УДК 517.95

А. Е. Шишков

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ТИПА ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БЕСТИПНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специфические априорные оценки решений, аналогичные принципу Сен-Венана в теории упругости, играют важную роль (см. [1, 2] и имеющуюся там литературу) в качественной теории краевых задач для эллиптических и параболических уравнений, при изучении разрешимости граничных задач в неограниченных областях. В настоящей работе установлены оценки указанного типа для нового класса уравнений и на их основе получены интегральные и равномерные оценки сверху скорости убывания решений на бесконечности.

1. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$ — область (возможно и неограниченная) с границей $\partial\Omega$, гладкость которой такова, что в Ω справедлива формула интегрирования по частям (например, класса C^1). В цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается задача

$$Pu \equiv u_t - Au - Bu_t \equiv u_t - (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} - (b_{ij} u_{t x_i})_{x_j} = 0, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \tag{2}$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{3}$$

где непрерывно дифференцируемые в Q_T функции $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ удовлетворяют условиям

$$a_0 |\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant a_1 |\xi|^2 \ \forall \xi \in R^n, \ a_0 > 0, \ a_1 < \infty, \tag{4}$$

$$b_0 |\xi|^2 \leqslant b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant b_1 |\xi|^2 \ \forall \xi \in R^n, \ b_0 > 0, \ b_1 < \infty. \tag{5}$$

Оператор P при $A = \nu^{-1} B = \Delta$, $\nu > 0$ является старшей частью в системе Навье—Стокса—Фойгта [3]; в этом частном случае разрешимость задачи (1)—(3) исследовалась в [4].

Определим параметрическое семейство подобластей $Q_t(\tau) = \Omega(\tau) \times (0, t)$, $\Omega(\tau) = \Omega \cap \{x : |x| > \tau\}$. Геометрию области Ω будем характеризовать функцией $\lambda(\tau)$-основной частотой сечений $S(\tau) = \partial\Omega(\tau) \setminus \partial\Omega$:

$$\lambda_2^2 = \inf \Big(\int\limits_{S(\tau)} |\nabla_S v|^2 ds \Big) \Big(\int\limits_{S(\tau)} |v|^2 ds \Big)^{-1}, \quad \tau > 0,$$

где $\nabla_S v(x)$ — касательная к $S(\tau)$ в точке x составляющая вектора $\nabla v(x)$, а нижняя грань берется по всем непрерывно дифференцируемым в окрестности $S(\tau)$ функциям $v(x)$, обращающимся в нуль в окрестности $\partial\Omega$.

Рассмотрим произвольное обобщенное решение $u(x, t) \in W_2^{1,2}(Q_T)$ задачи (1) — (3) с $\varphi(x, t) = 0$ при $|x| > R > 0$. Зафиксируем постоянную $\mu > 0$. Введем функции $I_T(\tau) = \int\limits_{Q_T(\tau)} (\mu^2 u^2 + a_0 |\nabla_x u|^2) \eta(t)\, dx dt$,

$$J_T(\tau) = \int\limits_{Q_T(\tau)} (|u_t|^2 + b_0 |\nabla_x u_t|^2) \eta(t)\, d\ dt, \ \tilde{I}_T(\tau) = \mu^2 \int\limits_{Q_T(\tau)} |\nabla_x u|^2 \eta(t)\, dx dt,$$

где $\eta(t) = \exp(-2\mu^2 t)$.

