого в дальнейшем утверждения, доказательство которого можно найти в [3], введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\bigr\}$, $\nu = 1, \ldots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений. $\vec{\partial} = \bigl(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\bigr)$.

Утверждение 1 (Теорема 3.2 из [3]). *Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0\bigl(\Omega_{\nu,\varepsilon}\bigr)$ для $\nu = 1, \ldots, k$ и существуют многочлены $P_\nu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется равенство $\sum_{\nu=1}^k \bigl(P_\nu(\vec{\partial})F_\nu\bigr)(x + v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.*

Лемма 3. *Пусть $\sqrt{2}/2 < R < 1$, и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{\text{п}}, R)$.*

Доказательство. Применяя утверждение 1 к функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \subset \mathfrak{H}_0\bigl(\Omega_{\nu,\varepsilon}\bigr)$ для набора точек V_ν, учитывая равенства из леммы 1 (их левые части в данном случае обращаются в нуль), приходим к существованию нетривиального многочлена $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которого $q(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Последнее множество представляет из себя набор точек из $\mathbb{B}_R$, в которых может оказаться вершина λT для $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$. Учитывая выполнение неравенства $\min_{\text{п}} < \min_{\text{к}}$ и найденное в лемме 2 значение $\max_{\text{о}} = \max_{\text{п}} = R$, приходим к завершению доказательства. $\square$

Лемма 4. *Пусть $R > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что если $R > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, то выполняются оба неравенства: $\min_{\text{п}} < \max_{\text{к}}$ и $\min_{\text{к}} < \max_{\text{г}}$.

Рассмотрим многочлен q из леммы 3 и функцию $F = q(\Delta)f$. По лемме 2 из [17], учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, получаем $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. При этом $F = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{\text{п}}, R)$. Доопределим F нулём вне $\mathbb{B}_R$. Рассмотрев различные $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$, из первого равенства леммы 1 получаем, что интегралы от $\nu_1 F$ по катетам λT, а значит и по всем прямым, их содержащим, равны нулю. То есть преобразование Радона по всем прямым, расстояние до которых от начала координат не больше $\min_{\text{к}}$, равны нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [3]) следует $\nu_1 F = 0$ или $F = \mathrm{const}$ в $\mathbb{B}(\min_{\text{к}}, R)$. Но, учитывая значения F в $\mathbb{B}(\min_{\text{п}}, R)$, получаем $F = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{\text{к}}, R)$. Рассуждая аналогичным образом и рассмотрев второе равенство леммы 1 (интегралы по гипотенузам λT), учитывая $\min_{\text{г}} = 0$, приходим к доказательству леммы. $\square$

3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\sqrt{2}/2 < R < \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Для таких значений R выполняется неравенство $\min_{\text{к}} > \max_{\text{г}}$. Для $j \in \{1,2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant d \leqslant \max_{\text{г}} \text{ или } d \geqslant \min_{\text{к}}; \\ \exp\left(\frac{j}{(d-\max_{\text{г}})(d-\min_{\text{к}})}\right), & \text{если } \max_{\text{г}} < d < \min_{\text{к}}. \end{cases}$$

Тогда существуют такие радиальные функции $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что их преобразования Радона по прямым $\mathbf{R}f_j(\omega, d) = g_j(d)$ для всех $|\omega| = 1$ и $d \geqslant 0$ (см., например, [3, Гл. 1]). Эти функции линейно независимы, поэтому существует такой ненулевой набор чисел $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, что линейная комбинация $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ не равна тождественно нулю и обладает такими свойствам. Она имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние до начала координат от которых лежит в пределах от 0 до $\max_{\text{г}}$, интеграл равный нулю по сегменту круга радиуса $\min_{\text{к}}$ с расстоянием до хорды равном $\max_{\text{г}}$, равна нулю во внешности $\mathbb{B}_{\min_{\text{к}}}$. Тогда для такой функции выполняются равенства (1) для $A = T$ и всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$.

Если $R > \sqrt{2-\sqrt{2}}$, то, используя рассуждения из доказательства лемм 7, 8 из [17] и лемму 4, приходим к доказательству теоремы 1. $\square$

Утверждение, аналогичное лемме 1, но для квадрата, можно найти в [18], лемма 3. Рассмотрев теперь возможные значения $\rho(O, \lambda e)$ – расстояния от центра круга, точки O, до элемента λe квадрата $\lambda K \subset \mathbb{B}_R$ (e – вершина или сторона), получим соответственно $\max_{\text{в}} = R$, $\min_{\text{в}} = a_0\sqrt{2} - R$, $\max_{\text{c}} = \sqrt{R^2 - \frac{a_0^2}{4}}$, $\min_{\text{c}} = a_0 - \sqrt{R^2 - \frac{a_0^2}{4}}$, где $a_0 = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}/\sqrt{5}$ – длина стороны квадрата K, взятая таким образом, чтобы $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(K)$.

Сравнивая для $\sqrt{2}/2 < R < \sqrt{2-\sqrt{2}}$ имеющиеся минимумы до вершин, приходим к $\min_{\text{в}} < \min_{\text{п}} < \min_{\text{o}}$, максимумы до сторон – $\max_{\text{c}} > \max_{\text{к}} > \max_{\text{г}}$. Далее, решая для таких значений R систему неравенств $\min_{\text{в}} < \max_{\text{c}}$, $\min_{\text{c}} < \max_{\text{г}}$, получаем $R > \frac{\sqrt{288-70\sqrt{2}}}{16}$, причем если $R \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{288-70\sqrt{2}}}{16}\right)$, то $\min_{\text{c}} > \max_{\text{г}}$.

Доказательство теоремы 2. Для $\frac{\sqrt{2}}{2} < R < \frac{\sqrt{288-70\sqrt{2}}}{16}$ пример ненулевой радиальной функции, который основан на выполнении неравенства $\min_{\text{c}} > \max_{\text{г}}$, строится аналогичным образом, как и в доказательстве теоремы 1. Функция имеет нулевые интегралы по прямым с расстоянием до начала координат, лежащим в определенных диапазонах, и нулевой интеграл по сегменту круга. Если теперь рассмотреть интегралы по треугольникам λT и квадратам λK, лежащим в круге $\mathbb{B}_R$, то они состоят из интегралов по прямым, по сегментам и части внешности круга $\mathbb{B}_{\min_{\text{c}}}$, значит равны нулю.

Для $R > \frac{\sqrt{288-70\sqrt{2}}}{16}$ доказательство полностью аналогично теореме 1 с учетом имеющихся формул для квадрата, решения системы неравенств и рассуждений из доказательства леммы 4. $\square$

4. Выводы. Как отмечалось в [20], для любой совокупности множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}\big(\{A_j\}_{j=1}^m\big) \leqslant \min\{\mathcal{R}(A_1), \ldots, \mathcal{R}(A_m)\}.$$

В данной работе рассмотрена совокупность множеств $\{T, K\}$, для которых $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(K)$, но при этом получено $\mathcal{R}(\{T, K\}) < \mathcal{R}(T)$.

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру (см., например, [3, 14, 17]).

1. *Berenstein C. A.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – **52**. – P. 133–166.
2. *Berenstein C. A.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. – 1986. – **55**. – P. 267–288.
3. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer, 2009. – 671 p.
5. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Birkhäuser, 2013. – 592 p.
6. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Экстремальные задачи интегральной геометрии // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12, № 1. – С. 51–79.
7. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
8. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” // Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – Vol. 278. – P. 69–74.
9. *Машаров П. А.* Локальный вариант проблемы Помпейю для куба в многомерном пространстве // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 92–103.
10. *Волчков В. В.* Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. – 1996. – **60**, № 6. – С. 804–809.
11. *Машаров П. А.* Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело // Вiсник днiпропетровського унiверситету. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 72–81.
12. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю // Матем. сборник. – 1998. – **189**, № 7. – С. 3–22.
13. *Машаров П. А.* Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар // Труды ИПММ. – 2011. – **23**. – С. 163–171.
14. *Иванисенко Н. С., Машаров П. А.* Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника // Труды ИПММ. – 2014. – **28**. – С. 76–83.
15. *Машаров П. А.* Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доп. НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
16. *Елец Л. В., Машаров П. А.* Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // УМЖ. – 2009. – **61**. – С. 61–72.
17. *Машаров П. А.* Радиус Помпейю для неодносвязного множества // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.

18. *Машаров П. А.* Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
19. *Машаров П. А.* О функциях с нулевыми интегралами по отрезкам // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 82–90.
20. *Машаров П. А.* Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства круговых секторов // Труды ИПММ. – 2012. – **25**. – С. 166–171.

P. A. Masharov, K. A. Rybenko

A local version of the Pompeiu problem for a family of triangle and square

A local version of the Pompeiu problem is considered for a family of a right-angled isosceles triangle and a square. The values of the Pompeiu radius for the mentioned triangle and the specified family are obtained.

Keywords: *the Pompeiu problem, the Pompeiu radius, the Pompeiu set, the Pompeiu family of triangle and square.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк
`pavelmasharov@gmail.com`

Получено 30.10.20

УДК 517.9

©2020. **Л. Л. Оридорога**

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЁННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ СОПРЯЖЁННЫХ

Строится дифференциальный оператор, имеющий полную систему собственных и присоединённых функций, такой что у сопряжённого к нему оператора система собственных и присоединённых функций не полна.

Ключевые слова: *дифференциальный оператор, система собственных и присоединённых функций, полнота.*

Одной из важных задач, связанных с дифференциальными операторами, является исследование полноты их системы собственных и присоединённых функций.

В данной работе строится дифференциальный оператор, имеющий полную систему собственных и присоединённых функций, такой что система собственных и присоединённых функций сопряжённого к нему оператора неполна.

Теорема 1. *Пусть $b \notin \mathbb{R}$. Дифференциальный оператор L имеет вид*

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\, y_1'(t) = \lambda y_1(t), \\ \frac{b}{i}\, y_2'(t) = \lambda y_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y_1(0) = y_1(1), \\ y_1(0) = y_2(0). \end{cases} \tag{2}$$

Тогда система собственных и присоединённых функций оператора L полна в пространстве $L^2(0;1) \oplus L^2(0;1)$, а система собственных и присоединённых функций сопряжённого к нему оператора – нет.

Доказательство. Система (1) имеет фундаментальную систему решений

$$\Phi_1(t;\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t;\lambda) \\ \varphi_{12}(t;\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \Phi_2(t;\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{21}(t;\lambda) \\ \varphi_{22}(t;\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{i}{b}t\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Тогда функция

$$Y_1(t;\lambda) = \begin{pmatrix} y_{11}(t;\lambda) \\ y_{12}(t;\lambda) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(0;\lambda) - \varphi_{11}(1;\lambda) & \varphi_{21}(0;\lambda) - \varphi_{21}(1;\lambda) \\ \Phi_1(t;\lambda) & \Phi_2(t;\lambda) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-e^{i\lambda})e^{\frac{i}{b}t\lambda} \end{pmatrix} \quad (4)$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим первому из граничных условий (2).

Аналогично, функция

$$Y_2(t;\lambda) = \begin{pmatrix} y_{21}(t;\lambda) \\ y_{22}(t;\lambda) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \Phi_1(t;\lambda) & \Phi_2(t;\lambda) \\ \varphi_{11}(0;\lambda) - \varphi_{12}(0;\lambda) & \varphi_{21}(0;\lambda) - \varphi_{22}(0;\lambda) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -e^{it\lambda} \\ -e^{\frac{i}{b}t\lambda} \end{pmatrix} \quad (5)$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим второму из граничных условий (2).

Пусть функция

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

ортогональна всем собственным и присоединённым функциям оператора (1), (2). Тогда скалярное произведение

$$\langle F(t), Y_2(t;\lambda)\rangle = \int\limits_0^1 \big(f_1(t)\, y_{21}(t;\lambda) + f_2(t)\, y_{22}(t;\lambda)\big)\, dt \quad (7)$$

целая функция, обращающаяся в ноль при всех λ, являющихся собственными значениями оператора (1), (2). Более того, кратность нуля в этих точках не менее размерности корневого пространства оператора (1), (2) в тех же точках.

Характеристическая функция (см. [1]) оператора (1), (2) имеет вид

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(0;\lambda) - \varphi_{11}(1;\lambda) & \varphi_{21}(0;\lambda) - \varphi_{21}(1;\lambda) \\ \varphi_{11}(0;\lambda) - \varphi_{12}(0;\lambda) & \varphi_{21}(0;\lambda) - \varphi_{22}(0;\lambda) \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} 1-e^{i\lambda} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e^{i\lambda} - 1. \quad (8)$$

Так как характеристическая функция $\chi(\lambda)$ целая, и её нули совпадают с собственными числами оператора (1), (2), а кратности нулей совпадают с размерностями корневых пространств оператора (1), (2) в тех же точках, то функция $\frac{\langle F(t), Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)}$ целая.

Выделим в комплексной плоскости три сектора:
первый
$$\{\, z \in \mathbb{C}:\ \Im z > 0;\ \Im \frac{z}{b} > 0 \,\}; \tag{9}$$
второй
$$\{\, z \in \mathbb{C}:\ \Im z < 0;\ \Im \frac{z}{b} > 0 \,\}; \tag{10}$$
третий
$$\{\, z \in \mathbb{C}:\ 0 > \Im \frac{z}{b} > \Im z \,\}. \tag{11}$$

Исследуем поведение отношения $\frac{\langle F(t), Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)}$ при $\Im\lambda \to \infty$ на лучах в этих трёх секторах.

Заметим, что при $\Im\lambda > 0$ $|\chi(\lambda)| \sim 1$, а при $\Im\lambda < 0$ $|\chi(\lambda)| \sim |e^{i\lambda}| = e^{-\Im\lambda}$.

Оценим скалярное произведение $\langle F(t), Y_2(t;\lambda)\rangle$, используя неравенство Шварца: $|\langle F(t), Y_2(t;\lambda)\rangle| \leqslant \|F\| \cdot \|Y_2(t;\lambda)\|$. При этом
$$\|Y_2(t;\lambda)\| = \sqrt{\int\limits_0^1 (|e^{it\lambda}|^2 + |e^{it\frac{\lambda}{b}}|^2)\, dt} \tag{12}$$
зависит от знаков $\Im\lambda$ и $\Im\frac{\lambda}{b}$ и от соотношения между этими величинами.

Если $\Im\lambda > 0$ и $\Im\frac{\lambda}{b} > 0$, то
$$\int\limits_0^1 |e^{it\lambda}|^2\, dt = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 |e^{it\frac{\lambda}{b}}|^2\, dt = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Таким образом, в этом случае $\|Y_2(t;\lambda)\| = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = o(1)$.

Если $\Im\lambda > 0$ и $\Im\frac{\lambda}{b} < 0$, то
$$\int\limits_0^1 |e^{it\lambda}|^2\, dt = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 |e^{it\frac{\lambda}{b}}|^2\, dt = O\left(\frac{e^{-2\Im\frac{\lambda}{b}}}{|\lambda|}\right).$$

Таким образом, в этом случае $\|Y_2(t;\lambda)\| = O\left(\frac{e^{-\Im\frac{\lambda}{b}}}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = o\left(e^{-\Im\frac{\lambda}{b}}\right)$.

Если $\Im\lambda < 0$ и $\Im\frac{\lambda}{b} > 0$, то
$$\int\limits_0^1 |e^{it\lambda}|^2\, dt = O\left(\frac{e^{-2\Im\lambda}}{|\lambda|}\right) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 |e^{it\frac{\lambda}{b}}|^2\, dt = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Таким образом, в этом случае $\|Y_2(t;\lambda)\| = O\left(\frac{e^{-\Im\lambda}}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = o\left(e^{-\Im\lambda}\right)$.

Если $\Im\lambda < 0$ и $\Im\frac{\lambda}{b} < 0$, то

$$\int\limits_0^1 |e^{it\lambda}|^2\,dt = O\left(\frac{e^{-2\Im\lambda}}{|\lambda|}\right) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 |e^{it\frac{\lambda}{b}}|^2\,dt = O\left(\frac{e^{-2\Im\frac{\lambda}{b}}}{|\lambda|}\right).$$

Тогда $\|Y_2(t;\lambda)\| = O\left(\frac{\max\left\{e^{-\Im\lambda};\ e^{-\Im\frac{\lambda}{b}}\right\}}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = o\left(\max\left\{e^{-\Im\lambda};\ e^{-\Im\frac{\lambda}{b}}\right\}\right)$.

