УДК 517.9

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучены начально-краевые задачи для уравнений вида

$$b(x,t)\,x^{\alpha}u_t - u_{xx} + c(x,t)\,u_x + d(x,t)\,u = f(x,t),$$

$$u_t - b(x,t)\,x^{\alpha}u_{xx} + c(x,t)\,u_x + d(x,t)\,u = f(x,t)$$

в области $Q_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $b \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Получены коэрцитивные оценки решений в некоторых весовых гельдеровских пространствах функций.

В работе изучаются начально-краевые задачи для уравнений вида

$$b(x,t)\,x^{\alpha}u_t - u_{xx} + c(x,t)\,u_x + d(x,t)\,u = f(x,t). \tag{1}$$

$$u_t - b(x,t)\,x^{\alpha}u_{xx} + c(x,t)\,u_x + d(x,t)\,u = f(x,t) \tag{2}$$

в области $Q_T = \{(x,\ t),\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $b \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Обширная библиография по этому вопросу приведена в [1]. В настоящей работе приведен метод получения точных оценок решений в классах гельдеровских функций с весом и доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для уравнений (1), (2). Эти результаты были использованы нами при изучении задач со свободной границей для квазилинейных вырождающихся параболических и полуэллиптических уравнений.

1. Рассмотрим в области Q_T задачу, состоящую в определении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (1) или (2) и условиям

$$u(a_i,t) = \varphi_i(t),\quad a_1 = 0\quad a_2 = a > 0,\quad i = 1, 2,$$
$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3}$$

При изучении краевой задачи для уравнения (1) подходящим является пространство функций $H_{\alpha}^{2+\beta,\frac{2+\beta}{q}}(\bar{Q}_T)$, которое получается замыканием

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3.

множества бесконечно-дифференцируемых функций по норме

$$\|u\|_{\alpha,\beta}\equiv\max_{\overline{Q}_T}|u|+\langle u\rangle_t^{(2+\beta/q)}+|u_{xx}|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}+|x^\alpha u_t|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}<\infty,$$
$$q=2+\alpha,\quad \beta<\alpha.$$

Введем также пространство

$$H_{-\alpha}^{q+\beta,\frac{q+\beta}{q}}(Q_T)=\{u(x,t):\|u\|_{-\alpha,\beta}\equiv\max_{\overline{Q}_T}|u(x,t)|+|u_t|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}+$$
$$+|x^\alpha u_{xx}|^{(\beta,\beta/q)}<\infty\},\quad q=2-\alpha,\quad 0<\alpha<1,$$

в котором доказывается разрешимость краевой задачи для уравнения (2). При этом $|u|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}=\max_{\overline{Q}_T}|u|+\langle u\rangle_{x,\overline{Q}_T}^{(\beta)}+\langle u\rangle_{t,\overline{Q}_T}^{(\beta/q)}$, а $\langle u\rangle_x^{(\gamma)}$ или $\langle u\rangle_t^{(\gamma)}$ означает константу Гельдера по переменной x или t соответственно (см. [2]). Функции $u(x,t)$ с конечной нормой $|u|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}$ образуют пространство $H^{\beta,\beta/q}(\overline{Q}_T)$. Нам потребуются также пространства функций $\overset{0}{H}{}^{\beta,\beta/q}$, $\overset{0}{H}{}_\alpha^{2+\beta,\frac{2+\beta}{q}}$, $H_{-\alpha}^{q+\beta,\frac{q+\beta}{q}}$, являющиеся подпространствами соответствующих пространств, элементы которых обращаются в нуль при $t=0$ вместе с производной u_t, если она существует.

Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $q=2+\alpha$, $|b|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}+|c|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}+|d|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}\equiv M_1<\infty$, $f\in H^{\beta,\beta/q}(\overline{Q}_T)$, $\varphi_1\in C^{(2+\beta)/q}([0,T])$, $\varphi_2\in C^{1+\beta/q}([0,T])$, $u_0(x)\in C^{2+\beta}([a_1a_2])$, $\beta<\alpha$ и выполнены условия согласования до первого порядка включительно:

$$u(a_i)=\varphi_i(0),\quad i=1,2;\quad -u_0''(0)+c(0,0)\,u_0'(0)+d(0,0)\,u_0(0)=f(0,0);$$
$$b(a_2,0)\,a_2^\alpha\varphi_2'(0)-u_0''(a_2)+c(a_2,0)\,u_0'(a_2)+d(a_2,0)\,u_0(0)=f(a_2,0).$$

Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (1), (3), для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\alpha,\beta}\leqslant C(T,\varepsilon_0,M_1)\,(|f|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}+|\varphi_2|_{[0,T]}^{\left(\frac{2+\beta}{q}\right)}+|\varphi_2|_{[0,T]}^{(1+\beta/q)}|u_0|_{[a_1,a_2]}^{(2+\beta)}).\tag{4}$$

Теорема 2. Пусть $q=2-\alpha$, $0<\dfrac{2\beta}{q}<\alpha<1$, $0<\dfrac{2\beta}{q}<1-\alpha$, коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям теоремы 1 для $q=2-\alpha$, и

$$|b(x,0)|_{[a_1,a_2]}^{(2\beta/q)}+|c(x,0)|_{[a_1,a_2]}^{(2\beta/q)}+|d(x,0)|_{[a_1,a_2]}^{(2\beta/q)}\equiv M_2<\infty.$$

Пусть $f(x,t)\in H^{\beta,\beta/q}(\overline{Q}_T)$, $f(x,0)\in C^{2\beta/q}([a_1,a_2])$, $u_0(x)\in C^{2-\alpha}([a_1,a_2])$, $x^\alpha u_0''\in C^{2\beta/q}([a_1,a_2])$, $\varphi_i\in C^{1+\beta/q}([0,T])$ и выполнены условия согласования до первого порядка включительно:

$$u(a_i)=\varphi_i(0),\quad i=1,2;\quad \varphi_1'(0)-(b(x,0)\,x^\alpha u_0''(x))|_{x=+0}+c(0,0)\,u_0'(0)+$$
$$+d(0,0)\,u_0(0)=f(0,0);\quad \varphi_2'(0)-b(a_2,0)\,a_2^\alpha u_0''(a_2)+c(a_2,0)\,u_0'(a_2)+$$
$$+d(a_2,0)\,u_0(a_2)=f(a_2;0).$$

Тогда задача (2), (3) имеет единственное решение $u(x,t)$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{-\alpha,\beta}\leqslant c(M_1,M_2,\varepsilon_0,T)\{|f|_{\overline{Q}_T}^{(\beta,\beta/q)}+|f(x,0)|_{[a_1,a_2]}^{(2\beta/q)}+$$
$$+|\varphi_1|_{[0,T]}^{(1+\beta/q)}+|\varphi_2|_{[0,T]}^{(1+\beta/q)}+|u_0|_{[a_1,a_2]}^{(2-\alpha)}+|x^\alpha u_0''|_{[a_1,a_2]}^{(2\beta/q)}\}.\tag{5}$$

Отметим, что в формулировке теоремы 2 потребована повышенная гладкость данных задачи при $t = 0$, так как $2\beta/q = 2\beta/(2-\alpha) > \beta$. Это вызвано тем, что при выбранной гладкости начальных условий, коэффициентов уравнения и правой части для точек (x, t) с $x > 0$, как хорошо известно для невырождающихся параболических уравнений, u_t, например, обладает свойством: $\langle u_t\rangle_{t,\bar{Q}_T}^{(\beta/q)} < \infty$. Именно такая оценка гарантируется в (5). Кроме того, эти требования являются достаточными для сведения исходной задачи (2), (3) к задаче в пространстве $\overset{0}{H}{}^{q+\beta \frac{q+\beta}{q}}_{-\alpha}$. Необходимым и достаточным условием такого сведения (и разрешимости задачи (2), (3) в классе $H_{-\alpha}^{q+\beta,(q+\beta)/q}$) является существование функции $W(x, t) \in H_{-\alpha}^{q+\beta,(q+\beta)/q}$ удовлетворяющей условиям: $W(x, 0) = u_0(x)$, $\frac{\partial W}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = b(x, 0)\, x^\alpha u_0''(x) - c(x, 0)\, u_0'(x) - d(x, 0)\, u_0(x) + f(x, 0)$, где $b(x, 0)$, $c(x, 0)$, $d(x, 0)$, $f(x, 0) \in C^\beta([a_1, a_2])$.