Теорема 1. Существует функция $d(\tau) > 0$, допускающая при всех $\tau > R$ оценку

$$d(\tau) \leqslant \frac{d_1}{\Lambda(\tau) + \min(1, \mu)} \tag{6}$$

(здесь произвольная измеримая функция $\Lambda(\tau) : 0 \leqslant \Lambda(\tau) \leqslant \lambda(\tau)$, $d_1 < \infty$ зависит лишь от известных параметров), такая, что при произвольных $\tau_1, \tau_2 : R \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \infty$ имеет место априорная оценка

$$I_T(\tau_2) + J_T(\tau_2) \leqslant (I_T(\tau_1) + J_T(\tau_1)) \exp\Big(-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (d(s))^{-1} ds \Big). \tag{7}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $v(x, t) = u(x, t)\, \eta(t)$ и проинтегрируем по области $Q_T(\tau)$, $\tau > R$, получим после простых преобразований и оценок

$$I_T(\tau) + b_0 \tilde{I}_T(\tau) + 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} (u^2 + b_0 |\nabla_x u|^2) \eta dx \leqslant -\frac{a_1}{a_0^{1/2} (\mu^2 + a_0 \Lambda^2(\tau))^{1/2*}},$$

$$I_T'(\tau) + \frac{b_1}{b_0^{1/2} (\mu^2 + a_0 \Lambda^2(\tau))^{1/2}} (-\tilde{I}_T'(\tau))^{1/2} (-J_T'(\tau))^{1/2}. \tag{8}$$

Умножив уравнение (1) на $v_1(x, t) = u_t \eta(t)$ и проинтегрировав по $Q_T(\tau)$, получим

$$J_T(\tau) + a_0 \tilde{I}_T(\tau) + 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} a_0 |\nabla_x u|^2 \eta(T)\, dx \leqslant = -\frac{b_1}{b_0^{1/2} (1 + b_0 \Lambda^2(\tau))^{1/2*}},$$

$$J_T'(\tau) + \frac{a_1}{a_0^{1/2}(1+b_0\Lambda^2(\tau))^{1/2}}(-I_T')^{1/2}(-J_T')^{1/2}. \qquad (9)$$

При выводе неравенств (8), (9) использованы соотношения

$$I_T'(\tau) \equiv \frac{dI_T(\tau)}{d\tau} = \int\limits_{S_T(\tau)} (\mu^2 u^2 + a_0 |\nabla_x u|^2)\,\eta(t)\,dsdt,$$

$$\frac{dJ_T(\tau)}{d\tau} \equiv J_T'(\tau) = -\int\limits_{S_T(\tau)} (|\nabla_x u_t|^2 b_0 + |u_t|^2)\,\eta(t)\,dsdt,$$

а также вытекающее из определения $\lambda(\tau)$, $\Lambda(\tau)$ неравенство

$$\int\limits_{S_T(\tau)} u^2 dsdt \leqslant \Lambda^{-2}(\tau) \int\limits_{S_T(\tau)} |\nabla_x u|^2\,dsdt, \quad \tau > R. \qquad (10)$$

Сложив теперь неравенства (8) и (9), получим, применяя неравенства Юнга:

$$I_T(\tau) + J_T(\tau) + 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} (u^2 + (a_0+b_0)|\nabla_x u|^2)\,\eta dx \leqslant -d(\tau)(I_T'(\tau) + J_T'(\tau)), \qquad (11)$$

$$d(\tau) = \frac{a_1 b_0^{1/2}(1+b_0\Lambda^2)^{1/2} + b_1 a_0^{1/2}(\mu^2 + a_0\Lambda^2)^{1/2} + 2(a_1^2 b_0 + a_0 b_1^2) \times (1 + b_0\Lambda^2 + \mu^2 + a_0\Lambda^2)^{1/2}}{2a_0^{1/2} b_0^{1/2}(\mu^2 + a_0\Lambda^2)^{1/2}(1+b_0\Lambda^2)^{1/2}}.$$

Интегрирование неравенства (11), предварительно умноженного на $(d(\tau))^{-1}\exp\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau}(d(s))^{-1}ds\right)$, в пределах (τ_1, τ_2) приводит к (7).

