

УДК 539.3:534.1

©2014. И.А. Глухов, В.И. Сторожев

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУКТУРЕ “ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ МЕЖДУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ”

Для волноводной структуры в виде трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя идеально контактирующими с ним однотипными по физико-механическим свойствам трансверсально-изотропными полупространствами, построена аналитическая форма трансцендентного дисперсионного соотношения, описывающего распространение локализованных продольно-сдвиговых упругих волн с антисимметричными по толщинной координате колебательными перемещениями. Получен ряд результатов качественного асимптотического и численного анализа дисперсионного соотношения. Представлены результаты расчетов характеристик нескольких низших действительных ветвей дисперсионных спектров для рассматриваемых волноводных структур из реальных геоматериалов.

**Ключевые слова:** *трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами, антисимметричные локализованные продольно-сдвиговые упругие волны, трансцендентные дисперсионные уравнения, волноводы с компонентами из геоматериалов.*

**Введение.** Теоретические исследования спектров и свойств локализованных волн деформаций в волноводной структуре в виде трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя идеально контактирующими с ним однотипными по физико-механическим свойствам трансверсально-изотропными полупространствами, представляют интерес в связи с вопросами совершенствования геоакустических технологий и методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых [4, 8, 9]. Фрагментарное исследование этой проблемы осуществлено без учета различных типов анизотропии физико-механических свойств компонентов подобных волноводов. В частности, в работах [2, 6, 7] представлены численно-аналитические исследования процессов распространения локализованных упругих волн в изотропном слое, заключенном между однотипными изотропными полупространствами при условии идеального механического контакта составляющих рассматриваемой волноводной структуры. В [3] рассмотрена волноводная структура, образуемая тонким анизотропным слоем, заключенным между двумя однотипными изотропными слоями произвольной толщины, что в ситуации неограниченно увеличивающейся толщины слоев позволяет интерпретировать волновод как слой, контактирующий с полупространствами. В [5] представлены сугубо теоретические аналитические результаты исследований, посвященных формулировке дисперсионных соотношений для волновода в виде заключенного между полупространствами слоя, материалы которых принадлежат произвольному классу анизотропии. При этом для реальных геоструктур, образующих волновод рассматриваемого типа, составленный из осадочных либо вулканических пород, учет поперечной анизотропии является важным

элементом адекватности используемых моделей.

Целью настоящей работы является построение аналитической формы трансцендентного дисперсионного соотношения, описывающего распространение локализованных продольно-сдвиговых упругих волн с антисимметричными по толщинной координате слоя колебательными перемещениями, в случае идеального механического контакта компонентов волновода.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается волновод, занимающий в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = h$  безразмерных прямоугольных координатах  $Ox_1x_2x_3$  область

$$V_\Sigma = V^{(H_+)} \cup V^{(L)} \cup V^{(H_-)},$$

где  $V^{(H_+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h/2\}$ ,  $V^{(H_-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h/2\}$ ,  $V^{(L)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\}$ . Компоненты волновода составлены из трансверсально-изотропных материалов с осями упругой симметрии, коллинеарными  $Ox_3$ . Физико-механические свойства полупространств  $V^{(H_+)}$  и  $V^{(H_-)}$  идентичны и отличаются от физико-механических свойств слоя  $V^{(L)}$ . Материалы компонентов волновода характеризуются модулями упругости  $c_{ij}^{(L)}$  и  $c_{ij}^{(H_+)} = c_{ij}^{(H_-)} = c_{ij}^{(H)}$ , отнесенными к нормирующему параметру  $c_*$ , а также плотностями  $\rho^{(L)}$  и  $\rho^{(H_+)} = \rho^{(H_-)} = \rho^{(H)}$ . Анализуются процессы распространения в данном волноводе антисимметричных по толщине слоя гармонических упругих волн  $P - SV$  типа вдоль произвольно ориентированного направления в его плоскости. В качестве такого направления без ограничения общности выбирается координатное направление  $Ox_1$ . Рассматриваемая модель распространения локализованных волн описывается краевой задачей, включающей системы уравнений волнового деформирования для всех компонентов волновода

$$L_{j1}^{(\xi)} u_1^{(\xi)}(x_1, x_3, t) + L_{j2}^{(\xi)} u_3^{(\xi)}(x_1, x_3, t) = 0 \quad (j = 1, 2; \xi = L, H_+, H_-), \quad (1)$$

