УДК 531.38; 531.39

## ©2019. Г.В. Горр, Г.А. Котов О РЕШЕНИИ Л. ЭЙЛЕРА

Дан исторический обзор результатов, полученных в исследовании решения Л. Эйлера. Обсуждены две теоремы Л. Пуансо кинематического истолкования движения тела, имеющего неподвижную точку, проанализированы теоремы Д. Сильвестра, И. Мак-Куллага. Приведены уравнения Г. Дарбу герполодии в случае Эйлера; дана интерпретация К. Якоби движения тела по инерции; отмечены исследования Э. Рауса. Выполнено кинематическое истолкование движения тела в решении Л. Эйлера, предложенное П.В. Харламовым, которое основано на уравнениях Г. Дарбу.

**Ключевые слова:** кинематическое истолкование, решение Л. Эйлера, уравнение Г. Дарбу, полодии, герполодии.

Исторический обзор результатов. При исследовании задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки можно использовать два метода: аналитический и геометрический. Каждый из указанных методов имеет свои преимущества. Аналитический метод позволяет получить только решение уравнений движения, но не дает наглядной картины движения тела в течении всего времени. Геометрический метод в динамике твердого тела начал развиваться позднее аналитического; он позволяет получить наглядное представление о свойствах движения в случае удачного выбора переменных и параметров, характеризующих аналитическое решение (например, углы Эйлера, параметры Родрига—Гамильтона, уравнения подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости в форме Г. Дарбу и П.В. Харламова).

Первое геометрическое исследование указанной задачи принадлежит французскому геометру и механику Л. Пуансо. Он ввел понятия эллипсоида инерции, мгновенной оси вращения, а также тесно связанные с ней понятия о полодиях и герполодиях. Им проведено геометрическое исследование случаев устойчивости движения твердого тела вокруг главных осей эллипсоида инерции. Геометрическое истолкование движения тела в случае, указанном Эйлером, Пуансо дает в такой форме: "Эллипсоид инерции тела для точки опоры во время движения катится без скольжения по одной из своих касательных плоскостей. Эта плоскость перпендикулярна к главному моменту количества движения тела и остается неподвижной в пространстве. Меновенная угловая скорость по величине пропорциональна радиус-вектору точки касания, а по направлению с ним совпадает" [1]. Эта теорема называется первой теоремой Пуансо.

Вторая теорема Пуансо посвящена кинематическому истолкованию движения тела в общем случае: движение твердого тела с неподвижным центром масс представляется качением без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Первоначальную идею Пуансо далее развил Д. Сильвестр [2]. Он первым начал рассматривать качение без скольжения любой центральной поверхно-

сти второго порядка по одной из ее касательных плоскостей, остающейся неподвижной. В этой же статье Сильвестр доказал еще одну теорему: вращение Пуансо, будучи сложено с постоянным вращением около перпендикуляра из точки опоры на плоскость катания, дает снова вращение Пуансо. Для случая Эйлера эта теорема применяется в интерпретации К. Якоби. Сильвестру принадлежит определение полодии: полодией называется геометрическое место точк, расположенных на центральной поверхности второго порядка и обладающих тем свойством, что касательные плоскости к этой поверхности в различных точках данной кривой находятся на постоянном расстоянии от центра поверхности.

Геометрическое истолкование вращения тела по инерции, основанное на рассмотрении движения гирационного эллипсоида, неизменно связанного с телом, впервые было дано И. Мак-Куллагом [3]. Его интерпретация такова: гирационный эллипсоид тела, соответствующий точке опоры, проходит во время движения через неподвижную в пространстве точку, лежащую на неизменном главном моменте количеств движения. Мгновенная ось направлена по перпендикуляру, опущенному из точки опоры на касательную плоскость к гирационному эллипсоиду в этой неподвижной точке, и мгновенная угловая скорость обратно пропорциональна величине этого перпендикуляра.

Исследование вращения Эйлера связано с изучением полодии и герполодии. Этим вопросом занимался Пуансо в работе [1], но более обстоятельное исследование этих кривых провел Г. Дарбу в примечаниях к курсу механики [4]. Дарбу привел новые определения полодии и герполодии, получил явные уравнения герполодии и подробно изучил вопрос об их точках перегиба [5–7]. Однако первым, кто доказал, что в случае Эйлера герполодия не может иметь точек перегиба, был В. Гесс [8,9].

Движение неизменной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси в теле изучал Э. Раус [10] методом, основанным на сферо-конических кривых. При изучении вопроса о движении мгновенной оси и главных осей инерции тела в пространстве прием исследования, предложенный Пуансо, проще способа Рауса и приводит скорее к желаемому результату.

Свою интерпретацию движения тела по инерции дал К. Якоби [11–13]: всякое вращение Эйлера может быть разложено на постоянное вращение около нормали к плоскости катания и на некоторое колебательное движение Пуансо. Это последнее представляется катанием однополостного гиперболоида по плоскости, параллельной плоскости катания во вращении Эйлера, и полодия для него охватывает большую ось гиперболоида.

Якоби принадлежит окончательное решение задачи Эйлера при помощи эллиптических функций. Направляющие косинусы главных осей инерции относительно неподвижных осей координат Якоби выразил функциями времени.

1. Уравнения Эйлера—Пуассона. Кинематика твердого тела, имеющего неподвижную точку. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела в главной подвижной системе координат:

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + s(e_2\nu_3 - e_3\nu_2),$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + s(e_3\nu_1 - e_1\nu_3),$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + s(e_1\nu_2 - e_2\nu_1),$$
(1)

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = \omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = \omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2.$$
 (2)

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,$$

$$A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k,$$

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) = 2E.$$
(3)

В (1) – (3) введены обозначения:  $\omega_i$   $(i=\overline{1,3})$  – компоненты угловой скорости  $\omega$ ;  $\nu_i$   $(i=\overline{1,3})$  – компоненты единичного вектора  $\nu$ , указывающего направление силы тяжести;  $A_i$   $(i=\overline{1,3})$  – главные моменты инерции; s – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки O до центра тяжести C тела;

 $e=(e_1,e_2,e_3)=rac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|};\;\;k$  и E – произвольные постоянные.

Уравнения (1), (2) в векторной форме таковы

$$\frac{dx}{dt} = s(e \times \nu), \quad \frac{d\nu}{dt} = 0, \tag{4}$$

где  $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\omega}$  – момент количества движения тела, через  $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ ,  $\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt}$  обозначены абсолютные производные векторов  $\boldsymbol{x}$  и  $\boldsymbol{\nu}$ . Запишем уравнения (4), используя относительные производные  $\dot{\boldsymbol{x}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ . Тогда получим

$$\dot{x} = x \times \omega + s(e \times \nu), \qquad \dot{\nu} = \nu \times \omega \qquad (\omega = ax),$$
 (5)

где  $\omega$  – угловая скорость тела, a – гирационный тензор.

Уравнения (5) имеют первые интегралы

$$\nu \cdot \nu = 1, \qquad x \cdot \nu = k, \qquad x \cdot \omega - 2s(e \cdot \nu) = 2E.$$
 (6)

Пусть построено решение уравнений (5)

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\boldsymbol{i}_1 + \omega_2(t)\boldsymbol{i}_2 + \omega_3(t)\boldsymbol{i}_3, 
\boldsymbol{\nu}(t) = \nu_1(t)\boldsymbol{i}_1 + \nu_2(t)\boldsymbol{i}_2 + \nu_3(t)\boldsymbol{i}_3,$$
(7)

где  $i_1, i_2, i_3$  — единичные векторы главных осей инерции тела. Так как в данной статье будет использоваться всесторонний подход в исследовании решения Эйлера, то целесообразно остановиться на различных методах истолкования движения (т. е. комплексном подходе в исследовании свойств движения тела).

Углы Эйлера. Введем углы Эйлера  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ , положив

$$\omega_{1}(t) = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \qquad \omega_{2}(t) = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_{3}(t) = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta,$$

$$\nu_{1}(t) = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_{2}(t) = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_{3}(t) = \cos\theta.$$
(8)

Если известны вектор-функции (7), то из (8) в векторном виде найдем

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\nu(t) \cdot i_1}{\nu(t) \cdot i_2}, \quad \theta(t) = \operatorname{arccos}(\nu(t) \cdot i_3),$$

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \frac{(\omega(\tau) \times i_3) \cdot (\nu(\tau) \times i_3)}{(\nu(\tau) \times i_3)^2} d\tau.$$
(9)

Свойства функций (9) позволяют исследовать и параметры Родрига–Гамильтона

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}.$$

Пусть  $\mathbf{j}_1$ ,  $\mathbf{j}_2$ ,  $\mathbf{j}_3$  — единичные векторы неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ ,  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  — компоненты вектора угловой скорости в системе  $O\xi\eta\zeta$ . Тогда имеют место известные соотношения

$$\omega_{\xi}(t) = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \qquad \omega_{\eta}(t) = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \omega_{\zeta}(t) = \dot{\psi} + \dot{\theta}\cos\theta.$$
 (10)

Следовательно, с формальной точки зрения, после получения решения (7) можно найти углы Эйлера (9) и затем записать компоненты (10), которые определяют неподвижный годограф вектора угловой скорости. Однако при этом возникают весьма сложные преобразования, поэтому в научной литературе по динамике твердого тела рассматриваются другие методы получения уравнения неподвижного годографа, которые необходимы для применения теоремы Пуансо.

