©2008. **Бугрій О.М.**

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ

У статті розглянуто деяку нелінійну параболічну варіаційну нерівність в обмеженій області. Доведено, що ця нерівність має єдиний слабкий розв'язок. При виконанні певних умов показано додаткову гладкість цього розв'язку, а також доведено, що цей розв'язок стабілізується за скінченний проміжок часу.

Ключові слова: параболічна варіаційна нерівність, існування та єдиність розв'язку
MSC (2000): 35R45

Вступ.

Параболічним варіаційним нерівностям присвячено багато публікацій (див. [1]-[4]). Існування розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності, що відповідає оператору p-Лапласа, та умови його додаткової гладкості встановлено в [5]. При вивченні задач для параболічних рівнянь значну увагу приділяється дослідженню поведінки носія розв'язків цих задач. Цим питанням, зокрема, присвячені праці [6]-[9]. Еволюцію носія розв'язку деяких лінійних та нелінійних параболічних варіаційних нерівностей вивчено в [10]-[12]. Скінченність часу стабілізації розв'язку деякої параболічної варіаційної нерівності в узагальнених просторах Соболєва встановлено в [13].

У даній роботі розглянуто параболічну варіаційну нерівність на функцію u наступного вигляду:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u) + \textstyle\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i})+$$

$$+c(x)u(v-u) + g(x)|u|^{q-2}u(v-u) - f(x,t)(v-u)\Big]dxdt \geq \qquad (1)$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2dx,$$

де $\tau \in (0,T]$, v – деяка функція, $Q_{0,\tau} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega_0, \Omega_\tau \subset \mathbb{R}^n$. Встановлено умови існування розв'язку цієї нерівності. Показано, що при певних умовах на коефіцієнти (1) розв'язок стабілізується за скінченний проміжок часу. Досліджено залежність зміни гладкості розв'язку нерівності (1) від вихідних даних задачі.

Основна частина.

Нехай $p, q \in (1, +\infty)$, $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, яка складається з гладких гіперповерхонь Γ_1, Γ_2 таких, що $\mathrm{mes}_{n-1}\{\Gamma_1 \cap \Gamma_2\} = 0$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$. Нехай $X = \{w \in W^{1,p}(\Omega) : w|_{\Gamma_1} = 0\}$, $V = X \cap L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, K – опукла замкнена підмножина V, $0 \in K$, $U(Q_{0,T}) = L^p(0, T; X) \cap L^q(Q_{0,T}) \cap L^2(Q_{0,T})$. Норму банахового простору B позначатимемо через $||\cdot; B||$, декартовий степінь цього простору – B^n, а спряжений до B простір – B^*. Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot, t)$, писатимемо просто $u(t)$.

Нехай $f \in L^2(Q_{0,T})$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, функції $a_1, \ldots, a_n, c, g$ задовольняють умови:

(A): $a_i \in L^\infty(\Omega)$, $a_i(x) \geq a_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$;

(C): $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq c_0$ для майже всіх $x \in \Omega$, де $c_0 \in \mathbb{R}$;

(G): $g \in L^\infty(\Omega)$, $g(x) \geq g_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Означення 1. Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$, називатимемо слабким розв'язком параболічної варіаційної нерівності (1), якщо u задовольняє (1) для всіх $\tau \in (0, T]$ і для всіх $v \in U(Q_{0,T})$ таких, що $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$, $v_t \in [U(Q_{0,T})]^*$.

Легко показати, що слабкий розв'язок нерівності (1) задовольняє умову

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Визначимо оператор $A : V \to V^*$ так:

$$\langle Aw, v\rangle_V = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n a_i |w_{x_i}|^{p-2} w_{x_i} v_{x_i} + cwv + g|w|^{q-2} wv\Big] dx, \quad w, v \in V.$$

Можна вважати, що $A : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$. Тоді $\langle Az, y\rangle_{U(Q_{0,T})} = \int_0^T \langle Az(t), y(t)\rangle_V \, dt$, $z, y \in U(Q_{0,T})$.

Лема 1. *Нехай виконуються умови **(A)**-**(G)**, $f_1, f_2 \in L^2(Q_{0,T})$, $u_0^1, u_0^2 \in K$. Якщо u^1, u^2 – розв'язки параболічної варіаційної нерівності (1) з функціями f_1, u_0^1 та f_2, u_0^2 відповідно, то для всіх*

$\tau \in (0,T]$ *виконується оцінка*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^1-u^2|^2dx + \int\limits_0^\tau \langle Au^1-Au^2, u^1-u^2\rangle_V dt \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_0^1-u_0^2|^2dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} (f_1-f_2)(u^1-u^2)dxdt. \qquad (3)$$