В секторе (9) $\|Y_2(t;\lambda)\| = o(1)$ и $|\chi(\lambda)| \sim 1$. Поэтому в данном секторе $\frac{\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)} = o(1)$.

В секторе (10) $\|Y_2(t;\lambda)\| = o\left(e^{-\Im\lambda}\right)$ и $|\chi(\lambda)| \sim e^{-\Im\lambda}$. Поэтому в данном секторе $\frac{\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)} = o(1)$.

В секторе (11) $\Im\frac{\lambda}{b} > \Im\lambda$. Следовательно, $\max\left\{e^{-\Im\lambda};\ e^{-\Im\frac{\lambda}{b}}\right\} = e^{-\Im\lambda}$. Таким образом, $\|Y_2(t;\lambda)\| = o\left(e^{-\Im\lambda}\right)$. Кроме того, $|\chi(\lambda)| \sim e^{-\Im\lambda}$. Поэтому в данном секторе $\frac{\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)} = o(1)$.

Заметим теперь, что в указанных секторах можно выбрать по лучу (луч $0z_1$ в секторе (9), $0z_2$ в секторе (10) и $0z_3$ в секторе (11)) так, чтобы они разбили плоскость на 3 угла, каждый размером менее π.

Поскольку функции $\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle$ и $\chi(\lambda)$ целые функции не выше первого порядка роста и их отношение $\frac{\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)}$ также целая функция, то это отношение также имеет порядок роста не выше первого (см. [2]).

Т. к. функция $\frac{\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)}$ на каждом из лучей $0z_1$, $0z_2$ и $0z_3$ ограничена и имеет порядок роста не выше первого, то она, по теореме Фрагмена – Линделёфа (см. [2]), ограничена в каждом из (выпуклых) углов z_10z_2, z_20z_3 и z_30z_1, т. е. ограничена во всей комплексной плоскости. Тогда, по теореме Лиувилля, эта функция константа. А т. к. при $z \to \infty$ эта функция стремится к нулю, то $\frac{\langle F(t),Y_2(t;\lambda)\rangle}{\chi(\lambda)} \equiv 0$.

Таким образом, каждая функция $F(t)$, ортогональная всем собственным и присоединённым функциям оператора (1), (2), ортогональна также всем решениям системы (1), удовлетворяющим граничному условию

$$y_1(0) = y_2(0). \tag{13}$$

Рассмотрим теперь оператор (1) с граничными условиями

$$\begin{cases} y_1(1) = y_2(1), \\ y_1(0) = y_2(0). \end{cases} \tag{14}$$

Заметим, что второе условие (14) совпадает со вторым условием (2). Поэтому все собственные и присоединённые функции оператора (1), (14) удовлетворяют второму из граничных условий (2) и, следовательно, ортогональны функции $F(t)$.

Аналогично тому, как выше было доказано, что функция $F(t)$ ортогональна всем решениям системы (1), удовлетворяющим второму из граничных условий (14), доказывается, что она ортогональна всем решениям системы (1), удовлетворяющим первому из граничных условий (14). При λ, не являющемся собственным значением оператора (1), (14), ненулевые решения системы (1), одно из которых удовлетворет первому из граничных условий (14), а другое второму, образуют фундаментальную систему решений. Поэтому при таких λ функция $F(t)$ ортогональна всем решениям системы (1). В частности, она при таких λ ортогональна функциям (3). Если λ_k собственное значение оператора (1), (14), то предельным переходом $\lambda \to \lambda_k$ получаем, что функция $F(t)$ ортогональна также функциям $\Phi_1(t;\lambda_k)$ и $\Phi_2(t;\lambda_k)$. Т. е. $F(t)$ ортогональна функциям (3) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Как известно, это возможно только при $F(t) = 0$.

Т. к. системе собственных и присоединённых векторов оператора (1), (2) ортогональна только нулевая функция, то эта система полна в пространстве $L^2(0;1) \oplus L^2(0;1)$.

Оператор, сопряжённый к (1), (2), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\, y_1'(t) = \lambda y_1(t), \\ \frac{\bar{b}}{i}\, y_2'(t) = \lambda y_2(t) \end{cases} \tag{15}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y_1(0) + \bar{b}\, y_2(0) = y_1(1), \\ y_2(1) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Все его собственные и присоединённые функции имеют вид $\binom{y(t)}{0}$. Поэтому и у всех их линейных комбинаций вторая компонента равна 0. А значит система этих функций неполна в пространстве $L^2(0;1) \oplus L^2(0;1)$. $\square$

Замечание 1. Данная теорема остаётся верной и при ненулевом потенциале, т. е. если вместо системы (1) рассматривать систему

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\, y_1'(t) + q_1(t)\, y_2(t) = \lambda y_1(t), \\ \frac{b}{i}\, y_2'(t) + q_2(t)\, y_1(t) = \lambda y_2(t), \end{cases} \qquad \text{где } q_1, q_2 \in C[0;1], \tag{17}$$

с теми же граничными условиями (2).

Но доказательство этого факта существенно сложнее.

Замечание 2. Условие $b \notin \mathbb{R}$ в теореме является существенным. Если рассматривать оператор (1) с граничными условиями общего вида

$$\begin{cases} a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(1) + a_{14}y_2(1) = 0, \\ a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(1) + a_{24}y_2(1) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

то при $b \in \mathbb{R}$ его система собственных и присоединённых функций полна в том и только том случае, если полна система собственных и присоединённых функций его сопряжённого.

Замечание 3. Следует также отметить, что подобный пример невозможен для оператора Штурма – Лиувилля с нулевым потенциалом.

Действительно, как показано в [3], система собственных и присоединённых функций оператора Штурма – Лиувилля с нулевым потенциалом полна в том и только том случае, если его граничные условия невырождены, т. е. его характеристический определитель не является константой либо экспонентой. Но в таком случае невырождены и граничные условия его сопряжённого. А следовательно, система собственных и присоединённых функций сопряжённого оператора также полна.

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1968. – 526 с.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Наука, 1956. – 632 с.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.

L. L. Oridoroga

On the completeness systems of eigen- and associated functions of some differential operators and their adjoint

In this paper, we construct a differential operator that has a complete system of eigenfunctions and associated functions, and such that the system of eigenfunctions and associated functions of the adjoint operator is not complete.

Keywords: *differential operator, system of eigen- and associated functions, completeness.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т», Донецк,
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
`l.oridoroga@donnu.ru`

Получено 02.10.20

УДК 517.9

©2020. **Д. А. Сапронов**

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ – ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ

В работе установлена разрешимость задачи Коши – Дирихле в произвольной пространственной области для многомерных квазилинейных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка типа нестационарной медленной диффузии-конвекции.

Ключевые слова: *вырождающиеся параболические уравнения, диффузия, конвекция.*

1. Введение. В области $G_T = (0,T) \times \Omega$, Ω – произвольная подобласть $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, рассматривается следующая задача Коши – Дирихле:

$$u_t + A_p^{(2m)}(u) + B_\lambda(u) \equiv \\ \equiv u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(t,x,u,D_x u,\ldots,D_x^m u) + \chi \cdot \nabla b(t,u) = 0, \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L_2(\Omega), \quad (2)$$

$$D_x^\alpha u\,\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0\,, \quad |\alpha| \leqslant m-1. \quad (3)$$

Здесь $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, а непрерывные функции $a_\alpha(t,x,\xi)$ и $b(t,s)$ удовлетворяют условиям коэрцитивности и роста:

$$\sum_{|\alpha|=m} (a_\alpha(t,x,\xi) - a_\alpha(t,x,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant d_0 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta - \eta_\beta|^{p+1} \quad (4)$$

$\forall(t,x,\xi) \in G_T \times \mathbb{R}^{N(m)}$, $\forall(t,x,\eta) \in G_T \times \mathbb{R}^{N(m)}$, $p > 0$, $d_0 > 0$, $N(m)$ – число различных n-мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ длины $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant m$.

$$|a_\alpha(t,x,\xi)| \leqslant d_1 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^p \qquad \forall(t,x,\xi) \in G_T \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_1 < \infty, \quad (5)$$

$$b(t,0) = 0, \ \ |b(t,s_1) - b(t,s_2)| \leqslant d_2 \begin{cases} (|s_1| + |s_2|)^{\lambda-1}|s_1 - s_2|, & \lambda > 1, \\ |s_1 - s_2|^\lambda, & 0 < \lambda \leqslant 1, \end{cases} \quad d_2 < \infty, \quad (6)$$

$$b(t,s)\,s - \int_0^s b(t,\tau)\,d\tau \geqslant d_3 |s|^{\lambda+1} \quad \forall(t,s) \in \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1, \quad d_3 > 0. \quad (7)$$

Задачи (1)–(3) моделируют различные физические процессы (фильтрация жидкостей, движение плазмы, теплопроводность в движущейся среде и т. д.), в которых в направлении вектора χ присутствует конвективный перенос. Важнейшим вопросом в их изучении является установление условий разрешимости. Первые результаты в этом направлении были установлены в [1] при изучении существования непрерывных решений уравнений ньютоновской фильтрации (см. [2]). Позже условия разрешимости были найдены в [3, 4] при исследовании задач Коши и Коши – Дирихле для одномерных уравнений диффузии-конвекции. Существование обобщенных решений смешанных задач для многомерных вырождающихся параболических уравнений типа нестационарной диффузии с младшими членами (абсорбцией и конвекцией) в дальнейшем исследовалось многими авторами (см. [5–10] и ссылки к ним). Разрешимость задачи Коши с растущими начальными данными для уравнений высокого порядка без конвекции исследовалась в работе [11], в работах [12–16] – для уравнений второго порядка с конвекцией.

2. Вспомогательные построения и утверждения. Поскольку при линейной замене переменных уравнение (1) не меняет структуры, то, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\chi = (\chi_1, 0, \dots, 0)$, $\chi_1 > 0$.

Введем теперь следующие семейства подобластей области Ω:

$$\Omega^{(1)}(\Lambda, y, s) = \{x \in \Omega : x_1 < s + y_1 - \Lambda|x' - y'|\} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1,\ \Lambda > 0; \tag{8}$$

$$\Omega^{(2)}(y, \psi, s) = \{x \in \Omega : (\psi, x) < s + l\}, \tag{9}$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1$, $y = l\psi$, $l \in \mathbb{R}^1$, $|\psi| = 1$, $\psi_1 \geqslant 0$, $\psi \in \mathbb{R}^n$;

$$\Omega(v, \tau, s) = \{x \in \Omega : -v < x_1 < s,\ \ |x_i| < \tau,\ i > 1\}, \quad v > 0,\ \tau > 0,\ s > 0. \tag{10}$$

В дальнейшем для краткости верхние индексы и параметры y, ψ, Λ в областях $\Omega^{(1)}(\Lambda, y, s)$ и $\Omega^{(2)}(y, \psi, s)$ будем опускать. Кроме того, через «c» будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи.

По семейству областей $\Omega(s)$ из (8)–(10) определим следующие семейства подобластей

$$K(s, \delta) = \Omega(s) \backslash \Omega(s - \delta) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0,$$

$$G_T(s) = (0,T) \times \Omega(s),\ Q_T(s, \delta) = (0,T) \times K(s, \delta),\ G_T(v, \tau, s) = (0,T) \times \Omega(v, \tau, s).$$

Определение 1. Энергетическим обобщенным решением $u(t,x)$ задачи (1)–(3) при $0 < \lambda < 1 < p$ будем называть функцию

$$u(t,x) \in V_T(\Omega, s, \delta) = \left\{ v(t,x) : \begin{array}{c} v \in L_{p+1}(0,T; W(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}\big(Q_T(s,\delta)\big), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T; W^*(\Omega)) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\big(Q_T(s,\delta)\big) \end{array} \right\},$$

$$\forall\, s < +\infty,\, \forall \delta > 0,\, W(\Omega) = \{v \in W^m_{p+1}(\Omega) \cap L_2(\Omega) : D^\alpha_x v|_{\partial\Omega} = 0,\, |\alpha| \leqslant m-1\},$$

удовлетворяющую условию (2) в смысле пространства $C([0,T]; L_2(\Omega))$, а также интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \left[\langle u_t, w\rangle + \left(\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_\Omega a_\alpha(t,x,u,D_x u,\ldots,D^m_x u)\, D^\alpha_x w + \chi_1\, b(t,u)_{x_1} w \right) dx \right] dt = 0 \tag{11}$$

для произвольной функции $w \in L_{p+1}(0,T; W^m_{p+1}(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0,T)\times\Omega)$.

Определение 2. Энергетическим обобщенным решением $u(t,x)$ задачи (1)–(3) при $p > 1$, $1 < \lambda \leqslant p + \frac{2m(p-1)}{n}$ будем называть функцию

$$u(t,x) \in V_T(\Omega) = \left\{ v(t,x) : \begin{array}{c} v \in L_{p+1}(0,T;W(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}\big((0,T)\times\Omega\big), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega)) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\big((0,T)\times\Omega\big) \end{array} \right\},$$

$$\forall\, s \in \mathbb{R}^1,\, W(\Omega) = \{v \in W^m_{p+1}(\Omega) \cap L_2(\Omega) : D^\alpha_x v|_{\partial\Omega} = 0,\, |\alpha| \leqslant m-1\},$$

удовлетворяющую условию (2) в смысле пространства $C([0,T]; L_2(\Omega))$, а также интегральному тождеству (11) для произвольной функции

$$w \in L_{p+1}(0,T; W^m_{p+1}(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0,T)\times\Omega).$$

Согласно формуле интегрирования по частям [6], из определений 1 и 2 следует, что энергетическое решение удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(T_0,x)|^2 \phi(T_0,x)\,dx + \int\limits_{G_{T_0}} \Big[-\frac{1}{2}|u(t,x)|^2 \phi'_t(t,x) + \\ + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x,u,D_x u,\ldots,D^m_x u)\, D^\alpha_x (u\cdot\phi) - B(t,u)\,\chi_1 \cdot \phi(t,x)_{x_1} \Big]\, dx\, dt = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0(x)|^2 \phi(0,x)\,dx, \quad B(t,u) = b(t,u)\,u - \int_0^u b(t,s)\,ds, \end{gathered} \tag{12}$$

при всех $0 < T_0 \leqslant T$ и произвольной функции $\phi(t,x) \in C^{1,m}_{t,x}(\overline{G}_T)$, где $C^{1,m}_{t,x}(\overline{G}_T)$ – множество непрерывно дифференцируемых по t и m раз непрерывно дифференцируемых по x в $\overline{G}_T$ функций.

Лемма 1. *Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если $1 < p$, $l \leqslant p + 1 + \frac{2m(p+1)}{n}$, то имеет место вложение*

$$C\big([0,T]; L_2(\Omega)\big) \cap L_{p+1}\big(0,T; W(\Omega)\big) \subset L_l\big((0,T)\times\Omega\big). \tag{13}$$

Доказательство. Для данной области Ω справедливо интерполяционное неравенство Гальярдо – Ниренберга вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}(\Omega)} \leqslant \tilde{d}_5 \, \|D_x^m u\|^{\tilde{\theta}}_{L_{p+1}(\Omega)} \, \|u\|^{1-\tilde{\theta}}_{L_{q+1}(\Omega)}, \tag{14}$$

где $u(t,x)$ – произвольная по x функция из пространства $\overset{0}{W}{}^m_{p+1}(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)$, $\tilde{d}_5 > 0$, $0 < \tilde{\theta} = \frac{n(\lambda-q)(p+1)}{(\lambda+1)(n(p-q)+m(p+1)(q+1))} < 1$. Возведя неравенство (14) в степень $\lambda+1$, проинтегрировав полученное соотношение по t и применив неравенство Гёльдера, после очевидных преобразований придем к выражению вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}((0,T)\times\Omega)} \leqslant \tilde{d}_5 \, T^{\frac{1-\sigma}{\lambda+1}} \, \|D_x^m u\|^{\tilde{\theta}}_{L_{p+1}\left((0,T)\times\Omega\right)} \|u\|^{1-\tilde{\theta}}_{C\left([0,T];L_{q+1}(\Omega)\right)},$$

$0 < \sigma = \tilde{\theta}\frac{\lambda+1}{p+1} < 1$, откуда следует (13). Лемма доказана. □

Замечание 1. При $p > 1$, $0 < \lambda \leqslant p + \frac{2m(p+1)}{n}$ из леммы 1 вытекает:

$$V_T(\Omega) = \left\{v(t,x) : \; v \in L_{p+1}(0,T;W(\Omega)), \; v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega))\right\},$$

следовательно, $V_T(\Omega) \subset C([0,T];L_2(\Omega))$, а также $w \in L_{p+1}(0,T;W^m_{p+1}(\Omega))$.