2. Для решений задачи (1)—(3), имеющих большую гладкость, чем в п. 1, можно устанавливать интегральные оценки указанного выше типа для производных высокого порядка. При этом существенную роль играют неравенства коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов. Итак, пусть $u(x,t) \in \mathring{W}_2^3(Q_T)$ — решение задачи (1) — (3), где $\varphi(x,t) = 0$ $\forall x: |x| > R$. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x) \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$, $0 < \nu < 1$. Теперь о гладкости $\partial\Omega$.

Существует локально конечное покрытие области Ω шарами $B_h(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, с центрами в точках x_i и фиксированного радиуса $h > 0$, такое, что $\Omega_i = \Omega \cap B_h(x_i)$ равномерно по i $C^{2,\nu}$ диффеоморфны либо $B_h(0)$, либо $B_h^+(0) = \{x_n > 0\} \cap B_h(0)$. Введем упрощающее выкладки допущение о структуре геометрии $\partial\Omega$:

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda(\tau) \leqslant \lambda_1 < \infty \quad \forall \tau > R. \qquad (12)$$

Зафиксируем $r > 0$ и введем семейство срезающих функций $\zeta_\tau(s) \equiv \equiv \zeta\left(\frac{s-\tau}{r}\right)$, где $\zeta(s)$ — C^2 — гладкая функция, удовлетворяющая соотношениям $\zeta(s) = 0$ при $s \leqslant 0$, $\zeta(s) = 1$ при $s \geqslant 1$, $0 < \zeta(s) < 1$ при $0<s<1$; $\max\limits_s \zeta^{(j)}(s) \leqslant d_2 < \infty$, $j = 1, 2$. Умножим уравнение (1) на $v(x,t) = -\zeta_\tau(|x|)(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau)$, $k > 0$, и проинтегрируем по области $Q_T(\tau)$:

$$\int\limits_{Q_T(\tau)} \Big[\frac{\partial(u\zeta_\tau)}{\partial t}(ku\zeta_\tau - B(u\zeta_\tau)) + \zeta_\tau Au(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau) +$$

$$+ \zeta_\tau Bu_t(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau)\Big]\,dxdt \equiv \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 0. \qquad (13)$$

В силу начального условия (2) и непрерывности вложения $W_2^3(Q_T) \to \to W_2^2(\Omega_0)$ имеем

$$\mathrm{I} = 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} [b_{ij}(u\zeta_\tau)_{x_i}(u\zeta_\tau)_{x_j} + k(u\zeta_\tau)^2]\, dx \geqslant 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} [b_0 |\nabla_x(u\zeta_\tau)|^2 + + k(u\zeta_\tau)^2]\, dx. \quad \mathrm{II} = \int\limits_{Q_T(\tau)} A(u\zeta_\tau)(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau)\, dx + + \int\limits_{Q_T(\tau)} (\zeta_\tau Au - A(u\zeta_\tau))(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau)\, dxdt = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2.$$

В силу неравенства коэрцитивности для пары линейных эллиптических операторов в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ [5, 6]

$$\mathrm{II}_1 \geqslant \int\limits_{Q_T(\tau)} [c_0 |\nabla_x^2(u\zeta_\tau)|^2 - c_1(u\zeta_\tau)^2 + ka_0 |\nabla_x(u\zeta_\tau)|^2]\, dxdt, \tag{14}$$

где $c_0 > 0$, $c_1 < \infty$ — постоянные, зависящие лишь от известных (в том числе и от h) параметров. В силу (10) и (12)

$$\mathrm{II}_2 \leqslant \Bigg(\int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\zeta_\tau Au - A(u\zeta_\tau)|^2\, dxdt\Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} [|B(u\zeta_\tau)|^2 + + k^2 |u\zeta_\tau|^2]\, dxdt\Bigg)^{1/2} \leqslant k_1 a_2 (\lambda_0^{-1} \max |\zeta_\tau''| + (1 + \lambda_0^{-1}) \max |\zeta_\tau'|) \times \times \Bigg(\int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x u|^2\, dxdt\Bigg)^{1/2} b_2 [(1 + (1 + \lambda_0^{-2}) \max |\zeta_\tau'|^2 + \lambda_0^{-2} \max |\zeta_\tau''|^2 + + b_0^{-2}\lambda_0^{-2}k^2) \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x u|^2\, dx + \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x^2 x|^2\, dx\Bigg]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x u|^2\, dxdt + c_4 \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x^2 u|^2\, dxdt; \tag{15}$$