и краевыми условиями их идеального механического контакта

$$\begin{aligned} u_s^{(H_-)}(x_1, -h/2, t) &= u_s^{(L)}(x_1, -h/2, t), & \sigma_{3s}^{(H_-)}(x_1, -h/2, t) &= \sigma_{3s}^{(L)}(x_1, -h/2, t), \\ u_s^{(H_+)}(x_1, h/2, t) &= u_s^{(L)}(x_1, h/2, t), & \sigma_{3s}^{(H_+)}(x_1, h/2, t) &= \sigma_{3s}^{(L)}(x_1, h/2, t), \end{aligned} \quad (2)$$

в которых

$$L_{11}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) = c_{11}^{(\xi)} \partial_1^2 + c_{44}^{(\xi)} \partial_3^2 + \rho^{(\xi)} \partial_t^2,$$

$$L_{22}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) = c_{44}^{(\xi)} \partial_1^2 + c_{33}^{(\xi)} \partial_3^2 + \rho^{(\xi)} \partial_t^2,$$

$$L_{12}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) = L_{21}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) = (c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)}) \partial_1 \partial_3,$$

$$\partial_s = \partial/\partial x_s \quad (s = 1; 3), \quad \partial_t = \partial/\partial t,$$

$u_1^{(\xi)}(x_1, x_3, t)$ ,  $u_3^{(\xi)}(x_1, x_3, t)$  – безразмерные компоненты отнесенного к  $R_*$  комплексного вектора волновых упругих перемещений,  $\sigma_{ij}^{(\xi)}$  – отнесенные к  $c_*$  нормированные компоненты тензора динамических напряжений.

**2. Построение основного дисперсионного соотношения.** Для составляющих вектора волновых динамических перемещений в компонентах волновода с учетом идентичности свойств вмещающих полупространств вводятся исходные представления

$$\begin{aligned} u_1^{(H+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\ u_3^{(H+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t); \\ u_1^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(L)} \sinh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{21}^{(L)} \sinh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t), \\ u_3^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(L)} \cosh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{23}^{(L)} \cosh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t); \\ u_1^{(H-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\ u_3^{(H-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t); \\ E(x_1, t) &= \exp[-i(\omega t - kx_1)], \end{aligned} \quad (3)$$

в которых  $\alpha_j^{(\xi)} = (-b^{(\xi)} + (-1)^j((b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)})^{1/2})/(2a^{(\xi)})$  – корни характеристических полиномов

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + b^{(\xi)}/a^{(\xi)}(\alpha^{(\xi)})^2 + c^{(\xi)}/a^{(\xi)} = 0 \quad (4)$$

с коэффициентами вида

$$\begin{aligned} a^{(\xi)} &= c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}, \quad b^{(\xi)} = (c_{33}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})(\Omega^{(\xi)})^2 + ((c_{13}^{(\xi)})^2 - 2c_{13}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)} - c_{11}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)})k^2, \\ c^{(\xi)} &= ((\Omega^{(\xi)})^2 - c_{11}^{(\xi)} k^2)((\Omega^{(\xi)})^2 - c_{44}^{(\xi)} k^2), \\ (\Omega^{(\xi)})^2 &= \rho^{(\xi)} \omega^2 R_*^2 / c_* = (\rho^{(\xi)} / \rho_*) \Omega^2 \quad (\xi = L; H). \end{aligned}$$