Уравнения герполодии Г. Дарбу. В историческом обзоре отмечено, что свойства герполодии в решении Л. Эйлера изучал Дарбу [4]. Для получения уравнения герполодии Г. Дарбу в плоскости герполодии вводит полярные координаты  $\rho$ ,  $\alpha$  и получает следующее уравнение (см. книгу Т. Леви-Чивиты, У. Амальди [14, стр. 176])

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2E_*}{K_*} (\rho^2 + h_*), \qquad \frac{d\rho^2}{dt} = \sqrt{f(\rho^2)}, \tag{11}$$

где  $E_*,~K_*,~h_*$  – постоянные параметры,  $\rho^2=\overline{O_1Q}^2,~O_1$  – проекция неподвижной точки O на плоскость герполодии, Q – точка герполодии,  $f(\rho^2)$  –

многочлен третьего порядка. В основе формул (11) лежит рассмотрение секториальной скорости векторного полюса. Кроме формулы (11), указана векторная запись для производной  $\frac{d\alpha}{dt}$  ( [14, стр. 176])

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2E_* K_*} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{K}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{12}$$

где  $\overline{K}$  – момент количества движения.

П.В. Харламов [15] при получении уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости  $\omega$  в общем случае (Г. Дарбу рассмотрел случай Л. Эйлера) вместо секториальной скорости ввел окружную скорость вектора угловой скорости и указал следующие уравнения неподвижного годографа  $\omega$ 

$$\omega_{\xi}(t) = \omega_{\rho}(t)\cos\alpha(t), \qquad \omega_{\eta}(t) = \omega_{\rho}(t)\sin\alpha(t),$$

$$\omega_{\zeta}(t) = \omega_{1}(t)\nu_{1}(t) + \omega_{2}(t)\nu_{2}(t) + \omega_{3}(t)\nu_{3}(t), \omega_{\rho}^{2}(t) = \omega_{1}^{2}(t) + \omega_{2}^{2}(t) + \omega_{3}^{2}(t) - \omega_{\zeta}^{2}(t),$$

$$\alpha(t) = \int_{t_{0}}^{t} \frac{1}{\omega_{\rho}^{2}(t)} \left[ \dot{\omega}_{1}(t) \left( \nu_{2}(t)\omega_{3}(t) - \nu_{3}(t)\omega_{2}(t) \right) + \right.$$

$$\left. + \dot{\omega}_{2}(t) \left( \nu_{3}(t)\omega_{1}(t) - \nu_{1}(t)\omega_{3}(t) \right) + \dot{\omega}_{3}(t) \left( \nu_{1}(t)\omega_{2}(t) - \nu_{2}(t)\omega_{1}(t) \right) \right] dt.$$

$$(13)$$

Если учесть, что в (12) вектор  $\overline{K}$  неподвижен в пространстве, а последнее уравнение из (13) можно записать в векторном виде

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_{\rho}^2(t)} \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)) dt, \tag{14}$$

то аналог формул (12), (14) очевиден.

С помощью уравнений П.В. Харламова (13) накоплена обширная информация о свойствах движения тела с неподвижной точкой в решениях уравнений динамики твердого тела (см. обзоры [15–17]).

Формула (14) обладает одним существенным обстоятельством: в нее входит производная по времени t от угловой скорости. Поэтому при кинематическом истолковании движения тела с учетом комплексного подхода целесообразно использовать более простую формулу, указанную  $\Gamma$ .В. Горром [18]

$$tg(\alpha(t) - \psi(t)) = \delta \frac{(\omega(t) \times \nu(t)) \cdot (\nu(t) \times i_3)}{i_3 \cdot (\omega(t) \times \nu(t))},$$
(15)

где  $\delta=0$  при  ${m 
u}\cdot{m i}_3={
m const.}$   $\delta=1$  при  ${m 
u}\cdot{m i}_3\neq{
m const.}$ 

Из формулы (15) следует, что при известной зависимости  $\psi(t)$  из (9) полярный угол  $\alpha(t)$  находится с помощью алгебраических операций. Справедливо и обратное утверждение: если найден полярный угол  $\alpha(t)$ , то угол прецессии находится элементарно. Таким образом, указанные свойства можно использовать во всех решениях уравнений динамики, в которых проведено исследование функции  $\alpha(t)$ .

**2.** Интерпретация движения в случае Л. Эйлера. В случае Эйлера тело закреплено в центре масс, поэтому положим в (4)–(6) s=0, тогда имеем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega},\tag{16}$$

т. е. вектор x неизменен в неподвижном пространстве. Выберем вектор  $\nu$  в виде  $\nu=\frac{x_0}{|x_0|}$ , где  $x_0$  – константа. Тогда уравнение для  $\nu$  из (4) становится тождеством.

Остановимся на геометрической интерпретации Пуансо движения тела, которую предложил П.В. Харламов. Запишем интеграл энергии из (6)

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 = 2E, (17)$$

где  $\omega_i$   $(i=\overline{1,3})$  – компоненты вектора  $\omega$  в подвижной системе координат и уравнение эллипсоида инерции S :

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = \varkappa_0^2, (18)$$

здесь  $(x,y,z)\in S$   $(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2+z\boldsymbol{i}_3,)$   $\varkappa_0^2$  – постоянная. В векторном виде соотношение (17) таково

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x} = 2E. \tag{19}$$

Поскольку  $\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$ , то в силу (16) из продифференцированного равенства (19) следует

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot x = 0, \qquad \dot{\omega} \cdot x = 0. \tag{20}$$

На основании равенств (17), (18), (20) можно сделать заключение, что конец вектора  $\omega$  в подвижной системе координат принадлежит эллипсоиду инерции, вектор  $\dot{\omega}$  – принадлежит касательной плоскости к этому эллипсоиду и ортогонален вектору x. Из равенства (19) получим (рис. 1)

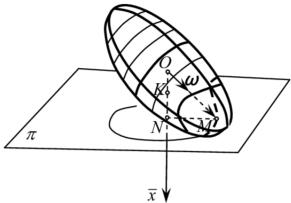
$$|\boldsymbol{\omega}|\cos\alpha = \frac{2E}{|\boldsymbol{\varkappa}_0|}, \qquad \alpha = \angle(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}).$$
 (21)

То есть в силу (21) проекция вектора  $\omega$  на неизменный в пространстве вектор x постоянна.

Таким образом, имеет место интерпретация движения тела в случае Эйлера: движение тела с неподвижным центром масс можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции тела, построенного в неподвижной точке, по неподвижной в пространстве плоскости, ортогональной вектору кинетического момента. Данная интерпретация следует из первой теоремы Пуансо. Подвижный годограф вектора  $\omega$  называют полодией, а неподвижный годограф – герполодией.

Замечание 1. Утверждение И. Мак-Куллага состоит в том, что гирационный эллипсоид тела, соответствующий неподвижной точке, проходит во все

время движения тела через неподвижную в пространстве точку, лежащую на неизменном главном моменте количества движения, при этом мгновенная ось вращения направлена по перпендикуляру, опущенному из неподвижной точки на касательную плоскость к гирационному эллипсоиду в этой точке, и мгновенная угловая скорость обратно пропорциональна величине этого перпендикуляра.



Puc. 1.

Данные свойства вытекают из метода построения гирационного эллипсоида и результатов Пуансо в истолковании движения тела в случае Эйлера.