$$a_2 = \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{C^1(\Omega)}, \quad c_3 = \frac{k_1 a_2 d_2}{r} (\lambda_0^{-1} r^{-1} + (1 + \lambda_0^{-1})) \times \times b_2 (3/2 + (1 + \lambda_0^{-1}))\, d_2 r^{-1} + \lambda_0^{-1} d_2 r^{-2} + b_2^{-1}\lambda_0^{-1} k),$$

$$c_4 = \frac{k_1 a_2 d_2}{2r} (\lambda_0^{-1} r^{-1} + (1 + \lambda_0^{-1})), \quad b_2 = \max \|b_{ij}\|_{C^1(\Omega)},$$

k_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — здесь и в дальнейшем постоянные, зависящие лишь от n. Далее имеем

$$\mathrm{III} = \int\limits_{Q_T(\tau)} B(u_t\zeta_\tau)(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau)\, dxdt + \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} (\zeta_\tau Bu_t - - B(u_t\zeta_\tau))(B(u\zeta_\tau) - ku\zeta_\tau)\, dxdt = \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2, \quad \mathrm{III}_1 = 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} [|B(u\zeta_\tau)|^2 + + kb_{ij}(u\zeta_\tau)_{x_i}(u\zeta_\tau)_{x_j}]\, dx \geqslant 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} [kb_0 |\nabla_x(u\zeta_\tau)|^2 + |B(u\zeta_\tau)|^2]\, dx. \tag{16}$$

III_2 оцениваем по аналогии с II_2:

$$\mathrm{III}_2 \leqslant c_5 \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x u_t|^2\, dxdt + c_6 \int\limits_{Q_T(\tau) \setminus Q_T(\tau+r)} |\Delta_x^2 u|^2\, dxdt + c_7 \times$$

$$\times \int\limits_{Q_T(\tau)\setminus Q_T(\tau+r)} |\nabla_x u|^2\, dxdt, \quad c_5 = \frac{k_1 b_2 d_2}{2r}(\lambda_0^{-1} r^{-1} + (1+\lambda_0^{-1}))\, b_2 (2 +$$

$$+ (1+\lambda_0^{-1})\, d_2 r^{-1} + \lambda_0^{-1} d_2 r^{-2} + b_2^{-1}\lambda_0^{-1} k), \quad c_6 = a_2^{-1} c_4 b_2, \quad c_7 = (2r)^{-1} k_1 b_2^2 \times$$

$$\times (\lambda_0^{-1} r^{-1} + (1+\lambda_0^{-1}))\,(1 + (1+\lambda_0^{-1})\, d_2 r^{-1} + \lambda_0^{-1} d_2 r^{-2} + b_2^{-1}\lambda_0^{-1} k)\,. \quad (17)$$

Объединяя (14) — (17), получаем

$$\int\limits_{Q_T(\tau+r)} [c_0 |\nabla_x^2 u|^2 + (ka_0 - c_1\lambda_0^{-1})\, |\nabla_x u|^2]\, dxdt + 2^{-1} \int\limits_{Q_T(\tau)} [|B(u\zeta_\tau)|^2 +$$

$$+ (1+k)\, b_0 |\nabla_x (u\zeta_\tau)|^2 + k\, u\zeta_\tau)^2]\, dx \leqslant \int\limits_{Q_T(\tau)\setminus Q_T(\tau+r)} [(c_3 + c_7)\, |\nabla_x u|^2 +$$