Подстановка (3) в дифференциальные уравнения (1) позволяет записать соотношения

$$\begin{aligned} A_{13}^{(H)} &= \delta_{13}^{(H)} A_{11}^{(H)}, \quad A_{23}^{(H)} = \delta_{23}^{(H)} A_{21}^{(H)}, \quad A_{13}^{(L)} = \delta_{13}^{(L)} A_{11}^{(L)}, \quad A_{23}^{(L)} = \delta_{23}^{(L)} A_{21}^{(L)}, \\ \delta_{13}^{(H)} &= [((\Omega^{(H)})^2 - c_{11}^{(H)} k^2 - c_{44}^{(H)} (\alpha_1^{(H)})^2) / (ik(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)}) \alpha_1^{(H)} \delta^{(H)})], \\ \delta_{23}^{(H)} &= [(ik(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)}) \alpha_1^{(H+)} \delta^{(H)}) / ((\Omega^{(H)})^2 - c_{44}^{(H)} k^2 - c_{33}^{(H)} (\alpha_1^{(H)})^2)], \\ \delta_{13}^{(L)} &= [((\Omega^{(L)})^2 - c_{11}^{(L)} k^2 - c_{44}^{(L)} (\alpha_1^{(L)})^2) / (ik(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)}) \alpha_1^{(L)} \delta^{(L)})], \\ \delta_{23}^{(L)} &= [(ik(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)}) \alpha_1^{(L)} \delta^{(L)}) / ((\Omega^{(L)})^2 - c_{44}^{(L)} k^2 - c_{33}^{(L)} (\alpha_1^{(L)})^2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Использование соотношений (3) в краевых условиях (2) порождает однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных коэффициентов  $A_{11}^{(H)}$ ,  $A_{21}^{(H)}$ ,  $A_{11}^{(L)}$ ,  $A_{21}^{(L)}$  с матрицей  $\|d_{n,m}(\Omega, k)\|$ , имеющей ненулевые элементы вида

$$\begin{aligned} d_{1,m} &= -c_m, & d_{1,m+2} &= e_m^{(H)}, & d_{2,m} &= -\delta_{m3}^{(L)} s_m, & d_{2,m+2} &= \delta_{m3}^{(H)} e_m^{(H)}, \\ d_{3,m} &= c_{44}^{(L)} (ik\delta_{m3}^{(L)} + \alpha_m^{(L)}) s_m, & d_{3,m+2} &= c_{44}^{(H)} (ik\delta_{m3}^{(H)} - \alpha_m^{(H)}) e_m^{(H)}, \\ d_{4,m} &= -(c_{13}^{(L)} ik + c_{33}^{(L)} \delta_{m3}^{(L)} \alpha_m^{(L)}) c_m, \\ d_{4,m+2} &= (c_{13}^{(H)} ik - c_{33}^{(H)} \alpha_m^{(H)} \delta_{m3}^{(H)}) e_m^{(H)} \quad (m = \overline{1, 2}), \\ e_j^{(H)} &= \exp(-\alpha_j^{(H)} h/2), & c_j &= \sinh(\alpha_j^{(L)} h/2), & s_j &= \cosh(\alpha_j^{(L)} h/2). \end{aligned}$$

При этом равенство

$$\det \|d_{n,m}(\Omega, k)\| = 0 \quad (6)$$

и является искомым дисперсионным соотношением, связывающим параметры нормированного безразмерного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$ .

**3. Качественное исследование свойств дисперсионного соотношения.** Анализ областей существования локализованных бегущих волн исследуемого типа на множестве изменения параметров  $(\Omega, k)$  при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств связан с качественным исследованием распределений корней характеристических полиномов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций волновых перемещений в компонентах волновода, зависящих от толщиной координаты  $x_3$ . Описываемая схема анализа типологии корней характеристических полиномов заключается в делении области  $\{\Omega \in [0, \infty), k \in [0, \infty)\}$  на секторы с границами, уравнения которых следуют из условий  $c^{(\xi)}(\Omega, k) = 0$  и имеют вид  $\Omega = (c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ ,  $\Omega = (c_{44}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ . Выделенные таким образом секторы являются областями постоянства типа корней характеристических полиномов. Они классифицируются как секторы вида 1, в которых  $\Omega > (c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ ; секторы вида 2, в которых  $(c_{44}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k < \Omega < (c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$  и секторы вида 3, в которых  $\Omega < (c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ . В подобласти  $(\Omega, k)$  потенциального существования локализованных бегущих волн исследуемого типа значения корней  $\alpha_j^{(H)}$  характеристических полиномов вида (4) должны быть действительными. Для оценки типа корней в секторах первого вида анализируется асимптотический вариант характеристического полинома (4) при  $\Omega \gg k$ , имеющего вид

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + \Omega^2 ((c_{33}^{(\xi)})^{-1} + (c_{44}^{(\xi)})^{-1}) (\alpha^{(\xi)})^2 + \Omega^4 (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^{-1} = 0.$$