Дадим краткое доказательство этих утверждений. Пусть на рис. 1 M – точка касания эллипсоида инерции и плоскости  $\pi$ , которая ортогональна главному моменту количества движения тела (по этой плоскости происходит движение эллипсоида инерции тела). Обозначим через N точку пересечения плоскости  $\pi$  и оси, по которой направлен вектор x. Согласно построения гирационного эллипсоида опустим из неподвижной точки O перпендикуляр на плоскость  $\pi$ . Очевидно, что точка N является точкой пересечения данного перпендикуляра и плоскости  $\pi$ . То есть точка N отстоит от неподвижной точки на расстоянии ON. Для получения точки гирационного эллипсоида необходимо отложить отрезок ОК, длина которого обратно пропорциональна длине ON. В результате указанного построения точка, принадлежащая гирационному эллипсоиду, будет лежать на оси момента x. Тем самым показано, что во время движения тела гирационный эллипсоид будет проходить через фиксированную точку оси, проходящей через x. Вторая часть утверждения Мак-Куллага доказывается на основе полученных результатов и метода построения эллипсоида инерции с помощью гирационного эллипсоида.

В данной статье свойства, указанные Мак-Куллагом, будут получены с помощью модифицированного метода Пуансо.

**3. Квадратуры в решении Эйлера.** Для изучения уравнений движения (1) тела при s=0 уравнениям Пуассона (2) удовлетворим, полагая

$$\nu_1 = \frac{A_1 \omega_1}{n}, \qquad \nu_2 = \frac{A_2 \omega_2}{n}, \quad \nu_3 = \frac{A_3 \omega_3}{n} \quad (n = |\mathbf{x}_0|)$$
(22)

где  $\omega_i$  – компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{i}_1 + \omega_2 \boldsymbol{i}_2 + \omega_3 \boldsymbol{i}_3$ . Запишем динамические уравнения (1) при s=0

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3, \quad A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3, \quad A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2.$$
 (23)

Первые интегралы уравнений (23) представим в виде [15]

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 = H^2, \quad A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2 = n^2.$$
 (24)

Следуя [15], введем новые безразмерные переменные и параметры

$$\tau = \frac{H^2}{n}t, \quad \widetilde{\omega}_1 = \frac{n}{H^2}\omega_1, \quad \widetilde{\omega}_2 = \frac{n}{H^2}\omega_2, \quad \widetilde{\omega}_3 = \frac{n}{H^2}\omega_3,$$

$$B_1 = \frac{A_1H^2}{n^2}, \quad B_2 = \frac{A_2H^2}{n^2}, \quad B_3 = \frac{A_3H^2}{n^2}.$$
(25)

Тогда в силу (25) уравнения (23) и интегралы (24) примут вид (штрихом обозначена производная по  $\tau$ )

$$B_1 \widetilde{\omega}_1' = (B_2 - B_3) \widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_3, \quad B_2 \widetilde{\omega}_2' = (B_3 - B_1) \widetilde{\omega}_3 \widetilde{\omega}_1, B_3 \widetilde{\omega}_3' = (B_1 - B_2) \widetilde{\omega}_1 \widetilde{\omega}_2,$$
(26)

$$B_1\widetilde{\omega}_1^2 + B_2\widetilde{\omega}_2^2 + B_3\widetilde{\omega}_3^2 = 1, \quad B_1^2\widetilde{\omega}_1^2 + B_2^2\widetilde{\omega}_2^2 + B_3^2\widetilde{\omega}_3^2 = 1.$$
 (27)

Введем переменную  $\sigma$ :

$$\sigma^2 + 1 = \widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_3^2. \tag{28}$$

Из соотношений (27) в силу (28) получим (полагаем  $B_1 < B_2 < B_3$ )

$$\widetilde{\omega}_{1}^{2} = \alpha_{1}^{2}(\sigma^{2} - c_{1}), \quad \widetilde{\omega}_{2}^{2} = \alpha_{2}^{2}(c_{2} - \sigma^{2}), \quad \widetilde{\omega}_{3}^{2} = \alpha_{3}^{2}(\sigma^{2} - c_{3}), 
c_{1} = -\frac{(B_{2} - 1)(B_{3} - 1)}{B_{2}B_{3}}, \quad c_{2} = -\frac{(B_{3} - 1)(B_{1} - 1)}{B_{1}B_{3}}, 
c_{3} = -\frac{(B_{1} - 1)(B_{2} - 1)}{B_{1}B_{2}}, 
\alpha_{1}^{2} = \frac{B_{2}B_{3}}{(B_{2} - B_{1})(B_{3} - B_{1})}, \quad \alpha_{2}^{2} = \frac{B_{1}B_{3}}{(B_{2} - B_{1})(B_{3} - B_{2})}, 
\alpha_{3}^{2} = \frac{B_{1}B_{2}}{(B_{3} - B_{1})(B_{3} - B_{2})}.$$
(29)

Компоненты  $\nu_i$  из (22) на основании (25) запишем так

$$\nu_i = B_i \widetilde{\omega}_i, \quad i = \overline{1, 3}. \tag{30}$$

Зависимость  $\sigma(t)$  устанавливаем из уравнения [15]

$$\sigma^2 \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = -(\sigma^2 - c_1)(\sigma^2 - c_2)(\sigma^2 - c_3),\tag{31}$$

которое следует из (26) в силу (29). Из (31) очевидно, что  $\sigma(t)$  в общем случае является эллиптической функцией времени. Целесообразно соотношения (29) преобразовать к виду [19]

$$\widetilde{\omega}_1^2 = \alpha_1^2 (\widetilde{\omega}^2 - \beta_1^2), \qquad \widetilde{\omega}_2^2 = \alpha_2^2 (\beta_2^2 - \widetilde{\omega}^2), \qquad \widetilde{\omega}_3^2 = \alpha_3^2 (\widetilde{\omega}^2 - \beta_3^2), \tag{32}$$

где  $\widetilde{\omega}^2 = \widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_3^2$  и

$$\beta_1^2 = 1 + c_1 = \frac{B_2 + B_3 - 1}{B_2 B_3}, \qquad \beta_2^2 = 1 + c_2 = \frac{B_1 + B_3 - 1}{B_1 B_3},$$

$$\beta_3^2 = 1 + c_3 = \frac{B_1 + B_2 - 1}{B_1 B_2}.$$
(33)

В силу неравенств треугольника на  $A_i$   $(i=\overline{1,3})$  и соотношений (25) величины  $\beta_i$   $(i=\overline{1,3})$  являются действительными.

Подставим значение  $\sigma^2$  из (28) в уравнение (31) и учтем (32), (33):

$$\frac{d\widetilde{\omega}^2}{d\tau} = \pm 2\sqrt{(\widetilde{\omega}^2 - \beta_1^2)(\beta_2^2 - \widetilde{\omega}^2)(\widetilde{\omega}^2 - \beta_3^2)}.$$
 (34)

Рассмотрим случай  $B_2>1$ . Тогда из системы (33) следует неравенство  $\beta_3^2>\beta_1^2$ , и поэтому имеет место формула [16]

$$\beta_1^2 < \beta_3^2 \le \widetilde{\omega}^2 \le \beta_2^2. \tag{35}$$

Следовательно, переменная  $\widetilde{\omega}^2$  изменяется лишь от  $\beta_3^2$  до  $\beta_2^2$ , что позволяет вместо  $\widetilde{\omega}^2$  ввести переменную u

$$\widetilde{\omega}^2 = \beta_2^2 \cos^2 u + \beta_3^2 \sin^2 u. \tag{36}$$

Из (32), (36) найдем

$$\beta_2^2 - \widetilde{\omega}^2 = (\beta_2^2 - \beta_3^2) \sin^2 u, \qquad \widetilde{\omega}^2 - \beta_3^2 = (\beta_2^2 - \beta_3^2) \sin^2 u, \widetilde{\omega}^2 - \beta_1^2 = (\beta_2^2 - \beta_1^2) (1 - k_1^2 \sin^2 u),$$
(37)

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{\beta_2^2 - \beta_3^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2}} < 1. \tag{38}$$

Подставим выражения (37) в дифференциальное уравнение (34)

$$\int_{0}^{u} \frac{du}{\pm \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u}} = \varepsilon(\tau - \tau_0), \qquad \varepsilon = \sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2}.$$
 (39)

Знак минус следует брать в интервале времени, когда  $\widetilde{\omega}$  убывает от  $\beta_2$  до  $\beta_3$ , а знак плюс – когда  $\widetilde{\omega}$  возрастает от  $\beta_3$  до  $\beta_2$ . В силу условия (37) величина  $k_1$ 

из (38) является модулем эллиптической функции, которая получается при обращении интеграла (39), из которого следует

$$u = -\operatorname{am} v, \quad v = \varepsilon(\tau - \tau_0).$$
 (40)

Формула (40) справедлива для случая, когда перед радикалом в (39) выбирается знак минус. Подставим u = -am v в формулы (37) и (32)

$$\widetilde{\omega}_1 = \pm \alpha_1 \varepsilon \operatorname{dn}(k_1, v), \quad \widetilde{\omega}_2 = \pm \alpha_2 \varepsilon k_1 \operatorname{sn}(k_1, v), \quad \widetilde{\omega}_3 = \pm \alpha_3 \varepsilon k_1 \operatorname{cn}(k_1, v), \quad (41)$$

где знак выбирается в зависимости от начальных данных.