$$+ (c_4 + c_6)\, |\nabla_x^2 u|^2 + c_5 |\nabla_x u_t|^2]\, dxdt. \quad (18)$$

Теперь умножим уравнение (1) на $v(x, t) = -\zeta_\tau(|x|)\,(A(u_t\zeta_\tau) - ku_t\zeta_\tau(|x|)$ и снова проинтегрируем по $Q_T(\tau)$, получим

$$\int\limits_{Q_T(\tau)} [(u\zeta_\tau)_t\, (k(u\zeta_\tau)_t - A(u_t\zeta_\tau) + \zeta_\tau Au\, (A(u_t\zeta_\tau) - ku_t\zeta_\tau) +$$

$$+ \zeta_\tau Bu_t\, (A(u_t\zeta_\tau) - ku_t\zeta_\tau)]\, dxdt = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 0.$$

Проводя вычисления, аналогичные проводимым при оценке слагаемых равенства (13), получаем из последнего соотношения

$$\int\limits_{Q_T(\tau)} [c_0 |\nabla_x^2 (u\zeta_\tau)|^2 + k(u_t\zeta_\tau)^2 + (kb_0 - c_1\lambda_0^{-1})\, |\nabla_x u_t|^2\, dxdt +$$

$$+ 2^{-1} \int\limits_{Q_T(\tau)} [(1+k)\, a_0 |\nabla_x (u\zeta_\tau)|^2 + |A(u\zeta_\tau)|^2]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T(\tau)\setminus Q_T(\tau+r)} [(c_3 + \tilde{c}_7)\, |\nabla_x u_t|^2 + (c_4 + \tilde{c}_6)\, |\nabla_x^2 u_t|^2 + \tilde{c}_5 |\nabla_x u|^2]\, dxdt, \quad (19)$$

где

$$\tilde{c}_5 = c_5 a_2^2 b_2^{-2}; \quad \tilde{c}_6 = c_4 a_2 b_2^{-1}; \quad \tilde{c}_7 = c_7 a_2^2 b_2^{-2}.$$

Зафиксируем теперь k так, чтобы выполнялось неравенство

$$\min(ka_0 - c_1\lambda_0^{-1}, kb_0 - c_1\lambda_0^{-1}) \geqslant c_0, \quad (20)$$

и после этого сложим неравенства (18) и (19):

$$c_0 \int\limits_{Q_T(\tau+r)} (|\nabla_x^2 u|^2 + |\nabla_x^2 u_t|^2 + |\nabla_x u|^2 + |\nabla_x u_t|^2\, dxdt + 2^{-1} \int\limits_{\Omega_T(\tau)} [|B(u\zeta_\tau)|^2 +$$

$$+ |A(u\zeta_\tau)|^2 + (1+k)(a_0 + b_0)\, |\nabla_x (u\zeta_\tau)|^2 + k(u\zeta_\tau)^2]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_8 \int\limits_{Q_T(\tau)/Q_T(\tau+r)} [|\nabla_x^2 u|^2 + |\nabla_x u|^2 + |\nabla_x u_t|^2 + |\nabla_x^2 u_t|^2)\, dxdt, \quad (21)$$

где $c_8 = \max(c_3 + c_7 + \tilde{c}_5, c_4 + c_6, c_5 + c_3 + \tilde{c}_7, c_4 + \tilde{c}_6)$. Из (21), в частности, следует соотношение

$$J_T(\tau + r) \equiv \int\limits_{Q_T(\tau+r)} (|\nabla_x^2 u|^2 + |\nabla_x^2 u_t|^2 + |\nabla_x u^2|\, \nabla_x u_t|^2)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_8}{c_0}(J_T(\tau) - J_T(\tau + r)),$$

или

$$J_T(\tau + r) \leqslant \theta J_T(\tau), \ \theta = c_8 (c_0 + c_8)^{-1} < 1 \quad \forall \, \tau > R. \tag{22}$$