2. Доказательство теорем 1 и 2 основывается на изучении следующих модельных задач:

$$x^\alpha u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathcal{D}_T = \{x \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant T\},$$
$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x, 0) = u_0(x); \tag{6}$$

$$u_t - x^\alpha u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathcal{D}_T,$$
$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \tag{7}$$

Получим для решений этих задач интегральные представления. Эти представления аналогичны в обоих случаях, поэтому остановимся только на задаче (7).

Решение уравнения

$$py - x^\alpha y'' = 0, \tag{8}$$

полученного из однородного уравнения в (7) преобразованием Лапласа по t, имеет вид $y(x) = Cx^{1/2} z_{1/q}(i2q^{-1}p^{1/2}x^{q/2})$, $q = 2 - \alpha$, $C = \mathrm{const}$, $z_{1/q}$ — любая цилиндрическая функция. Функция Грина для уравнения (8) имеет вид

$$g_1(x, \xi, p) = \begin{cases} \frac{2}{q} I_{1/q}\left(\frac{2}{q}\sqrt{p}\, px^{q/2}\right) K_{1/q}\left(\frac{2}{q}\sqrt{p}\,\xi^{q/2}\right)\xi^{1/2-\alpha} x^{1/2}, & x < \xi, \\ \frac{2}{q} I_{1/q}\left(\frac{2}{q}\sqrt{p}\,\xi^{q/2}\right) K_{1/q}\left(\frac{2}{q}\sqrt{p}\,x^{q/2}\right)\xi^{1/2-\alpha} x^{1/2}, & x > \xi, \end{cases}$$

и можно убедиться, что $g_1(x, \xi, p)$ есть преобразование Лапласа от функции

$$G_1(x, \xi, t) = 2t^{-1-1/q}(uv)^{1/q} e^{-(u^2+v^2)} I_{1/q}(2uv)\,\xi^{-\alpha},$$
$$u = q^{-1}\xi^{q/2}t^{-1/2}, \quad v = q^{-1}x^{q/2}t^{-1/2}.$$

С помощью функции $G_1(x, \xi, t)$ решение задачи (7) представляется в виде

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G_1(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi + \int_0^\infty G_1(x, \xi, t)\, u_0(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t G_{1\xi}(x, 0, t-\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau \equiv J_1(G_1; f) + J_2(G_1; u_0) + J_3(G_1; \varphi).$$

Для задачи (6) функция Грина имеет вид $G(x, \xi, t) = G_1(x, \xi, t)\,\xi^\alpha$ и имеет место аналогичное представление решения через потенциалы.

Лемма 1. Пусть $f(x,t)\in \overset{0}{H}{}^{\beta,\beta/q}(\bar{Q}_T)$, $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $u_0(0)=(x^\alpha u_0''(x))|_{x=+0}=0$. Тогда

$$\left\langle \frac{\partial J_1}{\partial t}\right\rangle^{(\beta,\beta/q)}+\left\langle x^\alpha\frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2}\right\rangle^{(\beta,\beta/q)}\leqslant C\langle f\rangle^{(\beta,\beta/q)}, \tag{9}$$

$$\left\langle \frac{\partial J_2}{\partial t}\right\rangle_x^{(2\beta/q)}+\left\langle x^\alpha\frac{\partial^2 J_2}{\partial x^2}\right\rangle_x^{(2\beta/q)}\leqslant C\langle x^\alpha u_{0xx}\rangle_x^{(2\beta/q)}, \tag{10}$$