Таким образом, решение Эйлера в случае  $B_2 > 1$  выражается в виде эллиптических функций Якоби (41). Очевидно, что решение (41) периодическое с периодом  $4K_1$ , где

$$K_{1} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k_{1}^{2} \sin^{2} u}}.$$
 (42)

Случай  $B_2 < 1$  исследуется аналогично случаю (41):

$$\widetilde{\omega}_1 = \pm \alpha_1 \varepsilon k_2 \operatorname{cn}(k_2, v), \ \widetilde{\omega}_2 = \pm \alpha_2 \varepsilon k_2 \operatorname{sn}(k_2, v), \ \widetilde{\omega}_3 = \pm \alpha_3 \varepsilon \operatorname{dn}(k_2, v),$$
 (43)

где параметр  $\varepsilon$  указан в (39), переменная v приведена в (40), а модуль  $k_2$  эллиптической функции имеет вид

$$k_2 = \sqrt{\frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{\beta_2^2 - \beta_3^2}} < 1.$$

Формулы (43) описывают периодическое решение Эйлера во втором случае. Период решения  $4K_2$ :

$$K_2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 u}}.$$
 (44)

Для промежуточного случая  $B_2-1=0$  из (33) получим  $\beta_1^2=\beta_3^2$  и, следовательно, из (34) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d\widetilde{\omega}^2}{d\tau} = \pm (\widetilde{\omega}^2 - \beta_1^2)\sqrt{\beta_2^2 - \widetilde{\omega}^2}.$$
 (45)

Для интегрирования уравнения (45) положим  $\beta_2^2-\widetilde{\omega}^2=w^2$ . Введем обозначение  $\beta_2^2-\beta_1^2=n_1^2$ . Тогда из (45) найдем [16]

$$w = \pm n_1 \operatorname{th} n_1(\tau + \beta), \tag{46}$$

где  $\beta$  — произвольная постоянная. Из соотношений (32) и (46) следует [16]

$$\widetilde{\omega}_{1} = \pm n_{1}\alpha_{1} \frac{1}{\operatorname{ch}n_{1}(\tau + \beta)}, \qquad \widetilde{\omega}_{2} = \pm n_{1}\alpha_{2}\operatorname{th}n_{1}(\tau + \beta),$$

$$\widetilde{\omega}_{3} = \pm n_{1}\alpha_{3} \frac{1}{\operatorname{ch}n_{1}(\tau + \beta)} \qquad (n_{1} = \sqrt{\beta_{2}^{2} - \beta_{1}^{2}}).$$
(47)

При  $\tau \to \infty$  из (47) получим, что движение тела стремится к вращению с постоянной скоростью вокруг средней оси эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке.

Сведение задачи Эйлера к квадратурам (41), (43), (47) позволяет на основании формул (9), (15) указать зависимости  $\nu_i(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  от времени и связь между углами  $\alpha$  и  $\psi$ :

$$\nu_1(\tau) = B_1 \widetilde{\omega}_1(\tau), \qquad \nu_2(\tau) = B_2 \widetilde{\omega}_2(\tau), \qquad \nu_3(\tau) = B_3 \widetilde{\omega}_3(\tau),$$
 (48)

$$\varphi(\tau) = \operatorname{arctg} \frac{B_1 \widetilde{\omega}_1(\tau)}{B_2 \widetilde{\omega}_2(\tau)}, \qquad \theta(\tau) = \operatorname{arccos} B_3 \widetilde{\omega}_3(\tau), \tag{49}$$

$$\psi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1 - B_3 \widetilde{\omega}_3^2(\tau)}{1 - B_3^2 \widetilde{\omega}_3^2(\tau)} d\tau, \tag{50}$$

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 + \psi(\tau) + \arctan\frac{(B_3 - 1)\widetilde{\omega}_3(\tau)}{(B_2 - B_1)\widetilde{\omega}_1(\tau)\widetilde{\omega}_2(\tau)}.$$
 (51)

Формулы (48)–(51) играют важную роль в комплексном исследовании свойств движения тела в решении Л. Эйлера.

4. Истолкование движения методом годографов угловой скорости. Подвижный годограф угловой скорости. Подвижный годограф вектора угловой скорости (полодия) изучен в большинстве монографий по динамике твердого тела (Н.Е. Жуковский, Г.К. Суслов, К. Магнус, Т. Леви-Чивита и У. Амальди и др.)

Подвижный годограф угловой скорости – линия пересечения эллипсоидов (27). Эту линию можно получить пересечением эллипсоида

$$B_1\widetilde{\omega}_1^2 + B_2\widetilde{\omega}_2^2 + B_3\widetilde{\omega}_3^2 = 1 \tag{52}$$

и конуса [19], [15]

$$B_1(B_1 - 1)\widetilde{\omega}_1^2 + B_2(B_2 - 1)\widetilde{\omega}_2^2 + B_3(B_3 - 1)\widetilde{\omega}_3^2 = 0.$$
 (53)

Следуя П.В. Харламову [15], будем полагать  $B_1 > B_2 > B_3$  (обращаем внимание, что ранее были приняты другие предположения  $B_1 < B_2 < B_3$ ). Очевидно, что  $A_i, i = \overline{1,3}$ , одновременно меньше (или больше) единицы. Следовательно, имеют место три варианта

$$B_1 > 1 > B_2 > B_3, \tag{54}$$

$$B_1 > B_2 > 1 > B_3, \tag{55}$$

$$B_1 > 1 > B_3, \qquad B_2 = 1,$$
 (56)

$$B_1 > B_2 = B_3. (57)$$

Для пояснения условий (54)–(57) рассмотрим их в параметрах  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , которые использованы в (25). Из (25) имеем

$$B_i = \frac{A_i H^2}{n^2}, \quad i = \overline{1,3}.$$
 (58)

Тогда из (54)–(57) в силу (58) получим

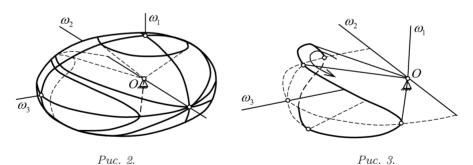
$$A_1 > \frac{n^2}{2E} > A_2 > 1 > A_3, \tag{59}$$

$$A_1 > A_2 > \frac{n^2}{2E} > A_3, \tag{60}$$

$$A_2 = \frac{n^2}{2E},\tag{61}$$

$$A_2 = A_3 \quad (A_1 \neq A_2). \tag{62}$$

Условия (59)–(62) устанавливают границы, между которыми изменяются параметры  $n^2$  и E. Условие (62) соответствует динамически симметричному случаю распределения масс в теле (он будет рассмотрен позднее). Общая картина подвижного годографа указана на рис. 2 ( [15]).



В случае (55) уравнение (53) примет вид

$$B_3(1 - B_3)\widetilde{\omega}_3^2 = B_1(B_1 - 1)\widetilde{\omega}_1^2 + B_2(B_2 - 1)\widetilde{\omega}_2^2. \tag{63}$$

Очевидно, осью конуса (63) является наибольшая (третья) ось эллипсоида инерции (см. рис. 3).

При условии (54) уравнение (53) таково

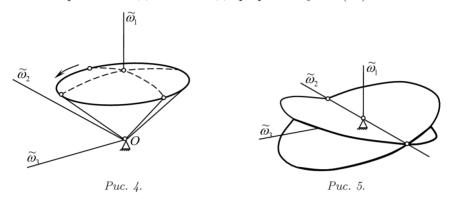
$$B_1(B_1 - 1)\widetilde{\omega}_1^2 = B_2(1 - B_2)\widetilde{\omega}_2^2 + B_3(1 - B_3)\widetilde{\omega}_3^2. \tag{64}$$

Ось конуса (64) — наименьшая ось эллипсоида инерции (первая координатная ось) (см. рис. 4).

Когда выполняются условия (56), то конус (53) распадается на пару плоскостей:

$$B_1(B_1 - 1)\widetilde{\omega}_1^2 = B_3(1 - B_3)\widetilde{\omega}_3^2. \tag{65}$$

На рис. 5 изображены подвижные годографы в случае (65).