Из (22) вытекает, что справедлива

Теорема 2. Пусть $u(x, t) \in W_2^3(Q_T)$ — обобщенное решение задачи (1)—(3) с $\varphi(x, t) = 0$ при $|x| > R$ и выполнены все предположения п. 2. Тогда для любого $r > 0$ существует постоянная $\theta(r) < 1$, зависящая также и от других известных параметров, такая, что $\forall \tau_1, \tau_2$: $R < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ имеет место априорная оценка

$$J_T(\tau_2) \leqslant \theta^{-1} J_T(\tau_1) \exp\left(-\frac{\ln \theta^{-1}}{r}(\tau_2 - \tau_1)\right). \tag{23}$$

Замечание 1. Анализируя зависимость θ от r, находим оптимальное значение r^*, доставляющее максимум функции $r^{-1} \ln(\theta(r))^{-1}$. При $r = r^*$ оценка (23) становится наилучшей возможной.

3. Рассмотрим еще более «гладкую» ситуацию, т. е. для некоторого натурального $l > 0$ $a_{ij}(x), \ b_{ij}(x) \in C^{1+l,\nu}(\Omega)$. Подобласти Ω_i покрытия, описанного в п. 2, равномерно $C^{2+l,\nu}$ диффеоморфны соответствующим модельным областям, решение $u(x, t)$ задачи (1) — (3) принадлежит пространству $W_2^{3+l}(Q_T)$.

Для рассматриваемой области Ω, как следует из [7], можно найти семейство функций $c_{\alpha,\beta}(x) \in C^{l,\nu}(\bar{\Omega}) \ (|\alpha|, |\beta| \leqslant l)$ таких, что

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} \ \forall \, \alpha, \beta;$$

$$C_0 \|u\|_{W_2^l(\Omega)} \leqslant [u, u]_l = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \int_\Omega c_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \cdot D^\beta u dx \leqslant C_1 \|u\|_{W_2^l(\Omega)};$$

$$\forall \, u \in W_2^{2+l}(\Omega); \ C_0 > 0, \ C_1 < \infty$$

— не зависящие от $u(x)$ постоянные, и выполняется неравенство коэрцитивности

$$\nu_0 \|u\|_{W_2^{l+2}(\Omega)} - \nu_1 \|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant [Au, Bu]_l \ \forall \, u(x) \in$$

$$\in W_2^{2+l}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega); \ 0 < \nu_0, \ \nu_1 < \infty \tag{24}$$

— зависят лишь от известных параметров (в том числе C_0, C_1). Пусть теперь срезающая функция $\zeta(s) \in C^{l+2}(R^1)$ обладает теми свойствами, что и ранее, а $\zeta_\tau(|x|) = \zeta\left(\frac{|x| - \tau}{r}\right)$. В силу уравнения (1) справедливы равенства

$$-[\zeta_\tau(u_t - Au - Bu_t), B(u\zeta_\tau)]_l + k(\zeta_\tau(u_t - Au - Bu_t), \zeta_\tau u)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$-[\zeta_\tau(u_t - Au - Bu_t), A(u_t\zeta_\tau)]_l + k(\zeta_\tau(u_t - Au_t - Bu_t), \zeta_\tau u_t)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Из этих неравенств аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2, выводится соотношение

$$\nu_0 I_T(\tau + r) + 2^{-1}[B(u\zeta_\tau), B(u\zeta_\tau)]_{l, \Omega_T(\tau)} + 2^{-1}[A(u\zeta_\tau), B(u\zeta_\tau)]_{l, \Omega_T(\tau)} +$$

$$+ k\|u\zeta_\tau\|^2_{L_2(\Omega_T(\tau))} \leqslant c_9(I_T(\tau) - I_T(\tau + r)), \quad \tau > R, \tag{25}$$

где

$$I_T(\tau) = \int_{Q_T(\tau)} (|\nabla_x u|^2 + |\nabla_x u_t|^2 + |\nabla_x^{2+l} u|^2 + |\nabla_x^{l+2} u|^2) \, dx dt.$$