Из его анализа следует, что в секторах вида 1 корни характеристических полиномов имеют мнимые значения. Тип корней полиномов (4) в секторах вида 3 может быть установлен путем анализа асимптотического варианта характеристического полинома

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + k^2((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2)(c_{33}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)})^{-1}(\alpha^{(\xi)})^2 + k^4c_{11}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)} = 0$$

при  $\Omega \ll k$ . Устанавливаемый тип зависит от знакоопределенности комбинаций упругих постоянных

$$R_1(c_{ij}^{(\xi)}) = ((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2)/(c_{33}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)})^2 - 4c_{11}^{(\xi)}/c_{33}^{(\xi)},$$

$$R_2^{(\pm)}(c_{ij}^{(\xi)}) = -((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2)/(c_{33}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)}) \pm (R_1(c_{ij}^{(\xi)}))^{1/2}.$$

В частности, при условиях  $R_1(c_{ij}^{(\xi)}) \geq 0$ ,  $R_2^{(+)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$ ,  $R_2^{(-)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$  характеристические полиномы в секторах третьего вида имеют действительные корни, что является необходимым условием для существования анализируемых локализованных волн.

**4. Результаты численных исследований.** Качественный анализ волноводных свойств для рассматриваемой структуры, а также расчеты действительных ветвей дисперсионных спектров с использованием дисперсионного соотношения (6) реализованы для волноводов, составленных из реальных трансверсально-изотропных геоматериалов с техническими упругими постоянными, приведенными в [1]. Значения независимых нормированных модулей упругости  $c_{ij}$  и параметров плотности  $\rho$  с  $\rho_* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> для этих материалов представлены в табл. 1.

Для рассматриваемых волноводов возможны следующие классифицируемые типы взаимозависимостей между характеристиками скоростей объемных волн продольного  $c_{l\xi}$  и сдвигового  $c_{t\xi}$  типа в слое (L) и полупространстве (H): тип А –  $c_{tL} < c_{lL} < c_{tH} < c_{lH}$ ; тип В –  $c_{tL} < c_{tH} < c_{lL} < c_{lH}$ ; тип С –  $c_{tL} < c_{tH} < c_{lH} < c_{lL}$ ; тип D –  $c_{tH} < c_{lH} < c_{tL} < c_{lL}$ ; тип E –  $c_{tH} < c_{tL} < c_{lH} < c_{lL}$ ; тип F –  $c_{tH} < c_{tL} < c_{lL} < c_{lH}$ . В табл. 2 отражены результаты анализа типологии таких зависимостей для волноводов с различными сочетаниями геоматериалов слоя и вмещающих полупространств из числа приведенных табл. 1.

Расчеты подмножеств низших ветвей дисперсионных спектров локализованных антисимметричных бегущих волн осуществлены для четырех видов волноводов рассматриваемой геометрической структуры, относящихся к типу А по представляемым в табл. 2 и табл. 3 сочетаниям физико-механических свойств компонентов. На рис. 1–4 в одинаковых диапазонах изменения приведенной частоты и нормированного волнового числа соответственно приведены фрагменты действительных ветвей спектров для волновода 1 с компонентами “песчаный сланец (L) – известняк 3 (H)”; для волновода 2 с компонентами “песчаный сланец (L) – базальт 1 (H)”; для волновода 3 с компонентами “песчаный сланец (L) – песчаник 3 (H)”; для волновода 4 с компонентами “песчаник 1 (L) – известняк 3 (H)”.

Таблица 1.