Замечание 2. Для операторов $A_p^{(2m)}$ и B_λ при $p > 1$, $\lambda \leqslant p + \frac{2m(p-1)}{n}$ в силу леммы 1 и вложения $V_T(\Omega) \subset C([0,T];L_2(\Omega))$ имеет место оценка

$$\|A_p^{2m}(u)\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega))} \leqslant c\,\|u\|^p_{L_{p+1}(0,T;W(\Omega))},$$

$$\|B_\lambda(u)\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega))} \leqslant c\left(\|u\|_{L_{p+1}(0,T;W(\Omega))} + \|u\|_{C([0,T];L_2(\Omega))}\right)^\lambda.$$

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, и в (1) выполнено $p > 1$, $\lambda \leqslant p + \frac{2m(p-1)}{n}$. Тогда задача (1)–(3) разрешима в G_T при всех $0 < T < \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай ограниченной Ω. В основе доказательства лежат методы монотонности и компактности, представленные в работах [1, 2].

Пусть $\{w_i\}_1^\infty$ – базис в $W(\Omega)$. Определим «приближенное решение» $u^{(j)}(t)$ рассматриваемой задачи следующим образом: $u^{(j)}(t) \in [w_1,\dots,w_j]$ – линейная оболочка $w_1,\dots,w_j$,

$$\langle u_t^{(j)}, w_k\rangle + \langle A_p^{(2m)}(u^{(j)}), w_k\rangle + \langle B_\lambda(u^{(j)}), w_k\rangle = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant j, \tag{15}$$

$$u^{(j)}(0) = u_0^{(j)} \in [w_1,\dots,w_j], \quad \|u_0^{(j)} - u_0\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad j \to \infty. \tag{16}$$

Из (15)–(16) следует, что $u^{(j)}(t)$ определены на интервале $[0,t_j]$, $t_j>0$, а также выполнено соотношение

$$2^{-1}\int\limits_{\Omega_t}|u^{(j)}|^2\,dx+\int\limits_0^t\langle A_p^{2m}(u^{(j)}),u^{(j)}\rangle\,dt=2^{-1}\int\limits_{\Omega}|u_0^{(j)}|^2\,dx, \tag{17}$$

поскольку $\langle B_\lambda(u^{(j)}),u^{(j)}\rangle=0$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что в силу свойств (4)–(6) система (15)–(16) разрешима при любых j, $t_j=T$, и $u^{(j)}$ ограничены в

$$L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_{p+1}(0,T;W(\Omega)).$$

Поэтому в силу замечания 2 существует подпоследовательность $u^{(i)}$ такая, что $u^{(i)}\to u$ в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ $*$-слабо, $u^{(i)}\to u$ в $L_{p+1}(0,T;W(\Omega))$ слабо, $u^{(i)}(T)\to\varphi$ в $L_2(\Omega)$ слабо,

$$A_p^{(2m)}(u^{(i)})\to\xi\quad \text{в } L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega)) \text{ слабо},$$

$$B_\lambda(u^{(i)})\to\mu\quad \text{в } L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega)) \text{ слабо}.$$

Покажем, что $\int\limits_0^T\langle B_\lambda(u^{(i)})-B_\lambda(u),w\rangle\,dt\to0$, $i\to\infty$, при всех $w\in L_{p+1}(0,T;W)$ (т. е. $\mu=B_\lambda(u)$).

Пусть $\lambda\leqslant1$. Тогда в силу соотношения (6), неравенства Гельдера, леммы 1 и компактности вложения $W(\Omega)$ в $L_{p+1}((0,T)\times\Omega)$ имеем:

$$\left|\int\limits_0^T\langle B_\lambda(u^{(i)})-B_\lambda(u),w\rangle\,dt\right|\leqslant|\chi_1|\int\limits_{G_T}\bigl|b(t,u^{(i)})-b(t,u)\bigr||w_{x_1}|\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\chi_1|\,(T\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{p-\lambda}{p+1}}\Biggl(\int\limits_{G_T}|u^{(i)}-u|^{p+1}\,dx\,dt\Biggr)^{\frac{\lambda}{p+1}}\times$$

$$\times\Biggl(\int\limits_{G_T}|w_{x_1}|^{p+1}\,dx\,dt\Biggr)^{\frac{1}{p+1}}\to0,\quad i\to\infty.$$

Аналогично при $p>1$, $1<\lambda\leqslant p+\frac{2m(p-1)}{n}$

$$\left|\int\limits_0^T\langle B_\lambda(u^{(i)})-B_\lambda(u),w\rangle\,dt\right|\leqslant c\,|\chi_1|\Biggl(\int\limits_{G_T}|u^{(i)}|+|u|^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}}\,dx\,dt\Biggr)^{\frac{p-1}{p+1}}\times$$

$$\times\Biggl(\int\limits_{G_T}|u^{(i)}-u|^{p+1}\,dx\,dt\Biggr)^{\frac{1}{p+1}}\Biggl(\int\limits_{G_T}|w_{x_1}|^{p+1}\,dx\,dt\Biggr)^{\frac{1}{p+1}}\to0,\quad i\to\infty,$$

т. е. $B_\lambda(u)=\mu$.

Используя далее монотонность оператора $A_p^{(2m)}$ и повторяя рассуждения, представленные в [1, 2] при доказательстве разрешимости задач (1)–(3) с $\chi_1=0$, получаем $\varphi=\int\limits_{\Omega_T}|u|^2\,dx$, $\xi=A_p^{(2m)}(u)$.

Рассмотрим теперь случай, когда Ω – неограничена. Введем следующие непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции, удовлетворяющие следующим требованиям:

а) $\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)\in C^m(\mathbb{R}^1)$: $\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)=1$ при $-(v-\Delta v)\leqslant x_1\leqslant s-\Delta s$, $\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)=0$ при $x_1<-v$ и $x_1>s$, $0\leqslant\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)\leqslant 1$, $\forall\,x_1\in\mathbb{R}^1$, $\forall\,0<\Delta v<v$, $\forall\,0<\Delta s<s$, $-D^1\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)\geqslant c\Delta s^{-1}$, $\forall\,s-\frac{3\Delta s}{4}<x_1<s-\frac{\Delta s}{4}$, $|D^k\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)|\leqslant\frac{c}{\Delta s^k}$, $\forall\,1\leqslant k\leqslant m$, $\forall\,x_1>0$, $|D^k\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)|\leqslant\frac{c}{\Delta v^k}$, $\forall\,1\leqslant k\leqslant m$, $\forall\,x_1<0$,

б) $\xi^{(i)}_{\tau,\Delta\tau}(x_i)\in C^m(\mathbb{R}^1)$, $i=2,\dots,n$: $\xi^{(i)}_{\tau,\Delta\tau}(x_i)=1$ при $|x_i|\leqslant\tau-\Delta\tau$, $\xi^{(i)}_{\tau,\Delta\tau}(x_i)=0$ при $|x_i|\geqslant\tau$, $0\leqslant\xi^{(i)}_{\tau,\Delta\tau}(x_i)\leqslant 1$, $\forall\,0<\Delta\tau<\tau$, $\forall\,x_i\in\mathbb{R}^1$, $|D^k\xi^{(i)}_{\tau,\Delta\tau}(x_i)|\leqslant\frac{c}{\Delta\tau^k}$, $\forall\,1\leqslant k\leqslant m$, $\forall\,x_i\in\mathbb{R}^1$.

Введем также функцию

$$\zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}(x)=\xi^{(1)}_{v,\Delta v,s,\Delta s}(x_1)\prod_{i=2}^{n}\xi^{(i)}_{\tau,\Delta\tau}(x_i),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Определим также последовательность функций

$$u_0^{(j)}(x)=u_0(x)\,\zeta_{j,1,j,1,j,1}(x),\quad j=1,2,\dots,$$

приближающих $u_0(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Рассмотрим следующую последовательность вспомогательных задач Коши – Дирихле:

$$u_t^{(j)}+A_p^{(2m)}(u^{(j)})+B_\lambda(u^{(j)})=0, \tag{18}$$

$$u^{(j)}|_{t=0}=u_0^{(j)}(x)\in L_2(\Omega(j,j,j)), \tag{19}$$

$$u^{(j)}|_{\partial\Omega(j,j,j)}=0\qquad\forall\,0<t<T. \tag{20}$$

В силу доказанного выше задача (18)–(20) при всех $j\in\mathbb{N}$ имеет решение

$$u^{(j)}(t,x)\in V_T(\Omega(j,j,j))=\left\{v(t,x):\begin{array}{r}v\in L_{p+1}\big(0,T;W(\Omega(j,j,j))\big),\\ u_t\in L_{\frac{p+1}{p}}\big(0,T;W^*(\Omega(j,j,j))\big)\end{array}\right\}. \tag{21}$$

В дальнейшем через $u^{(j)}(t,x)$ будем обозначать продолжение решения задачи (18)–(20) нулем на $(0,T)\times(\mathbb{R}^n\setminus\Omega(j,j,j))$.

Лемма 2. *Пусть для решений $u^{(j)}$ задач* (18)–(20) *при $p > 1$, $0 < \lambda \leqslant \leqslant p + \frac{2(p-1)}{n}$ имеет место следующая априорная оценка:*

$$\|u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0,T;W(\Omega(v,\tau,s)))} \leqslant C(T) < \infty \quad \forall\, T < \infty, \forall\, v > 0,\ \tau > 0,\ s > 0, \tag{22}$$

где $C(T)$ – некоторая постоянная, зависящая только от известных параметров задачи (1)–(3). *Тогда последовательность $u^{(j)}$ сходится при произвольных v, τ, s к решению $u(t, x)$ задачи* (5), (6) *в пространстве $V_T(\Omega(v, \tau, s))$ с нормой*

$$\|v\|_{V_T(\Omega(v,\tau,s))} = \|v\|_{L_{p+1}(0,T;W(\Omega(v,\tau,s)))} + \|v_t\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega(v,\tau,s)))}. \tag{23}$$

Доказательство. Так как $u^{(j)}$ – решение задачи (18)–(20), а $A_p^{2m} + B_\lambda$ при $\lambda \leqslant p + 2n^{-1}(p-1)$ – нелинейный ограниченный оператор

$$A_p^{2m} + B_\lambda \colon L_{p+1}(0, T; W(\Omega(v, \tau, s))) \to L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W^*(\Omega(v, \tau, s))),$$

то в силу (22) выполнено

$$\|u_t^{(j)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W^*(\Omega(v,\tau,s)))} \leqslant C_1(T) < \infty \quad \forall\, T < \infty.$$

В силу ограниченности $\|u^{(j)}\|_{V_T(\Omega(v,\tau,s))}$ из последовательности $\{u^{(j)}\}_1^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее снова $\{u^{(j)}\}_1^\infty$), которая в силу компактности вложения

$$V_T(\Omega(v, \tau, s)) \subset L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^{m-1}(\Omega(v, \tau, s)) \cap L_2(\Omega(v, \tau, s)))$$

будет фундаментальной в $L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^{m-1}(\Omega(v, \tau, s)) \cap L_2(\Omega(v, \tau, s)))$, т. е.

$$\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1}\, dx\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad i, j \to \infty. \tag{24}$$

Покажем, что $u^{(j)}$ имеет предел в $L_{p+1}(0, T; W(\Omega(v, \tau, s)))$. Подставляя в интегральное тождество (12) в качестве пробной функции

$$w^{(ij)}(t, x) = (u^{(i)} - u^{(j)})\zeta_{v,1,\tau,1,s,1}^{m(p+1)},$$

после преобразований [11, с. 163] с использованием оценок (4)–(7) и свойств функции $\zeta_{v,1,\tau,1,s,1}(x)$ получаем:

$$
\begin{gathered}
\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{G_T(v-1,\tau-1,s-1)} \left|D_x^m(u^{(i)}-u^{(j)})\right|^{p+1} dx\,dt \leqslant \\
\leqslant c\Biggl(R_T(v,\tau,s)^{\frac{p}{p+1}} \sum_{|\alpha|<m} \Biggl(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|D_x^\alpha(u^{(i)}-u^{(j)})\right|^{p+1} dx\,dt \Biggr)^{\frac{1}{p+1}} + \\
+ R_T(v,\tau,s)^{\frac{p-1}{p+1}} \Biggl(\sum_{|\alpha|<m} \int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|D_x^\alpha(u^{(i)}-u^{(j)})\right|^{p+1} dx\,dt \Biggr)^{\frac{2}{p+1}} + \\
+ |\chi_1| \Biggl(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|b(t,u^{(i)})-b(t,u^{(j)})\right|\left|u^{(i)}-u^{(j)}\right| dx\,dt + \\
+ \int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|b(t,u^{(i)})-b(t,u^{(j)})\right|\left|(u^{(i)}-u^{(j)})_{x_1}\right| dx\,dt \Biggr)\Biggr), \quad \forall\, v>1,\ \tau>1,\ s>1,
\end{gathered} \tag{25}
$$

$$
R_T(v,\tau,s) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left(|D_x^\alpha u^{(i)}| + |D_x^\alpha u^{(j)}|\right)^{p+1} dx\,dt.
$$

Рассмотрим далее 2 случая:

I. Пусть в (1) выполнено $\lambda > 1$. Тогда в силу неравенства Гельдера и (22), (24) имеем:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|b(t,u^{(i)})-b(t,u^{(j)})\right|\left|u^{(i)}-u^{(j)}\right| dx\,dt \leqslant \\
\leqslant c\,|\chi_1| \Biggl(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left(|u^{(i)}|+|u^{(j)}|\right)^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}} dx\,dt \Biggr)^{\frac{p-1}{p+1}} \times \\
\times \Biggl(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|u^{(i)}-u^{(j)}\right|^{p+1} dx\,dt \Biggr)^{\frac{1}{p+1}} \to 0, \quad i,j\to\infty,
\end{gathered} \tag{26}
$$

$$
\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} \left|b(t,u^{(i)})-b(t,u^{(j)})\right|\left|(u^{(i)}-u^{(j)})_{x_1}\right| dx\,dt \leqslant
$$

$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big(|u^{(i)}|+|u^{(j)}|\big)^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{p-1}{p+1}}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big|u^{(i)}-u^{(j)}\big|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{p+1}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big(|\nabla_x u^{(i)}|+|\nabla_x u^{(j)}|\big)^{p+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{p+1}}\to 0,\quad i,j\to\infty. \tag{27}$$

II. Пусть теперь $0<\lambda<1$. Тогда

$$\int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)}\big|b(t,u^{(i)})-b(t,u^{(j)})\big|\big|u^{(i)}-u^{(j)}\big|\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\chi_1|\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big|u^{(i)}-u^{(j)}\big|^{\lambda+1}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\chi_1|\,\big(T(v+s)\tau^{n-1}\big)^{\frac{p-\lambda}{p+1}}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}|u^{(i)}-u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{\lambda+1}{p+1}}\to 0,\quad i,j\to\infty, \tag{28}$$

$$\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big|b(t,u^{(i)})-b(t,u^{(j)})\big|\big|(u^{(i)}-u^{(j)})_{x_1}\big|\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\chi_1|\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big|u^{(i)}-u^{(j)}\big|^{\frac{\lambda(p+1)}{p}}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{p}{p+1}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big|(u^{(i)}-u^{(j)})_{x_1}\big|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{p+1}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\chi_1|\,\big(T(v+s)\tau^{n-1}\big)^{\frac{p-\lambda}{p+1}}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big|u^{(i)}-u^{(j)}\big|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{\lambda}{p+1}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}\big(|u^{(i)}_{x_1}|+|u^{(j)}_{x_1}|\big)^{p+1}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{p+1}}\to 0,\quad i,j\to\infty. \tag{29}$$

Из (25), в силу (26)–(29), следует:

$$\|u^{(j)}-u^{(j)}\|_{L_{p+1}\left(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(v,\tau,s))\right)}\to 0,\quad i,j\to\infty. \tag{30}$$