 $Henoдвижный годограф угловой скорости. Неподвижный годограф изучали Г. Дарбу [4] и П.В. Харламов [15] в переменных <math>\widetilde{\omega}_{\xi}$ ,  $\widetilde{\omega}_{\eta}$ ,  $\widetilde{\omega}_{\zeta}$ . Основная идея П.В. Харламова состояла в применении переменной  $\sigma$ . В безразмерных переменных имеем [15]

$$\widetilde{\omega}_{\zeta} = 1, \qquad \widetilde{\omega}_{\rho}^2 = \sigma^2(\tau), \qquad \frac{d\alpha}{d\tau} = 1 + \frac{c_0}{\sigma^2(\tau)}.$$
 (66)

Очевидно, что последнее уравнение из (66) совпадает с уравнением Г. Дарбу из (11). Далее будем использовать зависимости  $\alpha(\sigma)$  и  $\sigma(\tau)$ :

$$c_0 = \left(1 - \frac{1}{B_1}\right) \left(1 - \frac{1}{B_2}\right) \left(1 - \frac{1}{B_3}\right),\tag{67}$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\sigma^2 + c_0}{\sigma\sqrt{-(\sigma^2 - c_1)(\sigma^2 - c_2)(\sigma^2 - c_3)}},\tag{68}$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{-(\sigma^2 - c_1)(\sigma^2 - c_2)(\sigma^2 - c_3)}.$$
 (69)

Для получения свойств неподвижного годографа (он является плоской кривой) в [15] приведена кривизна  $k_*$  этой кривой (ранее было сказано, что В. Гесс [8] доказал, что герполодии не имеют точек перегиба)

$$k_* = \frac{(B_1 + B_2 + B_3 - 2)\sigma^2 + c_0(B_1 + B_2 + B_3)}{B_1 B_2 B_3 [-\sigma^4 + (c_1 + c_2 + c_3 + 1)\sigma^2 + 2c_0 - c_1 c_2 - c_2 c_3 - c_1 c_3]^{3/2}}, \quad (70)$$

т. е. величина (70) отлична от нуля.

Кинематическое истолкование в случае  $B_1 > B_2 > 1 > B_3$ . Запишем основные формулы и обозначения в данном варианте

$$\sigma_1^2 = c_1, \quad \sigma_2^2 = c_2, \quad \sigma_3^2 = -c_3,$$
 (71)

$$\widetilde{\omega}_{1}^{2} = \frac{B_{2}B_{3}(\sigma^{2} - \sigma_{1}^{2})}{(B_{1} - B_{3})(B_{1} - B_{2})}, \ \widetilde{\omega}_{2}^{2} = \frac{B_{1}B_{3}(\sigma_{2}^{2} - \sigma^{2})}{(B_{2} - B_{3})(B_{1} - B_{2})},$$

$$\widetilde{\omega}_{3}^{2} = \frac{B_{1}B_{2}}{(B_{2} - B_{3})(B_{1} - B_{3})}(\sigma^{2} + \sigma_{3}^{2}),$$
(72)

$$\frac{d\sigma^2}{d\tau} = 2\sqrt{(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma_2^2 - \sigma^2)(\sigma^2 + \sigma_3^2)}.$$
 (73)

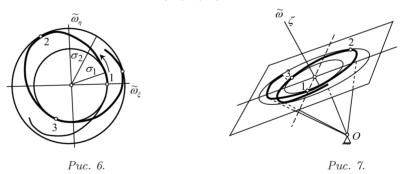
В силу (71)–(73) переменная  $\sigma$  заключена в пределах

$$0 < \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2. \tag{74}$$

Из (72), (73) определяется время, за которое  $\sigma$  переходит от  $\sigma_1$  до  $\sigma_2$ 

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma_2^2 - \sigma^2)(\sigma^2 + \sigma_3^2)}}.$$
 (75)

Решение  $\widetilde{\omega}_1(\tau)$ ,  $\widetilde{\omega}_2(\tau)$ ,  $\widetilde{\omega}_3(\tau)$  является периодическим с периодом  $2T_1$ , переменная  $\widetilde{\omega}_{\rho} = \sigma$  изменяется в силу (66), (73) в кольце с радиусами  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

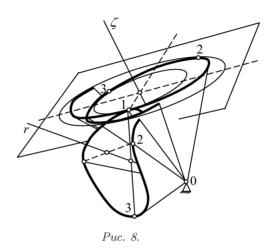


Неподвижный годограф изображен на рис. 6 [15]. Эта кривая расположена в плоскости  $\widetilde{\omega}_{\zeta}=1.$ 

Отметим некоторые свойства неподвижного годографа в данном случае: неподвижный годограф не имеет точек перегиба [8], не встречается с окружностями  $\sigma = \text{const}$  под прямым углом, угол  $\alpha(\tau)$  монотонно возрастает (из (66) в [15] получено  $\frac{d\alpha}{d\tau} > 0$ ); неподвижный годограф касается граничных окружностей, начальная точка обозначена цифрой 1, точка 2 достигается за время  $T_1$ , точка 3 достигается за время  $2T_1$ , при дальнейшем возрастании времени указанные свойства повторяются.

Неподвижный аксоид изображен на рис. 7. Для наглядности изображения ось, проходящая через вектор момента количества движения изображена не вертикально относительно границ листа.

Положения подвижного и неподвижного годографов угловой скорости относительно друг друга изображены на рис. 8. Движение тела получим, обкатывая подвижный годограф по неподвижному.



Кинематическое истолкование в случае  $B_1 > 1 > B_2 > B_3$ . Для этого варианта П.В. Харламов установил следующие формулы [15]:

$$\sigma_1^2 = -c_1, \quad \sigma_2^2 = c_2, \quad \sigma_3^2 = c_3,$$

$$\widetilde{\omega}_1^2 = \frac{B_2 B_3}{(B_1 - B_3)(B_1 - B_2)} (\sigma^2 + \sigma_1^2),$$

$$\widetilde{\omega}_2^2 = \frac{B_1 B_3}{(B_2 - B_3)(B_1 - B_2)} (\sigma_2^2 - \sigma^2),$$

$$\widetilde{\omega}_3^2 = \frac{B_1 B_2}{(B_2 - B_3)(B_1 - B_3)} (\sigma^2 - \sigma_3^2),$$

$$\frac{d\sigma^2}{d\tau} = 2\sqrt{(\sigma^2 + \sigma_1^2)(\sigma_2^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - \sigma_3^2)}.$$

$$(76)$$

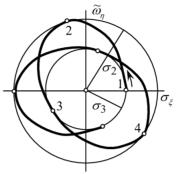
Из (76) следует, что переменная  $\sigma$  изменяется в следующих пределах

$$0 < \sigma_3 \le \sigma \le \sigma_2. \tag{77}$$

Движение конца вектора  $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$  по подвижному годографу – периодическое с периодом

$$T_2 = 2 \int_{\sigma_3}^{\sigma_2} \frac{d\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^2 + \sigma_1^2)(\sigma_2^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - \sigma_3^2)}}.$$
 (78)

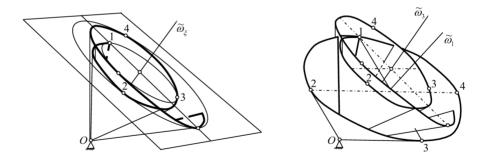
На основании соотношений (66)–(69), (76), (77) П.В. Харламов изобразил проекцию неподвижного годографа на горизонтальную плоскость (см. рис. 9), где учтено, что угол  $\alpha$  возрастает ( $\frac{d\alpha}{d\tau}>0$ ). Неподвижный годограф указан на рис. 10.



Puc. 9.

Отметим, что в качестве начальной точки принята точка на окружности меньшего радиуса, изображающая точка достигнет точку 2 за время  $\frac{T_2}{4}$ , а точку 3 — за время  $\frac{T_2}{2}$  (см. (77)).

Картину движения тела в рассматриваемом случае можно получить на основании рис. 11. Характерное его свойство состоит в том, что подвижный аксоид охватывает неподвижный аксоид.



Puc. 10. Puc. 11.

Кинематическое истолкование в случае  $B_2 = 1$ . Из формул (29), (66)–(69) следует

$$c_1 = c_3 = 0, \quad c_2 = \frac{(B_1 - 1)(1 - B_3)}{B_1 B_3} = \sigma_*^2, \quad c_0 = 0,$$
 (79)

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\sigma}{d\alpha} = \sigma\sqrt{\sigma_*^2 - \sigma^2}.$$
 (80)

Полагая, что начальное значение  $\sigma$  отлично от нуля, из (80) получим

$$\tau = \int_{\sigma_*}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma \sqrt{\sigma_*^2 - \sigma^2}}.$$
 (81)

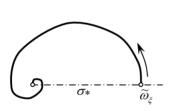
Из интеграла (81) следует, что значение  $\sigma=0$  переменная  $\sigma$  достигает за бесконечный промежуток времени. Так как начальное значение  $\sigma$  равно  $\sigma_*$ , то радикал в (81) при  $\sigma<\sigma_*$  отрицателен

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -\sigma\sqrt{\sigma_*^2 - \sigma^2}. (82)$$

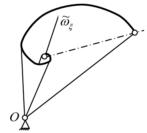
Найдем решение уравнения (82) [15]

$$\sigma = \frac{\sigma_*}{\operatorname{ch}\sigma_*\tau}.\tag{83}$$

С помощью указанных результатов П.В. Харламов построил проекцию годографа на горизонтальную плоскость (рис. 12) и неподвижный годограф (рис. 13).