Доведення. Доведення леми проводиться стандартним методом. Якщо u^1, u^2 – розв'язки варіаційної нерівності (1), то розглянемо для елемента $w = (u^1+u^2)/2$ регуляризаційну послідовність $\{w_\varepsilon\}$ (див., наприклад, [2, с. 59]). Вибираючи в (1) замість пробної функції v елементи цієї послідовності, після нескладних перетворень отримаємо (3). □

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(A)-(G)**, $f_1, f_2 \in L^2(Q_{0,T})$, $u_0^1, u_0^2 \in K$. Якщо u^1, u^2 – розв'язки нерівності (1) з функціями f_1, u_0^1 та f_2, u_0^2 відповідно, то*

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_t} |u^1-u^2|^2dx \leq C_1\Big(\int\limits_{\Omega} |u_0^1-u_0^2|^2dx + \int\limits_{Q_{0,T}} |f_1-f_2|^2dxdt\Big), \quad (4)$$

де стала C_1 не залежить від $u^1, u^2, f_1, u_0^1, f_2, u_0^2$, тобто, розв'язок параболічної варіаційної нерівності (1) у вказаному сенсі неперервно залежить від вихідних даних.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. З оцінки (3), властивостей оператора A та нерівності $ab \leq (a^2+b^2)/2$, $a, b \geq 0$, матимемо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^1-u^2|^2dx \leq \int\limits_{\Omega} |u_0^1-u_0^2|^2dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f_1-f_2|^2dxdt +$$
$$+|2c_0+1|\int\limits_0^\tau dt\int\limits_{\Omega_t} |u^1-u^2|^2dx, \quad \tau\in(0,T].$$

Використавши лему Гронуола [14, с. 191], звідси отримаємо (4). □

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови **(A)-(G)**, $f \in L^2(Q_{0,T})$, $u_0 \in K$, то параболічна варіаційна нерівність (1) не може мати більше одного слабкого розв'язку.*

Доведення. Нехай u^1, u^2 – розв'язки нерівності (1). З оцінки (4) при $f_1 = f_2$, $u_0^1 = u_0^2$, одержимо, що $\max\limits_{t\in[0,T]}\int_{\Omega_t} |u^1-u^2|^2dx = 0$. Тому $u^1 = u^2$. □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови **(A)-(G)**, $f \in L^2(Q_{0,T})$, $u_0 \in K$. Тоді існує слабкий розв'язок u варіаційної нерівності (1), і він задовольняє нерівність*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[v_t(v-u) + \sum_{i=1}^{n} a_i |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) + \\ + (cu + g|u|^{q-2}u - f)(v-u)\Big] dxdt \geq \\ \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |v-u|^2 dx, \quad (5)$$

для всіх $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, і для всіх $v \in U(Q_{0,T})$, $v_t \in [U(Q_{0,T})]^*$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Доведення. Доведення проведемо методом штрафу (див. [1]). Нехай $B : V \to V^*$ – оператор штрафу, пов'язаний з K. Згідно [1, с. 384] B є монотонним обмеженим і семінеперервним оператором. Для кожного натурального параметра k розглянемо задачу

$$\langle u_t^k(t) + Au^k(t) + kBu^k(t), v\rangle_V = \langle f(t), v\rangle_V,\ t \in (0,T),\ v \in V, \quad (6)$$

$$u^k(0) = u_0. \quad (7)$$

Можна показати (див. [15]), що існує розв'язок $u^k \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ задачі (6), (7), який задовольняє включення $u_t^k \in [U(Q_{0,T})]^*$. Вибираючи $k = 1, 2, 3, \ldots$, одержимо послідовність функцій $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – розв'язків (6), (7). Крім того,

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^k|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^k|^p + |u^k|^2 + |u^k|^q\Big] dxdt \leq C_2, \\ \int\limits_0^\tau \langle Bu^k(t), u^k(t)\rangle_V dt \leq \frac{C_2}{k}, \quad \tau \in (0,T], \quad (8)$$

де стала C_2 не залежить від τ, k. Тому існує підпослідовність (нехай це буде сама $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$) така, що

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u, \text{ *-слабко в } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \text{ і слабко в } U(Q_{0,T}).$$

Користуючись методикою [16] показуємо, що $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – одностайно неперервна на відрізку $[0,T]$. Тому з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність (нехай це знову буде сама $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$), збіжну в $C([0,T];L^2(\Omega))$. Оскільки функції u^k – неперервні, то $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Аналогічно як в [1, с. 397] показуємо, що $u(t)\in K$ майже для всіх $t\in(0,T)$.