$$\left\langle \frac{\partial J_2}{\partial t}\right\rangle_{t,0\leqslant x\leqslant r}^{(\beta/q)}+\left\langle x^\alpha\frac{\partial^2 J_2}{\partial x^2}\right\rangle_{t,0\leqslant x\leqslant r}^{(\beta/q)}\leqslant Cr^{2\beta/q}\langle x^\alpha u_{0xx}\rangle_x^{(2\beta/q)}, \tag{11}$$

$$\left\langle \frac{\partial J_3}{\partial t}\right\rangle^{(\beta,\beta/q)}+\left\langle x^\alpha\frac{\partial^2 J_3}{\partial x^2}\right\rangle^{(\beta,\beta/q)}\leqslant C\langle \varphi_t\rangle_t^{(\beta/q)}. \tag{12}$$

Схема доказательства леммы 1 приведена ниже. Сейчас покажем, как с помощью оценок (10), (11) свести задачу (2), (3) к отысканию функции из класса $\overset{0}{H}{}^{q+\beta,(q+\beta)/q}_{-\alpha}$. Представим искомую функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+\varphi_1'(0)\,[t+x^{2-\alpha}/(1-\alpha)(2-\alpha)]+u_0(0)-$$
$$-\int_0^x (x-\xi)\,\xi^{-\alpha}F(\xi)\,d\xi+w(x,t),$$

где $\mathcal{F}(x)$ есть финитное продолжение на $[0,\infty)$ с сохранением класса функции $[f(x,0)-d(x,0)\,u_0(x)-c(x,0)\,u_0'(x)-x^\alpha u_0''(x)+b(x,0)\,x^\alpha u_0''(x)]$, $w(x,t)=\int_0^\infty G_1(x,\xi,t)\,w_0(\xi)\,d\xi$, причем $w_0(x)$ есть финитное продолжение на $[0,\infty)$ с сохранением класса функции $u_0(x)-u_0(0)+\int_0^x (x-\xi)\,\xi^{-\alpha}F(\xi)\,d\xi-$ $-\varphi_1'(0)\dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$. Простые вычисления показывают, что в силу условий согласования $w_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, а функция $u_1(x,t)$ есть новое неизвестное из класса $\overset{0}{H}{}^{q+\beta,(q+\beta)/q}_{-\alpha}$ для задачи (2), (3) с $f\in \overset{0}{H}{}^{\beta,\beta/q}$, $\varphi_i\in \overset{0}{C}{}^{1+\beta/q}$, $u_0=0$.

Еще проще сводится к нулевым условиям задача (1), (3), поэтому всюду ниже мы будем считать, что $u_0\equiv 0$, а f и φ_i обладают указанными свойствами.

Лемма 2. Пусть в задаче (6) $f\in \overset{0}{H}{}^{\beta,\beta/q}$, $\varphi\in \overset{0}{C}{}^{2+\beta/q}$, $u_0\equiv 0$, $q=2+\alpha$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)=J_1(G;f)+J_3(G;\varphi)$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\alpha,\beta}\leqslant C(T)\left(|f|^{\beta,\beta/q}+|\varphi|^{\left(\frac{2+\beta}{q}\right)}\right). \tag{13}$$

Лемма 3. Пусть в задаче (7) $f\in \overset{0}{H}{}^{\beta,\beta/q}$, $\varphi\in \overset{0}{C}{}^{1+\beta/q}$, $u_0\equiv 0$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)=I_1(G_1;f)+\mathcal{J}_3(G_1;\varphi)$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{-\alpha,\beta}\leqslant C(T)\left(|f|^{(\beta,\beta/q)}+|\varphi|^{1+\beta/q}\right). \tag{14}$$

Лемма 3 непосредственно следует из леммы 1, а лемма 2 из оценок потенциалов для G, аналогичных (9)—(12).