Из (30), в силу фундаментальности $u^{(j)}$ в $L_{p+1}\big(0,T;W^{m-1}_{p+1}(\Omega(v,\tau,s))\big)$, получаем сходимость $u^{(j)}$ в $L_{p+1}\big(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(v-1,\tau-1,s-1))\big)$. Поскольку оператор

$$A+B\colon L_{p+1}\big(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(v,\tau,s))\big)\longrightarrow L_{\frac{p+1}{p}}\big(0,T;W^{-m}_{\frac{p+1}{p}}(\Omega(v,\tau,s))\big)$$

непрерывен, то имеет место следующая сходимость:

$$\|u_t^{(i)}-u_t^{(j)}\|_{L_{p+1}\left(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(v-1,\tau-1,s-1))\right)}\to 0,\quad i,j\to\infty.$$

Предел этой последовательности $\lim\limits_{j\to\infty}u^{(j)}=u(t,x)\in V_T(\Omega)$ в силу непрерывности вложения

$$V_T(\Omega(v,\tau,s))\subset C\big(0,T;L_2(\Omega(v,\tau,s))\big)$$

будет удовлетворять интегральному тождеству (12) с произвольной функцией $\phi(t,x)\in C^{1,m}_{t,x}(\overline{G}_T(v,\tau,s))$ и начальному условию (2). Лемма доказана. $\square$

Подставим в интегральное тождество (12) $u=u^{(j)}$, $\phi(t,x)=\exp(-tT^{-1})$. В результате в силу (4) получаем

$$\int\limits_{\Omega}|u^{(j)}(T,x)|^2\phi(T,x)\,dx+\int\limits_{G_T}\Big[T^{-1}|u^{(j)}(t,x)|^2+\\
+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha_x u^{(j)}(t,x)|^{p+1}\Big]\,dx\,dt\leqslant c\int\limits_{\Omega}|u_0^{(j)}(x)|^2\,dx. \quad (31)$$

Подставим теперь в интегральное тождество (12) $u=u^{(j)}$, а в качестве срезающей функции $\phi(t,x)=\exp(-tT^{-1})\,\zeta^{m(p+1)}_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}(x)$. В результате после преобразований с использованием соотношений (4)–(7), свойств функции $\zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}(x)$, неравенств Гельдера, Ниренберга – Гальярдо и Юнга с ε [17, с. 139], получаем:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\int\limits_{\Omega_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)}|u^{(j)}|^2\,dx+\\
+\int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)}T^{-1}|u^{(j)}|^2\,dx\,dt+\int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)}|D^m_x u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt+\\
+\Delta s^{-1}\Bigg(\int\limits_{G_T(0,\tau-\Delta\tau,s-\frac14\Delta s)}|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt-\int\limits_{G_T(0,\tau-\Delta\tau,s-\frac34\Delta s)}|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\Bigg)\leqslant\\
\leqslant\varepsilon\int\limits_{G_T(v,\tau,s)}|D^m_x u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt+$$

$$+ c(\varepsilon)\Bigg[\Delta v^{-m(p+1)}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg) +$$
$$+ \Delta\tau^{-m(p+1)}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(v,\tau-\Delta\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg) +$$
$$+ \Delta s^{-m(p+1)}\Bigg(\int\limits_{G_T(0,\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(0,\tau,s-\Delta s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg) +$$
$$+ \Delta v^{-1}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\Bigg) + h_0^{(j)}(v,\tau,s)\Bigg], \tag{32}$$

$\forall\,\tau > 0$, $\forall\,v > 0$, $\forall\,s > 0$. Полагая в (32) $\varepsilon = 2^{-m(p+1)-1}$ и производя итеративную процедуру, аналогичную [17, с. 140], получаем:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int\limits_{\Omega_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)} |u^{(j)}|^2\,dx +$$
$$+ \int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)} T^{-1}|u^{(j)}|^2\,dx\,dt + \int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau-\Delta\tau,s-\Delta s)} |D_x^m u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt +$$
$$+ \Delta s^{-1}\Bigg(\int\limits_{G_T(0,\tau-\Delta\tau,s-\frac14\Delta s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(0,\tau-\Delta\tau,s-\frac34\Delta s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant c\Bigg[\Delta v^{-m(p+1)}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg) +$$
$$+ \Delta\tau^{-m(p+1)}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(v,\tau-\Delta\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg) +$$
$$+ \Delta s^{-m(p+1)}\Bigg(\int\limits_{G_T(0,\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(0,\tau,s-\Delta s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt\Bigg) +$$
$$+ \Delta v^{-1}\Bigg(\int\limits_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt - \int\limits_{G_T(v-\Delta v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\Bigg) + h_0^{(j)}(v,\tau,s)\Bigg], \tag{33}$$

$\forall\,\tau > 0$, $\forall\,v > 0$, $\forall\,s > 0$. Утверждение теоремы при $\lambda > 1$ вытекает из неравенства (31) при $j \to \infty$, лемм 1 и 2, а также соотношения (33) при $j \to \infty$, $2v = \Delta v$, $v \to \infty$, $2\tau = \Delta\tau$, $\tau \to \infty$, $2s = \Delta s$, $s \to \infty$.

Лемма 3 ([17]). *Пусть $u^{(j)}(t,x)$ – энергетическое решение задачи* (1)–(3). *Тогда имеет место следующее соотношение*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int\limits_{\Omega_T(s-\Delta s)} |u^{(j)}|^2\,dx + \int\limits_{G_T(s-\Delta s)} T^{-1}|u^{(j)}|^2\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{G_T(s-\Delta s)} |D_x^m u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt + \Delta s^{-1} \int\limits_{Q_T(s-\frac{\Delta s}{4},\frac{\Delta s}{2})} |u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\Delta s^{-m(p+1)} \int\limits_{Q_T(s,\delta)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt + h_0(s)\right], \quad \forall s\in\mathbb{R}^1,\ \forall\, 0<\delta<\infty. \quad (34)$$

Утверждение теоремы при $0<\lambda<1$ вытекает из неравенства (31), лемм 1 и 2, а также соотношения (34) при $j\to\infty$. □

1. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – **22**, № 5. – С. 667–704
2. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
3. *Diaz J. I., Kersner R.* On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium // J. Differential Equations. – 1987. – **69**. – P. 368–403.
4. *Gilding B. H.* Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1989. – **16**. – P. 165–224.
5. *Lions J.-L.* Quelquas methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. – Paris: Dunod, Gauthier Villars, 1969. – 570 p.
6. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – **279**. – P. 373–394.
7. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**. – P. 311–341.
8. *Benilan Ph., Wittbold P.* On Mild and Weak Solutions of Elliptic-Parabolic Problems // Adv. in Differential Equations. – 1996. – **1**, No. 6. – P. 1053–1073.
9. *Kalashnikov A. S.* Cauchy problem in classes of growing functions for degenerate quasilinear second-order parabolic equations // Differentsialnye Uravnenia. – 1973. – **9**. – P. 682–691.
10. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equations // Trans. AMS. – 1989. – **314**. – P. 197–224.
11. *Шишков А. Е.* Эволюция носителей решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения высокого порядка // Матем. сборник. – 1995. – **186**, № 12. – С. 151–172.
12. *Gladkov A. L.* Unbounbed solutions of the non-linear heat-conduction equation with strong convection at infinity // Comp. Maths. Math. Phys. – 1996. – **36**. – P. 1381–1391.
13. *Гладков А. Л.* О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Матем. сборник. – 1995. – **186**, № 6. – С. 35–56.
14. *Сапронов Д. А.* Теоремы типа Фрагмена – Линделефа для решений вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции с однородными условиями Коши // Труды ИПММ. – 1998. – **4**. – С. 157–165.

15. *Сапронов Д. А.* Существование решений с неограниченной энергией задач Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции // Труды ИПММ. – 2017. – **31**. – С. 161–176.
16. *Сапронов Д. А.* О разрешимости задачи Коши для многомерных вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции с неограниченной энергией // Труды ИПММ. – 2018. – **32**. – С. 99–117.
17. *Сапронов Д. А., Шишков А. Е.* Асимптотическое поведение носителей решений квазилинейных многомерных параболических уравнений типа нестационарной диффузии-конвекции // Матем. сборник. – **197**, № 5. – 2006. – С. 125–160.

D. A. Sapronov

Solvability of the Cauchy – Dirichlet problems for degenerated multidimensional higher-order parabolic equations of diffusion-convection type

Solvability of Cauchy – Dirichlet problem for multidimensional quasi-linear degenerate higher-order parabolic equations of slow diffusion-convection type in arbitrary space domain is established.

Keywords: *degenerated parabolic equations, diffusion, convection.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка
`nervsofhorse@mail.ru`

Получено 22.09.20

УДК 004.9:519:532.5

©2020. **С. В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг**

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬ ОХЛАЖДАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОТРЫВЕ С ПОВЕРХНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РАСПЫЛИТЕЛЯ

Излагается численно-аналитическая нечетко-множественная методика получения оценок влияния факторов неопределенности в виде разбросов в значениях исходных параметров при исследовании модели движения капель охлаждающей жидкости, отрывающейся от поверхности вертикально вращающегося распылителя. В основу рассматриваемого подхода положен реализуемый в рамках эвристического принципа обобщения прием перехода к нечетко-множественным аргументам в аналитических представлениях для эндогенных параметров модели, получаемых при анализе ее детерминистического варианта. Представлены примеры численной реализации предлагаемой методики.

Ключевые слова: *вертикальные дисковые распылители, охлаждающие жидкости, модель движения капель, влияние неопределенности исходных данных, разбросы значений экспериментальных и технологических параметров, нечетко-множественная методика исследования, эвристический принцип обобщения.*

1. Введение и постановка задачи. Жидкостно-капельное охлаждение является одним из распространенных приемов термостабилизации в самом обширном ряде технологических процессов [1–8]. Задача повышения адекватности результатов предпроектного математического моделирования при разработке и совершенствовании таких способов охлаждения в качестве одного из важных и актуальных аспектов предполагает создание методик учета факторов неопределенности в соответствующих моделях, в том числе учета влияния разбросов в экспериментальных значениях экзогенных параметров и их допустимых технологических расхождений [9].

Имеется эффективный опыт применения в этих целях методов вероятностно-стохастического анализа, который, вместе с тем, сталкивается с потребностью в исходной информации, отвечающей соответствующим требованиям корректной статистической обработки [1, 3, 4, 8]. Возможно и применение для получения оценок влияния неопределенности исходных параметров методов теории нечетких множеств [9–16] с менее строгими требованиями к характеру неконтрастной исходной информации, включая данные субъективных экспертных заключений [17–19].

В контексте вышеизложенного, целью настоящей работы является разработка и апробация численно-аналитической нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности в модели формирования жидкостнокапельного потока вертикально вращающимся ротационным дисковидным распылителем охлаждающего реагента.

Распылители рассматриваемого типа конструктивно описаны в работах [1, 3, 4, 6–8, 20]. Они имеют рабочие органы в виде вращающихся с большими угловыми скоростями барабанов, конических чаш, дисков. При их функционировании фактически используется только направленная к вертикальной термостабилизируемой поверхности составляющая факела распыла. Остальная часть факела экранируется корпусной конструкцией и отводится насосами из специальных накопителей.

Представляемая методика оценивания неопределенных рабочих характеристик функционирования вертикального ротационного распылителя основывается на изложенных в работе [20] результатах анализа соответствующего варианта двумерной детерминистической модели.

Полагается, что термостабилизируемая поверхность во вводимой координатной системе $Ox_1x_2x_3$ имеет описание $S = \{x_1 = l,\ x_2 \in [0, h_1],\ x_3 \in \in (-\infty, \infty)\}$. Точки на оси размещаемого на штанге и вращающегося с угловой скоростью $\omega[c^{-1}]$ против часовой стрелки дискового распылителя радиуса R (в версии двумерной модели – протяженного цилиндрического барабанного распылителя) принадлежат множеству $S = \{x_1 = 0,\ x_2 = h_2,\ x_3 \in (-\infty, \infty)\}$. При таком способе размещения рабочего органа проектный факел капельного распыления охлаждающего жидкостного реагента в направлении термостабилизируемой поверхности характеризуется граничными углами $-\varphi_1$ и $-\varphi_2$ ($\varphi_2 > \varphi_1$), отсчитываемыми от выходящего из точки $P = \{x_1 = 0,\ x_2 = h_2\}$ коллинеарного Ox_1 направления. При этом

$$\varphi_1 = \arccos[(l(l^2 + h^2 - R^2)^{1/2} + Rh)/(l^2 + h^2)], \tag{1}$$

$$\varphi_2 = \arccos[(l(l^2 + h_2^2 - R^2)^{1/2} + Rh_2)/(l^2 + h_2^2)], \tag{2}$$

$$h = h_2 - h_1.$$

Координаты траектории движения капель q_i распыленного реагента для промежутка времени $t \geqslant 0$ начиная с момента отрыва капли от поверхности рабочего органа согласно рассматриваемой модели описываются соотношениями [20]

$$\begin{gathered} x_{1q_i} = V\cos\varphi_i\, k_1^{-1}(1 - \exp(-k_1 t)), \\ x_{2q_i} = h_2 - R\cos\varphi_i + (V\sin\varphi_i\, k_1^{-1} - k_2k_1^{-2})\,(1 - \exp(-k_1 t)) + k_2k_1^{-1}t, \end{gathered} \tag{3}$$

в которых

$$\begin{gathered} V = \omega R, \\ k_1 = (2m_{q_i})^{-1}\pi r_{q_i}^2\gamma_f C_{q_i}, \quad k_2 = 4(3m_{q_i})^{-1}\pi r_{q_i}^3\gamma_r; \end{gathered} \tag{4}$$

m_{q_i}[кг] – масса капли q_i; r_{q_i}[м] – радиус капли q_i; γ_f[Н/м^3] – объемный вес газообразной сред (воздуха); γ_r[Н/м^3] – объемный вес жидкого реагента; V[м/с] – начальная скорость движения капли q_i в момент отрыва от диска распылителя, которая далее испытывает действие сил тяжести и сопротивления движению в окружающей газообразной среде. Параметр C_{q_i} в соотношениях (4) является коэффициентом сопротивления для движущейся капли q_i. Для получения значений параметра C_{q_i} применяются альтернативные подходы [1–8], в рамках которых используется гипотеза оценивания данного коэффициента как постоянной величины, изменяющейся в диапазоне $0.4 \leqslant C_{q_i} \leqslant 0.5$; гипотеза оценивания величины C_{q_i} на основе эмпирической зависимости

$$C_{q_i} = Q\,(R_e)^{-1/2}, \tag{5}$$

в которой R_e – значение соответствующего числа Рейнольдса, Q – варьируемый эмпирический коэффициент, выбор значения которого осуществляется в соответствии с рядом рекомендаций [1–8]. В частности, для капель q_i с диапазонами диаметров $1 \cdot 10^{-4} < d_{q_i} < 2 \cdot 10^{-3}$ [м] в условиях их свободного падения с предельными скоростями и при $1.0 < R_e < 800$ рекомендован выбор значения $Q \approx 12.5$. При $d_{q_i} \leqslant 1 \cdot 10^{-4}$[м] и $R_e < 2.0$ для расчета параметра C_{q_i} применима формула Стокса

$$C_{q_i} = 24\,(R_e)^{-1/2}. \tag{6}$$

Задаваемое соотношениями (1)–(6) описание детерминистического варианта рассматриваемой модели является основой алгоритма получения обоснованных оценок для диапазона вариации эндогенных характеристик модели с учетом допускаемых разбросов экзогенных параметров. Актуальность разработки такого алгоритма, как следует из вышеизложенного, связана с высоким уровнем неопределенности в выборе расчетных значений для исходных данных.

2. Нечетко-множественная методика исследования модели движения капель. Алгоритм учета влияния факторов разброса в значениях экзогенных параметров включает этапы фаззификации нечеткой исходной информации и последующего перехода в расчетных соотношениях детерминистической версии рассматриваемой модели к нечетким аргументам на основе применения α-уровневой формы эвристического принципа расширения [9, 17–19].