Нехай $v\in U(Q_{0,T})$, $v(t)\in K$ майже для всіх $t\in(0,T)$, $v_t\in [U(Q_{0,T})]^*$. Використовуючи монотонність оператора B та формулу інтегрування частинами за змінною t, для всіх $t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$, та $k\in\mathbb{N}$ з (6) отримаємо нерівність (5) з заміною u на u^k. Спрямувавши в ній $k\to\infty$, отримаємо нерівність (5), яка при $t_1=0$ співпадає з (1). Отже, u – розв'язок нерівності (1). Можливість граничного переходу встановлюється так як в твердженні 1.6 з [2, с. 58]. $\Box$

Дослідимо тепер деякі властивості розв'язку нерівності (1). Почнемо з того, що покажемо, що цей розв'язок за певних умов стабілізується з часом.

Лема 2. *Нехай $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$, функції $w,v\in C([\alpha,\beta])$ задовольняють співвідношення*

$$\begin{aligned} w(t_2)-w(t_1)+\gamma\int_{t_1}^{t_2} w^b(t)dt &\le F(t_1,t_2),\\ v(t_2)-v(t_1)+\gamma\int_{t_1}^{t_2} v^b(t)dt &= F(t_1,t_2), \end{aligned} \tag{9}$$

для всіх чисел $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $t_1<t_2$, де $\gamma\ge0$, $b\ge0$ – деякі сталі, $F:[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ – деяка функція. Якщо $w(\alpha)=v(\alpha)$, то $w(t)\le v(t)$ для всіх $t\in[\alpha,\beta]$.

Лема 3. *Нехай виконуються всі умови леми 2, F має вигляд*

$$F(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} z(t)dt,\quad \alpha\le t_1<t_2\le\beta,$$

де $z\in L^1((\alpha,\beta))$. Тоді функція v з (9) є абсолютно неперервною і задовольняє рівняння

$$v'(t)+\gamma v^b(t)=z(t)\quad \text{майже для всіх}\quad t\in(\alpha,\beta). \tag{10}$$

Доведення цих лем опускаємо.

Зауваження 1. Якщо $\mathrm{mes}_{n-1}\Gamma_1>0$ і $W^{1,p}(\Omega)$ неперервно вкладається в $L^2(\Omega)$, то, використавши нерівність Фрідрігса, з [14, с. 50] одержимо існування такого $M_0>0$, що

$$\Big(\int_\Omega |w|^2dx\Big)^{p/2}\le\frac{1}{M_0}\cdot\int_\Omega\sum_{i=1}^n|w_{x_i}|^pdx\quad\text{для всіх}\quad w\in V. \tag{11}$$

Теорема 3. *Нехай $T > 0$ – досить велике число, $q \in (1, +\infty)$, виконуються умови **(A)-(G)**, $u_0 \in K$, $f \in L^2(Q_{0,T})$,*

$$\begin{gathered} c_0 \geq 0, \quad mes_{n-1}\Gamma_1 > 0, \quad 1 < p < 2 \quad при \quad n = 1, 2, \\ \frac{2n}{n+2} \leq p < 2 \quad при \quad n \geq 3, \end{gathered} \tag{12}$$

(відмітимо, що при цих умовах виконується (11)), існує таке число $d_f \geq 0$, що

$$f(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & x \in \Omega,\ t < d_f, \\ 0, & x \in \Omega,\ t \geq d_f, \end{cases} \qquad f_1 \neq 0,$$

u – розв'язок (1), $m_u = ||u(d_f); L^2(\Omega)||$. Тоді існує момент часу $d_u \geq d_f$ такий, що

$$u(x,t) = 0 \quad майже\ для\ всіх \quad (x,t) \in Q_{d_u,T}.$$

Якщо $m_u = 0$, то $d_u = d_f$. Якщо $m_u > 0$, то $d_u = d_f + \dfrac{m_u^{2-p}}{(2-p)a_0 M_0}$, і, крім того, справедлива оцінка

$$||u(t); L^2(\Omega)|| \leq \Big(m_u^{2-p} - (2-p)a_0 M_0 (t - d_f)\Big)^{\frac{1}{2-p}} \text{ при } t \in (d_f, d_u). \tag{13}$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, u – розв'язок нерівності (1). Візьмемо в нерівності (5), яка, згідно теореми 2, виконується при наших припущеннях, елемент $v = 0$. Після елементарних перетворень отримаємо

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |u|^2 dx + a_0 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p dxdt \leq \\ \leq \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} fudxdt, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \end{gathered} \tag{14}$$

При $t_1 \geq d_f$ права частина цієї нерівності стане нулем. Нехай $y(t) = \int_{\Omega_t} |u|^2 dx$, $t \in (0, T)$. Використавши (11), з оцінки (14) одержимо, що

$$y(t_2) - y(t_1) + 2a_0 M_0 \int\limits_{t_1}^{t_2} y^{p/2}(t)dt \leq 0, \quad d_f \leq t_1 < t_2 \leq T.$$