Доказательство теорем 1 и 2 проводится методом из [2, гл. IV]. Отрезок $\Omega=[a_1,a_2]$ разбивается на интервалы Ω_k, так что $\Omega\sum_{k=1}^{N}\Omega_k$. При этом отличие от [2] заключается в том, что в Ω_1, примыкающем к точке a_1, рассматриваются соответствующие начально-краевые модельные задачи вида (6) или (7), в Ω_N, содержащем точку a_2 — начально-краевые задачи для невырожденного уравнения, а в остальных Ω_K — задачи вида (6) или (7) с нулевым граничным условием, и это связано с вырождением уравнений (1), (2).

3. Оценки (9)—(12) в лемме 1 подобны оценкам потенциалов для невырожденного параболического уравнения [2] и основаны на оценках функции Грина $G(x, \varepsilon, t)$.

Лемма 4. Для функции $G(x, \xi, t)$ справедливы оценки

$$|D_t^r G(x,\xi,t)| \leqslant C(r,\gamma)\, t^{-1-r+1/q} e^{-\gamma(u-v)^2} \begin{cases} (uv)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & uv \geqslant 1, \\ (uv)^{2/q}, & 0 < uv < 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$|D_t^r D_x G(x,\xi,t)| \leqslant$$

$$\leqslant C(r,\gamma)\, x^{-1}(v+1)\, t^{-1-r+1/q} e^{-\gamma(u-v)^2} \begin{cases} (uv)^{1/q-1/2}, & uv \geqslant 1, \\ (uv)^{2/q}, & 0 < uv < 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $\gamma \in (0, 1)$, $r = 0, 1, 2$, $u = \xi^{q/2}/qt^{1/2}$, $v = x^{q/2}/qt^{1/2}$.

Доказательство леммы 4 основано на ассимптотических свойствах функции $I_{1/q}(2uv)$.

При доказательстве (9)—(12) с использованием леммы 4 возникает необходимость оценок интегралов:

$$\mathcal{J}_1(v) \equiv \int_{1/2v}^{\infty} u^{\alpha} e^{-\delta(u-v)^2} du, \quad \mathcal{J}_2(v) \equiv \int_0^{1/2v} u^{\alpha} e^{-\delta(u-v)^2} du.$$

Справедливы неравенства $(\alpha > -1)$:

$$\mathcal{J}_1(v) \leqslant C(\alpha,\delta) \begin{cases} v^{\alpha}, & v \geqslant 1, \\ e^{-\delta^2/16v^2} \leqslant v^{\alpha}, & v \leqslant 1, \end{cases} \tag{17}$$

$$\mathcal{J}_2(v) \leqslant C(\alpha,\delta) \begin{cases} e^{-\delta v^2}, & v \geqslant 1, \\ 1, & v \leqslant 1. \end{cases} \tag{18}$$

Приведем доказательство первого неравенства в (17). Производя в $\mathcal{J}_1(v)$ замену переменных $\zeta = u - v$, получаем при $v \geqslant 1$

$$\mathcal{J}_1(v) = \int_{-v+\frac{1}{2v}}^{\infty} e^{-\delta\zeta^2} (\zeta+v)^{\alpha} d\zeta \leqslant \int_{-v+1/2v}^{\infty} e^{-\frac{\delta\zeta^2}{2}} \max\left[(\zeta+v)^{\alpha} e^{-\frac{\delta\zeta^2}{2}}\right] d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-v+1/2v}^{\infty} e^{-\frac{\delta\zeta^2}{2}} [Cv^2]\, d\zeta \leqslant C_1 v^{\alpha}.$$

Остальные оценки в (17) и (18) аналогичны. Пользуясь теперь (17), (18), можно получить неравенства

$$\mathcal{J}(v) \equiv \int_0^{\infty} G_1(x,\xi,t)\, d\xi \leqslant C \min(1, v^{2/q}),$$

$$|vI'(v)| \leqslant C, \quad v = x^{q/2}/qt^{1/2}. \tag{19}$$

Из оценок в лемме 1 ограничимся, например, первым слагаемым в (9). При этом оценка второго слагаемого следует из уравнения для $\mathcal{J}_1$ (G_1; $f) \equiv w(x, t)$.