Введенные неопределенные геометрические l, h_1, h_2, R, r_{q_i} и физико-механические ω, γ_f, γ_r, Q, R_e параметры модели рассматриваются как нечетко-множественные характеристики $\tilde{l}$, $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{R}$, $\tilde{r}_{q_i}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\gamma}_f$, $\tilde{\gamma}_r$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}_e$. В рассматриваемом случае для анализа нечетко-множественной версии модели движения капель охлаждающей жидкости при отрыве с поверхности вертикально вращающегося распылителя предлагается использование представлений нечетко-множественных экзогенных параметров нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами с соответствующими кортежами реперных значений

$$\begin{gathered}\tilde{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4),\\ \tilde{h}_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}), \quad \tilde{h}_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}),\\ \tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4), \quad \tilde{r}_{q_i} = (r_{q_i1}, r_{q_i2}, r_{q_i3}, r_{q_i4}),\\ \tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4),\\ \tilde{\gamma}_f = (\gamma_{f1}, \gamma_{f2}, \gamma_{f3}, \gamma_{f4}), \quad \tilde{\gamma}_r = (\gamma_{r1}, \gamma_{r2}, \gamma_{r3}, \gamma_{r4}),\\ \tilde{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), \quad \tilde{R}_e = (R_{e1}, R_{e2}, R_{e3}, R_{e4}).\end{gathered} \tag{7}$$

В соответствии с применяемой методикой, учитывающие экспериментальные разбросы значения коэффициента сопротивления C_{q_i} движущейся капли q_i для охарактеризованных выше диапазонов либо определяются альтернативными нечетко-множественными соотношениями

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{q_i} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{C}_{q_i\alpha}, \overline{C}_{q_i\alpha}],\\ \underline{C}_{q_i\alpha} = 24\,(\overline{R}_{e\alpha})^{-1/2}, \quad \overline{C}_{q_i\alpha} = 24\,(\underline{R}_e)^{-1/2},\\ \underline{R}_{e\alpha} = (1-\alpha)R_{e1} + \alpha R_{e2}, \quad \overline{R}_{e\alpha} = \alpha R_{e3} + (1-\alpha)R_{e4};\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{q_i} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{C}_{q_i\alpha}, \overline{C}_{q_i\alpha}],\\ \underline{C}_{q_i\alpha} = \underline{Q}_\alpha(\overline{R}_{e\alpha})^{-1/2}, \quad \overline{C}_{q_i\alpha} = \overline{Q}_\alpha\,(\underline{R}_e)^{-1/2},\\ \underline{R}_{e\alpha} = (1-\alpha)R_{e1} + \alpha R_{e2}, \quad \overline{R}_{e\alpha} = \alpha R_{e3} + (1-\alpha)R_{e4},\\ \underline{Q}_\alpha = (1-\alpha)Q_1 + \alpha Q_2, \quad \overline{Q}_\alpha = \alpha Q_3 + (1-\alpha)Q_4;\end{gathered} \tag{9}$$

либо непосредственно вводятся как отвечающие оговоренным диапазонам изменения нечетко-интервальные исходные параметры

$$\tilde{C}_{q_i} = (C_{q_i1}, C_{q_i2}, C_{q_i3}, C_{q_i4}).$$

Для оценивания эффектов влияния разбросов экзогенных параметров модели на угловые размеры φ_1, φ_2 зоны распыления, описываемые в детерминистической версии модели [20] соотношениями (1), (2), вводятся нечетко-множественные величины $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ вида

$$\tilde{\varphi}_1 = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\varphi}_{1\alpha}, \overline{\varphi}_{1\alpha}],$$

$$\underline{\varphi}_{1\alpha} = \inf_{\substack{R\in[\underline{R}_\alpha,\, \overline{R}_\alpha] \\ l\in[\underline{l}_\alpha,\, \bar{\bar{l}}_\alpha] \\ h\in[\underline{h}_\alpha,\, \overline{h_\alpha}]}} \arccos[(l(l^2+h^2-R^2)^{1/2}+Rh)/(l^2+h^2)],$$
$$\overline{\varphi}_{1\alpha} = \sup_{\substack{R\in[\underline{R}_\alpha,\, \overline{R}_\alpha] \\ l\in[\underline{l}_\alpha,\, \bar{\bar{l}}_\alpha] \\ h\in[\underline{h}_\alpha,\, \overline{h_\alpha}]}} \arccos[(l(l^2+h^2-R^2)^{1/2}+Rh)/(l^2+h^2)]; \tag{10}$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\varphi}_{2\alpha}, \overline{\varphi}_{2\alpha}],$$

$$\underline{\varphi}_{2\alpha} = \inf_{\substack{R\in[\underline{R}_\alpha,\, \overline{R}_\alpha] \\ l\in[\underline{l}_\alpha,\, \bar{\bar{l}}_\alpha] \\ h_2\in[\underline{h}_{2\alpha},\, \overline{h_{2\alpha}}]}} \arccos[(l(l^2+h_2^2-R^2)^{1/2}+Rh_2)/(l^2+h_2^2)],$$
$$\overline{\varphi}_{2\alpha} = \sup_{\substack{R\in[\underline{R}_\alpha,\, \overline{R}_\alpha] \\ l\in[\underline{l}_\alpha,\, \bar{\bar{l}}_\alpha] \\ h_2\in[\underline{h}_{2\alpha},\, \overline{h_{2\alpha}}]}} \arccos[(l(l^2+h_2^2-R^2)^{1/2}+Rh_2)/(l^2+h_2^2)]; \tag{11}$$

в которых

$$\begin{gathered}
\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4) = \tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = \\
= (h_{21}-h_{14}, h_{22}-h_{13}, h_{23}-h_{12}, h_{24}-h_{11}); \\
\underline{R}_\alpha = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \overline{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1-\alpha)R_4; \\
\underline{l}_\alpha = (1-\alpha)l_1 + \alpha l_2, \quad \bar{l}_\alpha = \alpha l_3 + (1-\alpha)l_4; \\
\underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \overline{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4; \\
\underline{h}_{2\alpha} = (1-\alpha)h_{21} + \alpha h_{22}, \quad \overline{h}_{2\alpha} = \alpha h_{23} + (1-\alpha)h_{24}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Нечетко-множественные описания траекторий движения капель q_i распыленного реагента вдоль траекторий, определяемых нечеткими угловыми параметрами $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, начиная с момента отрыва от поверхности вращающегося диска, описываемые в детерминистической версии рассматриваемой модели соотношениями (3), (4), имеют следующие поэтапно конструируемые представления:

$$\tilde{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4) = \tilde{\omega}\tilde{R} = (\omega_1 R_1,\ \omega_2 R_2,\ \omega_3 R_3,\ \omega_4 R_4);$$

$$\tilde{k}_1 = (k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}) = (2\tilde{m}_{q_i})^{-1}\pi\tilde{r}^2_{q_i}\tilde{\gamma}_f\tilde{C}_{q_i} = \big((\pi/2)\gamma_{f1}r^2_{q_i1}C_{q_i1}/m_{q_i4},$$
$$(\pi/2)\gamma_{f2}r^2_{q_i2}C_{q_i2}/m_{q_i3},\ (\pi/2)\gamma_{f3}r^2_{q_i3}C_{q_i3}/m_{q_i2},\ (\pi/2)\gamma_{f4}r^2_{q_i4}C_{q_i4}/m_{q_i1}\big);$$

$$\tilde{k}_2 = (k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}) = 4(3\tilde{m}_{q_i})^{-1}\pi\tilde{r}^3_{q_i}\tilde{\gamma}_r = \big((4\pi/3)\gamma_{r1}r^3_{q_i1}/m_{q_i4},$$
$$(4\pi/3)\gamma_{r2}r^3_{q_i2}/m_{q_i3},\ (4\pi/3)\gamma_{r3}r^3_{q_i3}/m_{q_i2},\ (4\pi/3)\gamma_{r4}r^3_{q_i4}/m_{q_i1}\big);$$

$$\tilde{x}(t)_{1q_i} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{x(t)}_{1q_i\alpha}, \overline{x(t)}_{1q_i\alpha}],$$

$$\underline{x(t)}_{1q_i\alpha} = \inf_{\substack{k_1\in[\underline{k}_{1\alpha},\,\overline{k}_{1\alpha}]\\ V\in[\underline{V}_\alpha,\,\overline{V}_\alpha]\\ \varphi_i\in[\underline{\varphi}_{i\alpha},\,\overline{\varphi}_{i\alpha}]}} [V\cos\varphi_i\ k_1^{-1}(1-\exp(-k_1 t))],$$

$$\overline{x(t)}_{1q_i\alpha} = \sup_{\substack{k_1\in[\underline{k}_{1\alpha},\,\overline{k}_{1\alpha}]\\ V\in[\underline{V}_\alpha,\,\overline{V}_\alpha]\\ \varphi_i\in[\underline{\varphi}_{i\alpha},\,\overline{\varphi}_{i\alpha}]}} [V\cos\varphi_i\ k_1^{-1}(1-\exp(-k_1 t))]; \tag{13}$$

$$\tilde{x}(t)_{2q_i} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{x(t)}_{2q_i\alpha}, \overline{x(t)}_{2q_i\alpha}],$$

$$\underline{x(t)}_{2q_i\alpha} = \inf_{\substack{R\in[\underline{R}_\alpha,\,\overline{R}_\alpha]\\ k_1\in[\underline{k}_{1\alpha},\,\overline{k}_{1\alpha}]\\ k_2\in[\underline{k}_{2\alpha},\,\overline{k}_{2\alpha}]\\ V\in[\underline{V}_\alpha,\,\overline{V}_\alpha]\\ \varphi_i\in[\underline{\varphi}_{i\alpha},\,\overline{\varphi}_{i\alpha}]}} \left[\begin{array}{l} \underline{h}_{2\alpha} - R\cos\varphi_i + \\ + (V\sin\varphi_i\ k_1^{-1} - k_2k_1^{-2})(1-\exp(-k_1t)) + k_2k_1^{-1}t \end{array}\right],$$

$$\overline{x(t)}_{2q_i\alpha} = \sup_{\substack{R\in[\underline{R}_\alpha,\,\overline{R}_\alpha]\\ k_1\in[\underline{k}_{1\alpha},\,\overline{k}_{1\alpha}]\\ k_2\in[\underline{k}_{2\alpha},\,\overline{k}_{2\alpha}]\\ V\in[\underline{V}_\alpha,\,\overline{V}_\alpha]\\ \varphi_i\in[\underline{\varphi}_{i\alpha},\,\overline{\varphi}_{i\alpha}]}} \left[\begin{array}{l} \overline{h}_{2\alpha} - R\cos\varphi_i + \\ + (V\sin\varphi_i\ k_1^{-1} - k_2k_1^{-2})(1-\exp(-k_1t)) + k_2k_1^{-1}t \end{array}\right]. \tag{14}$$

Таким образом, соотношения (8)–(14) позволяют получить оценки влияния факторов неопределенности в виде разбросов численных значений исходных параметров на основные эндогенные характеристики модели движения капель охлаждающей жидкости при отрыве с поверхности вертикально вращающегося распылителя, которыми являются угловые параметры факела распыла и топология траекторий движения капель с различными направлениями отрыва от поверхности распылителя.

3. Численная реализация представляемой методики. Пример численной реализации изложенной нечетко-множественной методики исследования модели движения капель дается для следующего варианта задания нечетко-интервальных экзогенных параметров рассматриваемой модели:

$$\begin{gathered}
\tilde{l} = (0.97l_*,\ 0.99l_*,\ 1.0l_*,\ 1.03l_*),\\
\tilde{h}_1 = (1.42l_*,\ 1.49l_*,\ 1.51l_*,\ 1.53l_*),\quad \tilde{h}_2 = (1.85l_*,\ 1.9l_*,\ 1.92l_*,\ 1.95l_*),\\
\tilde{R} = (0.097l_*,\ 0.099l_*,\ 0.1l_*,\ 0.12l_*),\\
\tilde{r}_{q_i} = (2.5\cdot 10^{-4}l_*,\ 3.4\cdot 10^{-4}l_*,\ 3.9\cdot 10^{-4}l_*,\ 5.0\cdot 10^{-4}l_*),\\
\tilde{\omega} = (30\pi\omega_*, 32\pi\omega_*, 36\pi\omega_*, 40\pi\omega_*),\\
\tilde{\gamma}_f = (1.22\gamma_{**},\ 1.24\gamma_{**},\ 1.27\gamma_{**},\ 1.29\gamma_{**}),\\
\tilde{\gamma}_r = (0.98\gamma_*,\ 0.99\gamma_*,\ 1.0\gamma_*,\ 1.15\gamma_*),\\
\tilde{Q} = (12.5,\ 13.0,\ 13.2,\ 13.5),\quad \tilde{R}_e = (200,\ 380,\ 450,\ 800),\\
l_* = 1[\text{м}],\quad \omega_* = 1[\text{рад/с}],\quad \gamma_* = 9.8\cdot 10^3[\text{Н/м}^3],\quad \gamma_{**} = 9.8\ [\text{Н/м}^3].
\end{gathered} \tag{15}$$

Описываемый вариант задания исходных параметров в постановке расчетной задачи отвечает процессу распыления воды вращающимся против часовой стрелки с индикативной средней скоростью 17 об./с диском распылителя с индикативным радиусом 0.1 м. Прочие постановочные данные характеризуются представлениями (1).

Результаты расчетов с применением реализующего алгоритм программного приложения отражены на рисунках 1–8.

В частности, на рисунках 1 и 2 приводятся рассчитанные на основе соотношений (10), (11) профили функций принадлежности для задаваемых в градусной мере нечетко-множественных характеристик $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ угловых параметров факела распыления, отсчитываемых, как указано выше, от горизонтального направления.

Согласно расчетам, в представляемом варианте процесса распыления, при учитываемых уровнях разбросов множества исходных параметров модели, наиболее достоверные значения углового параметра φ_1 (рис. 1) лежат в диапазоне от $16.3°$ до $18.2°$, и при этом достоверными хотя бы на минимальном уровне уверенности не могут быть значения $\varphi_1 < 12.1°$ и $\varphi_1 > 23.4°$. Аналогично, для углового параметра φ_2 (рис. 2) наиболее достоверные значения

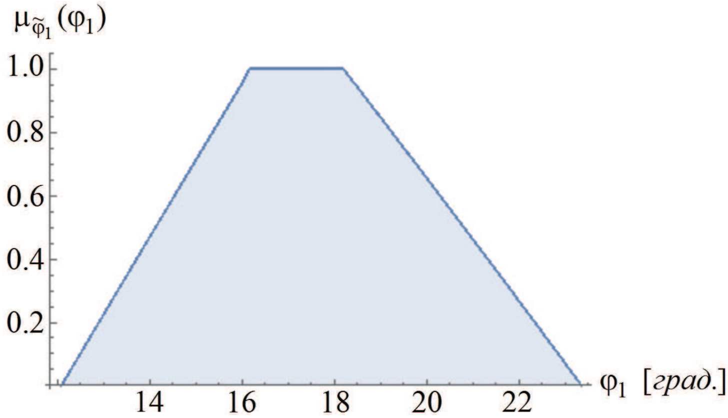

Рис. 1. Вид функции принадлежности для характеристики $\tilde{\varphi}_1$

лежат в диапазоне от 59.6° до 60.1°, а достоверными хотя бы на минимальном уровне уверенности не могут быть значения $\varphi_1 < 57.8°$ и $\varphi_1 > 60.8°$.

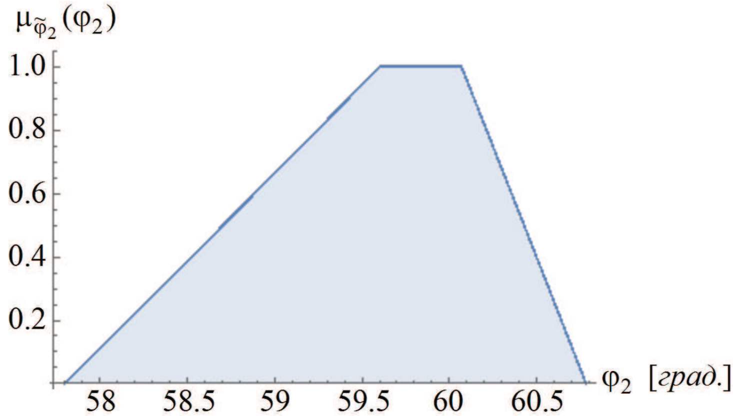

Рис. 2. Вид функции принадлежности для характеристики $\tilde{\varphi}_2$

Рисунки 3–8 характеризуют результаты расчета характеристик траекторий движения капель с нечеткими угловыми характеристиками отрыва $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ в пределах $x_1 \in [0, l]$.