| Геоматериал |                        | $\rho \cdot 10^{-3}$ кг / м <sup>3</sup> | $c_{ij} \cdot 10^{-10}$ Па |          |          |          |          |
|-------------|------------------------|--|----------------------------|----------|----------|----------|----------|
|             |                        |  | $c_{11}$                   | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{33}$ | $c_{44}$ |
| 1           | Хлористый сланец       | 2,95                                     | 9,19                       | 2,03     | 3,14     | 14,76    | 3,60     |
| 2           | Базальт 1              | 2,90                                     | 3,68                       | 0,53     | 0,84     | 5,04     | 1,60     |
| 3           | Базальт 2              | 2,90                                     | 4,26                       | 0,53     | 0,72     | 4,52     | 1,80     |
| 4           | Песчанистый сланец     | 2,95                                     | 0,66                       | 0,29     | 0,19     | 1,15     | 0,12     |
| 5           | Песчаник 1             | 2,30                                     | 1,09                       | 0,29     | 0,39     | 1,79     | 0,52     |
| 6           | Известняк 1            | 2,72                                     | 3,92                       | 1,27     | 0,93     | 4,52     | 1,45     |
| 7           | Мрамор                 | 2,72                                     | 5,30                       | 1,18     | 0,39     | 6,91     | 2,66     |
| 8           | Известняк 2            | 2,72                                     | 4,04                       | 1,16     | 0,94     | 4,30     | 1,45     |
| 9           | Гранит 1               | 2,55                                     | 3,24                       | 0,65     | 0,16     | 3,81     | 1,71     |
| 10          | Песчаник 2             | 2,30                                     | 0,68                       | 0,07     | 0,07     | 0,96     | 0,37     |
| 11          | Известняк 3            | 2,72                                     | 3,76                       | 0,96     | 0,85     | 4,10     | 1,45     |
| 12          | Гранит бырый           | 2,55                                     | 5,97                       | 1,37     | 1,76     | 7,19     | 2,56     |
| 13          | Гранит серый           | 2,55                                     | 5,36                       | 1,27     | 1,13     | 7,06     | 2,53     |
| 14          | Гранит мелкозернистый  | 2,55                                     | 10,51                      | 3,71     | 4,12     | 10,92    | 3,28     |
| 15          | Гранит крупнозернистый | 2,55                                     | 5,56                       | 1,53     | 1,49     | 5,65     | 2,04     |
| 16          | Гранит красно-серый    | 2,55                                     | 6,19                       | 1,55     | 1,01     | 6,25     | 2,53     |
| 17          | Гранит свежий          | 2,55                                     | 6,81                       | 1,67     | 1,70     | 7,50     | 2,57     |
| 18          | Песчаник 3             | 2,30                                     | 4,52                       | 0,67     | 0,68     | 4,70     | 1,92     |
| 19          | Песчаник 4             | 2,30                                     | 4,83                       | 0,55     | 0,65     | 5,33     | 2,10     |

Обнаруживаемым характерным свойством рассчитанных распределений является высокая степень зависимости топологии низших ветвей в спектрах бегущих локализованных волн от типа материала компоненты  $L$ . В рассматриваемом диапазоне изменения частоты и волнового числа рассчитанные спектры для волноводов первого и второго видов содержат по шесть фрагментов ветвей с различающимися частотами запираения и относительными длинами волн на этих частотах; для волновода вида 3 – семь фрагментов действительных ветвей спектра; для волновода вида 4 – три фрагмента действительных ветвей. Проведенный численный анализ позволяет выделить частотные диапазоны, в которых для каждого из волноводов рассматриваемого типа существует единственная, принадлежащая низшей моде спектра, локализованная бегущая волна, наиболее востребованная в схемах геоакустической диагностики. Данные диапазоны ограничены частотами запираения для первой и второй мод бегущих локализованных волн.

Для волновода первого вида таким диапазоном в приведенных частотах приблизительно является диапазон  $\Omega \in (0, 6; 1, 2)$ ; для волновода второго вида – диапазон  $\Omega \in (0, 4; 1, 4)$ ; для волновода третьего вида – диапазон  $\Omega \in (1, 2; 1, 9)$ ; для волновода четвертого вида – диапазон  $\Omega \in (1, 0; 1, 4)$ .

Таблица 2.

| Классификация волноводов с сочетаниями материалов слоя (L) и полупространств (H) в соответствии с таблицей 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L  | H |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1  | - | E | E | D | D | E | E | E | E |
| 2  | B | - | B | D | D | E | B | F | C |
| 3  | B | E | - | D | D | E | B | E | E |
| 4  | A | A | A | - | A | A | A | A | A |
| 5  | A | A | A | D | - | A | A | A | A |
| 6  | B | B | B | D | D | - | B | B | C |
| 7  | B | E | E | D | D | E | - | E | E |
| 8  | B | C | B | D | D | E | B | - | C |
| 9  | B | F | B | D | D | F | B | F | - |
| 10   | A | A | A | D | B | A | A | A | A |
| 11   | B | B | B | D | D | F | B | B | C |
| 12   | B | E | E | D | D | E | E | E | E |
| 13   | B | E | E | D | D | E | E | E | E |
| 14   | B | E | E | D | D | E | C | E | E |
| 15   | B | E | E | D | D | E | E | E | E |
| 16   | B | E | E | D | D | E | E | E | E |
| 17   | B | E | E | D | D | E | B | E | E |
| 18   | B | E | E | D | D | E | C | E | E |
| 19   | B | E | E | D | D | E | C | E | E |