Нетрудно получить представление

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=\int_0^t d\tau\int_0^\infty G_{1t}(x,\xi,t-\tau)\,[f(\xi,\tau)-f(\xi,t)]\,d\xi+$$

$$+\int_0^\infty C_1(x,\xi,t)\,f(\xi,t)\,d\xi\equiv-w_1(x,t)+w_2(x,t).$$

Рассмотрим сначала функцию $w_1(x,t)$. Составим разность $(0<t<\bar t)$:

$$w_1(x,\bar t)-w_1(x,t)=\int_{2t-\bar t}^{\bar t} d\tau\int_0^\infty G_{1\bar t}(x,\xi,\bar t-\tau)\,[f(\xi,\bar t)-f(\xi,\tau)]\,d\xi-$$

$$-\int_{2t-\bar t}^{t} d\tau\int_0^\infty G_{1t}(x,\xi,t-\tau)\,[f(\xi,t)-f(\xi,\tau)]\,d\xi+\int_0^{2t-\bar t}\int_0^\infty [G_{1\bar t}(x,\xi,\bar t-\tau)-$$

$$-G_{1t}(x,\xi,t-\tau)]\,[f(\xi,t)-f(\xi,\tau)]\,d\xi d\tau+\int_0^{2t-\bar t} d\tau\int_0^\infty G_{1\bar t}(x,\xi,\bar t-\tau)\,[f(\xi,\bar t)-$$

$$-f(\xi,t)]\,d\xi=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Меняя порядок интегрирования в I_4 и пользуясь (19), находим, что $|I_4|\leqslant C\langle f\rangle_t^{(\beta/q)}(\bar t-t)^{\beta/q}$.

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются одинаково. Например, производя в I_2 замену

$$u=\xi^{q/2}/q(t-\tau)^{1/2},\quad v=x^{q/2}/q(t-\tau)^{1/2} \tag{20}$$

и используя (15), получаем

$$|I_2|\leqslant C(\gamma)\langle f\rangle_t^{(\beta/q)}x^{\beta}\Big[\int_{x^{q/2}/q(\bar t-t)^{1/2}}^{\infty} v^{-1+\frac{2-2\beta}{q}}dv\int_0^{1/v}u e^{-\gamma(u-v)^2}du+$$

$$+\int_{x^{q/2}/q(\bar t-t)^{1/2}}^{\infty} v^{-3/2+\frac{1-2\beta}{q}}du\int_{1/v}^{\infty}u^{1/2-1/q}e^{-\gamma(u-v)^2}du\Big].$$

Применяя к первому слагаемому неравенства (18), а ко второму (17) получаем

$$|I_2|\leqslant C\langle f\rangle_t^{(\beta/q)}(\bar t-t)^{\beta/q}. \tag{21}$$

Для I_3 из теоремы о среднем следует $(\Theta\in[t-\bar t])$

$$|I_3|\leqslant C\langle f\rangle_t^{(\beta/q)}(\bar t-t)\int_0^{2t-\bar t}d\tau\int_0^\infty|G_{1tt}(x,\xi,\Theta-\tau)\,(t-\tau)^{\beta/q}d\xi. \tag{22}$$