Линии $\mu = 1$ на рис. 3 отвечают внешним границам областей наиболее достоверного пролегания траекторий движения капель с углами отрыва от поверхности диска, описываемыми нечетким множеством $\tilde{\varphi}_1$; линии $\mu = 0$ ограничивают область, вне которой прохождение траекторий движения капель с описываемыми множеством $\tilde{\varphi}_1$ углами отрыва не характеризуется сколь угодно малым положительным показателем достоверности. Аналогичную характеристику имеют соответствующие линии на рис. 6, описывающем возможные

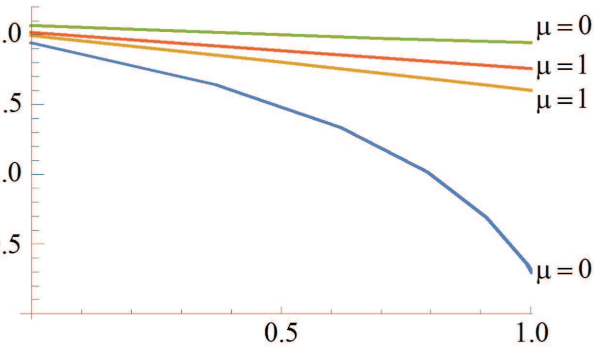

Рис. 3. Топология прогнозируемых траекторий движений капель в плоскости Ox_1x_2 вдоль углового направления распыления $\tilde{\varphi}_1$ с минимальными и максимальными значениями функции принадлежности

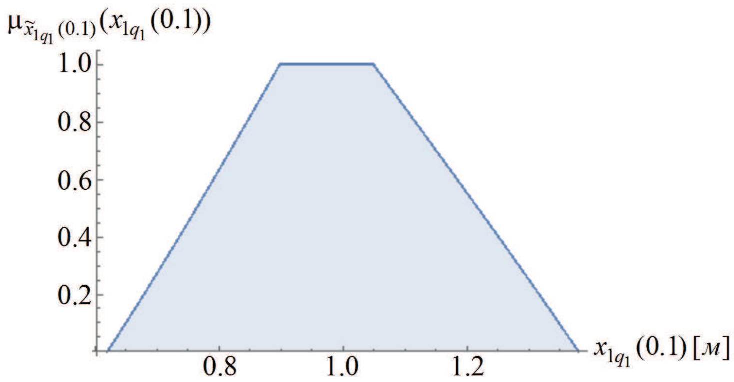

Рис. 4. Вид функции принадлежности для характеристики траектории $\tilde{x}_{1q_1}(0.1)$ с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_1$

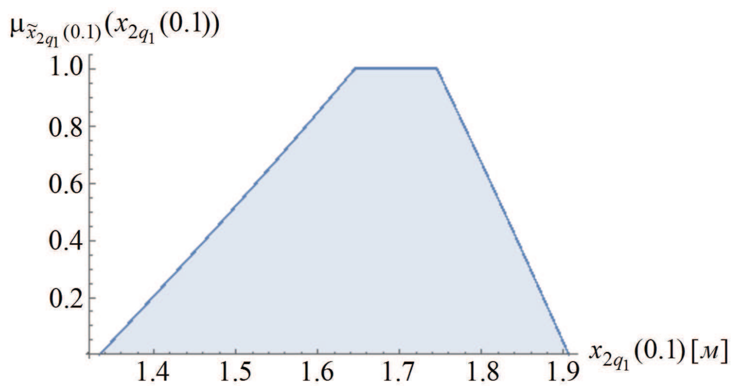

Рис. 5. Вид функции принадлежности для характеристики траектории $\tilde{x}_{2q_1}(0.1)$ с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_1$

траектории движения капель с углами отрыва, характеризуемыми нечетким множеством $\tilde{\varphi}_2$.

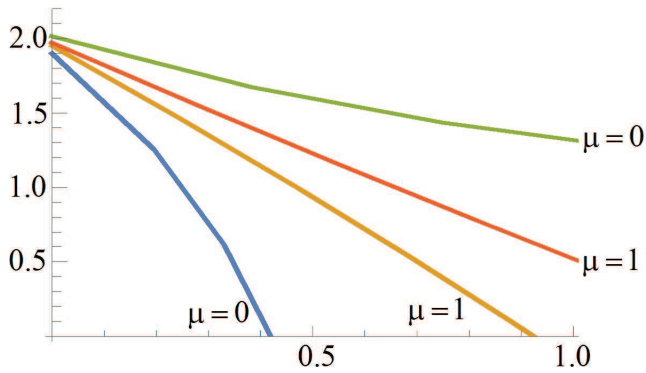

Рис. 6. Топология прогнозируемых траекторий движений капель вдоль углового направления распыления $\tilde{\varphi}_2$ с минимальными и максимальными значениями функции принадлежности

Характеристику возможных нечетких значений координат $\tilde{x}_{1q_i}$ и $\tilde{x}_{2q_i}$ положений точек на траекториях их движения с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_1$ в момент времени $t = 0.1$ с описывают соответствующие функции принадлежности, представленные на рисунках 4, 5. Аналогичные характеристики для траекторий движения с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_2$ приведены на рисунках 7, 8.

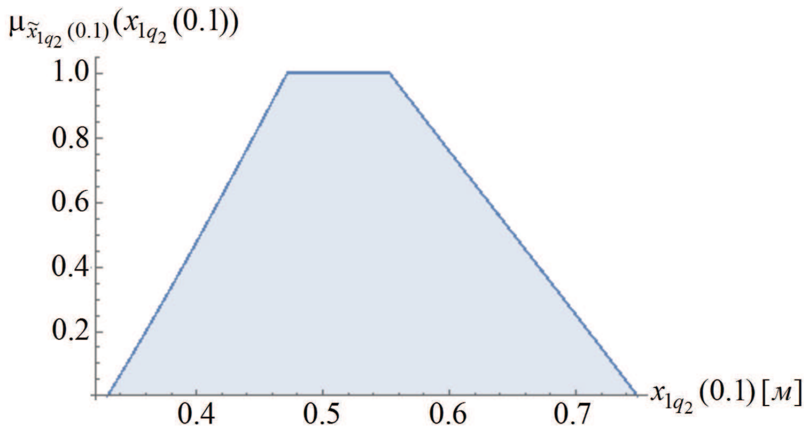

Рис. 7. Вид функции принадлежности для характеристики траектории $\tilde{x}_{1q_2}(0.1)$ с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_2$

4. Заключение. Результатом представленных в работе исследований является численно-аналитическая нечетко-множественная методика учета

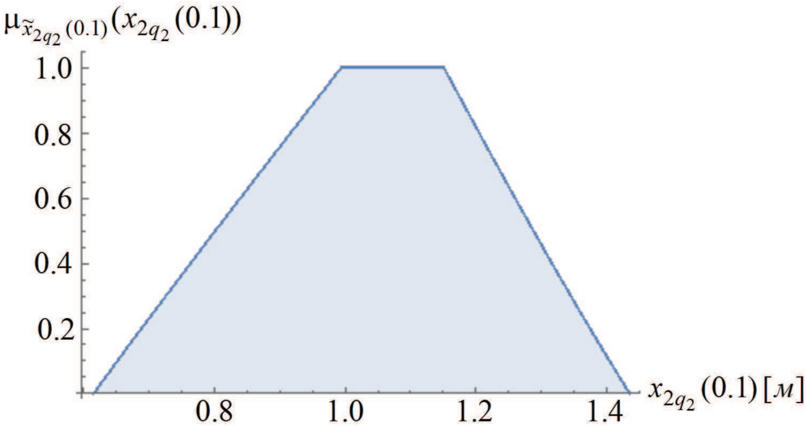

Рис. 8. Вид функции принадлежности для характеристики траектории $\tilde{x}_{2q_2}(0.1)$ *с нечетким угловым параметром* $\tilde{\varphi}_2$

разбросов исходных значений физико-механических и геометрических параметров в модели функционирования вертикально вращающегося дискового распылителя жидкости в системе воздушно-капельного охлаждения. Методика базируется на описании параметров с разбросами в виде нечетко-интервальных величин и переходе к нечетко-множественным аргументам в аналитических представлениях для эндогенных параметров модели, получаемых при анализе ее детерминистического варианта. Процедура перехода к нечетким аргументам осуществляется с применением правил арифметики нечетких интервалов и альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения. Представлены примеры численной реализации предлагаемой методики.

Применение методики, обеспечивающей учет эффектов неопределенности параметров модели, имеет прикладное значение и создает возможности для получения более адекватных практике результатов предпроектных конструкторских расчетов.

1. *Бородин В. А.* Распыливание жидкостей. – М.: Машиностроение, 1967. – 208 с.
2. *Галустов В. С.* Прямоточные распылительные аппараты в теплоэнергетике. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 240 с.
3. *Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И.* Распыливание жидкостей. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
4. *Пажи Д., Галустов В.* Основы техники распыления жидкости. – М.: Химия, 1984. – 256 с.
5. *Соколов Е. Я., Зингер Н. М.* Струйные аппараты. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 352 с.
6. Гидравлическое распыление [Электронный ресурс]. URL: `http://vseokraskah.net/lakokraska/8-4-gidravlicheskoe-raspylenie.html`.
7. Распылительные технологии [Электронный ресурс]. URL: `http://www.lechler-forsunki.ru/-/-/-cbwGZ_AAABCBgAAAEyeIkEMEhk-ru_RU`.

8. Техника распыления [Электронный ресурс]. URL: http://www.c-irimex.ru/catalog/forsunki_sistemiy_raspiylenija/forsunki_i_raspiylitelniye_sistemiy_lechler/tehnika_raspiylenija.
9. *Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, Сторожев С. В.* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
10. *Kaufmann A., Gupta M.* Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.
11. *Anastassiou G. A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
12. *Sonbol A. H., Fadali M. S.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – **42**. – P. 702–712.
13. *Дилигенский Н. В., Дымова Л. Г., Севастьянов П. В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: Издательство Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
14. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
15. *Ban A. I., Coroianu L. C., Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximation and Aggregation // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – **177**. – P. 45–59.
16. *Grzegorzewski P., Mrȷ'owka E.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – **153**. – P. 115–135.
17. *Сторожев С. В., Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг.* Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании процессов распада струи жидкости в пневматических распылителях // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1–2(66–67). – С. 3–17.
18. *Сторожев С. В., Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг.* Нечетко-множественная методика оценивания некоторых характеристик функционирования центробежно-струйных форсунок в технических системах термостабилизации // Вестник ДонНУ. Сер. Г. Технические науки. – 2019. – № 4. – С. 42–49.
19. *Сторожев С. В.* Нечетко-множественое моделирование процессов распыления жидкости в центробежных форсунках // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 1(70). – С. 48–60.
20. *Шекихачев Ю. А., Шомахов Л. А., Хажметов Л. М., Твердохлебов С. А., Бербеков В. Н., Афасижев Ю. А.* Математическое моделирование движения капли жидкости с поверхности вертикально вращающегося дискового распылителя // Научный журнал КубГАУ. – 2011. – № 72(08). – URL: http://ej.kubagro.ru/2011/08/pdf/28.pdf.

S. V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

Fuzzy-set technique for studying the model of the motion of cooling liquid drops at separation from surface of vertically rotating sprayer

A numerical-analytical fuzzy-set method for obtaining estimates of the influence of uncertainty factors in the form of scatter errors in the values of the initial parameters when studying a model of the motion of cooling liquid drops at separation from surface of vertically rotating sprayer is presented. The approach under consideration is based on the method of transition to fuzzy-set arguments in analytical representations for the endogenous parameters of the model obtained in the analysis of its deterministic version, implemented within the framework of the heuristic principle of generalization. Examples of the numerical implementation of the proposed technique are presented.

Keywords: *vertical disk sprayers, cooling liquids, droplet motion model, influence of uncertainty in initial data, scatter errors of experimental and technological parameters, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка
Ун-т природных ресурсов и окружающей среды, Хошимин
s.storozhev@donnasa.ru

Получено 17.09.20

УДК 004.896

©2020. **И. А. Тарасова, М. В. Гранков**

РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ БАЗЫ ЗНАНИЙ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПРИНЦИПАХ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

Приведено исследование существующих методов нечеткого управления, разработаны обобщенная схема управления в системе искусственного интеллекта и архитектура базы знаний для реализации интеллектуального управления на принципах нечеткой логики с использованием термов лингвистических переменных с функциями принадлежности нескольких аргументов. Применение полученных результатов позволяет повысить эффективность управления плохо формализуемыми объектами с нелинейными ограничениями на управляющие переменные.

Ключевые слова: *интеллектуальное управление, база знаний, нечеткая логика, функция принадлежности нескольких аргументов.*

1. Введение. Одним из наиболее важных направлений развития искусственного интеллекта является нечеткое моделирование и управление. Основные результаты в этой области исследований были получены в работах Л. Заде, Э. Мамдани, М. Сугэно, Т. Тэрано, А. Кофмана, Р. Ягера и др. Проблемам разработки методологии нечеткого моделирования и технологии решения практических задач посвящены работы А. Н. Аверкина, И. З. Батыршина, Р. А. Алиева, А. Н. Борисова, Д. А. Поспелова, В. В. Круглова.

Существующие методы нечеткого управления, применяемые в системах искусственного интеллекта, в основном используют в качестве термов нечеткие переменные с одномерными функциями принадлежности. С одной стороны, это позволяет, использовать простое и наглядное представление функций принадлежности, обеспечивающее применение несложных вычислительных процедур при проведении всех этапов нечеткого вывода, с другой стороны, теряется зависимость между управляющими переменными, обусловленная нелинейными ограничениями на управление.

Способы построения функций принадлежности существенно зависят от экспертного мнения. Методы задания и определения вида функций принадлежности нескольких аргументов в настоящее время недостаточно разработаны. Рассмотренные в работах [1–4] представления многомерных функций принадлежности позволяют построить функции принадлежности заранее известного вида и не обеспечивают задания произвольной формы областей, в которых определены лингвистические термы переменных. Недостатком метода, изложенного в работе [5], можно считать то, что использование нейронных сетей привело к отсутствию возможности выделить как саму функцию принадлежности, так и базу правил, а также функции, описывающие консеквенты каждого конкретного правила.

Применение для моделирования объектов со сложной структурой входных и выходных переменных иерархических систем нечеткого вывода приводит к тому, что при переходе между уровнями иерархии возникает определенная степень размытости, что может привести к потере значимости результата. Одним из путей решения данной проблемы является использование термов лингвистических переменных с функциями принадлежности нескольких аргументов (ФПНА) [6, 7]. Однако представление структур системы нечеткого управления, позволяющих хранить такие данные, в настоящее время отсутствует, что говорит об актуальности исследований в данной области.

Целью данной работы является повышение эффективности управления плохо формализуемыми объектами за счет разработки архитектуры базы знаний для реализации интеллектуального управления на принципах нечеткой логики с использованием функций принадлежности нескольких аргументов.

В данной работе решаются следующие задачи:

– разработка обобщенной схемы нечеткого управления в системе искусственного интеллекта;

– разработка архитектуры базы знаний для реализации интеллектуального управления на принципах нечеткой логики с использованием функций принадлежности нескольких аргументов.

2. Разработка обобщенной схемы управления в системе искусственного интеллекта. На рис. 1 представлена обобщенная структура системы искусственного интеллекта для реализации нечеткого управления на основе термов с функциями принадлежности нескольких аргументов.

На рис. 1 введены следующие обозначения:

1 – ретроспективные данные;

2 – таблично заданные ФПНА термов лингвистических переменных;

3 – множества входных и выходных лингвистических переменных с таблично заданными ФПНА термов;

4 – множества входных и выходных лингвистических переменных с аналитически заданными ФПНА термов (при необходимости);

5 – множество правил нечетких продукций;

6 – характеристики текущего состояния объекта;

7 – характеристики текущего состояния объекта и принятое решение по управлению;

8 – значения управляющих переменных;

9 – управляющее воздействие;

10 – реакция объекта управления;

11 – измеренные характеристики объекта управления.

При разработке системы нечеткого управления с использованием функций принадлежности нескольких аргументов связь между входными и выходными переменными задается на основе экспертных знаний в виде базы знаний.

Как следует из рис. 1, база знаний включает в себя базу правил нечетких продукций, базу лингвистических переменных с аналитически заданными ФПНА термов, которая заполняется в случае, если функции принадлежности заранее известны и могут быть заданы аналитически, и базу лингвистических переменных с таблично заданными ФПНА термов, определение которых выполняется с помощью метода задания ФПНА на основе нечеткой кластеризации ретроспективных данных о поведении объекта моделирования. Текущие данные, содержащие информацию с датчиков о текущем состоянии объекта управления, занесены в базу текущих данных. Подсистема нечеткого вывода на основе полученных текущих данных, используя базу знаний, принимает решения по управлению объектом. Решение передается на исполнительный механизм, после чего записывается в базу данных принятых решений.