Puc. 12.



Puc. 13.

Картину движения тела можно получить с помощью рис. 14. Очевидно, что движение тела асимптотически стремится к равномерному вращению относительно вектора момента количества движения тела.

Истолкование движения тела в случае  $B_2 = B_3$ .

Пусть  $B_1 > B_2 = B_3$ , тогда [15]

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega_0, \qquad \widetilde{\omega}_2 = c_* \cos \varkappa t, \qquad \widetilde{\omega}_3 = c_* \sin \varkappa t,$$
(84)

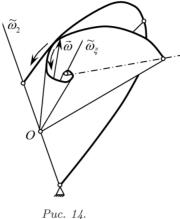
где

$$\omega_0^2 = \frac{1 - B_2}{B_1(B_1 - B_2)}, \qquad c_*^2 = \frac{B_1 - 1}{B_2(B_1 - B_2)}, \qquad \varkappa = \frac{B_1 - B_2}{B_2} p_0 > 0.$$

В силу (84) подвижный годограф – окружность, подвижный аксоид – прямой круговой конус. Очевидно,  $\widetilde{\omega}_{\rho}^2=c_*^2+\omega_0^2-1,~\widetilde{\omega}_{\zeta}=1,~$  т.е. неподвижный

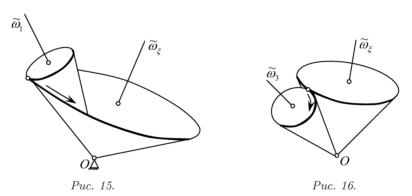
годограф – тоже окружность. Картина движения может быть представлена с помощью теоремы Пуансо [15] (см. рис. 15).

Обращаем внимание, что подвижный аксоид находится внутри неподвижного аксоида.



**Замечание 2.** Случай  $B_1 = B_2 > B_3$  изучается аналогично предыдущему случаю. Согласно рис. 16 [15], подвижный аксоид находится вне неподвижного аксоида.

Таким образом, с помощью метода Пуансо П.В. Харламов [15] в наглядной форме указал характерные особенности в движении свободного твердого тела. Это форма имеет несомненные преимущества по сравнению с [23].



5. О движении гирационного эллипсоида. Для исследования движения гирационного эллипсоида применим модифицированный метод Пуансо [18], суть которого состоит в рассмотрении вектора  $b(\tau)$ , который направлен по вектору угловой скорости. Тогда движение тела можно воспроизвести качением без скольжения подвижного годографа вектора  $b(\tau)$  по неподвижному годографу этого вектора. Модифицированный метод получил развитие в следующих работах [20–22].

Положим, что конец вектора  $b(\tau) = b(\tau)\widetilde{\omega}(\tau)$  принадлежит гирационному эллипсоиду. В подвижной системе координат имеем

$$\boldsymbol{b}_{\Pi}(\tau) = b_1(\tau)\boldsymbol{i}_1 + b_2(\tau)\boldsymbol{i}_2 + b_3(\tau)\boldsymbol{i}_3, \tag{85}$$

где, на основании предположения, координаты  $b_i(\tau)$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{b_1^2}{B_1} + \frac{b_2^2}{B_2} + \frac{b_3^2}{B_3} = \varkappa_0^2,\tag{86}$$

здесь  $\varkappa_0^2$  – постоянная. В силу  $b(\tau)=b(\tau)\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(\tau)$  в координатной форме имеем

$$b_i = b(\tau)\widetilde{\omega}_i, \quad i = \overline{1,3}.$$
 (87)

Подставим величины (87) в уравнение (86)

$$\frac{\widetilde{\omega}_1^2}{B_1} + \frac{\widetilde{\omega}_2^2}{B_2} + \frac{\widetilde{\omega}_3^2}{B_3} = \frac{\varkappa_0^2}{b^2(\tau)}.$$
 (88)

Уравнение (88) позволяет определить функцию

$$b(\tau) = \frac{\varkappa_0}{\sqrt{\frac{\widetilde{\omega}_1^2}{B_1} + \frac{\widetilde{\omega}_2^2}{B_2} + \frac{\widetilde{\omega}_3^2}{B_3}}}.$$
 (89)

Подставим значения (32) в равенство (89) и учтем выражения (33)

$$b(\tau) = \frac{\varkappa_0 \sqrt{q_3}}{\sqrt{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2}},\tag{90}$$

где

$$q_1 = B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_1 B_3, q_2 = 1 - B_1 - B_2 - B_3, q_3 = B_1 B_2 B_3. (91)$$

Запишем формулы для  $b_1^2(\tau)$ ,  $b_2^2(\tau)$ ,  $b_3^2(\tau)$ , используя (87), (90):

$$b_1^2(\tau) = \frac{\varkappa_0^2 q_3}{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2} \widetilde{\omega}_1^2(\tau), \qquad b_2^2(\tau) = \frac{\varkappa_0^2 q_3}{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2} \widetilde{\omega}_2^2(\tau),$$

$$b_3^2(\tau) = \frac{\varkappa_0^2 q_3}{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2} \widetilde{\omega}_3^2(\tau),$$
(92)

где  $\widetilde{\omega}_i$  указаны в формулах (41), (43), (47), а  $\widetilde{\omega}^2$  имеет значение

$$\widetilde{\omega}^2 = \widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_3^2. \tag{93}$$

Для получения второй поверхности, на которой лежит подвижный годограф вектора  $b(\tau)$  исключим на основании соотношений (32) переменную  $\widetilde{\omega}^2$  в первой и второй формулах из системы (92)

$$\alpha_2^2(q_1\beta_2^2 + q_2)b_1^2 + \alpha_1^2(q_1\beta_1^2 + q_2)b_2^2 + \varkappa_0^2 q_3 \alpha_1^2 \alpha_2^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) = 0.$$
 (94)

Используя обозначения (29), (33), представим поверхность (93) в виде

$$B_1(B_1 - 1)b_1^2 + B_2(B_2 - 1)b_2^2 + B_3(B_3 - 1)b_3^2 = 0. (95)$$

Таким образом, подвижный годограф вектора  $b(\tau)$  — линия пересечения эллипсоида (88) и конуса (95).

Рассмотрим неподвижный годограф вектора  $b(\tau)$ :

$$\mathbf{b}_{\mathrm{H}}(\tau) = b(\tau)(\omega_{\xi}\cos\alpha, \omega_{\rho}\sin\alpha, \omega_{\zeta}). \tag{96}$$

В векторном виде из (96) получим

$$\mathbf{b}_{\mathrm{H}}(\tau) = b_{\varepsilon}(\tau) \ \mathbf{a}_{1} + b_{n}(\tau) \ \mathbf{a}_{2} + b_{\zeta}(\tau) \ \mathbf{a}_{3}, \tag{97}$$

где в силу (90) и уравнений неподвижного годографа  $\widetilde{\omega}$  (66)

$$b_{\xi}(\tau) = \frac{l_0 \sqrt{\widetilde{\omega}^2(\tau) - 1}}{\sqrt{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2}} \cos \alpha(\tau), \quad b_{\eta}(\tau) = \frac{l_0 \sqrt{\widetilde{\omega}^2(\tau) - 1}}{\sqrt{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2}} \sin \alpha(\tau),$$

$$b_{\zeta}(\tau) = \frac{l_0}{\sqrt{q_1 \widetilde{\omega}^2(\tau) + q_2}} \qquad (l_0 = \varkappa_0 \sqrt{q_3}).$$
(98)

Изучим меридиан поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф вектора  $b(\tau)$ . Запишем уравнения для  $b_{\rho}^2,\,b_{\zeta}^2,$  используя равенства

$$b_{\rho}^{2} = b_{\xi}^{2} + b_{\eta}^{2} = \frac{\varkappa_{0}^{2} q_{3}(\widetilde{\omega}^{2} - 1)}{q_{1}\widetilde{\omega}^{2} + q_{2}}, \qquad b_{\zeta}^{2} = \frac{\varkappa_{0}^{2} q_{3}}{q_{1}\widetilde{\omega}^{2} + q_{2}}.$$
 (99)

Исключим из равенств (99) переменную  $\widetilde{\omega}^2$ :

$$b_o^2 + (1 + d_0)b_c^2 = d_1^2, (100)$$

где

$$d_0 = 1 + \frac{1 - B_1 - B_2 - B_3}{B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_1 B_3}, \quad d_1^2 = \frac{\kappa_0^2 B_1 B_2 B_3}{B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_1 B_3}.$$
 (101)

Таким образом, неподвижный годограф  $b_{\rm H}(\tau)$  лежит на эллипсоиде (100), который характеризуется параметрами (101).