Если интервал интегрирования по τ в I_3 не пуст, то $\bar t-t<t$, следовательно, на этом интервале $t-\tau\leqslant\Theta-\tau\leqslant 2(t-\tau)$. Следовательно, $\exp[-\delta(x^{q/2}-\xi^{q/2})/q^2(\Theta-\tau)]\leqslant C\exp[-\delta_1(x^{q/2}-\xi^{q/2})/q^2(t-\tau)]$, и поэтому, используя в (22) неравенство (15) и замену (20), получаем

$$|I_3|\leqslant C(\gamma)\langle f\rangle_t^{(\beta/q)}(\bar t-t)\,x^{\beta-q}\Big[\int_{x^{q/2}/qt^{1/2}}^{x^{q/2}/q(\bar t-t)^{1/2}} v^{1/2+\frac{1-2\beta}{q}}\int_{1/v}^{\infty}u^{1/2-1/q}e^{-\gamma(u-v)^2}du+$$

$$+\int_{x^{q/2}/qt^{1/2}}^{x^{q/2}/q(\bar t-t)^{1/2}} v^{1+\frac{2-2\beta}{q}}dv\int_0^{1/v}u e^{-\gamma(u-v)^2}du\Big],$$

что с учетом (17), (18) дает $|I_3| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} \cdot (\bar{t}-t)^{\beta/q}$. Таким образом, доказана оценка $\langle w_1 \rangle_t^{(\beta/q)} \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)}$.

Переходя к получению оценки $\langle w_1 \rangle_x^{(\beta)}$ рассмотрим сначала случай, когда $\Delta x = \bar{x} - x > x$. Тогда

$$|w_1(\bar{x}, t) - w_1(x, t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_0^\infty [|G_{1t}(\bar{x}, \xi, t-\tau)| + G_{1t}(x, \xi, t-\tau)|] \times$$

$$\times |f(\xi, t) - f(\xi, \tau)| d\xi \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\bar{x}^\beta + x^\beta),$$

что следует из (15) после замены (20) и использования (17), (18). Поэтому, ввиду того что $\bar{x}/\Delta x = 1 + x/\Delta x \leqslant 2$,

$$|w_1(\bar{x}, t) - w_1(x, t)| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\Delta x)^\beta.$$

При $0 < \Delta x = \bar{x} - x < x$ имеем

$$w_1(\bar{x}, t) - w_1(x, t) = \int_{t-(\Delta x)^q}^t d\tau \int_0^\infty G_{1t}(\bar{x}, \xi, t-\tau) [f(\xi, t) - f(\xi, \tau)] d\xi -$$

$$- \int_{t-(\Delta x)^q}^t d\tau \int_0^\infty G_{1t}(x, \xi, t-\tau) [f(\xi, t) - f(\xi, \tau)] d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-(\Delta x)^q} d\tau \int_{|x^{q/2} - \xi^{q/2}| \leqslant 2|\Delta x|^{q/2}} G_{1t}(\bar{x}, \xi, t-\tau) [f(\xi, t) - f(\xi, \tau)] d\xi -$$

$$- \int_0^{t-(\Delta x)^q} d\tau \int_{|x^{q/2} - \xi^{q/2}| \leqslant 2(\Delta x)^{q/2}} G_{1t}(x, \xi, t-\tau) [f(\xi, t) - f(\xi, \tau)] d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-(\Delta x)^q} d\tau \int_{|x^{q/2} - \xi^{q/2}| > 2(\Delta x)^{q/2}} [G_{1t}(\bar{x}, \xi, t-\tau) - G_{1t}(x, \xi, t-\tau)] \times$$

$$\times [f(\xi, t) - f(\xi, \tau)] d\xi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

При этом аналогично доказательству оценки (21), получаем

$$|I_1| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\Delta x)^\beta, \quad |I_2| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\Delta x)^\beta.$$

Интегралы I_3, I_4 оцениваются одинаково. Рассмотрим, например, I_4:

$$|I_4| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} \operatorname{mes} \{\xi : |x^{q/2} - \varepsilon^{q/2}| \leqslant 2(\Delta x)^{q/2}\} \int_0^{t-(\Delta x)^q} (t-\tau)^{\beta/q} \max_\varepsilon |G_{1t}| d\tau.$$