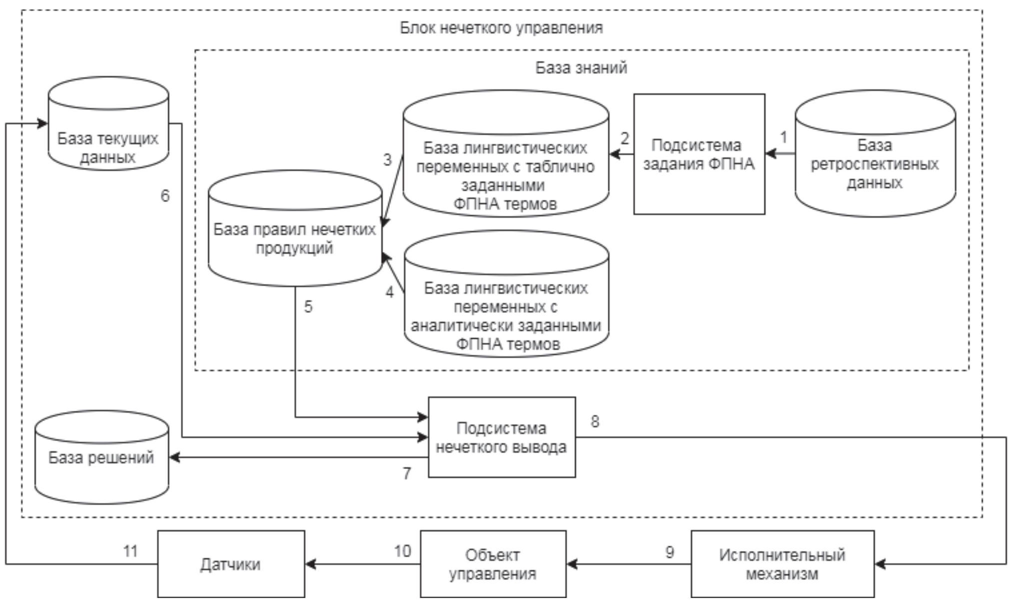

Рис. 1. Обобщенная схема нечеткого управления в системе искусственного интеллекта

3. Разработка архитектуры базы знаний для реализации интеллектуального управления на принципах нечеткой логики с использованием функций принадлежности нескольких аргументов. Для представления проектируемых баз данных выбрана реляционная модель, поскольку она обладает следующими преимуществами:

– простота и доступность понимания конечным пользователем – единственной информационной конструкцией является таблица;

– при проектировании реляционной БД применяются строгие правила, базирующие на математическом аппарате;

– полная независимость данных. При изменении структуры реляционной базы данных изменения, которые требуется произвести в прикладных программах, минимальны.

На рис. 2 представлена реляционная модель базы лингвистических переменных с таблично заданными ФПНА термов. Подходы к заданию многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных в задачах нечеткого управления разработаны в работах [7, 8].

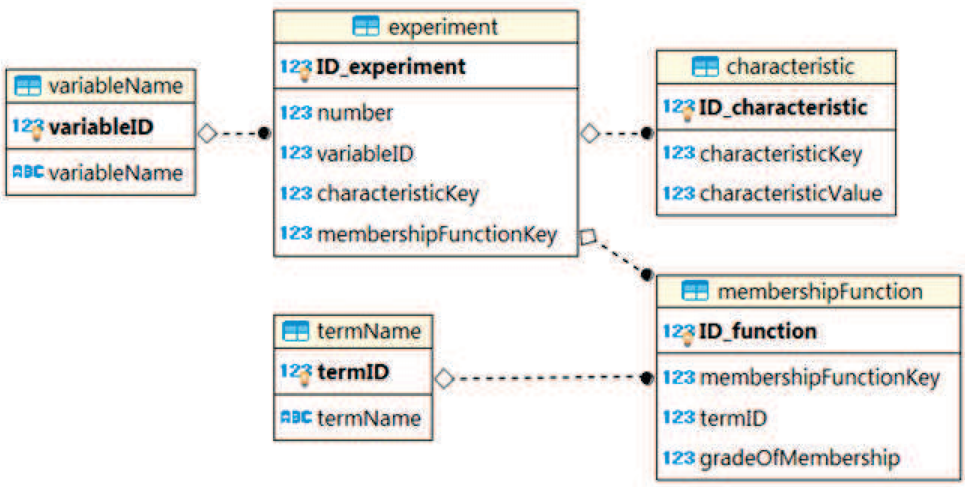

Рис. 2. Реляционная модель базы лингвистических переменных с таблично заданными ФПНА термов

Для базы лингвистических переменных с таблично заданными ФПНА термов реляционная модель состоит из пяти таблиц: «Эксперимент» (experiment), «Имя переменной» (variableName), «Характеристика» (characteristic), «Функция принадлежности» (membershipFunction), «Название терма» (termName). Связи между объектами устанавливаются с помощью ключей:

– «Идентификация переменной» (variableID) связывает объекты «Эксперимент» (experiment) (внешний ключ) и «Имя переменной» (variableName) (первичный ключ);

– «Код характеристики» (characteristicKey) связывает объекты «Эксперимент» (experiment) и «Характеристика» (characteristic);

– «Код функции принадлежности» (membershipFunctionKey) связывает объекты «Эксперимент» (experiment) и «Функция принадлежности» (membershipFunction);

– «Идентификация терма» связывает объекты «Название терма» (termName) (первичный ключ) и «Функция принадлежности» (membershipFunction) (внешний ключ).

Модель базы текущих данных представлена на рис. 3.

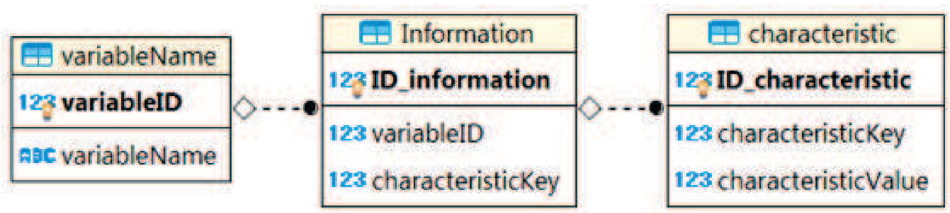

Рис. 3. Реляционная модель базы текущих данных

Для проектируемой базы текущих данных реляционная модель состоит из трех таблиц: «Информация» (Information), «Имя переменной» (variableName), «Характеристика» (characteristic). Связи между объектами устанавливаются с помощью ключей:

– «Идентификация переменной» (variableID) связывает объекты «Информация» (Information) (внешний ключ) и «Имя переменной» (variableName) (первичный ключ);

– «Код характеристики» (characteristicKey) связывает объекты «Информация» (Information) и «Характеристика» (characteristic).

На основании знаний экспертов с использованием выделенных лингвистических переменных с функциями принадлежности нескольких аргументов формируется база правил нечетких продукций. Процедура нечеткого вывода с использованием функций принадлежности нескольких аргументов реализуется на основе алгоритма, представленного в работе [9].

На выходе блока нечеткого управления вырабатывается решение по управлению объектом, записываемое в базу принятых решений, реляционная модель которой представлена на рис. 4.

Реляционная модель базы принятых решений состоит из семи таблиц: «Решение» (decision), «Входная переменная» (inputVariable), «Имя входной переменной» (inputVariableName), «Характеристика» (characteristic), «Выходная

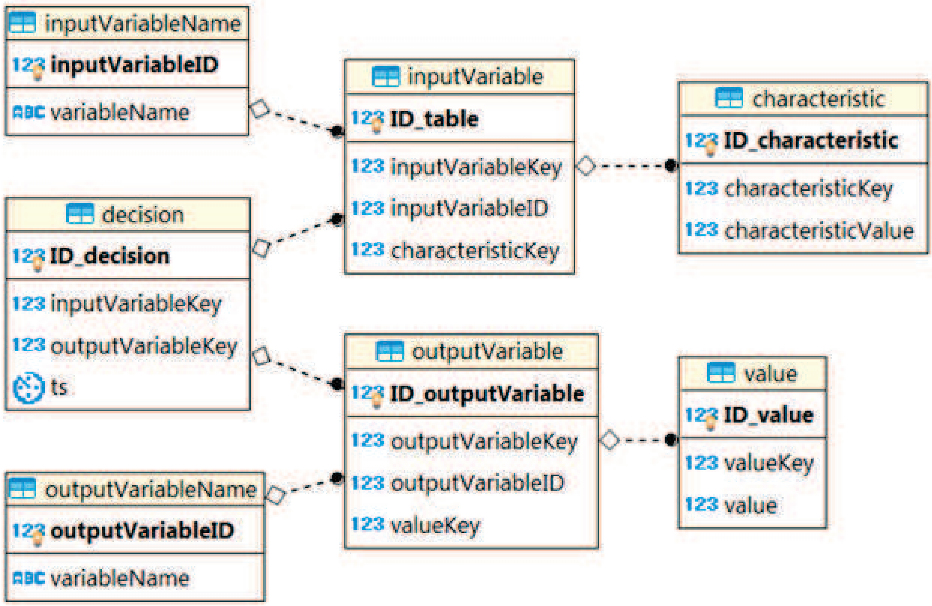

Рис. 4. Реляционная модель базы решений

переменная» (outputVariable), «Имя выходной переменной» (outputVariableName), «Значение» (value). Связи между объектами устанавливаются с помощью ключей:

– «Идентификация входной переменной» (inputVariableID) связывает объекты «Входная переменная» (inputVariable) (внешний ключ) и «Имя входной переменной» (inputVariableName) (первичный ключ);

– «Код характеристики» (characteristicKey) связывает объекты «Входная переменная» (inputVariable) и «Характеристика» (characteristic);

– «Код входной переменной» (inputVariableKey) связывает объекты «Решение» (decision) и «Входная переменная» (inputVariable);

– «Код выходной переменной» (outputVariableKey) связывает объекты «Решение» (decision) и «Выходная переменная» (outputVariable);

– «Код значения» (valueKey) связывает объекты «Выходная переменная» (outputVariable) и «Значение» (value);

– «Идентификация выходной переменной» (outputVariableID) связывает объекты «Выходная переменная» (outputVariable) (внешний ключ) и «Имя выходной переменной» (outputVariableName) (первичный ключ).

4. Выводы. В данной работе рассмотрена задача повышения эффективности нечеткого управления плохо формализуемыми объектами с нелинейными ограничениями на управляющие переменные.

Для технической реализации интеллектуального управления на принципах нечеткой логики с использованием термов лингвистических переменных с функциями принадлежности нескольких аргументов разработана архитектура базы знаний. Использование полученных результатов позволяет ускорить разработку систем нечеткого управления в различных предметных областях.

1. *Штовба С. Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
2. *Ротштейн А. П.* Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: УНІВЕРСУМ, 1999. – 320 с.
3. *Алтунин А. Е.,Семухин М. В.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного ун-та, 2000. – 352 с.
4. *Борисов В. В.,Круглов В. В., Федулов А. С.* Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
5. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.
6. *Тарасова И. А., Шушура А. Н.* Метод нечеткого управления на основе переменных с многомерными функциями принадлежности // Искусственный интеллект. – 2010. – № 1. – С. 122–128.
7. *Тарасова И. А., Шушура А. Н.* Способ задания многомерных функций принадлежности термов лингвистических переменных // Международный научно-технический журнал «Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія». – 2013. – **26**, № 1. – С. 39–44.
8. *Тарасова И. А.* Задание функций принадлежности термов лингвистических переменных в задаче определения дозировок медикаментов при лечении преэклампсии беременных женщин // Изв. ЮФУ. Технические науки. – 2019. – № 3. – С. 110–121.
9. *Тарасова И. А.* Нечеткое управление на основе переменных с многомерными функциями принадлежности в диагностике и лечении гипертензивных осложнений беременности // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2012. – № 4. – С. 169–173.

I. A. Tarasova, M. V. Grankov

Development of the knowledge base architecture for the implementation of intellectual control on the principles of fuzzy logic with the usage of membership functions of several arguments

The article is devoted to research of the currently used methods of fuzzy control; generalized control scheme in an artificial intelligence system and a knowledge base architecture for the implementation of intellectual control on the principles of fuzzy logic with the usage of linguistic variables terms with membership functions of several arguments has been carried out. The application of the results allows to promote efficiency of control of badly formalized objects with nonlinear constraints on the control variables.

Keywords: *intellectual control, knowledge base, fuzzy logic, membership function of several arguments.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
ФГБОУ ВО «Донской государственный технический ун-т», Ростов-на-Дону
i_a_tarasova@mail.ru

Получено 23.10.20

УДК 622.831:539.3

©2020. **С. Н. Федотов**

УПРАВЛЕНИЕ ГОРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ НА КРУТЫХ ПЛАСТАХ УДЕРЖАНИЕМ НА КОСТРАХ

В рамках плоской деформации исследовано напряженно-деформированное состояние анизотропного массива горных пород в случае разработки наклонного (крутого) пласта полезного ископаемого с закреплением части выработанного пространства кострами (специальный вид крепи).

Ключевые слова: *напряженно-деформированное состояние массива, зоны опорного давления, специальные крепи, трансцендентные уравнения.*

1. Введение. Технологические схемы управления горным давлением и крепления очистных забоев на круто-наклонных и крутых пластах предусматривают применение способа плавного опускания и удержания боковых пород на кострах с использованием деревянных и металлических стоечных крепей с выемкой угля комбайнами и отбойными молотами. Способ управления горным давлением удержанием на кострах может применяться на пластах с частыми мелкоамплитудными нарушениями пликативного и разрывного характера на пластах с весьма неустойчивыми породами, при выходе ослабленных пород у геологических нарушений.

В данной статье в рамках плоской деформации исследовано влияние костра (специальной крепи) на напряженно-деформированное состояние массива горных пород при разработке крутых пластов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим пласт полезного ископаемого мощностью $2h$, расположенный на глубине H от дневной поверхности (рис. 1). Отклонение пласта от горизонтали составляет угол α. Пусть технология выемки пласта предполагает закрепление части выработанного пространства (x_{a_k}, x_{b_k}) $(k = \overline{1, n})$. В краевых частях $(-x_2^l, -x_1)$ и (x_1, x_2^r) угольного пласта среда деформируется пластически.

Напряженное состояние ненарушенного массива в системе координат xOy описывается формулами:

$$\sigma_x^o = -n\gamma(H - x\sin\alpha - y\cos\alpha), \qquad \sigma_y^o = -m\gamma(H - x\sin\alpha - y\cos\alpha), \quad (1)$$

$$\tau_{xy}^o = -l\gamma(H - x\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

Здесь

$$n = \frac{1+\lambda}{2} - \frac{1-\lambda}{2}\cos 2\alpha, \quad m = \frac{1+\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2}\cos 2\alpha, \quad l = \frac{1-\lambda}{2}\sin 2\alpha, \quad (2)$$

$$\gamma = \rho g,$$

где λ – коэффициент бокового распора [1], величина которого близка к единице, ρ – плотность пород, g – ускорение свободного падения.

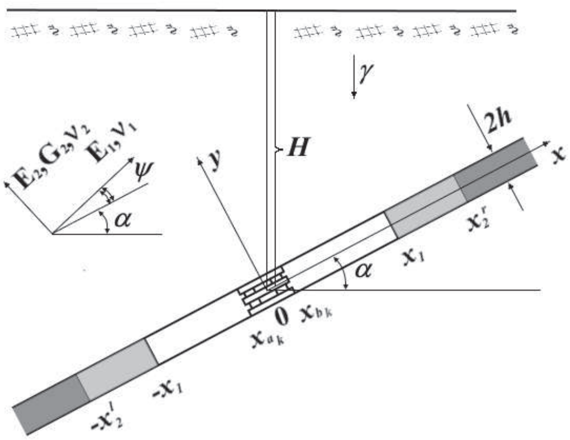

Рис. 1. Схема разработки пласта полезного ископаемого

Компоненты тензора напряжений, действующих в массиве при разработке пласта с учетом закрепления части выработанного пространства, ищем в виде:

$$\sigma_y^e = \sigma_y^o + \sigma_y, \quad \sigma_x^e = \sigma_x^o + \sigma_x, \quad \tau_{xy}^e = \tau_{xy}^o + \tau_{xy}, \tag{3}$$

где σ_y, σ_x и τ_{xy} – напряжения в массиве, появление которых обусловлено наличием выработки.