Гладкість розв'язку u гарантує, що $y \in C([0,T])$. З лем 2 та 3 випливає, що $y(t) \leq v(t)$, $t \in [d_f, T]$, де v – розв'язок задачі Коші для рівняння з відокремлюваними змінними

$$v'(t) + 2a_0 M_0 v^{p/2}(t) = 0, \quad t \in (d_f, T), \qquad v(d_f) = y(d_f). \quad (15)$$

Якщо $m_u = 0$, то $y(d_f) = m_u = 0$ і розв'язком задачі (15), зокрема, є тотожній нуль. Якщо $m_u > 0$, то розв'язком задачі (15) є функція v, яка визначається співвідношенням

$$v^{(2-p)/2}(t) - y^{(2-p)/2}(d_f) + (2-p)a_0 M_0 (t - d_f) = 0, \quad t \in [d_f, T]. \quad (16)$$

Якщо d_u взято з умови теореми, то для всіх $t \in [d_u, T]$ виконується нерівність

$$v^{(2-p)/2}(t) = y^{(2-p)/2}(d_f) - (2-p)a_0 M_0 (t - d_f) \leq$$

$$\leq m_u^{2-p} - (2-p)a_0 M_0 (d_u - d_f) = 0.$$

Отже, $v(t) = 0$ при $t \geq d_u$, а тому $y(t) = 0$ для всіх $t \in [d_u, T]$. З формули (16) при $t \in [d_f, d_u]$ знаходимо, що $\sqrt{v(t)} = (m_u^{2-p} - (2-p)a_0 M_0 (t - d_f))^{1/(2-p)}$. Оскільки $y(t) \leq v(t)$ при $t \geq d_f$, то теорему доведено. $\Box$

Знайдемо тепер умови, за яких розв'язок нерівності (1) має додаткову гладкість.

Означення 2. Сильним розв'язком параболічної варіаційної нерівності (1) називатимемо такий слабкий розв'язок u цієї нерівності, що $u_t \in L^2(Q_{0,T})$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови **(A)-(G)**, $p, q \in (1, +\infty)$, $u_0 \in K$, $Au_0 \in L^2(\Omega)$, $f, f_t \in L^2(Q_{0,T})$. Тоді існує сильний розв'язок u нерівності (1) і він задовольняє нерівність*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u_t(v-u) + \sum_{i=1}^n a_i |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) + \\ + (cu + g|u|^{q-2}u - f)(v-u) \Bigg] dxdt \geq 0 \quad (17)$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, $v \in U(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Доведення. Нехай u та $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такі як в теоремі 2. За наших умов $f\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Після нескладних перетворень, з (6) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}|u_t^k|^2dxdt\leq$$
$$\leq C_3\left(||f(0)-Au_0;L^2(\Omega)||^2+\int\limits_{Q_{0,\tau}}|f_t|^2dxdt\right),\ \tau\in(0,T], \tag{18}$$

де стала C_3 не залежить від k,τ. Враховуючи її, можна вважати, що $u_t^k\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u_t$ слабко в $L^2(Q_{0,T})$. Отже, u – сильний розв'язок нерівності (1). Тоді законним є інтегрування

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}v_t(v-u)dxdt=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}u_t(v-u)dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}|v-u|^2dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

де v таке, як в (1). Використавши цю формулу, з (5) отримаємо (17). $\square$

Нагадаємо, що, згідно до [17, с. 76], функція $w\in W^{1,r}(\Omega)$, де $r\in(1,+\infty)$, має слід $w|_{\partial\Omega}\in L^r(\partial\Omega)$, який ми надалі позначатимемо просто w.

Зауваження 2. Нехай ν – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega$, $\nabla v=(v_{x_1},\ldots,v_{x_n})$, $w=(w_1,\ldots,w_n)$, $\operatorname{div}w=\frac{w_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{w_n}{\partial x_n}$. Якщо $v\in W^{1,p}(\Omega)$, $w\in[W^{1,p'}(\Omega)]^n$, де $p,p'>1$, $1/p+1/p'=1$, то з [17, с. 77] випливає, що

$$\int\limits_{\Omega}(w,\nabla v)\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}(w,\nu)\,v\,dS-\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}w\,v\,dx. \tag{19}$$

Якщо $z\in W^{1,p}(\Omega)$, $a_i|z_{x_i}|^{p-2}z_{x_i}\in W^{1,p'}(\Omega)$, $i=\overline{1,n}$, то з (19) для всіх $v\in W^{1,p}(\Omega)$ отримаємо формулу

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}a_i|z_{x_i}|^{p-2}z_{x_i}v_{x_i}\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\,v\,dS-\int\limits_{\Omega}\Delta_p^a z\,v\,dx, \tag{20}$$

де $\Delta_p^a z=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i|z_{x_i}|^{p-2}z_{x_i})_{x_i}$, $\frac{\partial z}{\partial\nu_A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|z_{x_i}|^{p-2}z_{x_i}\nu_i$.