Таблица 3.

| Классификация волноводов с сочетаниями материалов слоя (L) и полупространств (H) в соответствии с таблицей 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| L  | H  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 1  | D  | E  | E  | E  | E  | E  | E  | E  | E  | E  |
| 2  | D  | E  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  |
| 3  | D  | E  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  |
| 4  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  |
| 5  | E  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  |
| 6  | D  | C  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  |
| 7  | D  | E  | B  | B  | F  | B  | B  | E  | F  | F  |
| 8  | D  | E  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  |
| 9  | D  | F  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  |
| 10   | -  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  | A  |
| 11   | D  | -  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  | B  |
| 12   | D  | E  | -  | E  | E  | F  | F  | E  | E  | E  |
| 13   | D  | E  | B  | -  | F  | F  | F  | E  | E  | F  |
| 14   | D  | E  | B  | C  | -  | B  | B  | C  | C  | B  |
| 15   | D  | E  | C  | C  | E  | -  | B  | E  | E  | E  |
| 16   | D  | E  | C  | C  | E  | E  | -  | E  | E  | E  |
| 17   | D  | E  | B  | B  | F  | B  | B  | -  | B  | B  |
| 18   | D  | E  | B  | B  | F  | B  | B  | E  | -  | B  |
| 19   | D  | E  | B  | C  | E  | B  | B  | E  | E  | -  |

При этом, к примеру, технические частоты волн, приблизительно ограничивающие данные диапазоны для рассматриваемых волноводов с толщиной вменяемого слоя 0,6 м, соответственно равны: 503 Гц и 1006 Гц для волновода первого вида, 335 Гц и 1173 Гц для волновода второго вида, 1006 Гц

и 1592 Гц для волновода третьего вида, 838 Гц и 1173 Гц для волновода четвертого вида.