Рассмотрим случай  $B_2=1$ . В силу (79), (80), (83) уравнения (97) принимают вид

$$b_{\xi}(\tau) = \frac{l_{0}\sigma_{*}}{\sqrt{a_{0} \sinh^{2}(\sigma_{*}\tau) + b_{0}}} \cos(\tau),$$

$$b_{\eta}(\tau) = \frac{l_{0}\sigma_{*}}{\sqrt{a_{0} \sinh^{2}(\sigma_{*}\tau) + b_{0}}} \sin(\tau), \qquad b_{\zeta}(\tau) = \frac{l_{0}\sigma_{*} \cosh(\sigma_{*}\tau)}{\sqrt{a_{0} \sinh^{2}(\sigma_{*}\tau) + b_{0}}},$$
(102)

где 
$$a_0 = B_1 B_3$$
,  $b_0 = \frac{B_3^2 + (B_1 - 1)(B_1 + B_3)}{B_1 B_3}$ .

Запишем на основании формул (32), (92) скалярные уравнения, задающие подвижный годограф вектора  $b_{\Pi}(\tau)$ :

$$b_{1}(\tau) = \frac{l_{0}|\alpha_{1}|\sigma_{*}}{\sqrt{a_{0} \operatorname{sh}^{2}(\sigma_{*}\tau) + b_{0}}}, \quad b_{2}(\tau) = \frac{l_{0}|\alpha_{2}|\sigma_{*} \operatorname{sh}(\sigma_{*}\tau)}{\sqrt{a_{0} \operatorname{sh}^{2}(\sigma_{*}\tau) + b_{0}}},$$

$$b_{3}(\tau) = \frac{l_{0}|\alpha_{3}|\sigma_{*}}{\sqrt{a_{0} \operatorname{sh}^{2}(\sigma_{*}\tau) + b_{0}}}.$$
(103)

Движение гирационного эллипсоида в решении Эйлера можно получить качением без скольжения кривой (103) по кривой (102). При этом вращение тела происходит с угловой скоростью  $\widetilde{\omega}(\tau)$ . Из системы (103) следует, что подвижный годограф вектора  $\boldsymbol{b}(\tau)$  является плоской кривой: линией пересечения плоскости

$$b_1\sqrt{B_1(B_1-1)} - b_3\sqrt{B_3(1-B_3)} = 0$$

и эллипсоида (88) при  $B_2=1$ . Очевидно, что из уравнения (95) получим аналогичный результат.

6. О подвижном годографе точки пересечения гирационного эллипсоида с вектором момента количества движения. Рассмотрим подвижный годограф вектора угловой скорости (кривая  $\gamma_1$ )

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\Pi}(\tau) = \widetilde{\omega}_1(\tau)\boldsymbol{i}_1 + \widetilde{\omega}_2(\tau)\boldsymbol{i}_2 + \widetilde{\omega}_3(\tau)\boldsymbol{i}_3. \tag{104}$$

Компоненты  $\widetilde{\omega}_i(\tau)$  удовлетворяют уравнениям

$$B_1 \widetilde{\omega}_1^2(\tau) + B_2 \widetilde{\omega}_2^2(\tau) + B_3 \widetilde{\omega}_3^2(\tau) = 1,$$
 (105)

$$B_1^2 \widetilde{\omega}_1^2(\tau) + B_2^2 \widetilde{\omega}_2^2(\tau) + B_3^2 \widetilde{\omega}_3^2(\tau) = 1.$$
 (106)

Как уже отмечалось, конец вектора  $\widetilde{\omega}_{\Pi}$  лежит на эллипсоиде инерции тела. Введем в рассмотрение кривую  $\gamma_2$  (геометрическое место концов вектора момента количества движения, в подвижной системе координат на рис. 17 эта кривая обозначена через  $\Gamma$ )

$$\mathbf{x}_{\Pi}(\tau) = x_1(\tau)\mathbf{i}_1 + x_2(\tau)\mathbf{i}_2 + x_3(\tau)\mathbf{i}_3, \tag{107}$$

где

$$x_1(\tau) = B_1 \widetilde{\omega}_1(\tau), \quad x_2(\tau) = B_2 \widetilde{\omega}_2(\tau), \quad x_3(\tau) = B_3 \widetilde{\omega}_3(\tau).$$
 (108)

В силу равенства (106)

$$x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau) + x_3^2(\tau) = 1. (109)$$

Выразив из (108)  $\widetilde{\omega}_i$  через  $x_i$  и подставив найденные значения в соотношение (105), получим

$$\frac{x_1^2(\tau)}{B_1} + \frac{x_2^2(\tau)}{B_2} + \frac{x_3^2(\tau)}{B_3} = 1. \tag{110}$$

Из равенств (109), (110) и следует утверждение Мак-Куллага [3] о том, что при движении свободного твердого тела гирационный эллипсоид содержит конец вектора момента количества движения (геометрический способ доказательства этого утверждения приведен ранее). В параметрическом виде на основании (32) имеем

$$x_1(\tau) = B_1 \alpha_1 \sqrt{\widetilde{\omega}^2(\tau) - \beta_1^2}, \quad x_2(\tau) = B_2 \alpha_2 \sqrt{\beta_2^2 - \widetilde{\omega}^2(\tau)},$$
  
$$x_3(\tau) = B_3 \alpha_3 \sqrt{\widetilde{\omega}^2(\tau) - \beta_3^2}.$$
 (111)

Представляет интерес уравнение кривой  $\gamma_2$  в неподвижной системе координат в некоторый фиксированный момент  $\tau^*$ . Для получения этого уравнения необходимо с помощью (49), (50) определить значения  $\varphi^* = \varphi(\tau^*)$ ,  $\theta^* = \theta(\tau^*)$ ,  $\psi^* = \psi(\tau^*)$  и воспользоваться матрицей перехода от подвижной системы координат к неподвижной

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$
(112)

где

$$C_{11} = \cos \varphi^* \cos \psi^* - \sin \varphi^* \sin \psi^* \cos \theta^*,$$

$$C_{12} = -\sin \varphi^* \cos \psi^* - \cos \varphi^* \sin \psi^* \cos \theta^* \quad C_{13} = \sin \theta^* \sin \psi^*,$$

$$C_{21} = \cos \varphi^* \sin \psi^* + \sin \varphi^* \cos \psi^* \cos \theta^*,$$

$$C_{22} = -\sin \varphi^* \sin \psi^* + \cos \varphi^* \cos \psi^* \cos \theta^*, \quad C_{23} = -\sin \theta^* \cos \psi^*,$$

$$C_{31} = \sin \varphi^* \sin \theta^*, \quad C_{32} = \cos \varphi^* \sin \theta^*, \quad C_{33} = \cos \theta^*.$$

$$(113)$$

Обозначим через  $\mathbf{R}(\tau)$  годограф кривой  $\gamma_2$  в неподвижной системе координат в момент  $\tau^*$  (здесь  $\tau$  – переменный параметр, с помощью которого параметризуется подвижный годограф (111))

$$\mathbf{R}(\tau) = R_1(\tau) \ \mathbf{a}_1 + R_2(\tau) \ \mathbf{a}_2 + R_3(\tau) \ \mathbf{a}_3 \ .$$
 (114)

Тогда с помощью (111) получим

$$R_{1}(\tau) = x_{1}(\tau)C_{11} + x_{2}(\tau)C_{12} + x_{3}(\tau)C_{13},$$

$$R_{2}(\tau) = x_{1}(\tau)C_{21} + x_{2}(\tau)C_{22} + x_{3}(\tau)C_{23},$$

$$R_{3}(\tau) = x_{1}(\tau)C_{31} + x_{2}(\tau)C_{32} + x_{3}(\tau)C_{33},$$
(115)

где  $C_{ij}$  указаны в (112), (113).