Легко проверить, что

$$\operatorname{mes} \{\xi : |x^{q/2} - \xi^{q/2}| \leqslant 2(\Delta x)^{q/2}\} \leqslant C x^{1-q/2} (\Delta x)^{q/2}, \quad \max_\xi |G_{1t}| \leqslant$$

$\leqslant (t-\tau)^{-2+1/q-\frac{\alpha}{q}} \{v^{2/q}$ при $0 < v < 1$; $v^{-\alpha/q}$ при $v > 1\}$, $v = x^{q/2}/q(t-\tau)^{1/2}$. Поэтому, переходя в последнем интеграле от переменной τ к переменной v, получаем

$$|I_4| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{q/2} x^\beta \int_0^{x^{q/2}/q(\Delta x)^{q/2}} \left. \begin{cases} v^{-\frac{2\beta}{q}}, & v > 1 \\ v^{-1+\frac{4}{q}-\frac{2\beta}{q}}, & v < s \end{cases} \right\} dv \leqslant$$

$$\leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{q/2} x^\beta \int_0^{x^{q/2}/q(\Delta x)^{q/2}} v^{-2\beta/q} dv = C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\Delta x)^\beta.$$

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3.

Последний интеграл I_5 оценивается аналогично с применением теоремы о среднем, неравенств (16) — (18) и с учетом эквивалентности величин x, $\bar{x}$, $|x^{q/2} - \xi^{q/2}|$, $|\bar{x}^{q/2} - \xi^{q/2}|$ и $|\Theta^{q/2} - \xi^{q/2}|$, где $\Theta \in [x, \bar{x}]$. В результате получаем оценку $\langle w_1 \rangle_x^{(\beta)} \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)}$.

Рассмотрим теперь функцию $w_2(x, t)$. Оценим разность

$$w_2(x, \bar{t}) - w_2(x, t) = \int_0^\infty [G_1(x, \xi, \bar{t}) - G_1(x, \xi, t)] f(\xi, t) \, d\xi +$$

$$+ \int_0^\infty G_1(x, \xi, \bar{t}) [f(\xi, \bar{t}) - f(\xi, t)] \, d\xi = I_1 + I_2,$$

причем для I_2 вследствие (19) очевидна оценка

$$|I_2| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\bar{t} - t)^{\beta/q}.$$

Поскольку $f(x, t) \in \overset{0}{H}{}^{\beta/q}$, то при $\bar{t} - t \geqslant t$ в силу (19)

$$|I_1| \leqslant \int_0^\infty \{ |G_1(x, \xi, \bar{t})| + |G_1(x, \xi, t)| \} \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} t^{\beta/q} d\xi \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\bar{t} - t)^{\beta/q}.$$

Если $\bar{t} - t < t$, то вследствие теоремы о среднем

$$|I_1| \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\bar{t} - t)^{\beta/q} t \int_0^\infty |G_{1\theta}(x, \xi, \Theta)| \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\bar{t} - t)^{\beta/q} \int_0^\infty |\Theta G_{1\theta}(x, \xi, \Theta)| \, d\xi \leqslant c \langle f \rangle_t^{(\beta/q)} (\bar{t} - t)^{\beta/q},$$

где мы воспользовавшись тем, что в силу (15) функция $\Theta G_{1\theta}(x, \xi, \Theta)$ имеет такую же оценку, как и $G_1(x, \xi, \Theta)$, что позволяет воспользоваться (19). Тем самым доказано, что $\langle w_2 \rangle_t^{(\beta/q)} \leqslant C \langle f \rangle_t^{(\beta/q)}$.

Оценка константы Гельдера $\langle w_2 \rangle_x^{(\beta)}$ доказывается точно так, как и оценка (10), на которой мы здесь не останавливаемся ввиду ограниченности размеров статьи, но которая также основывается на использовании неравенств (15)—(19). Из этих неравенств следует оценки (11) и (12) в лемме 1.

1. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Мат. анализ, 1969.— М. : ВИНИТИ, 1971.— 252 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.

Ин-т прикл. математики
и механики АН УССР, Донецк

Получено 12.09.89