УДК 517.5

©2009. **Р.Р. Салимов, Е.С. Смоловая**

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ

В данной статье для кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ установлен порядок роста на бесконечности.

Введение. Ввиду того, что емкости и модули являются основным геометрическим методом в современной теории отображений, следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио, см., напр., [10]. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : G \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : G \to \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^n(x)\ dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ семейства Γ. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля, см., напр., [4]. Целью теории Q-гомеоморфизмов является установление взаимосвязей между различными свойствами мажоранты Q и самого отображения f.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in adm\, \Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \ \geq \ 1 \tag{2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\, \Gamma} \int\limits_G \rho^n(x)\, dm(x)\, , \tag{3}$$

где m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Проблемы локального и граничного поведения Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ изучались в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работах [8]–[11], $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работах [1], [12]–[14]. В работе [15] установлено свойство ACL для Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ при $Q \in L^1_{loc}(G)$. Также показана принадлежность таких Q-гомеоморфизмов соболевскому классу $\mathrm{W}^{1,1}_{loc}$ и дифференцируемость п.в. Эти результаты были перенесены на кольцевые Q-гомеоморфизмы в работе [16]. В данной работе для кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ устанавливается порядок роста на бесконечности.

Пусть G и G' – области в $\overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 2$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in G$,* если

$$M(\triangle(f\mathrm{S}_1,\, f\mathrm{S}_2,\, G')) \leq \int\limits_A Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\; dm(x) \tag{4}$$

выполняется для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = dist(x_0, \partial G)$, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\; dr \;\geq\; 1. \tag{5}$$

Следуя работе [6], пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. E называем *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если B – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области G, если $A \subset G$. Очевидно, что если $f : G \to \mathbb{R}^n$ – открытое отображение и $E = (A, C)$ – конденсатор в G, то $(fA,\, fC)$ также конденсатор в fG. Далее $fE = (fA,\, fC)$.

Пусть $E = (A,\, C)$ – конденсатор. $W_0(E) = W_0(A,\, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to R^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$, и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n}\, (\partial_i u)^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Величину

$$cap\, E \;=\; cap\; (A,\, C) \;=\; \inf_{u\, \in\, W_0(E)}\; \int\limits_A \; |\nabla u|^n\; dm \tag{7}$$

называют *ёмкостью* конденсатора E. Известно, что

$$(cap\; E)^{n-1} \;\geq\; b_n\, \frac{d(C)^n}{m(A)}\;, \tag{8}$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C, $m(A)$ – мера Лебега множества A, b_n – положительная константа, зависящая только от размерности n, см. Лемму 5.9 в [6] и

$$cap\; E = M(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C))\,, \tag{9}$$

где, для множеств S_1, S_2 и S_3 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Delta(S_1, S_2; S_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих S_1 и S_2 в S_3, см. [2], [3] и [19].

Известно, что

$$cap\; E \geq \frac{(\inf m_{n-1}\, S)^n}{[m(A \setminus C)]^{n-1}}, \tag{10}$$

где $m_{n-1}\, S$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^{∞} – многообразия S, являющегося границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким S, см. предложение 5 из [5].

Из (10) следует, что

$$\inf m_{n-1} S \geq \left[m(A \setminus C)\right]^{\frac{n-1}{n}} (cap\, E)^{\frac{1}{n}}. \tag{11}$$

Применяя изопериметрическое неравенство, получаем

$$cap\, E \geq n^n \Omega_n \left[\frac{m(C)}{m(A \setminus C)}\right]^{n-1}. \tag{12}$$

В дальнейшем, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$.

Для доказательства основного результата нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– кольцевой* Q*-гомеоморфизм в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R < \infty$, *тогда*

$$m(fB(x_0, r)) \leq m(fB(x_0, R)) \cdot \exp\left\{-n \int\limits_r^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}, \tag{13}$$

где $q_{x_0}(t) = \frac{1}{w_{n-1} \cdot t^{n-1}} \cdot \int\limits_{|x-x_0|=t} Q(x) ds.$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t(x_0) = \{x : t < |x - x_0| < t + \triangle t\}$. Пусть $C_t = \overline{B(x_0, t)}, A_{t+\triangle t} = B(x_0, t + \triangle t)$, имеем конденсатор $(A_{t+\triangle t}, C_t)$, тогда $(fA_{t+\triangle t}, fC_t)$ – кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$ согласно (9)

$$cap(fA_{t+\triangle t}, fC_t) = M(\triangle(\partial f A_{t+\triangle t}, \partial f C_t; fR_t(x_0)))\,. \tag{14}$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного гомеоморфизма f следующим образом $\Phi(t) = m(fB(x_0, t))$. В силу неравенства (12), получим

$$cap(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \geq n^n \Omega_n \left[\frac{m(fC_t)}{m(fA_{t+\triangle t} \setminus fC_t)}\right]^{n-1}. \tag{15}$$