Для нахождения алгебраических уравнений, которые определяют неподвижный годограф  $R(\tau)$ , целесообразно вместо равенств (115) воспользоваться обратным преобразованием

$$\widetilde{E}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

и соотношениями (109), (110). Тогда компоненты вектора (107) найдем из равенств

$$x_{1}(\tau) = R_{1}(\tau)C_{11} + R_{2}(\tau)C_{21} + R_{3}(\tau)C_{31},$$

$$x_{2}(\tau) = R_{1}(\tau)C_{12} + R_{2}(\tau)C_{22} + R_{3}(\tau)C_{32},$$

$$x_{3}(\tau) = R_{1}(\tau)C_{13} + R_{2}(\tau)C_{23} + R_{3}(\tau)C_{33}.$$
(116)

Подставим данные выражения в уравнения (109), (110):

$$\begin{split} R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 &= 1, \\ (C_{11}^2 B_2 B_3 + C_{12}^2 B_1 B_3 + C_{13}^2 B_1 B_2) R_1^2 + \\ + (C_{21}^2 B_2 B_3 + C_{22}^2 B_1 B_3 + C_{23}^2 B_1 B_2) R_2^2 + (C_{31}^2 B_2 B_3 + C_{32}^2 B_1 B_3 + \\ + C_{33}^2 B_1 B_2) R_3^2 + 2(C_{11} C_{21} B_2 B_3 + C_{12} C_{22} B_1 B_3 + C_{13} C_{23} B_1 B_2) R_1 R_2 + \\ + 2(C_{11} C_{31} B_2 B_3 + C_{12} C_{32} B_1 B_3 + C_{13} C_{33} B_1 B_2) R_1 R_3 + \\ + 2(C_{21} C_{31} B_2 B_3 + C_{22} C_{32} B_1 B_3 + C_{23} C_{33} B_1 B_2) R_2 R_3 = 0. \end{split}$$

Таким образом, неподвижный годограф кривой  $\gamma_2$  в момент  $\tau_0$  является линией пересечения сферы и поверхности второго порядка (эллипсоида).

Запишем вектор (114) в виде

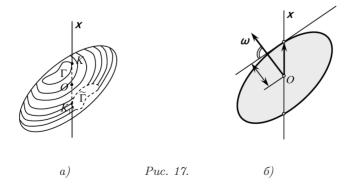
$$\mathbf{R}(\tau_0, \tau) = R_1(\tau_0, \tau) \ \mathbf{j}_1 + R_2(\tau_0, \tau) \ \mathbf{j}_2 + R_3(\tau_0, \tau) \ \mathbf{j}_3 \ .$$

Данный вектор зависит от двух параметров:  $\tau_0$ ,  $\tau$ . Поэтому для каждого  $\tau_0$  он определяет неподвижный годограф кривой  $\gamma_2$ .

При условии  $B_2 = 1$  на основании (109), (110) имеем

$$B_3(B_1-1)x_1^2 - B_1(1-B_3)x_3^2 = 0.$$

То есть неподвижный годограф кривой  $\gamma_2$  лежит в плоскости. Таким же свойством обладает и подвижный годограф этой кривой.



Замечание 3. К. Магнус при обсуждении результата Мак-Куллага утверждает, что гирационный эллипсоид можно получить как геометрическое место точек конца вектора момента количества движения  $\boldsymbol{x}$ . Данное утверждение, очевидно, следует из равенства (110). К. Магнус иллюстрирует движение согласно рис. 17 а), где через  $\Gamma$  обозначена кривая, которая является пересечением гирационного эллипсоида и сферы.

Кривая  $\widetilde{\Gamma}$  симметрична  $\Gamma$  относительно точки O. Движение гирационного эллипсоида (следовательно, и тела) воспроизводится вращением эллипсоида с помощью кривых  $\widetilde{\Gamma}$  и  $\Gamma$  (рис. 17 а)). На рис. 17 б) указаны положения векторов  $\omega$  и x на основании свойств эллипсоида инерции и гирационного эллипсоида.

Заключение. В статье поставлена задача всестороннего изучения решения Л. Эйлера. Сложность этой задачи состоит в том, что данное решение рассматривали, как это указано в историческом обзоре статьи, многие авторы. При этом применение различных подходов и методов исследования потребовало излагать материал с учетом приоритета получения результатов и их важности. Так как особое внимание в статье уделялось комплексному методу рассмотрения геометрических свойств движения тела в случае Л. Эйлера, то авторы статьи изложили теоремы Л. Пуансо, результаты Г. Дарбу, посвященные получению уравнений герполодии вектора угловой скорости (уравнениям неподвижного годографа угловой скорости, которые являются частным случаем уравнений П.В. Харламова). В статье приведена кинематическая формула для углов прецессии и полярного угла уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости, которая указана Г.В. Горром. За основу изложения материала приняты результаты П.В. Харламова, имеющие в силу большой наглядности научно-методическое значение в исследовании решения Л. Эйлера. Статья содержит и новые результаты модифицированного метода Л. Пуансо по изучению движения гирационного эллипсоида И. Мак-Куллага.

- 1. Poinsot L. Thèorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pures et Appl. 1851. 16. P. 9–130; P. 289–336.
- 2. Sylvester J.J. On the motion of a rigid body acted on by no external forces // Philos. Trans. Roy. Soc. London. -1866. -156. P. 757–780.
- 3.  $Mac\ Cullagh\ J$ . On the rotation of a solid body // Proc. Roy. Irish Acad. 1840 1844. 2. P. 542–545; 1845 1847. 3. P. 370–371.
- 4. Darboux G. Remarque // C. r. Acad. sci. 1885. **101**. P. 1576–1577.
- 5. Darboux G. Sur diverses propositions relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe // C. r. Acad. sci. 1885. 101. P. 119–205.
- 6. Darboux G. Sur le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe // J. Math. Pures et Appl. 1885. 1. P. 403–430.
- 7. Darboux~G. Sur la théorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants á la même polhodie // C. r. Acad. sci. 1885. 101. P. 1555–1561.
- 8. Hess W. Über das Problem der Rotation// Math. Ann. 1882. 20. S. 461-470.
- 9. Hess W. Über des Jacobische Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrangeschen Rotation durch zwei Poinsotische Rotation// Z. Math. Phys. 1888. 33. P. 292–305.
- 10. Routh E.J. A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: Macmillan, 1884. The advomced part. 343 p.

- 11. Jacobi C.G.J. Nouvelle thèorie de la rotation d'un corps de rèvolution grave suspendu en un point quelconque de son axe // Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882.  $\mathbf{2}$ . S. 477–492.
- 12. Jacobi C.G.J. Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis á des forces accélératrices // Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882. 2. S. 427–467.
- 13. Jacobi C.G.J. Sur la rotation d'un corps // Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882. 2. S. 289–352.
- 14. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. Т. 2, ч. 2. 555 с.
- 15. Xарламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Ч.І. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.
- 16.  $\Gamma$ ашененко И.Н.,  $\Gamma$ орр  $\Gamma$ .В., Kовалев A.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 401 с.
- 17.  $\Gamma$ орр  $\Gamma$ .В., Kовалев A.М. Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
- 18. Горр Г. В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 26–36.
- 19. Cуслов  $\Gamma$ .K. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
- 20. Горр Г.В., Данилюк Д.А., Ткаченко Д.Н. О кинематическом истолковании движения тела в частном случае решения Д.Н. Горячева-С.А. Чаплыгина // Журн. теор. и прикл. механики. 2018. № 3(60)–4(61). С. 19–32.
- 21. Горр Г.В., Щетинина Е.К. О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С.В. Ковалевской // Нелинейная динамика. Ижевск. 2018. 14, № 1. С. 123–138.
- 22. Gorr G. V., Tkachenko D. N., Shchetinina E. K. Research on the Motion of a Body in a Potential Force Field in the Case of Three Invariant Relations // Russian j. of Nonlinear Dynamics. − 2019. − 15. № 3. − P. 327–342.
- 23. Payc Э.Дэк. Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983. Т. 1. 464 с.; Т. 2. 544 с.

## G.V. Gorr, G.A. Kotov

## On Euler's solution

The historical review of the results obtained in Euler's solution is given. Two Poinsot's theorems of kinematic interpretation of motion of body with one fixed point were considered. Sylvester's and Mac Cullagh's theorems were analized. Darboux's equations for herpolhode in the case of Euler and the Jacobi's interpretation of body motion by inertia were given. Routh's investigations were indicated. Kinematic interpretation of body motion in Euler's solution, proposed by P.V. Kharlamov, based on Darboux's equations, were done.

Keywords: kinematic interpretation, Euler's solution, Darboux's equation, polhode, herpolhode.

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк; ГОУ ВПО "Донбас. национальная акад. строительства и архитектуры", Макеевка

Получено 02.09.19

kotov ga@rambler.ru