При выводе (25) дополнительно по сравнению с теоремой 2 для оценки сверху членов вида $\int_{Q_T(\tau)} |\nabla_x^j u|^2 \, dx dt$, $1 < j \leqslant l + 1$ используется интерполяционное неравенство

$$\int_\Omega |\nabla^l u|^2 dx \leqslant \varepsilon \int_\Omega |\nabla^{l+2} u|^2 dx + c(\varepsilon) \int_\Omega u^2 dx \quad \forall \, \varepsilon > 0.$$

Из (25) вытекает

Теорема 3. В предположениях и обозначениях п. 3 для любого $r > 0$ существует постоянная θ: $0 < \theta < 1$ такая, что справедлива априорная оценка

$$I_T(\tau) \leqslant \theta^{-1} I_T(\tau_0) \exp\left(-\frac{\ln \theta_1^{-1}}{r}(\tau-\tau_0)\right) \forall\, \tau > \tau_0 > R. \qquad (26)$$

Замечание 2. Из интегральных оценок (23), (26) решений задачи (1) — (3) по областям $Q_T(\tau)$ в силу соотношений (21), (25) следуют интегральные оценки по областям $\Omega_T(\tau)$. Так, (26) и (25) дают

$$\|\nabla_x^{l+2} u\|_{W_2^{2+l}(\Omega_T(\tau+r))} \leqslant c_{10} I_T(\tau_0) \exp\left(-\frac{\ln \theta_1^{-1}}{r}(\tau-\tau_0)\right).$$

Отсюда в силу теоремы вложения Соболева следует равномерная оценка

$$\|u\|_{C^{l+2-\frac{n}{2}}(\Omega_T(\tau+r))} \leqslant c_{11} I_T(\tau_0) \exp\left(-\frac{\ln \theta_1^{-1}}{r}(\tau-\tau_0)\right).$$

Замечание 3, По той же схеме, что и в пп. 1—3 можно получать оценки скорости убывания решений первой начально-краевой задачи для уравнения вида (1) с эллиптическими операторами высокого порядка $A = (-1)^{m-1} D^\alpha a_{\alpha\beta} D^\beta$, $B = (-1)^{m-1} D^\alpha b_{\alpha\beta} D^\beta$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant m)$. При этом для справедливости оценок п. 2 — 3 достаточна коэрцитивность билинейной формы $(Au, Bv)_{L_2(\Omega)}$ в пространстве $W_2^{2m}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (которая, как показано в [8], имеет место не для любых пар операторов A, B). Остается открытым вопрос о необходимости такой коэрцитивности для справедливости оценок указанного типа.

Замечание 4. За счет некоторого технического усложнения можно дополнить не зависящие от T оценки п. 2—3 зависящими от времени оценками, аналогичными оценкам п. 1.

1. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**, № 5.— С. 7—76.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье — Стокса, имеющих неограниченный интеграл энергии // Зап. науч. семинара ЛОМИ.— 1980.— **96**.— С. 117—160.
3. *Осколков А. П.* К теории жидкости Фойгта // Там же.— С. 233—236.
4. *Сувейко И. В.* Об асимптотическом поведении решения смешанной задачи // Исслед. по дифференц. уравнениям.— 1983.— Вып. 73.— С. 89—100.
5. *Ладыженская О. А.* Об интегральных оценках сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов // Вестн. ЛГУ.— 1958. — 7, № 2.— С. 60—69.
6. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях с операторами, образующими острый угол // Докл. АН СССР.— 1957.— **116**, № 5.— С. 754—757.
7. *Скрыпник И. В., Шишков А. Е.* О коэрцитивности билинейной формы, порожденной парой эллиптических операторов в пространстве $W_2^k(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ // Мат. физика.— 1978.— Вып. 24.— С. 111—115.
8. *Скрыпник И. В.* О неравенстве коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1978.— **239**, № 2.— С. 275—278.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 20.10.87