Обозначим через u и v компоненты смещения пород соответственно вдоль осей Ox и Oy.

Для определения дополнительных напряжений и смещений в массиве воспользуемся методом суперпозиции и сформулируем две группы смешанных граничных условий. Первая группа связана с нормальным деформированием кровли. Она имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_y = m\gamma H\left(1 - \frac{\sin\alpha}{H}x\right) - (a_l x + c_l), && -x_2^l < x < -x_1,\\
&\sigma_y = m\gamma H\left(1 - \frac{\sin\alpha}{H}x\right), && -x_1 < x < x_1,\\
&\sigma_y = m\gamma H\left(1 - \frac{\sin\alpha}{H}x\right) - (a_r x + c_r), && x_1 < x < x_2^r,\\
&\tau_{xy} = 0, && |x| < \infty,\\
&\quad v = h, && x \in (-\infty, -x_2^l) \cup (x_2^r, +\infty).
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
-a_l = a_r = \frac{T_n}{h}\frac{1-\varkappa_p}{2}, \qquad \varkappa_p = \frac{2\,|\tau^e_{xy}(0,0)|}{T_n} - 1,\\
c_l = C(T_n, c_p, \varkappa_p) + a_l x_1, \qquad c_r = C(T_n, c_p, \varkappa_p) - a_r x_1,\\
C(T_n, c_p, \varkappa_p) = T_n \frac{\sqrt{1-c_p}}{1-\varkappa_p}\left(\frac{\pi}{2} - \varkappa_p\sqrt{1-\varkappa_p^2} - \arcsin\varkappa_p\right),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где T_n – предел текучести при сдвиге в плоскости xOy для материала пласта, c_p – параметр пластической анизотропии пласта, величина которого изменяется в интервале $(-\infty, 1)$.

При $\varkappa_p = -1$ и $c_p = 0$ из выражений (5) получаются известные формулы Прандтля [2] для изотропного слоя.

К граничным условиям (4) добавится условие закрепления части выработанного пространства:

$$
\sigma_y = m\gamma H\left(1 - \frac{\sin\alpha}{H}x\right) - R_k, \qquad x_{a_k} < x < x_{b_k}, \quad k = 1, n, \tag{6}
$$

где R_k – реакция крепи.

3. Аналитическое решение. При построении решения граничной задачи (4) и (5) воспользуемся формулой Келдыша – Седова [3–5]. В результате получим

$$
\begin{gathered}
\Phi^{(1)}(z_1) = \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}F_k(z_1), \qquad \Psi^{(1)}(z_2) = -\frac{\mu_1}{\mu_2-\mu_1}F_k(z_2),\\
F_k(z) = F_0(z) + \sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{2\pi i}\ln[\chi(z, x_{b_k})/\chi(z, x_{a_k})],
\end{gathered} \tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
F_0(z) = \frac{\gamma H m}{2}&\left(1 - \frac{\sin\alpha}{H}\left(z - \sqrt{(z+x_2^l)(z-x_2^r)}\right)\right) +\\
&+ [a_l\vartheta(-x_2^l, -x_1) + a_r\vartheta(x_1, x_2^r)]\frac{\sqrt{(z+x_2^l)(z-x_2^r)}}{\pi} +\\
&+ \frac{a_l z + c_l}{2\pi i}\ln\frac{\chi(z,-x_1)}{\chi(z,-x_2^l)} - \frac{a_r z + c_r}{2\pi i}\ln\frac{\chi(z,x_1)}{\chi(z,x_2^r)},\\
\vartheta(t_1,t_2) = \operatorname{arctg}&\sqrt{\frac{x_2^r - t_1}{x_2^l + t_1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x_2^r - t_2}{x_2^l + t_2}},
\end{aligned}
$$

$$
\chi(z,x) =
$$

$$
= \frac{-2i\sqrt{(z+x_2^l)(z-x_2^r)(x_2^l+x)(x_2^r-x)} + (x_2^r - x_2^l)(z+x) - 2\,(zx - x_2^r x_2^l)}{(x_2^r + x_2^l)(x-z)}.
$$

Система трансцендентных уравнений для определения x_2^l и x_2^r в данном случае получается такой

$$\frac{\gamma H m}{2}\left(1+\frac{\sin\alpha}{2H}(x_2^l-x_2^r)\right)+\frac{1}{2\pi}\big\{a_l\zeta(-x_1,-x_2^l)-a_r\zeta(x_1,x_2^r)-$$
$$-\left[a_l(x_2^r-x_2^l)+2c_l\right]\vartheta(-x_2^l,-x_1)-\left[a_r(x_2^r-x_2^l)+2c_r\right]\vartheta(x_1,x_2^r)\big\}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}R_k\,\vartheta(x_{b_k},x_{a_k})=0,$$

$$\left[\left(\frac{a_l}{4}(2x_1-x_2^r+x_2^l)-c_l\right)+\left(\frac{a_r}{4}(2x_1+x_2^r-x_2^l)+c_r\right)\right]\frac{\sqrt{(x_2^r+x_1)(x_2^l-x_1)}}{2}+$$
$$+\left[\frac{\gamma H m\sin\alpha}{2}\pi+a_l\,\vartheta(-x_2^l,-x_1)+a_r\,\vartheta(x_1,x_2^r)\right]\frac{(x_2^r+x_2^l)^2}{8}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}R_k\zeta(x_{b_k},x_{a_k})=0, \quad (8)$$

где $\zeta(t_1,t_2)=\sqrt{(x_2^l+t_1)(x_2^r-t_1)}-\sqrt{(x_2^l+t_2)(x_2^r-t_2)}$.

Вторая группа граничных условий, связанная с поперечным деформированием пород кровли, может быть записана так:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y=0, && |x|<\infty,\\
&\tau_{xy}=l\gamma H\left(1-\frac{\sin\alpha}{H}x\right), && -x_2^l<x<x_2^r,\\
&u=0, && -\infty<x<-x_2^l,\quad x_2^r<x<\infty.
\end{aligned} \quad (9)$$

Для пород почвы граничные условия (9) полностью сохраняются.

Решение задачи (9), исчезающее на бесконечности, имеет вид

$$\Phi^{(2)}(z_1)=\frac{\gamma H}{2}\frac{l}{\mu_2-\mu_1}\left\{\left(1-\frac{\sin\alpha}{H}z_1\right)\left(1-\frac{2z_1+x_2^l-x_2^r}{2\sqrt{(z_1+x_2^l)(z_1-x_2^r)}}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\alpha(x_2^l+x_2^r)^2}{8H\sqrt{(z_1+x_2^l)(z_1-x_2^r)}}\right\}, \quad (10)$$

$$\Psi^{(2)}(z_2)=-\Phi^{(2)}(z_2).$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние массива описывается функциями

$$\Phi(z_1)=\Phi^{(1)}(z_1)+\Phi^{(2)}(z_1), \qquad \Psi(z_2)=\Psi^{(1)}(z_2)+\Psi^{(2)}(z_2). \quad (11)$$

4. Результаты расчетов. Ниже приведены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния массива горных пород (в данном случае рассмотрен песчанистый сланец) при следующих значениях параметров: $2h = 1$ м; $H = 1000$ м; $x_1 = 30$ м; $\lambda = 0{,}9$; $T_n = 2{,}5$ МПа; $c_p = 0$; $\alpha = 45°$; $\gamma = 2{,}5$ тс/м^3.

В качестве специальной крепи, разделяющей лаву на предельные пролеты, выбран ряд костров ($x_a = -2{,}5$ м, $x_b = 2{,}5$ м). Реакция крепи R_k равна 2 МПа. Длины зон пластических деформаций $(-x_2^l, -x_1)$ и (x_1, x_2^r) находим из системы трансцендентных уравнений (8). Для наклонного пласта при $\alpha = 45°$ получаем $(x_2^l - x_1) = 52{,}17$ м и $(x_2^r - x_1) = 50{,}87$ м.

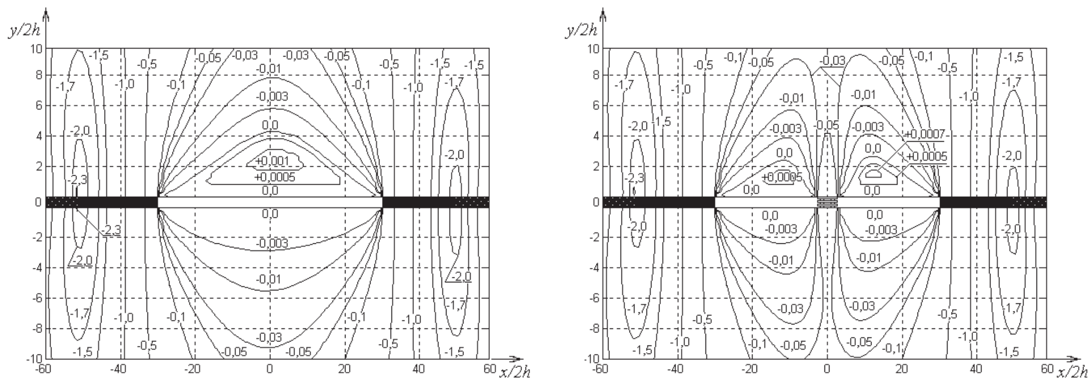

Рис. 2. Изобары $\sigma_y^e/\gamma H = \mathrm{const}$ в окрестности выработанного пространства при $R_k = 0$ и $R_k = 2$ МПа

На рис. 2 представлены линии постоянного значения компоненты напряжений $\sigma_y^e/\gamma H = \mathrm{const}$ в окрестности выработанного пространства при отсутствии ($R_k = 0$) и при наличии ($R_k = 2$ МПа) костра. Результаты указывают, что в породах почвы существуют только сжимающие напряжения. В породах кровли имеют место как сжимающие, так и растягивающие напряжения. Последние могут вызывать расслоения и обрушения горных пород кровли в выработанное пространство. Сравнивая изобары, видим что, наличие костра приводит к уменьшению максимальных растягивающих напряжений. В области закрепления растягивающие напряжения уменьшаются и переходят в заниженные сжимающие напряжения. При этом область, в которой действовали растягивающие напряжения, разбивается сжимающими напряжениями на две части. Наличие крепи приводит также к уменьшению максимальных сжимающих напряжений.

Влияние костровой крепи на распределение напряжений σ_x^e, действующих в направлении напластования пород, представлено на рис. 3 линиями посто-

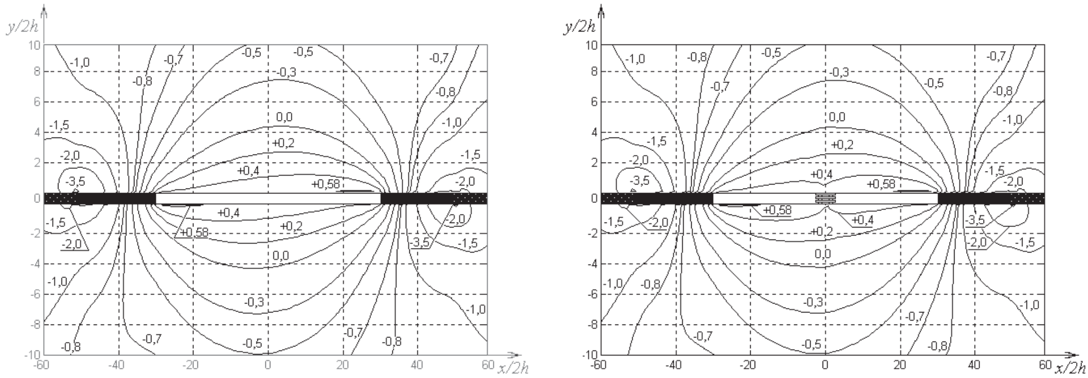

Рис. 3. Изобары $\sigma_x^e/\gamma H = \mathrm{const}$ в окрестности выработанного пространства при $R_k = 0$ и $R_k = 2$ МПа

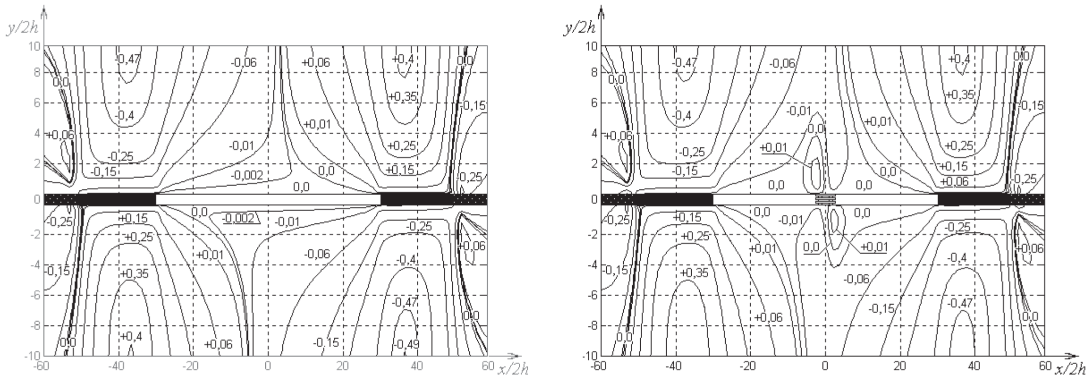

Рис. 4. Изобары $\tau_{xy}^e/\gamma H = \mathrm{const}$ в окрестности выработанного пространства при $R_k = 0$ и $R_k = 2$ МПа

янного значения. Из графиков видно, что в области пласта, в породах кровли и почвы, осуществляются сжатия высокой интенсивности $\sigma_x^e/\gamma H = -3{,}5$. В области выработанного пространства наблюдаются растягивающие напряжения. Наличие костра приводит к уменьшению растягивающих напряжений в области закрепления. При этом максимальные растягивающие и сжимающие напряжения не изменяются.

На рис. 4 представлены изобары $\tau_{xy}^e/\gamma H = \mathrm{const}$ в сечении массива. Наличие крепи приводит к уменьшению максимальных касательных напряжений.

В области закрепления выработанного пространства, в породах кровли и почвы, возникают касательные напряжения противоположного знака.

Наличие костра не оказывает существенного влияния на величину прогиба пород кровли. Это объясняется тем, что реакция крепи R_k значительно меньше исходного горного давления γH ($R_k/\gamma H = 0{,}08$).

Численный анализ показывает, что костровая крепь вызывает сжатие пород кровли, тем самым предотвращая расслоение и высыпание пород в рабочее пространство.

1. *Батугин С. А., Ниренбург Р. К.* Приближенная зависимость между упругими константами анизатропных пород и параметрами анизотропии // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1972. – № 1. – С. 7–11.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 408 с.
3. *Космодамианский А. С., Левшин А. А.* Решение смешанной задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости // Докл. АН УССР. – 1986. – № 9. – С. 34–37.
4. *Михлин С. Г.* О напряжениях в породе над угольным пластом // Изв. АН СССР, Отдел. техн. наук. – 1942. – № 7–8. – С. 13–29.
5. *Мусхелишвили Н. А.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. испр. и доп. – М.: Недра, 1968. – 511 с.

S. N. Fedotov

Control of rock pressure on steep formations by holding on chock

The stress-strain state of an anisotropic rock mass in the case of development of an inclined (steep) mineral layer with the fixation of part of the developed space by chock is studied within the framework of flat deformation.

Keywords: *stress-strain state of the array, reference pressure zones, special supports, transcendental equations.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
volandfsn@mail.ru

Получено 20.10.20

Научное издание

ТРУДЫ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ «ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ»

Том 34

Подписано в печать 30.12.2020

ГУ «Институт прикладной математики и механики»
(283114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 74;
тел.: технический редактор: (071) 334-73-66,
ответственный секретарь: (062) 311-04-36,
E-mail: math.iamm@mail.ru, сайт: iamm.su)

Формат 60х84 1/8. Усл. печ. л. 11,5.
Печать лазерная. Тираж 50 экз.

Отпечатано в «Цифровой типографии» (ФЛП Артамонов Д.А.)
Адрес: г. Донецк, ул. Артема, д. 138-а, тел.: (071) 407-85-30
Свидетельство о регистрации ДНР серия АА02 № 51150 от 9 февраля 2015 г.