Зауваження 3. Нехай K_1 – опукла замкнена множина в $L^2(\Omega)$, $0\in K_1$. Тоді $K_1\cap V$ – опукла замкнена множина в V. Дійсно, опуклість очевидна, а замкненість випливає з неперервного вкладення V в $L^2(\Omega)$ та замкненості K_1. Якщо в теоремі 2 множина K має вигляд $K = K_1 \cap V$, то замість оператора штрафу, що діє з V в V^* можна розглядати звуження на K оператора штрафу, пов'язаного з K_1 і який діє з простору $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ (див. [1, с. 388]).

Далі припускатимемо, що виконується умова

(K): $K = K_1 \cap V$, де $K_1 = \{v \in L^2(\Omega) : \psi_1 \le v \le \psi_2$ майже скрізь в $\Omega\}$, $\psi_1, \psi_2 \in V$.

Теорема 5. *Нехай* $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $p, q \in (1, +\infty)$, $f, f_t \in L^2(Q_{0,T})$, *виконуються умови* ***(A)-(G), (K)***, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap K$, $Au_0 \in L^2(\Omega)$, $a_i|\psi_{j,x_i}|^{p-2}\psi_{j,x_i} \in W^{1,p'}(\Omega)$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1, 2$,

$$\begin{gathered} -\Delta_p^a \psi_1 + c\psi_1 + g|\psi_1|^{q-2}\psi_1 \le 0, \\ -\Delta_p^a \psi_2 + c\psi_2 + g|\psi_2|^{q-2}\psi_2 \ge 0 \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega. \end{gathered} \tag{21}$$

Тоді варіаційна нерівність (1) має сильний розв'язок и такий, що $Au \in L^2(Q_{0,T})$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, $w^{\pm} = \max\{\pm w, 0\}$, $w \in \mathbb{R}$. Враховуючи зауваження 3, замість оператора B в теоремі 2 візьмемо оператор штрафу, пов'язаний з K_1, який діє з $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$, тобто скрізь далі $Bw = (w - \psi_2)^+ - (w - \psi_1)^-$, $w \in L^2(\Omega)$. В теоремах 2, 4 ми показали, що послідовність $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ розв'язків задач (6), (7) збігається до сильного розв'язку u варіаційної нерівності (1).

Візьмемо в (6) $v = e^{2c_0 t} Bu^k(t)$, що законно, та зінтегруємо за $t \in (0, T)$. Матимемо

$$\langle u_t^k + Au^k + kBu^k, e^{2c_0 t} Bu^k \rangle_{U(Q_{0,T})} = \langle f, e^{2c_0 t} Bu^k \rangle_{U(Q_{0,T})}. \tag{22}$$

З умови $u_0 \in K$ одержимо, що $(u_0 - \psi_2)^+ = (u_0 - \psi_1)^- = 0$.

Оскільки ψ_1, ψ_2 не залежать від t, то

$$\int\limits_{Q_{0,T}} u_t^k e^{2c_0t} B u^k dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} [(u^k-\psi_2)_t (u^k-\psi_2)^+ - (u^k-\psi_1)_t (u^k-\psi_1)^-] e^{2c_0t} dxdt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} (|(u^k-\psi_2)^+|^2 + |(u^k-\psi_1)^-|^2) e^{2c_0T} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (|(u_0-\psi_2)^+|^2 + |(u_0-\psi_1)^-|^2) dx -$$

$$- c_0 \int\limits_{Q_{0,T}} (|(u^k-\psi_2)^+|^2 + |(u^k-\psi_1)^-|^2) e^{2c_0t} dxdt \geq$$

$$\geq -c_0 \int\limits_{Q_{0,T}} (|(u^k-\psi_2)^+|^2 + |(u^k-\psi_1)^-|^2) e^{2c_0t} dxdt.$$