По критерию кольцевого Q-гомеоморфизма, см., напр., [9] с.137, имеем

$$cap(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \leq \frac{w_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}\right)^{n-1}}. \tag{16}$$

Следовательно,

$$n^n \Omega_n \left[\frac{m(fC_t)}{m(fA_{t+\triangle t} \setminus fC_t)}\right]^{n-1} \leq \frac{w_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}\right)^{n-1}}. \tag{17}$$

Обозначая, через $\Phi(t) = m(f(x_0, t))$, имеем

$$n \frac{\Phi(t)}{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)} \leq \frac{1}{\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}}. \tag{18}$$

Разделив обе части на Δt, получим

$$n\frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\frac{ds}{sq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}\leq\frac{1}{\Phi(t)}\cdot\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}. \tag{19}$$

Устремляя Δt к нулю, имеем для п.в. t

$$n\frac{1}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\leq\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{20}$$

Интегрируя обе части неравенства (20) по $t\in[r,R]$, получим

$$n\int\limits_{r}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\leq\ln\frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}. \tag{21}$$

И, следовательно, имеем

$$\exp\left\{n\int\limits_{r}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}\leq\frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}, \tag{22}$$

Наконец, обозначая $\Phi(r)=m(fB(x_0,r))$ и $\Phi(R)=m(fB(x_0,R))$, получим оценку

$$m(fB(x_0,r))\leq m(fB(x_0,R))\cdot\exp\left\{-n\int\limits_{r}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}. \tag{23}$$

1. О поведении на бесконечности кольцевых Q-гомеоморфизмов. Формулируемая ниже теорема представляет собой аналог известной теоремы Лиувилля о несуществовании отличной от константы, ограниченной во всей плоскости аналитической функции. Для квазирегулярных отображений данное утверждение получено в работе [7]. Аналогичные вопросы для кольцевых Q-отображений исследовались в работах [17], [18].

Теорема 1. *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0\in\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty}\ L(x_0,f,R)\cdot\exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}>0, \tag{24}$$

где

$$L(x_0,f,R)=\sup_{|x-x_0|\leq R}|f(x)-f(x_0)|$$

и r_0 – произвольное положительное число.

Доказательство. Замечая, что $m(fB(x_0,R)) \le \Omega_n \cdot L^n(x_0,f,R)$, из леммы 1 получаем

$$m(fB(x_0,r_0)) \le \Omega_n \cdot L^n(x_0,f,R) \cdot \exp\left\{-n\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}. \qquad (25)$$

Очевидно, что $m(fB(x_0,r_0)) > 0$ и от R никак не зависит. Переходя к нижнему пределу в (25), при $R \to \infty$, получаем (24).

1. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ukrainian Math. Bull. – 2005. – V.2, №3. – P.403-424.
2. *Gering F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications // V.2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
3. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – 13. – P.131-144.
4. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.
5. *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – Т.130, №2. – С.185-206.
6. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – 448. – 40pp.
7. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. Math. – 1970. – 465. – 13pp.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – V.93. – P.215-236.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer, New York, 2009.
10. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On $Q-$homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – V.30. – P.49-69.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* $Q-$homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – V.364. – P.193-203.
12. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory // Ukrainian Math. Bull. – 2007. – V.4, №2. – P.199-234.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – V.96. – P.117-150.
14. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukrainian Math. Bull. – 2007. – T.4, №1. – P.79-115.
15. *Салимов Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем., 2008, 72:5. – С.141-148.
16. *Салимов Р., Севостьянов Е.* ACL и дифференцируемость почти всюду кольцевых гомеоморфизмов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т.16. – С.171-178.
17. *Севостьянов Е.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Український математичний вісник. – 2008. – Т.5, №3. – С.366-381.
18. *Севостьянов Е.* Устранение особенностей и аналоги теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.61, №1. – С.116-126.
19. *Shlyk V.A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – V.34, №6. – P.216-221; transl. in Siberian Math. J. – 1993. – V.34, №6. – P.1196-1200.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
salimov@iamm.ac.donetsk.ua
smolovayaes@yandex.ru

Получено 10.11.09