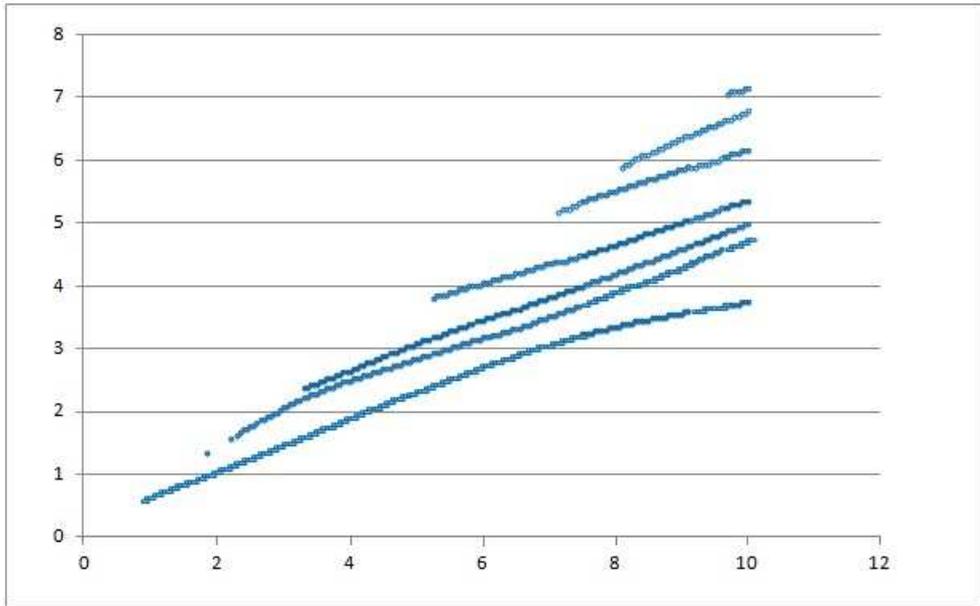


Рис. 1

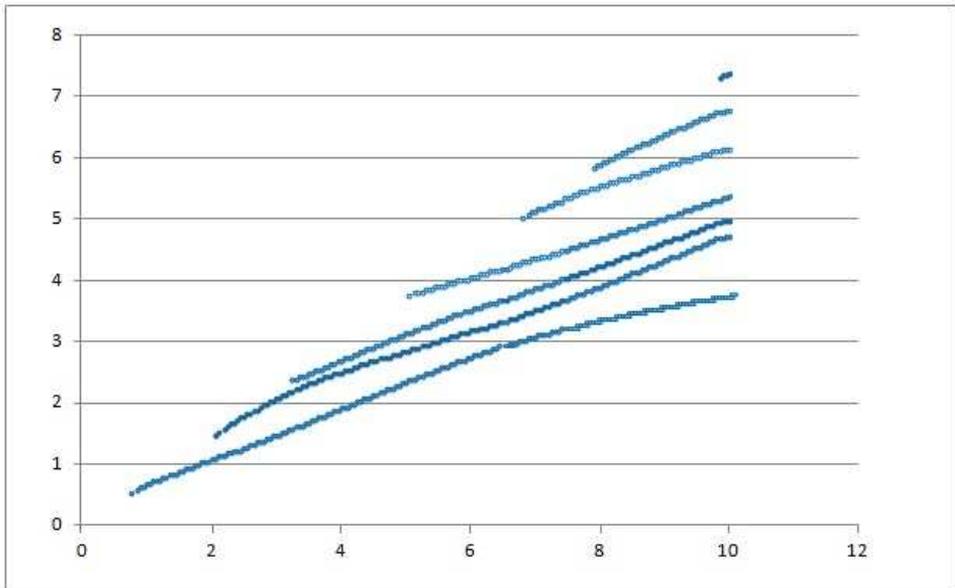


Рис. 2

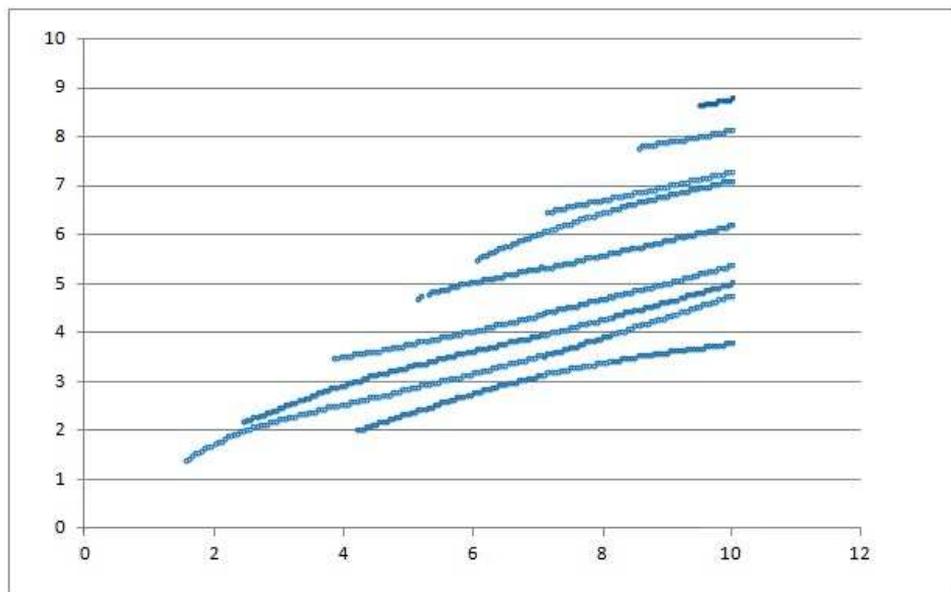


Рис. 3

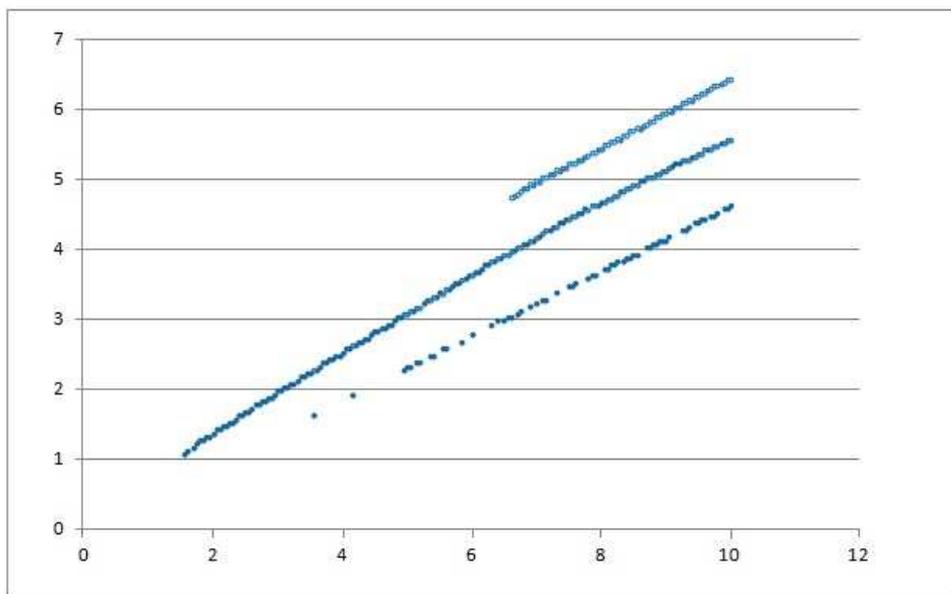


Рис. 4

1. Аннин Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2009. – **XII**, №3(39). – С. 5–14.
2. Григорян В.Г., Вендлер Л. Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела. – 1991. – **33**, №7. – С. 2120–2128.
3. Datta S.K. On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – **108**. – P. 2005–2011.
4. Hoven J. M. Acoustic waves in finely layered media // Geophysics. – 1995. – **7.60**, №4. – P. 1217–1221.
5. Ting T.C.T. Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves // Math. and mech. of solids. – 2009. – **14**, №1–2. – P. 52–71.
6. Velasco V.R., Djafari-Rouhani B. Dynamics of systems with two interfaces // Phys. Rev. – 1982. – В **26**. – P. 1929–1941.
7. Wendler L., Grigoryan V.G. Acoustic interface waves in sandwich structures // Surface Science. – 1988. – **206**. – P. 203–224.
8. White J.E. Computed wave forms in transversely isotropic media // Geophysics. – 1982. – **47**. – P. 771–783.
9. White J.E. Underground sound. application of seismic waves. – Elsevier Science Publishers B.V., 1983. – 270 p.

I.A. Glukhov, V.I. Storozhev

### Localized antisymmetric waves in structure “transversely isotropic layer between the transversely isotropic half-spaces”

In the view of the functional determinant of the fourth order, an analytical form is obtained for the transcendental dispersion relation describing the properties of localized symmetrical longitudinal-shear elastic waves along a