Крім того,

$$\langle Au^k, e^{2c_0t} B u^k \rangle_{U(Q_{0,T})} =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n a_i (|u^k_{x_i}|^{p-2} u^k_{x_i} - |\psi_{2,x_i}|^{p-2} \psi_{2,x_i}) [(u^k-\psi_2)^+]_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i |\psi_{2,x_i}|^{p-2} \psi_{2,x_i} [(u^k-\psi_2)^+]_{x_i} + c(u^k-\psi_2)(u^k-\psi_2)^+ +$$

$$+ c\psi_2 (u^k-\psi_2)^+ + g(|u^k|^{q-2}u^k - |\psi_2|^{q-2}\psi_2)(u^k-\psi_2)^+ +$$

$$+ g|\psi_2|^{q-2}\psi_2 (u^k-\psi_2)^+ \Big] e^{2c_0t} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n a_i (|u^k_{x_i}|^{p-2} u^k_{x_i} - |\psi_{1,x_i}|^{p-2} \psi_{1,x_i}) [-(u^k-\psi_1)^-]_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i |\psi_{1,x_i}|^{p-2} \psi_{1,x_i} [-(u^k-\psi_1)^-]_{x_i} - c(u^k-\psi_1)(u^k-\psi_1)^- -$$

$$- c\psi_1 (u^k-\psi_1)^- - g(|u^k|^{q-2}u^k - |\psi_1|^{q-2}\psi_1)(u^k-\psi_1)^- -$$

$$- g|\psi_1|^{q-2}\psi_1 (u^k-\psi_1)^- \Big] e^{2c_0t} dxdt \geq$$

$$\geq \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n a_i |\psi_{2,x_i}|^{p-2} \psi_{2,x_i} [(u^k-\psi_2)^+]_{x_i} + c\psi_2 (u^k-\psi_2)^+ +$$

$$+ g|\psi_2|^{q-2}\psi_2 (u^k-\psi_2)^+ \Big] e^{2c_0t} dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n a_i |\psi_{1,x_i}|^{p-2} \psi_{1,x_i} [(u^k-\psi_1)^-]_{x_i} +$$

$$+ c\psi_1 (u^k-\psi_1)^- + g|\psi_1|^{q-2}\psi_1 (u^k-\psi_1)^- \Big] e^{2c_0t} dxdt +$$

$$+\, c_0 \int\limits_{Q_{0,T}} [|(u^k-\psi_2)^+|^2 + |(u^k-\psi_1)^-|^2] e^{2c_0t} dxdt.$$

Використавши (20), (21) та те, що $u^k|_{\partial\Omega} = \psi_j|_{\partial\Omega} = 0$, отримаємо оцінку

$$\langle Au^k, e^{2c_0t}Bu^k\rangle_{U(Q_{0,T})} \geq$$

$$\geq \int\limits_{Q_{0,T}} (-\Delta_p^a\psi_2 + c\psi_2 + g|\psi_2|^{q-2}\psi_2)(u^k-\psi_2)^+ e^{2c_0t}dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_{0,T}} (-\Delta_p^a\psi_1 + c\psi_1 + g|\psi_1|^{q-2}\psi_1)(u^k-\psi_1)^- e^{2c_0t}dxdt +$$

$$+\, c_0 \int\limits_{Q_{0,T}} [|(u^k-\psi_2)^+|^2 + |(u^k-\psi_1)^-|^2] e^{2c_0t} dxdt \geq$$

$$\geq c_0 \int\limits_{Q_{0,T}} [|(u^k-\psi_2)^+|^2 + |(u^k-\psi_1)^-|^2] e^{2c_0t} dxdt.$$

Тому з (22) та нерівності Гельдера одержимо нерівність

$$k \int\limits_{Q_{0,T}} |Bu^k|^2 e^{2c_0t} dxdt \leq ||fe^{c_0t}; L^2(Q_{0,T})|| \cdot ||e^{c_0t}Bu^k; L^2(Q_{0,T})||.$$

Після нескладних перетворень матимемо оцінку

$$||kBu^k; L^2(Q_{0,T})|| \leq C_4(c_0) \cdot ||f; L^2(Q_{0,T})||. \tag{23}$$

З рівняння (6) отримаємо $Au^k = f - u_t^k - kBu^k \in L^2(Q_{0,T})$. Тому з умов теореми та оцінок (18), (23) випливає існування не залежної від k такої сталої C_5, що

$$\begin{aligned} ||Au^k; L^2(Q_{0,T})||^2 \leq C_5(||f; L^2(Q_{0,T})||^2 + ||f_t; L^2(Q_{0,T})||^2 + \\ + ||f(0) - Au_0; L^2(\Omega)||^2). \end{aligned} \tag{24}$$

Враховуючи оцінку (24), можна вважати, що $Au^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Au$ слабко в $L^2(Q_{0,T})$. $\square$

Означення 3. Розв'язком параболічної варіаційної нерівності (1) у сенсі "майже скрізь", називатимемо такий сильний розв'язок u цієї нерівності, що $\Delta_p^a u \in L^2(Q_{0,T})$.

Зауваження 4. Нехай $L^2_{div}(\Omega) = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in [L^2(\Omega)]^n \ : \ \mathrm{div}\, w \in L^2(\Omega)\}$, $H^{1/2}(\partial\Omega)$ – простір Соболєва з дробовим показником, $H^{-1/2}(\partial\Omega) = [H^{1/2}(\partial\Omega)]^*$, (див. [3, с. 91, 372]). З [3, с. 105, 106, 375] відомо, що якщо $v \in H^1(\Omega)$, $w \in L^2_{div}(\Omega)$, то $v|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $(w|_{\partial\Omega}, \nu) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ в сенсі слідів. Тому для наших функцій v та w з формули (18.31) [3, с. 375] також одержимо формулу (19), в якій інтеграл по $\partial\Omega$ розуміється як дія між $H^{1/2}(\partial\Omega)$ та $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Зрозуміло, що якщо $v \in H^1_0(\Omega)$, то цей інтеграл рівний нулю.

Зауваження 5. Нехай $\widetilde{w} = (a_1|z_{x_1}|^{p-2}z_{x_1}, \quad \dots, \quad a_n|z_{x_n}|^{p-2}z_{x_n})$, де $a_1, \dots, a_n \in C^1(\overline{\Omega})$, $z \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Delta^a_p z \in L^2(\Omega)$. Оскільки $z \in W^{1,p}(\Omega)$, то при $p \leq 2$ отримаємо $p' \geq 2$ і тому $\widetilde{w} \in [L^{p'}(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$, div $\widetilde{w} = \Delta^a_p u \in L^2(\Omega)$. Враховуючи зауваження 4, для всіх $v \in H^1(\Omega)$ можна у (19) замість w підставити $\widetilde{w}$. При цьому отримаємо (20) для наших z і для всіх $v \in H^1(\Omega)$. Нехай $v|_{\partial\Omega} = 0$. Тоді ця формула набуде вигляду

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i|z_{x_i}|^{p-2}z_{x_i}v_{x_i}\, dx = \int\limits_{\Omega} (-\Delta^a_p z)\, v\, dx. \tag{25}$$

Якщо $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $p \leq 2$, то простір $H^1_0(\Omega)$ щільний в V. Тому, використовуючи зліва в формулі (25) граничний перехід в просторі $W^{1,p}(\Omega)$, а справа – в $L^2(\Omega)$, отримаємо виконання (25) для всіх $v \in V$ і всіх $z \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Delta^a_p z \in L^2(\Omega)$.

Визначимо оператори

$$A_0 : X \to X^*, , \ C : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ G : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$$

так:

$$\langle A_0 w, v\rangle_X = \textstyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}v_{x_i}dx,\ w, v \in X,$$

$$(Cz)(x) = c(x)z(x),\ x \in \Omega,\ z \in L^2(\Omega),$$

$$(Gy)(x) = g(x)|y(x)|^{q-2}y(x),\ x \in \Omega,\ y \in L^q(\Omega).$$

Теорема 6. *Нехай* $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $p \leq 2$, $q \leq 2$, *виконуються всі умови теореми 5 і* $a_1, \dots, a_n \in C^1(\overline{\Omega})$. *Тоді варіаційна нерівність (1) має розв'язок u у сенсі майже скрізь і він задовольняє нерівність*

$$(u_t - \Delta^a_p u + cu + g|u|^{q-2}u - f)(v - u) \geq 0 \quad \textit{м. с. в} \quad Q_{0,T} \tag{26}$$

для всіх $v \in L^2(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ *майже для всіх* $t \in (0,T)$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, u – сильний розв'язок варіаційної нерівності (1), знайдений в теоремі 5. Тоді $u \in U(Q_{0,T})$, $Au \in L^2(Q_{0,T})$. Оскільки $Au = A_0u + Cu + Gu$, і $Cu \in L^2(Q_{0,T})$, $Gu \in L^{q'}(Q_{0,T}) \subset L^2(Q_{0,T})$ при $q \le 2$, то $A_0u \in L^2(Q_{0,T})$. Пам'ятаючи, що $u|_{\partial\Omega} = 0$, матимемо, що $A_0u = -\Delta_p^a u$. Тоді в формулі (20) можна взяти $z = u(t)$. Тому з (17), зауваження 5 та (20) отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u_t - \Delta_p^a u + cu + g|u|^{q-2}u - f)(v-u)dxdt \ge 0 \qquad (27)$$

для всіх $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, та всіх $v \in U(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, $v \in [U(Q_{0,T})]^*$, а тому і для всіх $v \in L^2(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Нехай в (27) $t_1 = 0$, $t_2 = T$. Позначимо підінтегральний вираз в цій нерівності через $\xi = \xi(x,t;u,v)$. Нехай $z \in L^2(Q_{0,T})$, $z(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Для майже всіх точок $(x_0,t_0) \in Q_{0,T}$ (ці точки називаються точками Лебега функції ξ) з [18, с. 68] випливає існування такої послідовності околів цієї точки $\{O^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset Q_{0,T}$, діаметр яких прямує до нуля при $j \to \infty$, що

$$\frac{1}{\operatorname{mes} O^j} \int\limits_{O^j} \xi(x,t;u,z)dxdt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \xi(x_0,t_0;u,z). \qquad (28)$$