transversely-isotropic layer between two transversely-isotropic half-spaces with identical physical and mechanical properties. Some qualitative results of asymptotic analysis of dispersion equations are obtained. Results of calculation of low real branches of dispersion spectrums for considered geomaterials waveguides are presented.

**Keywords:** *transversely isotropic layer between two transversely isotropic half-spaces, localized longitudinal-shear elastic waves, transcendental dispersion relations, waveguides with components of geomaterials.*

I.A. Глухов, В.И. Сторожев

### Локалізовані антисиметричні хвилі в структурі “трансверсально-ізоотропний шар поміж трансверсально-ізоотропних півпросторів”

В аналітичній формі функціонального визначника четвертого порядку визначено дисперсійну функцію, яка описує закономірності поширення симетричних за товщиною координатою локалізованих поздовжньо-зсувних пружних хвиль у трансверсально-ізоотропному шарі проміж двома ідеально контактуючими з ним однотипними за фізико-механічними властивостями трансверсально-ізоотропними півпросторами. Подано окремі результати якісного асимптотичного аналізу дисперсійного співвідношення та результати розрахунків дійсних гілок дисперсійних спектрів для декількох типів розглянутих хвилеводних структур, утворених з реальних геоматеріалів.

**Ключові слова:** *трансверсально-ізоотропний шар проміж трансверсально-ізоотропними півпросторами, антисиметричні локалізовані поздовжньо-зсувні пружні хвилі, трансцендентні дисперсійні рівняння, хвилеводи з компонентами із геоматеріалів.*

Донецкий национальный ун-т

glukhov91@yandex.ru

Получено 04.03.14