Візьмемо в отриманій з (27) нерівності $v = \chi_{O^j}z + (1-\chi_{O^j})u$, $j \in \mathbb{N}$, що законно, бо K – опукла множина. Тут χ_{O^j} – характеристична функція множини Q_j. Оскільки $v - u = \chi_{O^j}z + (1-\chi_{O^j})u - u = \chi_{O^j}(z-u)$, то нерівність (27) набуде вигляду $\int_{O^j} \xi(x,t;u,z)dxdt \ge 0$. Поділивши її на $\operatorname{mes} O^j$, спрямувавши $j \to \infty$ та використавши формулу (28), одержимо нерівність $\xi(x_0,t_0;u,z) \ge 0$, яка з точністю до перепозначень співпадає з (26). $\square$

Приклад. Нехай виконуються умови теореми 5, u – сильний розв'язок нерівності (1), $\Psi_j = \{(x,t) \in Q_{0,T} \;:\; u(x,t) = \psi_j(x)\}$, $j = 1,2$. Тоді при виконанні додаткових умов, як і в [1, с. 293], можна показати, що u є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \Delta_p^a u + cu + g|u|^{q-2}u = f \quad \text{в} \quad Q_{0,T} \setminus (\Psi_1 \cup \Psi_2),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T), \qquad u|_{t=0} = u_0,$$

Зауваження 6. Існування слабкого розв'язку параболічної варіаційної нерівності типу (1) при $c \equiv 0$, $q = p$ встановлено в [1]. Якщо $c \equiv 0$, $q = p > 2$, то в [5] показано існування сильного розв'язку нерівності (1), та знайдено умови його додаткової гладкості, схожі до умов теореми 5. Скінченність часу стабілізації розв'язку нерівності (1) при $c \equiv 0$, $q \equiv 0$, $p = p(x)$ отримано в [13], а для деякого узагальнення нерівності (1), але з $q \equiv 0$ – в [12].

Висновки.

У даній роботі розглянуто деяку нелінійну параболічну варіаційну нерівність в слабкому формулюванні. Встановлено умови існування розв'язку цієї нерівності. Показано, що за певних умов на коефіцієнти нерівності розв'язок стабілізується за скінченний проміжок часу. Досліджено залежність зміни гладкості розв'язку нерівності при накладанні додаткових умов на вихідні дані задачі.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. – М.: Мир. – 1972. – 608 с.
2. *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. – К.: Наук. думка. – 1985. – 184 с.
3. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. *Лавренюк С.П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, №10. – С. 1-5.
5. *Garroni M. G., Vivaldi M. A.* Regularite de la solution forte de problemes non lineaires d'evolution // Czechoslovak Math. J. – 1979. – 29 (104). – P. 430-450.
6. *Антонцев С.Н.* О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений //Динамика жидкости со свободными границами. – 1979. – Вып. 40. – С. 114-122.
7. *Antontsev S.N., Shmarev S.I.* A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Analysis. – 2005. – Vol. 60 – P. 515-545.
8. *Шишков А. Е.* Эволюция носителя решения с неограниченой энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения произвольного порядка. // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186, №12. – С. 151-172.
9. *Тедеев А. Ф.* Начально краевые задачи для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Диссертация на соискание ученой степ. доктора физ.-мат. наук. – Донецк. – 1998. – 252 с.

10. *Brezis H., Friedman A.* Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities // Ill. J. Math. – 1976. – Vol.20. – P. 82-97.
11. *Diaz J.I., Mossino J.* Inegalite isoperimetrique dans un probleme d'obstacle parabolique // C. r. Acad. Sc. Paris. – Serie 1. – 1987. – Vol.305. – P. 737-740.
12. *Бугрій О.М., Панат О.Т.* Деякі властивості розв'язків параболічних варіаційних нерівностей зі змінним степенем нелінійності. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, №2. – С. 99-107.
13. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності. // Математичні студіі. – 2005. – Т.24, №2. – С. 167-172.
14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М.: Мир. - 1978. - 336 с.
15. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
16. *Бугрій О.М., Лавренюк С.П.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, N7. – С. 867-878.
17. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. – 1988. – 304 с.
18. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир. – 1972. – 414 с.

вул. Університетська 1,
ЛНУ ім. І.Франка,
79000, Львів, Україна
ol_buhrii@i.ua

Отримано 22.02.07